الجامعة الافتراضية السورية
SYRIAN VIRTUAL UNIVERSITY

إشارات ونظم

الدكتور عبد الناصر العاسمي

ISSN: 2617-989X

Books & Refrences

إشارات ونظم

الدكتور عبد الناصر العاسمي

من منشورات الجامعة الافتراضية السورية

الجمهورية العربية السورية 2020

Signals and Systems

Dr. Abdelnasser Assimi

Publications of the Syrian Virtual University (SVU)

Syrian Arab Republic, 2020

الفهرس

الإشارات والنظم، تصنيفها وتمثيلها

الكلمات المفتاحية:

الإشارات والنظم المستمرة، الإشارات والنظم المتقطعة، الاستطاعة، الطاقة، النظم الخطية، النظم الغير متغيرة مع الزمن، السببية، الاستقرار.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى تعريف مفهوم الإشارات وتصنيفها وطرق تمثيلها والخواص الأساسية للإشارات. ويشمل ذلك كلاً من الإشارات المستمرة المستخدمة في النظم التماثلية والإشارات المتقطعة المستخدمة في نظم المعالجة الرقمية. حيث سنقوم بالتعرف على بعض الخواص والعمليات الأساسية على الإشارات ومفهوم الطاقة والاستطاعة. كما سنبين في هذا الفصل أيضاً مفهوم النظم وتصنيفها وذلك تبعاً لنوعية الإشارات التي تتعامل معها هذه النظم وخواصها الأساسية.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- تصنيف وتمثيل الإشارات.
- الخواص الأساسية للإشارات.
- مفهوم النظم وتصنيفها.
- الخواص الأساسية للنظم.

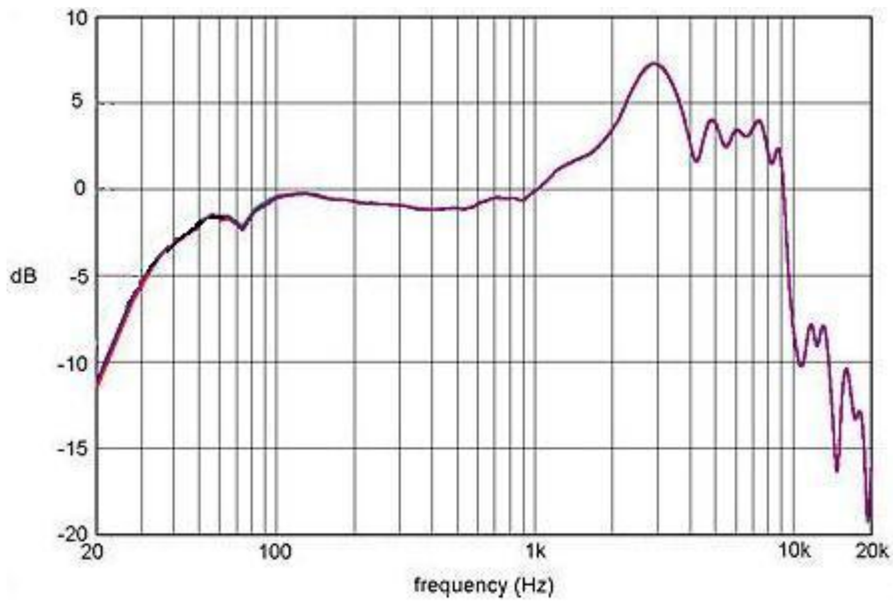
يهدف هذا الفصل إلى تعريف مفهوم الإشارات وتصنيفها وطرق تمثيلها والخواص الأساسية للإشارات. ويشمل ذلك كلاً من الإشارات المستمرة المستخدمة في النظم التماثلية والإشارات المتقطعة المستخدمة في نظم المعالجة الرقمية. حيث سنقوم بالتعرف على بعض الخواص والعمليات الأساسية على الإشارات ومفهوم الطاقة والاستطاعة. كما سنبين في هذا الفصل أيضاً مفهوم النظم وتصنيفها وذلك تبعاً لنوعية الإشارات التي تتعامل معها هذه النظم وخواصها الأساسية.

1. مقدمة (Introduction)

يرتبط مفهوم الإشارات والنظم عادةً مع مواضيع معالجة الإشارة في تطبيقات الاتصالات والتحكم والهندسة الكهربائية. إلا أن لهذا المفهوم مجالاً واسع جداً من التطبيقات قد يمتد إلى الاقتصاد والإدارة والفيزياء والميكانيك والبيولوجيا وغيرها الكثير من التطبيقات. حيث يمكن اعتبار أي شي محسوس من حولنا أو أي ظاهرة فيزيائية قابلة للقياس إشارة. كما يمكن اعتبار أي شيء من حولنا يتعامل مع هذه الإشارات نظاماً. فالصوت على سبيل المثال يعتبر إشارة تعبر عن مقدار تغيرات اهتزاز المادة مع الزمن. كما يمكن اعتبار الأذن البشرية نظاماً يقوم بتحويل هذه إشارة الصوت إلى إشارات كهربائية تنقلها الأعصاب إلى الدماغ.

الشكل 1-Error! No text of specified style in document.: الإشارة الصوتية ونظام الأذن البشرية.

في هذا المثال يمكن أن نعبر عن إشارة الصوت بتابع مستمر يمثل تغيرات ضغط الهواء مع الزمن ويختلف شكل هذا التابع تبعاً لطبيعة الصوت. وهنا يمكن أن نصف صوتاً ما بأنه حاد إذا كان معدل تغير إشارة الصوت مع الزمن سريعاً أو بشكل آخر يمكن أن نقول أن هذا الصوت ذو تردد عالي. كما أن نظام الأذن لا يستجيب لجميع الإشارات الصوتية بنفس الطريقة، إذ تنحصر حساسية الأذن لمجال معين فقط من الترددات كما هو معروف للجميع، كما تختلف هذه الحساسية من تردد لآخر.



الشكل .**Error! No text of specified style in document.**-2: منحني حساسية الأذن النسبية بالديسيبل تبعاً لتردد الإشارة الصوتية.

عبرنا في هذا الشكل عن استجابة نظام الأذن بواسطة منحني يعبر عن مدى استجابة الأذن للإشارة الصوتية بدلالة إحدى خواص الإشارة الصوتية ألا وهو التردد. ونقصد هنا باستجابة الأذن هو شدة الإشارة العصبية الكهربائية والتي تمثل خرج النظام.

وكمثال آخر عن النظم، يمكن اعتبار المحرك الكهربائي الذي يعمل على التيار المستمر نظاماً يقوم بتحويل شدة التيار الكهربائي المطبق على المحرك إلى سرعة دوران. فتكون إشارة الدخل المطبقة على نظام المحرك هي شدة التيار الكهربائي، وتكون إشارة خرج النظام هو السرعة الزاوية للمحرك. ويمكن التعبير عن استجابة النظام بمنحني يربط السرعة الزاوية للمحرك بدلالة شدة التيار المطبق. فعندما يكون المحرك في وضع السكون ثم نطبق فجأة تياراً معيناً فإن المحرك سوف يتسارع إلى أن يبلغ سرعة معينة تتعلق بمقدار شدة التيار المطبق.

ويأتي السؤال هنا: كيف يمكن تحديد إشارة الخرج لنظام ما عند تطبيق إشارة دخل معينة؟ أي ما هي علاقة الخرج بالدخل؟ وكيف يمكن توصيف استجابة النظام بحيث يمكن تحديد استجابته عند تطبيق إشارة ما على دخله؟ هذا ما سيتم التعرف إليه في فصول هذه المادة من خلال دراسة نوع محدد من النظم وهي النظم الخطية الغير متغيرة مع الزمن والتي يمكن توصيف استجابتها بشكل كامل كما سنرى في الفصل القادم والفصول التالية. ولكن قبل ذلك سوف نتعرف في هذا الفصل إلى أنواع الإشارات وطرق تمثيلها وتصنيفها والخواص الأساسية للإشارات وكذلك تصنيف الأنظمة وخواصها كتمهيد للبدء في دراسة مختلف أنواع الإشارات والنظم.

2. تصنيف الإشارات وتمثيلها (representation Signals classification and)

إن مفهوم الإشارة هو مفهوم عام يمكن أن يطلق على تغيرات أي شيء محسوس أو قابل للقياس بدلالة متحول مستقل أو أكثر من الأشياء القابلة للقياس أيضا.

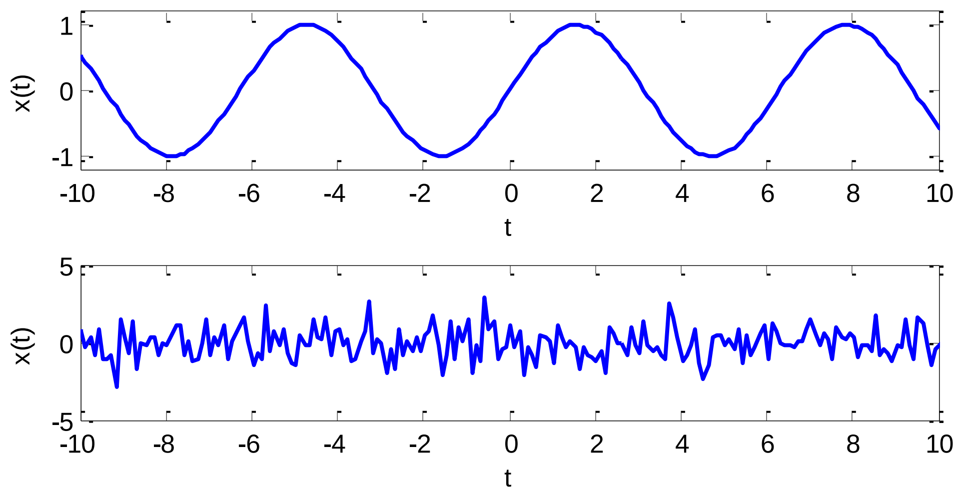
فإذا رمزنا للإشارة بالرمز x ورمزنا للمتحولات المستقلة بالرموز $t_1, t_2, \ldots, t_n$ حيث يعبر n عن عدد هذه المتحولات المستقلة، يمكن أن نكتب الإشارة بالشكل التالي:

$$x = \mathrm{F}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

حيث يمثل F كيفية تغير الإشارة بدلالة المتحولات المستقلة.

في ضوء هذه العلاقة العامة نقول عن الإشارة x أنها إشارات محددة (Deterministic) عندما يمكن توصيف F بتابع محدد يعطي قيمة محددة للإشارة من أجل قيم محددة للمتحولات المستقلة. فمثلاً إذا أخذنا الإشارة $x = sin(t)$ والذي يعبر عن تغيرات الإشارة x بدلالة المتحول t وذلك من خلال تابع الجيب حيث يمكن تحديد قيمة الإشارة من أجل أي قيمة للمتحول المستقل t. وكمثال آخر، يمكن اعتبار صورة بتدرج رمادي للألوان كالإشارة $x = F(i, j)$ تعطي شدة الإضاءة حسب المتحولين المستقلين i و j اللذان يعبران عن الإحداثيات الأفقية والعمودية للصورة.

أما إذا لم يكن بالإمكان توصيف كيفية اعتماد الإشارة x على المتحولات المستقلة بعلاقة محددة فإننا نقول إن الإشارة x هي إشارة عشوائية (Random). حيث يمكن أن تأخذ قيماً مختلفة من أجل نفس قيم المتحولات المستقلة. وكمثال على ذلك يمكن أن نعتبر إشارة الضجيج الحراري في الأجهزة الالكترونية أو تغيرات مؤشر البورصة مع الزمن كإشارة عشوائية لا يمكن تحديد قيمتها في لحظة معينة.



الشكل 3-Error! No text of specified style in document.: إشارة محددة وإشارة عشوائية.

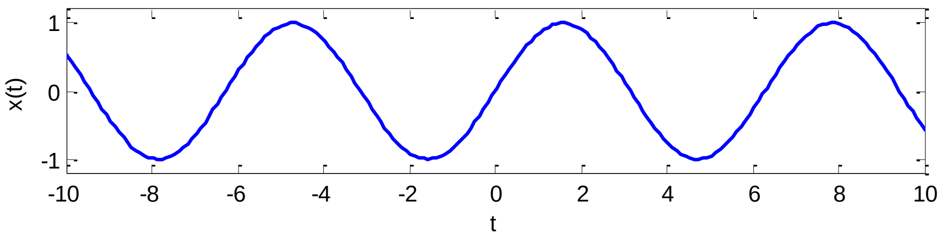
سوف نقتصر في هذه المادة على الإشارات المحددة والتابعة لمتحول مستقل واحد فقط. أي الإشارات من الشكل $x = F(t)$ والتي يمكن تمثيلها بالشكل $x(t)$ للدلالة على تغيرات الإشارة x للمتحول المستقل t.

سوف نفترض أن هذا المتحول المستقل t يمثل الزمن بالرغم من أن نتائج هذه الدراسة يمكن أن تطبق على أي نوع من الإشارات التابعة لمتحول مستقل ذو دلالة مختلفة مثل المسافة أو الحرارة أو الضغط أو أي شيء آخر. وكمثال على ذلك يمكن اعتبار تغير الضغط الجوي بدلالة الارتفاع عن سطح البحر كإشارة تابعة للارتفاع كمتحول مستقل.

إذا أخذنا الإشارات من الشكل $x(t)$ فإننا يمكن تصنيف هذه الإشارات تبعاً لطبيعة المتحول المستقل t إلى نوعين وهما الإشارات المستمرة في الزمن والإشارات المتقطعة في الزمن.

1.2. الإشارات المستمرة (Continuous signals)

الإشارات المستمرة (continuous signals) هي الإشارات التي يكون فيها الزمن t متحولاًً مستمراً يأخذ قيمه في حقل الأعداد الحقيقية.



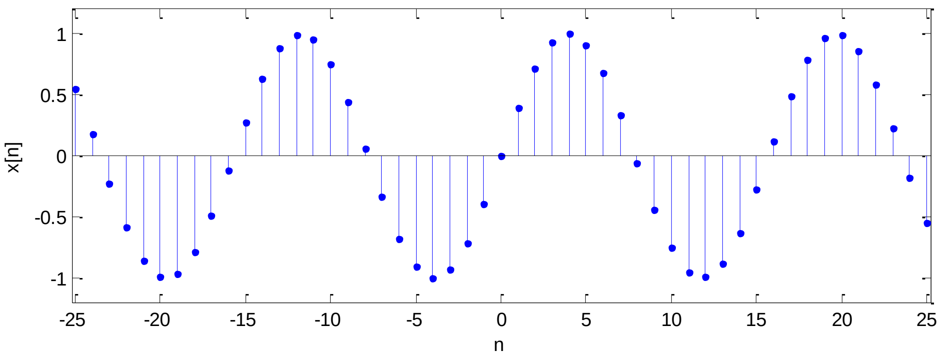
الشكل 4-**Error! No text of specified style in document.**: إشارة مستمرة بالزمن.

يبين الشكل السابق إشارة جيبية مستمرة بالزمن $x = \sin(t)$ يمكن أن تمثل جهداً أو تياراً متناوباً مثلاً.

2.2. الإشارات المتقطعة (Discrete signals)

الإشارات المتقطعة (discrete signals) هي الإشارات التي يكون فيها الزمن t متحولاً متقطعاً يأخذ قيماً منفصلةً يمكن ترقيمها في حقل الأعداد الطبيعية أي أننا نعلم قيمة الإشارة في اللحظات t_n بحيث يكون n عدد صحيح. وفي هذه الحالة فإننا نستخدم التمثيل $x[n]$ بدل من $x(t)$ للدلالة على أن الزمن يأخذ قيماً متقطعة.

ويمكن أن تكون الإشارة المتقطعة ناتجة عملية تقطيع لإشارة مستمرة بالأصل ونأخذ قيمها في لحظات معينة أو أن تكون الإشارة بالأساس ذات طبيعة متقطعة.

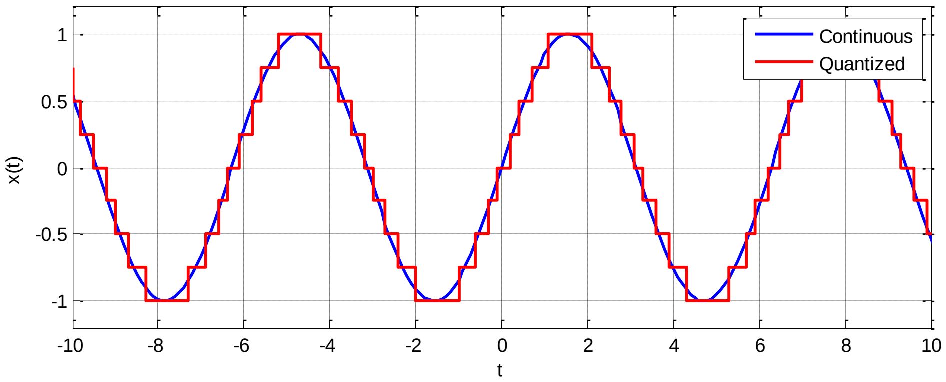


الشكل **Error! No text of specified style in document.**-5: إشارة متقطعة بالزمن.

في الشكل السابق نرى الإشارة الجيبية المتقطعة بدلالة رقم العينة n. وهي ناتجة عن تقطيع الإشارة المستمرة السابقة بفواصل زمنية قدرها $0.4\ s$ بين العينة والأخرى. أي الإشارة $x[n] = \sin(t_n)$ بحيث $t_n = 0.4n$.

أما بالنسبة للإشارات ذات الطبيعة المتقطعة بالأساس فيمكن أن نأخذ مثالاً عنها وهو مقدار التداول اليومي في البورصة أو سعر صرف العملة أو العلامات التي يحصل عليه الطالب خلال السنة فهي مقادير غير مستمرة بالزمن وتعطى في فترات زمنية منفصلة. سندرس في هذه المادة الإشارات المتقطعة في الزمن بمجال تقطيع منتظم، أي أن المسافة الزمنية بين العينات هي ثابتة.

يعتمد التصنيف السابق على قيم المتحول الزمني فيما إذا كان مستمراً أو متقطعاً. كما يمكن أيضاً تصنيف الإشارة تبعاً لطبيعة قيم الإشارة نفسها فيما إذا كانت مستمرة أو متقطعة. فعندما تأخذ الإشارة قيماً مستمرة ضمن حقل الأعداد الحقيقية أو العقدية فإننا نسمي هذه الإشارة بإشارة تماثلية (analog) بينما حين تأخذ الإشارة قيماً متقطعة من بين مجموعة منتهية من القيم الممكنة فإننا نسمي هذه الإشارة بإشارة مكممة (quantized). أما في حالة إشارة متقطعة في الزمن وذات قيم مكممة أيضاً فإننا نسمي هذه الإشارة بإشارة رقمية (digital) وهي الإشارات التي تتعامل معها النظم الحاسوبية حيث يتم تمثيل الإشارة بمجموعة مقطعة من العينات وتكون كل قيمة ممثلة على عدد معين من البتات، أي تأخذ قيماً من مجموعة قيم ذات عدد محدود.



الشكل 6-**Error! No text of specified style in document.**: الفرق بين الإشارة المستمرة والمكممة.

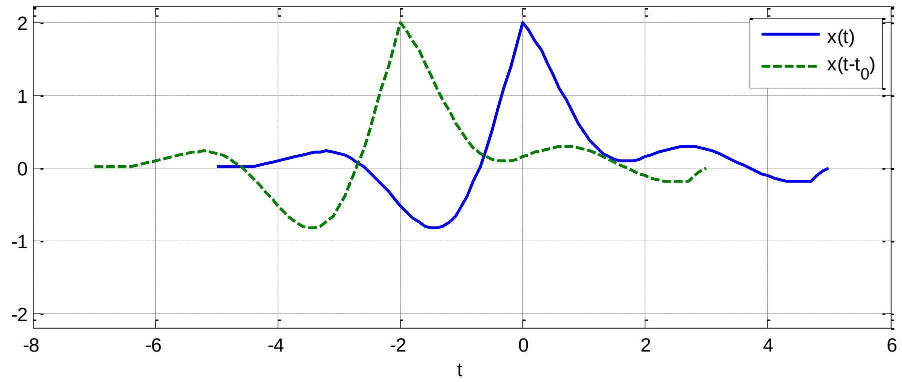
سنعالج في هذه المادة الإشارات المستمرة في الزمن والإشارات المتقطعة في الزمن فقط. أما الإشارات المكممة أو الرقمية فلا تقع في نطاق هذه الدراسة.

3. العمليات الأساسية على الإشارات (Fundomental operations on signals)

سنعرض فيما يلي بعض العمليات الأساسية التي تطبق على الإشارات والتي تتعلق بإجراء تحويل على المحور الزمني للإشارة ويشمل ذلك الإزاحة وعكس الزمن والتقييس الزمني.

1.3. الإزاحة الزمنية (Time shifting)

من أبسط العمليات التي يمكن إجراؤها على إشارة ما هو عملية الإزاحة بالزمن. فإذا اعتبرنا الإشارة المستمرة $x(t)$ فإن الإشارة $x(t-t_0)$ هي نفس الإشارة الأصلية ولكن بانزياح زمني قدره t_0. ونقول عن الإشارة الجديدة أنها مؤخرة عن الإشارة الأصلية بمقدار t_0 عندما يكون t_0 موجباً، ونقول عن الإشارة الجديدة أنها مسبقة عن الإشارة الأصلية عندما يكون t_0 سالباً. يمكن أن تظهر عمليات الإزاحة الزمنية في الكثير من النظم، فعلى سبيل المثال يمكن أن نلاحظ عملية تأخير الإشارة الكلامية في الهاتف عندما تكون المسافة بين المتصل والمجيب بعيدة جداً كما في المكالمات الدولية أو في المكالمات الصوتية عبر الانترنت.

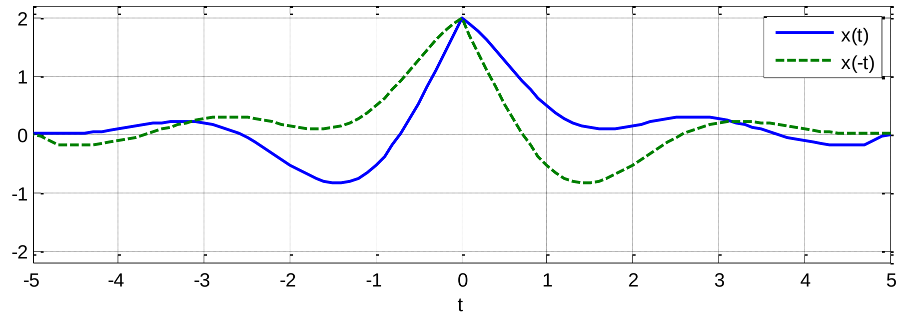


الشكل **Error! No text of specified style in document.**-7: الإشارة والإشارة المزاحة (حالة تسبيق زمني بمقدار 2).

وبشكل مماثل، يمكن أن نقول نفس الشيء بالنسبة للإشارة المتقطعة $x[n]$ والإشارة المزاحة زمنياً $x[n-n_0]$ بمقدار n_0.

2.3. عكس الزمن (Time inverting)

إذا كانت لدينا الإشارة المستمرة $x(t)$ فإن الإشارة $x(-t)$ هي نفس الإشارة الأصلية ولكن معكوسة عبر محور الزمن. فمثلاً إذا كانت الإشارة $x(t)$ تمثل تسجيلاً صوتياً أو مرئياً على شريط مغناطيسي، فإن العكس الزمني للإشارة يشبه عملية العرض بالاتجاه العكسي للتسجيل.

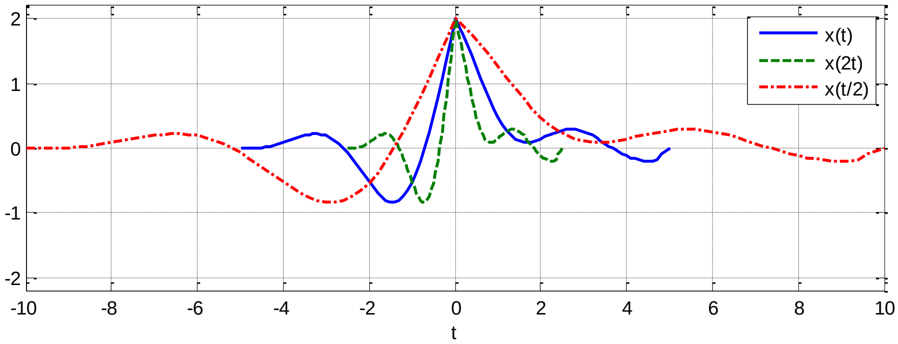


الشكل **Error! No text of specified style in document.**-8: عكس الزمن للإشارة.

وإذا كانت لدينا الإشارة المتقطعة $x[n]$ فإن معكوس هذه الإشارة هو $x[-n]$.

3.3. التقييس الزمني (Time scaling)

إذا كانت لدينا الإشارة المستمرة $x(t)$ فإن الإشارة $x(at)$ هي نفس الإشارة الأصلية ولكن مع تغيير مقياس محور الزمن. فإذا كان معامل التقييس a أكبر من الواحد فإن الإشارة الجديدة ستكون مضغوطة حسب المحور الزمني، وإذا كان a أصغر من الواحد فإن الإشارة الجديدة ستكون ممدودة حسب المحور الزمني. فإذا عدنا إلى مثال التسجيل المرئي فإن الإشارة المقيسة عبر المحور الزمني توافق عملية تسريع أو تبطيء لسرعة العرض بحسب قيمة معامل التقييس.



الشكل **Error! No text of specified style in document.**-9: التقييس الزمني للإشارة.

في حالة تقييس الزمن في الإشارات المتقطعة مثل أن نأخذ الإشارة $x[a.n]$ فيجب أن يكون الجداء $a.n$ قيمة صحيحة لكي تكون هذه الإشارة معرفة. مما يقتضي أن يكون a عدداً صحيحاً. فمثلاً إذا كانت الإشارة $x[n]$ تمثل عينات إشارة درجة الحرارة المسجلة كل ثانية، فإن الإشارة $x[2n]$ تمثل عينات درجة الحرارة المسجلة كل ثانيتين، بينما لا يمكن الحصول على كامل الإشارة $x[n/2]$ لأننا لم نقم بإجراء القياس كل نصف ثانية. نسمي هذه العملية بالنسبة للإشارات المتقطعة، عملية إعادة التقطيع التي سنعود لدراستها لاحقاً بالتفصيل في فصل الإشارات والنظم المتقطعة.

4. بعض خواص الإشارات (Some properties of signals)

نناقش في هذه الفقرة بعض الصفات والخواص التي يمكن أن نطلقها على الإشارات والتي تستخدم بشكل متكرر عند دراسة الإشارات والنظم وتشمل صفات الزوجية أو الفردية والدورية وكذلك مفهومي الاستطاعة والطاقة للإشارات.

1.4. الإشارات الزوجية والفردية (Pair and odd signals)

نقول عن إشارة مستمرة ما $x(t)$ بأنها زوجية إذا كان $x(-t) = x(t)$. كما نقول عنها بأنها فردية إذا كان $x(-t) = -x(t)$. وتعبر هاتان الصفتان عن تناظر الإشارة وفق محور الزمن.

يمكن أن نستنتج من هذا التعريف أن أي إشارة فردية يجب أن تكون معدومة عند الصفر حتماً أي $x(0)=0$.

وبشكل عام يمكن كتابة أية إشارة مستمرة كمجموع إشارتين إحداهما زوجية والأخرى فردية، أي:

$$x(t) = Odd\{x(t)\} + Even\{x(t)\}$$

حيث:

$$Even\{x(t)\} = \frac{1}{2}\big(x(t) + x(-t)\big)$$

$$Odd\{x(t)\} = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$$

ومن الممكن التأكد ببساطة من أن $Even\{x(t)\}$ هي إشارة زوجية وأن $Odd\{x(t)\}$ هي إشارة فردية باستخدام التعريف.

يمكن تطبيق هذه التعاريف والخواص أيضاً على الإشارات المتقطعة من دون أية مشكلة.

2.4. الإشارات الدورية (Periodic signals)

نقول عن إشارة ما $x(t)$ بأنها دورية إذا وجد قيمة موجبة T بحيث يكون:

$$x(t + T) = x(t)$$

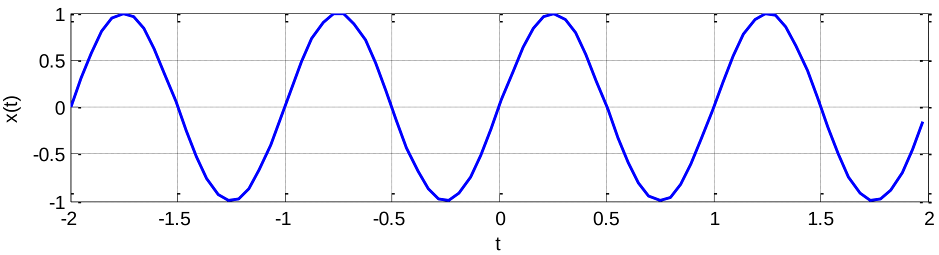
وذلك من أجل جميع قيم t.

وعندها نقول عن الإشارة $x(t)$ بأنها دورية بدور T. أي أن الإشارة تتكرر دائماً بفواصل زمنية مساوية للدور.

ونسمي أصغر قيمة موجبة للمقدار T الذي يحقق العلاقة السابقة الدور الأساسي للإشارة الدورية ونرمز له بالرمز T_0.

مثال: نأخذ الإشارة المستمرة التالية:

a. $x(t) = \sin(2\pi t)$



الشكل 10-**Error! No text of specified style in document.**: إشارة دورية.

وهي إشارة دورية بدور أساسي $T_0 = 1$ وذلك لأن:

$$x(t+T) = \sin\big(2\pi(t+T)\big) = \sin(2\pi t + 2\pi T)$$

وتتحقق علاقة الدورية $x(t+T) = x(t)$ إذا كان

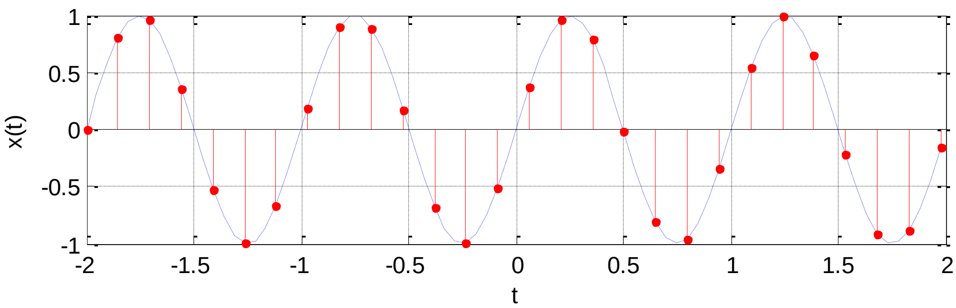
$$\sin(2\pi t + 2\pi T) = \sin(2\pi t)$$

وذلك محقق من أجل $2\pi T = 2\pi k$ حيث k عدد صحيح. وبالتالي يكون $T = k$ هو دور لإشارة من أجل أية قيمة للعدد k. ويكون الدور الأساسي للإشارة هو $T_0 = 1$ وهي أصغر قيمة موجبة تحقق عاقة الدورية.

بالنسبة لإشارة متقطعة $x[n]$ فإنها تكون دورية إذا وجدت قيمة صحيحة موجبة N بحيث يكون:

$$x[n+N] = x[n]$$

وعندها نقول عن الإشارة $x[n]$ بأنها دورية بدور N. ونسمي أصغر قيمة للقيمة N التي تحقق العلاقة السابقة الدور الأساسي للإشارة الدورية ونرمز له بالرمز N_0. ومن الجدير بالذكر أن الإشارة المقطعة الناتجة عن عملية تقطيع إشارة مستمرة دورية ليس بالضرورة أن تكون دورية وذلك يعتمد على لحظات التقطيع كما يوضح الشكل التالي:



الشكل **Error! No text of specified style in document.**-11: تقطيع إشارة دورية.

تلعب الإشارات الدورية دوراً مهماً في دراسة النظم وتحويل فورييه وخاصة الإشارات الجيبية العقدية والتي سنتعرف عليها لاحقاً في الفصول القادمة.

3.4. الاستطاعة والطاقة (Power and energy)

تعبر بعض الإشارات عن مقادير فيزيائية تعبر عن الطاقة مثل الجهد والتيار . فعلى سبيل المثال إذا كانت $v(t)$ هي إشارة فرق الجهد بين طرفي مقاومة كهربائية قيمتها R وكانت $i(t)$ هي إشارة التيار المار فيها فإن الاستطاعة اللحظية المصروفة في المقاومة هي:

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{1}{R}v^2(t)$$

تتناسب هذه الاستطاعة من مربع إشارة الجهد المطبق مع ثابت تناسب يتعلق بقيمة المقاومة. وتكون الطاقة المصروفة خلال فترة زمنية $[t_1, t_2]$ معطاة بتكامل الاستطاعة اللحظية على هذا المجال الزمني، أي

$$E = \int_{t_1}^{t_2} p(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{R} v^2(t)\, dt$$

حيث تقدر الاستطاعة بوحدة الواط.

يمكن تعميم هذه المفاهيم على جميع أنواع الإشارات كما هو سنرى فيما يلي.

الاستطاعة

نعرف الاستطاعة اللحظية للإشارة المستمرة $x(t)$ في اللحظة t بالعلاقة:

$$p(t) = |x(t)|^2$$

حيث يعبر الرمز $|.|$ عن مطال الإشارة إذا كانت عقدية، وعن القيمة المطلقة إذا كانت حقيقية.

وبشكل مماثل بالنسبة لإشارة متقطعة $|x[n]|$، تكون الاستطاعة اللحظية معطاة بالعلاقة:

$$p(n) = |x[n]|^2$$

إن الاستطاعة اللحظية هي مقدار تابع للزمن ويكمن نعرف الاستطاعة الوسطية للإشارة المستمرة $x(t)$ على مجال زمني $[t_1, t_2]$ بالعلاقة:

$$P_{t_1,t_2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2\, dt$$

ونعرف الاستطاعة الوسطية للإشارة المستمرة $x[n]$ على مجال زمني $[n_1, n_2]$ بالعلاقة:

$$P_{n_1,n_2} = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

ويأتي المعامل $n_2 - n_1 + 1$ ليعبر عن عدد الحدود داخل إشارة المجموع.

يعكس مفهوم الاستطاعة الوسطية لإشارة على مجال، مدى شدة الإشارة وكبرها في هذا المجال. أم إذا أردنا توصيف الإشارة بشكل كامل بشكل مستقل عن الزمن فإننا نحسب هذه الاستطاعة الوسطية على كامل المحور الزمني. ونعرف الاستطاعة الوسطية للإشارة المستمرة $x(t)$بأنها الاستطاعة الوسطية على كامل الإشارة، أي عندما يسعى المجال الزمني ليغطي كامل محور الزمن $]-\infty, +\infty[$. ونعبر عن ذلك رياضياً بالعلاقة:

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2\, dt$$

وهنا قمنا باستخدام الرمز P_∞ للدلالة على أن حساب هذه الاستطاعة قد تم على كامل المجال.

وبنفس الطريقة من أجل إشارة متقطعة، تكون الاستطاعة الوسطية معطاة بالعلاقة.

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

ومن الجدير بالذكر أنه من أجل إشارات دورية بدور T_0 فإنه يكفي لحساب الاستطاعة الوسطية حساب هذه الاستطاعة على دور واحد فقط، أي من أجل إشارة مستمرة دورية بدور T0 فإن الاستطاعة الوسطية تحسب بالعلاقة:

$$P_\infty = P_{T_0} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |x(t)|^2\, dt$$

ومن أجل إشارة متقطعة دورية بدور N_0، تحسب الاستطاعة الوسطية بالعلاقة:

$$P_\infty = P_{N_0} = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} |x[n]|^2$$

مثال: احسب الاستطاعة الوسطية للإشارة $x(t) = \sin(2\pi t)$.

نعلم أن هذه إشارة دورية بدور $T_0 = 1$ وبالتالي يمكن استخدام العلاقة

$$P_\infty = P_{T_0} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |x(t)|^2\, dt = \int_0^1 sin^2(2\pi t)\, dt$$

باستخدام $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$ نجد أن:

$$P_\infty = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-\cos(4\pi t))\, dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{4\pi}\sin(4\pi t)\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

الطاقة

نعرف طاقة إشارة مستمرة $x(t)$ على المجال الزمني $[t_1, t_2]$ بالعلاقة:

$$E_{t_1,t_2} = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

وهي عبارة عن تكامل الاستطاعة اللحظية على المجال الزمني المعتبر. وتقدر الطاقة بالجول أو (واط ثانية). فعلى سبيل المثال، يتم قياس الاستهلاك المنزلي للطاقة الكهربائية بوحدة الكيلو واط الساعي كجداء للاستطاعة مقدرةً بالكيلو واط مع الزمن مقدراً بالساعة.

وبالنسبة للإشارة المتقطعة $x[n]$، تكون العلاقة كالتالي:

$$E_{n_1,n_2} = \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

نعرف الطاقة الكلية لإشارة مستمرة $x(t)$ بالعلاقة

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

وبالنسبة للإشارة المتقطعة $x[n]$، تكون العلاقة كالتالي:

$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

وفي جميع هذه العلاقات نلاحظ التشابه في تعريف مقادير الاستطاعة والطاقة مع الاختلاف أنه يتم استخدام التكامل في الإشارة المستمرة، بينما يتم استخدام المجموع للإشارات المتقطعة.

مثال: احسب طاقة الإشارة $x(t) = \begin{cases} a & 0 < t < 2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$.

من التعريف نجد

$$E_{\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{0}^{2} |a|^2 dt = [|a|^2 t]_0^2 = 2|a|^2$$

انطلاقاً من هذه مفهومي الاستطاعة والطاقة يمكن تصنيف الإشارات إلى نوعين، وهما:

إشارات الطاقة: هو الإشارات ذات الطاقة المنتهية، أي $E_{\infty} < \infty$. وهذه الإشارات هي إشارات ذات استطاعة وسطية معدومة بالضرورة، وذلك لأن

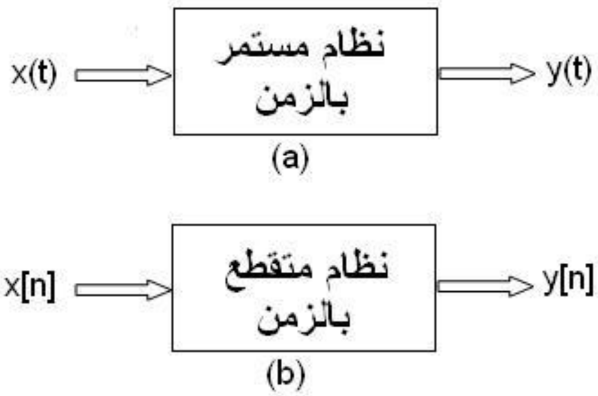
$$P_{\infty} = \lim_{T \to \infty} \frac{E_{\infty}}{2T} = 0$$

إشارات الاستطاعة: هو الإشارات ذات الاستطاعة الوسطية المنتهية، أي $P_{\infty} < \infty$ وهذه إشارات هي ذات طاقة كلية لانهائية، أي $E_{\infty} = \infty$. وهذا منطقي لأن الطاقة هي الاستطاعة مضروبة بالزمن. فمن أجل استطاعة وسطية غير معدومة وزمن لانهائي تكون الطاقة الكلية لانهائية. فعلى سبيل المثال عند تشغيل سخان كهربائي باستطاعة واحد كيلو واط بشكل مستمر وإلى الأبد يكون صرف الطاقة الكلي لانهائي.

5. تصنيف النظم وتمثيلها (System classification and representation)

النظام هو عبارة عن آلية تقوم بتحويل إشارات الدخل بطريقة ما إلى إشارات جديدة في الخرج. فعلى سبيل المثال، يمكن اعتبار المصباح الكهربائي نظاماً يقوم بتحويل الإشارة الكهربائية إلى إشارة ضوئية، وكذلك يشكل المكرفون نظاماً يقوم بتحويل الاهتزازات الصوتية إلى إشارة كهربائية، وأيضاً يعتبر مرشح ترددي صوتي بتكبير مستوى بعض الترددات في إشارة ما وتخميد ترددات أخرى نظاماً.

يمكن تصنيف النظم إلى قسمين وذلك حسب الإشارة التي تعالجها هذه النظم وهي النظم المستمرة بالزمن والنظم المتقطعة بالزمن.



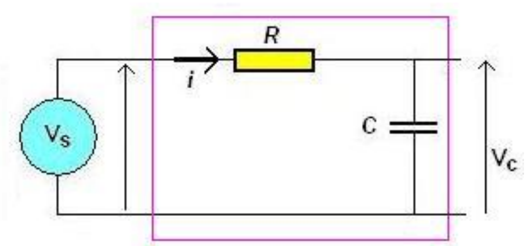
الشكل 12-Error! No text of specified style in document.: تصنيف النظم: النظم المستمرة والنظم المتقطعة.

1.5. النظم المستمرة بالزمن (Continuous time systems)

النظم المستمرة بالزمن (continuous–time systems) وهي النظم التي تتعامل مع إشارات مستمرة حيث يكون كل من دخلها وخرجها إشارات مستمرة بالزمن. ويمكن تمثيل ذلك من أجل نظام ما S بالشكل التالي:

$$x(t) \xrightarrow{S} y(t)$$

مثال: يمثل الشكل التالي مثالاً عن نظام مستمر مكون من مقاومة R ومكثفة C. يمثل جهد المنبع $v_s(t)$ إشارة دخل النظام، ويمثل $v_c(t)$ إشارة خرج النظام.



الشكل **Error! No text of specified style in document.**-13: نظام مقاومة ومكثفة.

ويمكن التعبير عن علاقة الخرج بالدخل من خلال المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{\mathrm{RC}} v_c(t) = \frac{1}{\mathrm{RC}} v_s(t)$$

فمن أجل إشارة دخل معطاة ، يمكن حل هذه المعادلة لإيجاد إشارة الخرج.

2.5. النظم المتقطعة بالزمن (Discrete time systems)

النظم المتقطعة بالزمن (discrete–time systems) وهي تلك التي تعالج إشارات متقطعة ويكون كل من دخلها وخرجها إشارات متقطعة بالزمن.

$$x[n] \xrightarrow{S} y[n]$$

مثال: كمثال عن النظم المتقطعة، نأخذ النظام المتقطع الذي يُعطى خرجه بالعلاقة التالية:

$$y[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[n-1])$$

حيث يقوم هذا النظام بحساب القيمة الوسطية بين العينة في اللحظة الحالية والعينة في اللحظة السابقة حيث يُستخدم هذا النظام في تقليص أثر الضجيج في عينات القياس في بعض النظم الرقمية.

6. الخواص الأساسية للنظم (systems Basic properties of)

هناك العديد من الصفات التي يمكن أن نطلقها على نظام لوصف خواصه وطبيعة عمله، ونذكر فيما يلي أهم هذه الخواص.

1.6. نظم مع أو بدون ذاكرة (Systems with or without memory)

نقول عن نظام ما بأنه بدون ذاكرة (memoryless)، إذا كان خرجه في لحظة ما لا يعتمد إلا على دخله في تلك اللحظة فقط.

مثال: لنأخذ النظام المستمر المعطى بعلاقة الخرج التالية:

$$y(t) = Rx(t)$$

حيث R قيمة ثابتة. يعتبر هذا النظام بدون ذاكرة لأن الخرج في اللحظة t لا يعتمد إلا على قيمة الدخل في نفس اللحظة.

مثال: نأخذ النظام المستمر المعطى بعلاقة الخرج التالية:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

وهو نظام مكامل لإشارة الدخل. يعتبر هذا النظام بذاكرة لأن الخرج في اللحظة t يعتمد على جميع قيم الدخل السابقة لهذه اللحظة.

مثال: نأخذ النظام المتقطع المعطى بعلاقة الخرج التالية:

$$y[n] = x[n-1]$$

وهو نظام تأخير زمني مقدار عينة واحدة. يُعتبر هذا النظام مع ذاكرة لأن خرجه في اللحظة n يعتمد على قيمة الدخل في اللحظة السابقة $n-1$.

2.6. العكوسية (Invertibility)

نقول عن نظام ما بأنه عكوس (invertible) إذا كان يعطي إشارات خرج مختلفة من أجل إشارات دخل مختلفة.

مثال: نأخذ النظام المستمر المعطى بعلاقة الخرج التالية:

$$y(t) = 2x(t)$$

يمكن عكس هذا النظام وكتابة الدخل بدلالة الخرج بالعلاقة:

$$x(t) = \frac{1}{2}y(t)$$

وبالتالي يكون هذا النظام عكوس.

مثال: نأخذ النظام المستمر المعطى بعلاقة الخرج التالية:

$$y(t) = x^2(t)$$

لا يمكن عكس هذا النظام لأننا لا نستطيع تحديد إشارة الدخل إذا كانت موجبة أو سالبة بمعرفة إشارة الخرج.

3.6. السببية (Causality)

نقول عن نظام ما بأنه سببي (causal) إذا كانت إشارة خرجه تعتمد فقط على قيمة إشارة الدخل في اللحظية الحالية واللحظات السابقة فقط. وبعبارة أخرى، لا تعتمد إشارة خرجه على القيم المستقبلية لإشارة الدخل.

مثال: نأخذ النظام المستمر المعطى بعلاقة الخرج التالية:

$$y(t) = x(t + t_0)$$

نميز حالتين: إذا كانت t_0 سالبة، فإن النظام سببي وإذا كانت t_0 موجبة فإن النظام يكون غير سببي لأن الخرج في اللحظة t يعتمد على قيمة مستقبلية لإشارة الدخل في اللحظة $t + t_0$.

مثال: نأخذ النظام المتقطع المعطى بعلاقة الخرج التالية:

$$y[n] = x[n] - x[n + 1]$$

يعتبر هذا النظام غير سببي لأن الخرج في اللحظة n يعتمد على قيمة الدخل في اللحظة المستقبلية $n + 1$.

4.6. الاستقرار (Stability)

يكون النظام مستقراً (stable) عندما يعطي من أجل أي دخل محدود $x(t)$ في المطال خرجاً $y(t)$ محدوداً في المطال. ويمكن التعبير عن ذلك رياضياً بالعلاقة التالية:

$$\forall t, |x(t)| < N < \infty \rightarrow |y(t)| < M < \infty$$

وذلك يعبر أنه من أجل أي إشارات دخل محدودة فإن الخرج لا يتباعد إلى اللانهاية. من الناحية العملية لا يوجد إشارات فيزيائية ذات مطال لانهائي. فإذا اعتبرنا دارة مكبر عمليات تعمل بتغذية قدرها 12V فإن إشارة الخرج لا يمكن أن تكون أكبر من جهد التغذية، ولذلك فإن مفهوم اللانهاية هنا يعبر عن بلوغ إشارة الخرج حدود التشبع في الدارة أي بجوار قيمة جهد التغذية.

مثال: نأخذ نظام المكامل المستمر المعطى بعلاقة الخرج التالية:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

فمن أجل إشارة دخل $x(t) = u(t)$ وهي إشارة الخطوة الواحدية، وهي إشارة محدودة في كل اللحظات، فإن الخرج يكون:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}$$

وهي إشارة غير محدودة في اللانهاية، وبالتالي فإن نظام المكامل هذا غير مستقر.

5.6. عدم التغير مع الزمن (Time invariance)

يكون النظام غير متغير مع الزمن (time invariant) عندما لا تتغير طريقه استجابته من وقت لآخر. فعلى سبيل المثال يعتبر النظام المستمر المكون من مقاومة ومكثفة نظاماً غير متغير مع الزمن إذا لم تتغير قيم المقاومة أو المكثفة مع الزمن. أما عند تغير قيم هذه العناصر بتأثير تغير درجة حرارة الوسط على سبيل المثال فإن النظام تتغير استجابته مع الزمن.

ويمكن تعريف ذلك بشكل رياضي من أجل نظام يعطي من أجل إشارة الدخل $x(t)$ إشارة الخرج $y(t)$ فإنه من أجل أي انزياح في الزمن لإشارة الدخل فإن إشارة الخرج ستعاني من نفس الانزياح، أي:

$$x(t) \to y(t) \Rightarrow \forall t_0, \qquad x(t+t_0) \to y(t+t_0)$$

مثال: نأخذ النظام المستمر المعطى بعلاقة الخرج التالية:

$$y(t) = x(2t)$$

لنرى أولاً ما هو خرج النظام من أجل إشارة أخرى ناتجة عن الإشارة الأصلية بانزياح زمني. من أجل إشارة خرج مزاحة بمقدار t_0 أي $x_1(t) = x\ (t+t_0)$ يكون الخرج

$$y_1(t) = x_1(2t) = x(2t+t_0)$$

ثم نقوم بحساب الإشارة الناتجة عن إزاحة إشارة الخرج الموافقة للإشارة الأصلية. وإذا طبقنا نفس الانزياح على إشارة الخرج الموافقة للإشارة $x(t)$ نحصل على

$$y_2(t) = y(t+t_0) = x\big(2(t+t_0)\big) = x(2t+2t_0)$$

ثم نقارن بين النتيجتين. بما أن $y_2(t) \neq y_1(t)$ فإن هذا النظام يكون متغير مع الزمن.

6.6. الخطية (Linearity)

يكون النظام خطياً (linear) إذا كان من أجل أي تركيب موَزّن في إشارة الدخل يعطي نفس التركيب الموزن في إشارة الخرج. أي إذا كان النظام يعطي إشارة الخرج $y_1(t)$ من أجل إشارة الدخل $x_1(t)$، ويعطي إشارة الخرج $y_2(t)$ من أجل إشارة الدخل $x_2(t)$. فإن خرجه من أجل الإشارة المركبة $ax_1(t) + bx_2(t)$ يعطى كالتالي:

$$ax_1(t) + bx_2(t) \to ay_1(t) + by_2(t)$$

ويمكن تعميم ذلك مهما يكن عدد الإشارات المركبة. وكنتيجة مباشرة لهذه الخاصية، فإن خرج أي نظام خطي يكون معدوماً من أجل إشارة دخل معدومة. حيث يكفي لتبيان ذلك أخذ حالة $x_1(t) = x_2(t)$ و $b = -a$ في العلاقة السابقة.

بالرغم من أننا عرفنا خاصة الخطية بالنسبة للإشارات المستمرة، إلا أن هذا التعريف يبقى سارياً من أجل الإشارات المتقطعة.

$$ax_1[n] + bx_2[n] \to ay_1[n] + by_2[n]$$

مثال: نأخذ النظام المستمر المعطى بعلاقة الخرج التالية:

$$y(t) = tx(t)$$

من أجل إشارة دخل مركبة كالتالي:

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

تكون إشارة الخرج

$$y(t) = t\big(ax_1(t) + bx_2(t)\big) = atx_1(t) + btx_2(t)$$
$$= ay_1(t) + by_2(t)$$

وبالتالي فإن النظام خطي.

مثال: نأخذ النظام المستمر المعطى بعلاقة الخرج التالية:

$$y(t) = x^2(t)$$

تكون إشارة الخرج من أجل إشارة دخل مركبة خطياً:

$$y(t) = (ax_1(t) + bx_2(t))^2$$
$$y(t) = (ax_1(t))^2 + 2abx_1(t)x_2(t) + (bx_2(t))^2$$
$$y(t) = a^2y_1^2(t) + b^2y_2^2(t) + 2abx_1(t)x_2(t)$$

ومنه نلاحظ أن هذا النظام ليس خطي.

مثال: نأخذ النظام المتقطع المعطى بعلاقة الخرج التالية:

$$y[n] = 2x[n] + 3$$

ومن أجل إشارة دخل مركبة خطياً يكون الخرج:

$$y[n] = 2(ax_1[n] + bx_2[n]) + 3 \neq ay_1[n] + by_2[n]$$

ومنه نلاحظ أن هذا النظام ليس خطي بالرغم من كون علاقة الدخل/خرج علاقة خطية.

أسئلة وتمارين الفصل الأول
الإشارات والنظم، تصنيفها وتمثيلها

1– أجب عن الأسئلة التالية:

1. عرف الاستطاعة الوسطية لإشارة مستمرة $x(t)$ ولإشارة متقطعة $x[n]$.
2. عرف طاقة إشارة على مجال زمني $[t_1, t_2]$ والطاقة الكلية لإشارة مستمرة $x(t)$.
3. عرف طاقة إشارة على مجال زمني $[n_1, n_2]$ والطاقة الكلية لإشارة مستمرة $x[n]$.
4. يعمل جهاز كهربائي باستطاعة وسطية قدرها 100 واط. احسب الطاقة المصروفة خلال يوم كامل من العمل المستمر مع تحديد الوحدة.
5. عرف خاصة الدورية لإشارة مستمرة ولإشارة متقطعة وعرف ما هو الدور الأساسي.
6. عرف خاصة العكوسية لنظام مستمر.
7. عرف خاصة عدم التغير الزمني لنظام مستمر.
8. عرف سببية نظام مستمر.
9. عرف استقرار نظام مستمر.

2– لتكن لدينا الإشارة المتقطعة التالية:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & -2 < n < 4 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

اكتب عبارة كل من الإشارات التالية:

$$1 - x_1[n] = x[n] \qquad 2 - x_2[n] = x[-n] \qquad 3 - x_3[n] = x[n+2]$$

$$4 - x_4[n] = x[n-3] \qquad 5 - x_5[n] = x[-n-2] \qquad 6 - x_6[n] = x[-n+2]$$

مساعدة راجعة: عوض مباشرة قيمة n بالقيمة الجديدة في تعريف الإشارة $x[n]$.

3– حدد في ما إذا كانت كل من الإشارات التالية دورية أم لا وحدد دورها الأساسي في حالت كانت دورية.

$$1 - x_1(t) = je^{-2jt} \qquad 2 - x_2(t) = e^{(-1+j)t}$$

$$3 - x_3[n] = e^{7j\pi n} \qquad 4 - x_4[n] = e^{j3(n+1)/5}$$

مساعدة راجعة: راجع تعريف الإشارة الدورية في الفقرة 2-4- ثم حل المعادلة كما في المثال.

4– احسب قيمة كل من الاستطاعة الوسطية P_∞ والطاقة الكلية E_∞ لكل من الإشارات التالية:

b. $3 - x_3(t) = \cos(t)$

c. $2 - x_2(t) = e^{2jt}$

d. $1 - x_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-2t} & t \geq 0 \end{cases}$

e. $6 - x_6[n] =$

f. $5 - x_5[n] = e^{j\frac{\pi}{2n}}$

g. $4 - x_4[n] =$

$$\begin{cases} 0 & n < 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \geq 0 \end{cases} \qquad\qquad \cos(\frac{\pi}{4}n)$$

مساعدة راجعة: احسب E_∞ أو P_∞ انطلاقاً من التعريف أيهما أسهل واستنتاج الثانية حسب فيما إذا كانت الإشارة هي إشارة طاقة أو إشارة استطاعة.

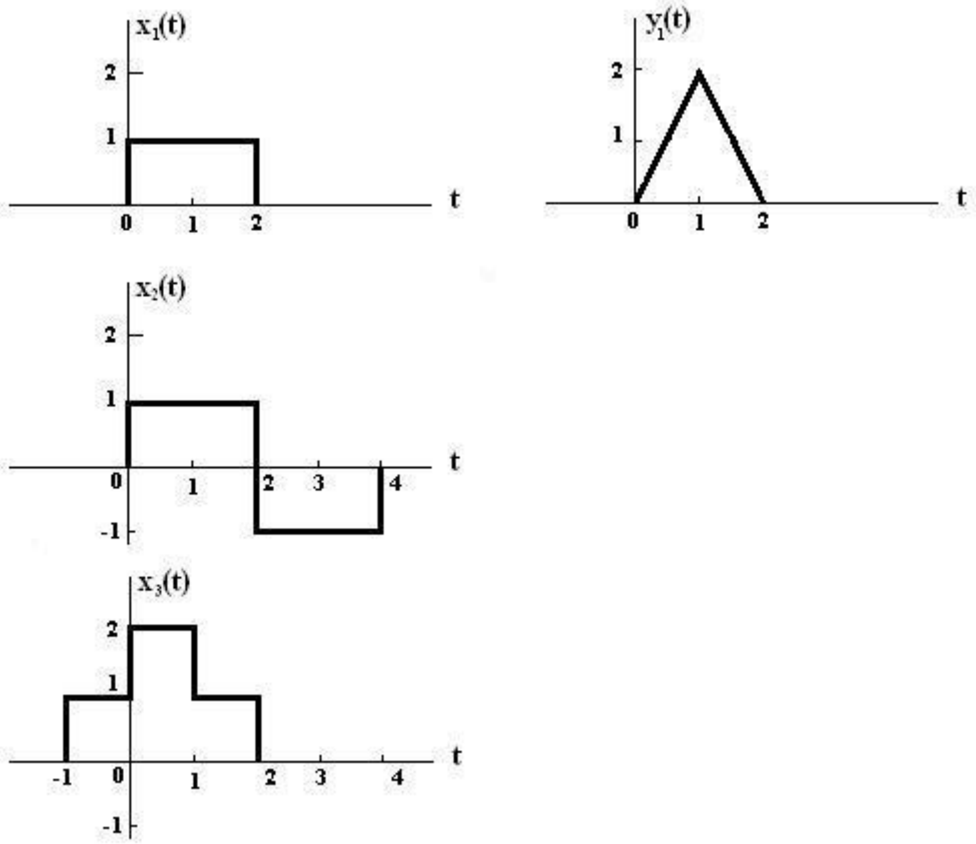
5– ليكن لدينا النظام المتقطع المعطى بعلاقة الدخل خرج التالية:

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

حدد خواص هذا النظام من حيث الذاكرة، العكوسية، الخطية، التغير مع الزمن، السببية، الاستقرار.

مساعدة راجعة: العودة إلى تعريف الخواص المذكورة وتطبيق التعريف مباشرةً.

6– ليكن لدينا النظام المستمر الخطي الغير متغير مع الزمن حيث يعطي من أجل إشارة الدخل $x_1(t)$ إشارة الخرج $y_1(t)$ المعرفين بالشكل التالي. ارسم خرج النظام لكل من الإشارتين $x_2(t)$ و $x_3(t)$.



مساعدة راجعة: اكتب كل من الإشارات المطلوبة بدلالة $x_1(t)$ ومن ثم الاستفادة من خاصية الخطية وعدم التغير مع الزمن لاستنتاج إشارة الخرج انطلاقاً من $y_1(t)$.

إجابات – حلول التمارين السابقة

السؤال الأول:

1. الاستطاعة الوسطية لإشارة مستمرة $x(t)$ هي: $P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\,dt$.
الاستطاعة الوسطية لإشارة متقطعة $x[n]$ هي: $P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|x[n]|^2$.
2. طاقة إشارة مستمرة $x(t)$ على مجال زمني $[t_1, t_2]$ هي: $E_{t_1,t_2} = \int_{t_1}^{t_2}|x(t)|^2 dt$.
والطاقة الكلية لهذه الإشارة هي: $E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2 dt$.
3. طاقة إشارة مستمرة $x[n]$ على مجال زمني $[n_1, n_2]$ هي: $E_{n_1,n_2} = \sum_{n=n_1}^{n_2}|x[n]|^2$.
والطاقة الكلية لهذه الإشارة هي: $E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2$.
4. الطاقة المصروفة خلال فترة 24 ساعة هي جداء الاستطاعة الوسطية بالزمن، أي:
$$E = 24 * 100 = 2.4\, kW/h$$
5. نقول عن إشارة ما $x(t)$ بأنها دورية إذا وجد قيمة موجبة T بحيث يكون: $x(t+T) = x(t)$ وذلك من أجل جميع قيم t. ونسمي أصغر قيمة موجبة للمقدار T الذي يحقق العلاقة السابقة الدور الأساسي للإشارة الدورية ونرمز له بالرمز T_0.
6. نقول عن نظام ما بأنه عكوس إذا كان يعطي إشارات خرج مختلفة من أجل إشارات دخل مختلفة.
7. يكون النظام غير متغير مع الزمن عندما لا تتغير طريقه استجابته من وقت لآخر. أو بشكل رياضي بأن أي انزياح على إشارة الدخل سيؤدي إلى نفس الانزياح في إشارة الخرج.
$$x(t) \to y(t) \Rightarrow \forall t_0, \qquad x(t+t_0) \to y(t+t_0)$$
8. نقول عن نظام ما بأنه سببي إذا كانت إشارة خرجه تعتمد فقط على قيمة إشارة الدخل في اللحظية الحالية واللحظات السابقة فقط.
9. يكون النظام مستقراً عندما يعطي من أجل أي دخل محدود $x(t)$ في المطال خرجاً $y(t)$ محدوداً في المطال. ويمكن التعبير عن ذلك رياضياً بالعلاقة التالية:
$$\forall t, |x(t)| < N < \infty \to |y(t)| < M < \infty$$

السؤال الثاني:

$$x_2[n] = \begin{cases}1 & -2 < -n < 4 \\ 0 & otherwise\end{cases} = \begin{cases}1 & -4 < n < 2 \\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$x_3[n] = \begin{cases}1 & -2 < n+2 < 4 \\ 0 & otherwise\end{cases} = \begin{cases}1 & -4 < n < 2 \\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$x_4[n] = \begin{cases}1 & -2 < n-3 < 4 \\ 0 & otherwise\end{cases} = \begin{cases}1 & 1 < n < 7 \\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$x_5[n] = \begin{cases}1 & -2 < -n-2 < 4 \\ 0 & otherwise\end{cases} = \begin{cases}1 & -6 < n < 0 \\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$x_6[n] = \begin{cases}1 & -2 < -n+2 < 4 \\ 0 & otherwise\end{cases} = \begin{cases}1 & -2 < n < 4 \\ 0 & otherwise\end{cases}$$

السؤال الثالث:

.1

$$x_1(t+T) = x_1(t+T)$$

$$je^{-2j(t+T)} = je^{-2jt} \rightarrow e^{-2jT} = 1 \rightarrow T = \pi k : k \in Z$$

إذاً الإشارة دورية ويكون الدور الأساسي $T_0 = \pi$ من أجل $k = 1$.

.2

$$x_2(t+T) = x_2(t+T)$$
$$e^{(-1+j)(t+T)} = e^{(-1+j)t}$$

$$e^{(-1+j)T} = 1$$

وهذه المعادلة لا تتحقق إلا من أجل $T = 0$ أي أن الإشارة غير دورية.

.3

$$x_3[n+N] = x_3[n]$$

$$e^{7j\pi(n+N)} = e^{7j\pi n} \rightarrow e^{7j\pi N} = 1$$

$$7\pi N = 2\pi k, k \in Z \rightarrow N = 2k/7, k \in Z$$

ويكون الدور الأساسي $N_0 = 2$ من أجل $k = 7$ لنحصل على عدد صحيح.

.4

$$x_4[n+N] = x_4[n]$$

$$e^{\frac{j3(n+N+1)}{5}} = e^{\frac{j3(n+1)}{5}} \rightarrow e^{\frac{j3N}{5}} = 1$$

$$\frac{3N}{5} = 2\pi k, k \in Z \rightarrow N = 10k\pi/3, k \in Z$$

لا يمكن الحصول على قيمة صحيحة للمتحول N مهما تكن قيمة k، وبالتالي الإشارة غير دورية.

السؤال الرابع:

.1

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(t)|^2 dt = \int_0^{+\infty} e^{-4t} dt = \left[\frac{e^{-4t}}{-4}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{4}$$

ومنه $P_\infty = 0$ لأن الطاقة الكلية منتهية.

.2 إشارة دورية بدور $T = \pi$

$$P_\infty = \frac{1}{T}\int_0^T |x_2(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T 1dt = 1$$

ومنه $E_\infty = \infty$ لأن الاستطاعة الوسطية غير معدومة.

.3 إشارة دورية بدور $T = 2\pi$

$$P_\infty = \frac{1}{T}\int_0^T |x_3(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(t) dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1+\cos(2t)}{2} dt$$

$$P_\infty = \frac{1}{2T}\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^T = \frac{1}{2}$$

ومنه $E_\infty = \infty$ لأن الاستطاعة الوسطية غير معدومة.

.4

$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_4[n]|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

ومنه $P_\infty = 0$ لأن الطاقة الكلية منتهية.

.5

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x_5[n]|^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} 1 = 1$$

ومنه $E_\infty = \infty$ لأن الاستطاعة الوسطية غير معدومة.

.6 إشارة دورية بدور $N = 8$

$$P_\infty = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x_6[n]|^2 = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} \cos^2(\frac{\pi}{4}n) = \frac{2}{8}\left(1 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

ومنه $E_\infty = \infty$ لأن الاستطاعة الوسطية غير معدومة.

السؤال الخامس:

1. الذاكرة: هذا النظام بذاكرة لأن خرجه يعتمد على القيم السابقة لإشارة الدخل.
2. العكوسية: يمكن كتابة النظام العكسي له بالمعادلة

$$x[n] = x[n-1] + y[n]$$

3. الخطية: اذا كانت إشارة الدخل $x[n] = a_1x_1[n] + a_2x_2[n]$ يكون الخرج

$$y[n] = (a_1x_1[n] + a_2x_2[n]) - (a_1x_1[n-1] + a_2x_2[n-1])$$

$$y[n] = a_1(x_1[n] - x_1[n-1]) + a_2(x_2[n] - x_2[n-1])$$

$$y[n] = a_1y_1[n] + a_2y_2[n]$$

4. التغير مع الزمن: من أجل إشارة دخل مزاحة $x_1[n] = x[n-N]$ يكون الخرج:

$$y_1[n] = x[n-N] - x[n-N-1]$$

أما إشارة الخرج المزاحة بمقدار N فتكون:

$$y_2[n] = y[n-N] = x[n-N] - x[n-N-1]$$

بما أن $y_1[n] = y_2[n]$، فإن النظام غير متغير مع الزمن.

5. السببية: هذا النظام سببي لأن الخرج لا يعتمد على القيم المستقبلية لإشارة الدخل.
6. الاستقرار: هذا النظام مستقر لأنه من أجل دخل محدود $|x[n]| \le N < \infty$ يكون الخرج

$$|y[n]| <= |x[n]| + |x[n-1]| \le 2N < \infty$$

وبالتالي يكون الخرج محدود والنظام مستقر.

السؤال السادس:

يمكن كتابة الإشارة $x_2(t)$ بدلالة $x_1(t)$ بالشكل

$$x_2(t) = x_1(t) - x_1(t-2)$$

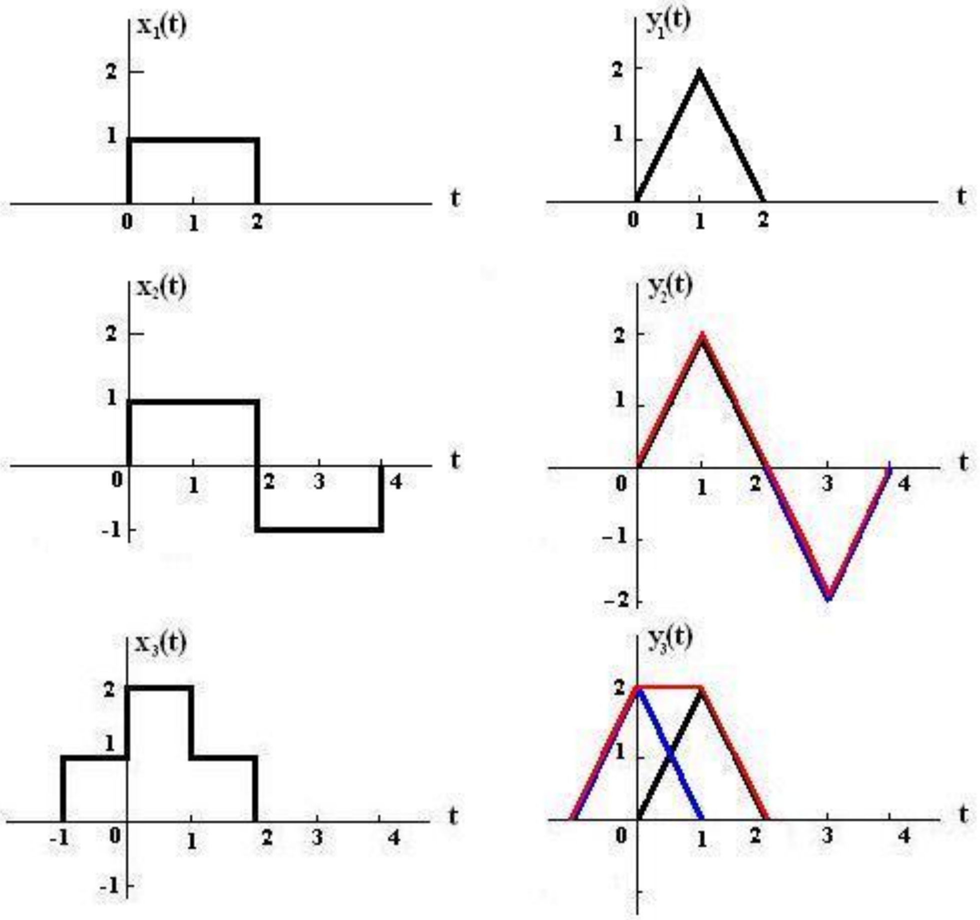
وبما أن النظام خطي وغير متغير مع الزمن يكون الخرج

$$y_2(t) = y_1(t) - y_1(t-2)$$

ومن أجل الإشارة $x_3(t)$ نجد

$$x_3(t) = x_1(t+1) - x_1(t)$$

$$y_3(t) = y_1(t+1) - y_1(t)$$


x1(t)
y1(t)
x2(t)
y2(t)
x3(t)
y3(t)
t

الإشارات والنظم المستمرة

الكلمات المفتاحية:

الإشارات المستمرة بالزمن، النظم المستمرة بالزمن، النظم الخطية الغير متغيرة مع الزمن، الاستجابة النبضية، جداء التلاف المستمر، الاستجابة الخطوية.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى دراسة الإشارات المستمرة والنظم المستمرة الخطية الغير متغيرة مع الزمن. حيث يمكن في هذه النظم تعريف علاقة خرج النظام بدخله من خلال علاقة جداء تلاف بين إشارة الدخل والاستجابة النبضية للنظام. يوضح هذا الفصل هذه العلاقة ومعنى الاستجابة النبضية من خلال دراسة بعض النظم البسيطة. كذلك نبين خواص الأنظمة الخطية الغير متغيرة مع الزمن من حيث السببية والاستقرار وكيفية تحديد ذلك انطلاقاً من الاستجابة النبضية للنظام.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- بعض الإشارات المستمرة الشهيرة.
- علاقة الخرج بالدخل في النظم الخطية الغير متغيرة مع الزمن LTI.
- خواص السببية والاستقرار في النظم LTI.
- الاستجابة الخطوية.

يهدف هذا الفصل إلى دراسة الإشارات المستمرة والنظم المستمرة الخطية الغير متغيرة مع الزمن. حيث يمكن في هذه النظم تعريف علاقة خرج النظام بدخله من خلال علاقة جداء تلاف بين إشارة الدخل والاستجابة النبضية للنظام. يوضح هذا الفصل هذه العلاقة ومعنى الاستجابة النبضية من خلال دراسة بعض النظم البسيطة. كذلك نبين خواص الأنظمة الخطية الغير متغيرة مع الزمن من حيث السببية والاستقرار وكيفية تحديد ذلك انطلاقاً من الاستجابة النبضية للنظام.

1. مقدمة (Introduction)

ذكرنا في الفصل السابق أن الإشارات المستمرة بالزمن (أو اختصاراً الإشارات المستمرة) هي إشارات تتبع لمتحول مستقل وحيد وهو الزمن يأخذ قيمه في مجموعة الأعداد الحقيقية بينما يمكن أن تأخذ الإشارة قيمها في مجموعة الأعداد الحقيقية أو العقدية. وذكرنا أيضاً بأن النظم المستمرة هي النظم التي تعالج الإشارات المستمرة. سوف نتعرف في البداية على بعض الإشارات المستمرة الشهيرة الكثيرة الاستخدام في دراسة النظم المستمرة ومن ثم سوف ندرس النظم المستمرة الخطية الغير متغيرة مع الزمن وأهم خواصها.

2. بعض الإشارات الشهيرة (Basic signals)

1.2. الإشارات الأسية العقدية والإشارات الجيبية (Complex exponential signals and sinusoidal)

نعرف الإشارة المستمرة الأسية العقدية بالشكل:

$$x(t) = ae^{pt}$$

حيث أن كلاً من الثوابت a و p هي بشكل عام أعداد عقدية. وبحسب قيم هذه المعاملات فإن الإشارة الأسية العقدية تأخذ أشكالاً مختلفة.

الإشارة الأسية الحقيقية

إذا كان كلاً من a و p هي أعداد حقيقية فإن الإشارة $x(t)$ هي إشارة حقيقية تمثل تابعاً متزايداً أو متناقصاً بحسب إشارة العدد p إذا ما كان موجباً أو سالباً.

الإشارة الأسية العقدية الدورية

اذا كان $a = 1$ والعدد p هو عدد عقدي صرف (أي أن قسمه الحقيقي معدوم) من الشكل $p = jw_0$ ، حيث w_0 هو عدد حقيقي، فإن الإشارة $x(t)$ تأخذ الشكل:

$$x(t) = e^{jw_0 t}$$

وهي إشارة دورية بدور أساسي قدره T_0 معطى بالعلاقة

$$T_0 = \frac{2\pi}{|w_0|}$$

ويمكن إعادة كتابة الإشارة $x(t)$ بالشكل:

$$x(t) = \cos(w_0 t) + j\sin(w_0 t)$$

حيث يمكن ملاحظة أن القسم الحقيقي هو إشارة التجيب والقسم التخيلي هو إشارة الجيب وكلاهما إشارة دورية بنفس الدور الأساسي T_0. وتتمتع هذه الإشارة بكونها إشارة ذات استطاعة متوسطة منتهية وطاقة كلية لانهائية.

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2\, dt = 1$$

وذلك لأن $\left|e^{jw_0 t}\right|^2 = 1$.

الإشارة الأسية العقدية العامة

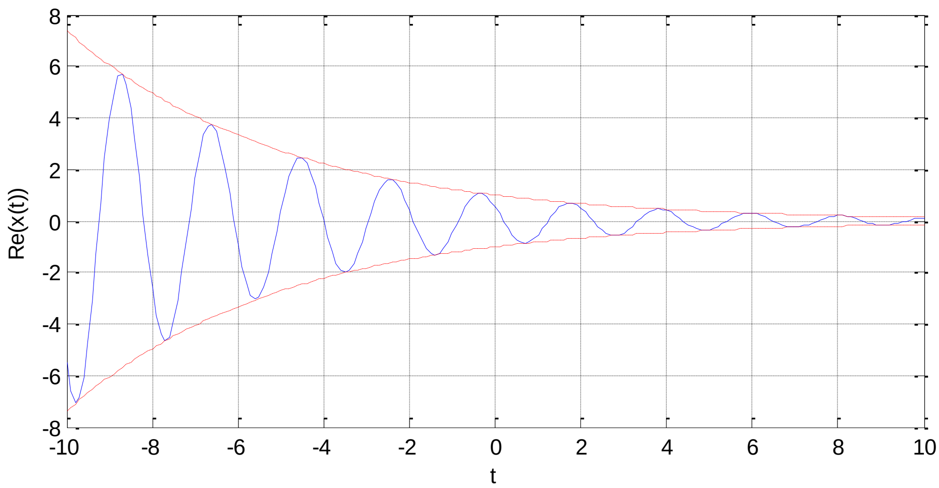
بشكل عام يكون كلاً من العددين a و p هي أعداد عقدية. فإذا كتبنا العدد a بالشكل القطبي $a = re^{j\theta}$ و العدد p بالشكل الديكارتي $p = \alpha + jw_0$ فيمكن كتابة

$$x(t) = re^{j\theta} e^{(\alpha + jw_0)t} = re^{\alpha t} e^{j(w_0 t + \theta)}$$

وأيضاً

$$x(t) = re^{\alpha t}\cos(w_0 t + \theta) + jre^{\alpha t}\sin(w_0 t + \theta)$$

وبالتالي يكون القسم الحقيقي والتخيلي للإشارة هو إشارة جيبية مضروبة بتابع أسي متخامد أو متعاظم حسب إشارة r.

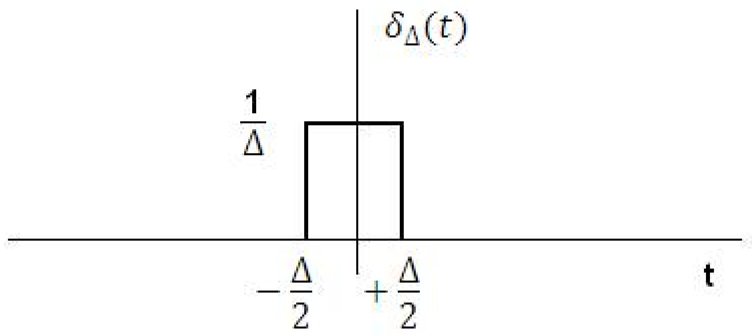


Error! No text of specified style in document.-1: القسم الحقيقي للإشارة الأسية العقدية العامة مع α سالبة.

2.2. نبضة ديراك (Dirac impulse)

إن إشارة نبضة ديراك (Dirac impulse signal) ليست تابعاً معرفاً بالمعنى الصريح للكلمة وغير موجودة فيزيائياً ولكنها إشارة رياضية لها دور مهم في دراسة النظم من الناحية الرياضية. لنفهم إشارة نبضة ديراك، سوف نعرف أولاً الإشارة المستطيلة التالية:

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} 1/\Delta & -\Delta/2 < t < +\Delta/2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$



الشكل **.Error! No text of specified style in document**-2: إشارة النبضة المستطيلة.

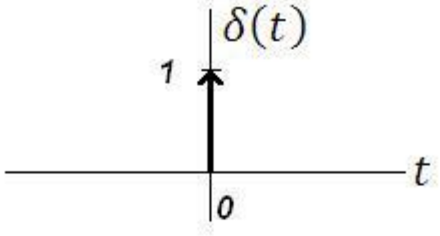
وهي إشارة زوجية ذات امتداد زمني قدره Δ حول الصفر. وتتمتع بصفة أن مساحة السطح المحصور بين الإشارة والمحور الزمني ثابت مساوياً الواحد مهما تكن قيمة Δ، أي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\Delta(t)dt = 1$$

نعرف نبضة ديراك بأنها نهاية النبضة $\delta_\Delta(t)$ عندما تسعى Δ للصفر، أي:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta\to 0} \delta_\Delta(t)$$

وبكلمة أخرى هي نبضة ضيقة جداً ذات مطال يسعى إلى اللانهاية (ولذلك فهي ليست معرفة عند الصفر) ولكن تكاملها يساوي الواحد. ويتم تمثيلها بيانياً مجازاً بشعاع ذو مطال واحدي مع أن مطالها الفعلي عند الصفر هو لانهاية



الشكل **.Error! No text of specified style in document**-3: نبضة ديراك.

ولا تعتبر نبضة ديراك تابعاً بالمعنى الرياضي للكلمة ولكن تسمى توزيعاً (distribution) تُعرف من خلال أثرها على الإشارات والنظم كما سنرى في هذا الفصل.

ومن الخواص الأساسية لنبضة ديراك نذكر أن ضرب نبضة ديراك بإشارة ما يعطي نبضة ديراك مضروبة بمعامل يساوي قيمة الإشارة عند الصفر، أي:

$$\delta(t)x(t) = x(0)\delta(t)$$

كما أن ضرب أي إشارة بنبضة ديراك المزاحة بمقدار t_0 سوف يعطي نبضة ديراك مزاحة بمعامل تثقيل يساوي قيمة الإشارة عند اللحظة t_0، أي:

$$\delta(t - t_0)x(t) = x(t_0)\delta(t)$$

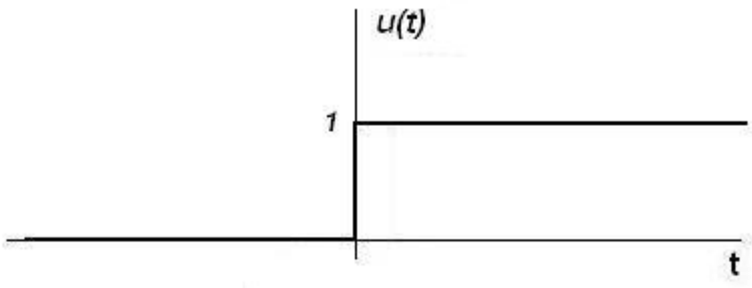
وبالتالي يمكن بمكاملة هذه العلاقة أن نكتب

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0)$$

.3.2 إشارة الخطوة الواحدية (Unit step signal)

نعرف إشارة الخطوة الواحدية (unit step signal) بالعلاقة التالية:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



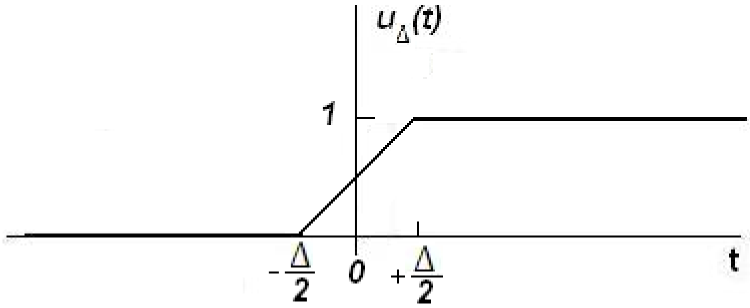
الشكل **Error! No text of specified style in document.**-4: إشارة النبضة الواحدية.

وتستخدم هذه الإشارة في دراسة الاستجابة الانتقالية (transit response) لنظم كما سنرى في الفصول القادمة حيث تستخدم كإشارة دخل لنظام لمعرفة طريقة استجابته عند تغير مستوى الدخل. وترتبط هذه الإشارة بإشارة نبضة ديراك من خلال علاقة تكامل. فتكامل إشارة نبضة ديراك هو تابع الخطوة الواحدية.

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(u)du = u(t)$$

ويمكن النظر إلى إشارة الخطوة الواحدية على أنها نهاية إشارة أخرى نعرفها بالشكل التالي:

$$u_\Delta(t) = \begin{cases} 0 & t < -\Delta/2 \\ t/\Delta + 0.5 & -\frac{\Delta}{2} < t < +\Delta/2 \\ 1 & t > +\Delta/2 \end{cases}$$



الشكل **.5-Error! No text of specified style in document**: إشارة النبضة الواحدية المائلة

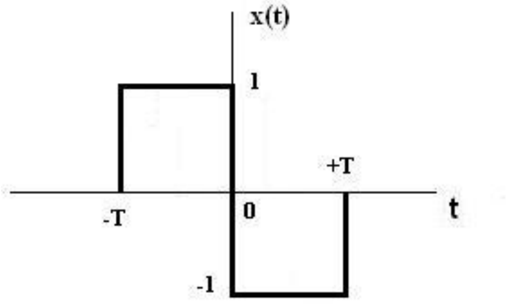
حيث تسعى الإشارة $u_\Delta(t)$ إلى إشارة الخطوة الواحدية عندما تسعى Δ إلى الصفر. ويمكن ملاحظة أن مشتق هذه الإشارة هو إشارة النبضة المستطيلة، أي:

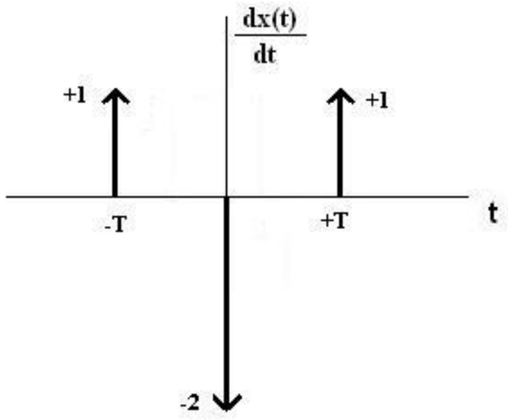
$$\frac{du_\Delta(t)}{dt} = \delta_\Delta(t)$$

وبأخذ نهاية الطرفين في هذه العلاقة عندما تسعى Δ إلى الصفر، نحصل على علاقة اشتقاق إشارة الخطوة الواحدية.

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$$

من المعروف أن تابع الخطوة الواحدية غير قابل للاشتقاق عند الصفر بمعنى التوابع بسبب وجود عدم استمرار بقيمة الإشارة بجوار الصفر. إلا أن تعريف نبضة ديراك مكننا من التعبير عن مشتق التابع عند نقطة عدم الاستمرار (بمعنى التوزيعات). ويمكن تعميم ذلك إلى أي تابع لديه نقاط عدم استمرار، حيث نعبر عن مشتق التابع في نقطة عدم الاستمرار بنبضة ديراك مضروبة بمقدار قفزة التابع عند هذه النقطة. يوضح الشكل التالي هذه الفكرة.





6-Error! No text of specified style in document: مشتق إشارة فيها نقاط عدم استمرار .

3. الاستجابة النبضية للنظم الخطية الغير متغير مع الزمن (Impulse response (for linear time–invariant systems

سوف نعتبر في هذه الفقرة النظم الخطية الغير متغيرة مع الزمن، أو اختصاراً النظم LTI (Linear Time–Invariant). بفضل خاصتي الخطية وعدم التغير مع الزمن سوف نستطيع التعبير عن العلاقة بين الدخل والخرج بشكل رياضي باستخدام عملية جداء التلاف.

سبق وأن رأينا سابقاً أن بإمكاننا كتابة علاقة تكامل جداء نبضة ديراك المزاحة مع إشارة ما بالشكل:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\delta(t-u)\, du$$

وهذا يعني أن الإشارة $x(t)$ يمكن التعبير عنها بواسطة مجموع غير منتهي من نبضات ديراك المزاحة مثقلة بقيمة الإشارة عند نقطة الانزياح.

فإذا كان خرج النظام المستمر S هو $h(t)$ عندما تكون إشارة الدخل هي نبضة ديراك $\delta(t)$. بما أن النظام S هو غير متغير مع الزمن فإن خرج النظام من أجل إشارة الدخل $\delta(t-u)$ يكون $h(t-u)$. وبالتالي يكون خرج النظام من أجل إشارة الدخل $x(t)$ المكتوبة في العلاقة (19.1) كتركيب خطي من الإشارات $\delta(t-u)$ هو:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)\, du \triangleq x(t) * h(t)$$

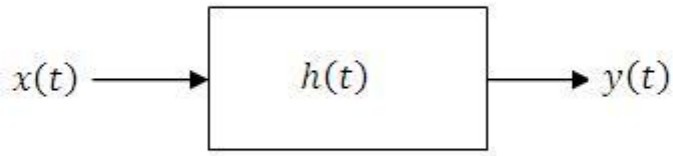
وهذا ما يعرف بجداء التلاف المستمر (continuous time convolution) بين الإشارة $x(t)$ والإشارة $h(t)$ ونرمز له بالرمز $(*)$.

بالنتيجة، من أجل أي نظام مستمر خطي غير متغير مع الزمن (LTI) تكون إشارة الخرج معرفة بالعلاقة

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)\, du$$

حيث $h(t)$ هو خرج النظام عندما يكون دخله نبضة ديراك ولذلك يسمى بالاستجابة النبضية (Impulse Response).

لذلك يتم توصيف النظم الخطية الغير متغيرة مع الزمن بواسطة تابع الاستجابة النبضية $h(t)$ كما هو مبين في الشكل التالي:



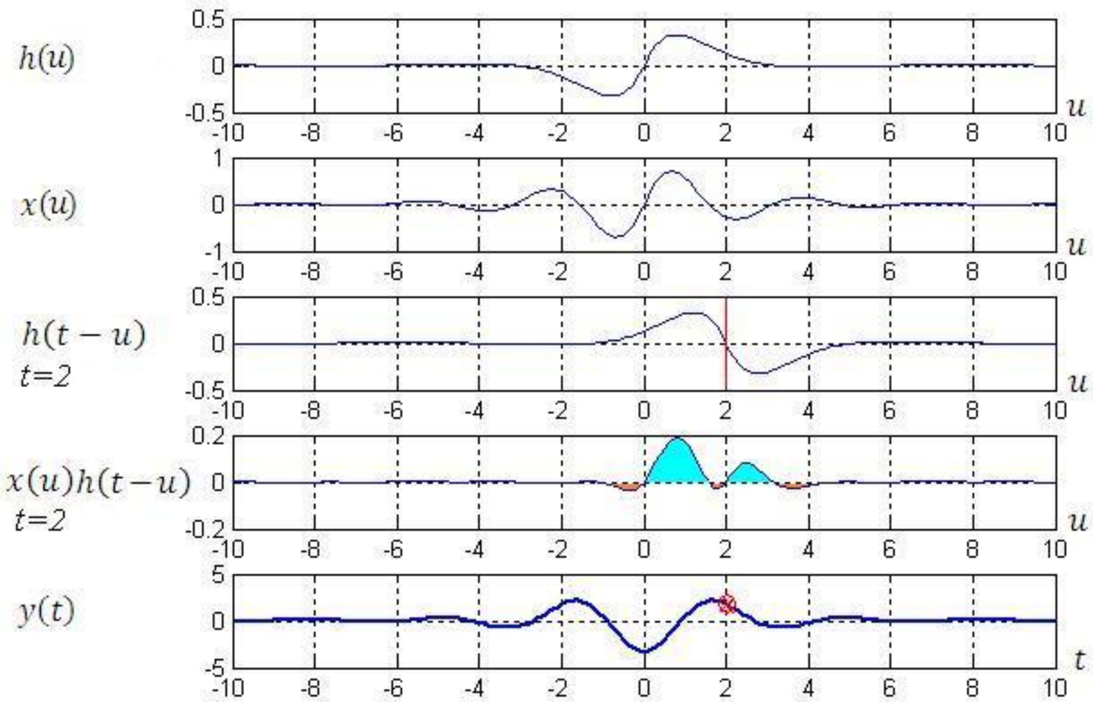
Error! No text of specified style in document.-7: تمثيل النظام الخطي المستمر بواسطة تابع الاستجابة النبضية.

فبمعرفة تابع الاستجابة النبضية $h(t)$، نستطيع حساب إشارة خرج النظام من أجل أي إشارة دخل ممكنة. وهذه نتيجة مهمة تسمح لنا بدراسة هذا النوع من النظم وتحديد خواصها بشكل سهل.

ويمكن التأكد بإجراء عملية تغيير المتحول $v = t - u$ في العلاقة السابقة من أن جداء التلاف هو عملية تبديلية، أي أن:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} h(v)x(t-v)\,dv$$
$$= h(t) * x(t)$$

وتعبر علاقة جداء التلاف أنه من أجل حساب قيمة الخرج $y(t)$ في لحظة معينة t، نقوم بعكس تابع الاستجابة النبضية وإزاحته إلى اللحظة t للحصول على $h(t-u)$ وذلك لأن $h(t-u) = h(-(u-t))$ ومن ثم نقوم بضرب التابع الناتج بالإشارة $x(u)$ ومكاملة الإشارة الناتجة. كل ذلك من أجل حساب قيمة الخرج في نقطة واحدة. وتتكرر هذه العملية من أجل جميع قيم t التي نريد حساب الخرج عندها. وهكذا نرى بأن هذه العملية ليست بسيطة الحساب من الناحية العملية، ولكن سوف نرى في الفصل القادم كيف يمكن أن تبسيط حساب هذه العلاقة بالمرور بتحويل لابلاس.



الشكل 8-Error! No text of specified style in document.: توضيح عملية حساب جداء التلاف.

1.3. النظام الحيادي (Identity system)

إن النظام الذي تكون استجابته النبضية $h(t) = \delta(t)$ هو النظام الحيادي الذي يكون خرجه مساوياً دخله:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\delta(t-u)\, du = x(t)$$

أما النظام الذي تنتج إشارة خرجه عن ضرب إشارة الدخل بثابت α، أي $y(t) = \alpha x(t)$ فتكون استجابته النبضية $h(t) = \alpha\delta(t)$.

وأيضاً، إن النظام الذي تكون استجابته النبضية $h(t) = \delta(t-\tau)$ هو نظام يزيح إشارة الدخل زمنياً بمقدار τ، أي: $y(t) = x(t-\tau)$.

2.3. النظام المكامل (Integrating system)

لنعتبر النظام الذي تكون استجابته النبضية $h(t) = u(t)$. فمن أجل إشارة الدخل $x(t)$ يكون خرجه:

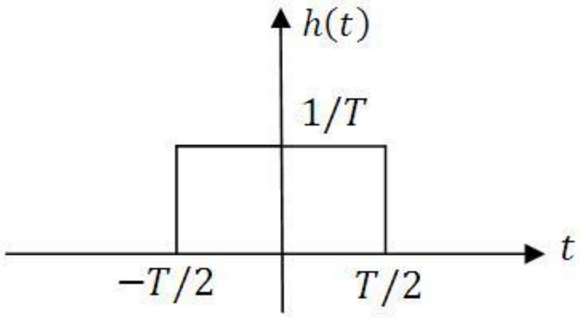
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)u(t-u)\, du = \int_{-\infty}^{t} x(u)\, du$$

وهو نظام يقوم بمكاملة إشارة الدخل.

3.3. نظام القيمة المتوسطة (Averaging system)

لنعتبر النظام الذي تكون استجابته النبضية معطاة بالعلاقة التالية:

$$h(t) = r_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} & |t| \leq T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases}$$



Error! No text of specified style in document.-9: الاستجابة النبضية لنظام القيمة المتوسطة.

فمن أجل إشارة الدخل $x(t)$ يكون خرجه:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)\, du = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} x(u)\, du$$

وهو نظام يقوم بمكاملة إشارة الدخل ضمن نافذة زمنية عرضها T ومتمركزة عند اللحظة t مقسومة على عرض المجال الزمني، وذلك ما يعبر عن القيمة الوسطية للإشارة حول اللحظة الحالية.

4. خواص النظم الخطية الغير متغيرة مع الزمن (Properties of linear time- invariant systems)

نناقش في هذه الفقرة كيف يمكن تحديد خواص النظم الخطية الغير متغيرة مع الزمن من خلال معرفة الاستجابة النبضية للنظام، وبشكل خاص خاصتي السببية والاستقرار.

1.4. السببية (Causality)

نعلم أن النظام يكون سببياً إذا كانت إشارة الخرج في لحظة t لا تتعلق بقيم إشارة الدخل بعد اللحظة t. أي أن السبب يسبق الأثر أو النتيجة، ولا يتعلق الحاضر إلا بالماضي. إن جميع النظم القابلة للتحقيق فيزيائياً هي نظم سببية، وذلك لأن خرج أي نظام عملي لا يعتمد على مستقبل إشارة الدخل الذي لم تدخل بعد إلى النظام. ونقوم بدراسة هذه الخاصة في النظم المصممة نظرياً لمعرفة قابلية هذه النظم للتحقيق الفعلي.

من أجل نظام خطي مستمر غير متغير مع الزمن، تكون إشارة الخرج معرفة بعلاقة جداء التلاف

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)x(t-u)\,du$$

ويمكن أن نرى من خلال هذه العلاقة أن إشارة الخرج $y(t)$ في اللحظة t تعتمد على قيم إشارة الدخل في اللحظات التي تلي t عندما يكون المتحول u سالباً. فلكي يكون هذا النظام سببياً، فإنه يجب أن يكون $h(u) = 0$ من أجل $u < 0$ حتى لا تدخل القيم المستقبلية لإشارة الدخل في حساب التكامل الذي يعطي قيمة إشارة الخرج.

بالنتيجة فإننا نستطيع أن نعرف فيما إذا كان النظام الموصف بتابع استجابته النبضية $h(t)$ سببياً أما لا إذا كان تابع استجابته النبضية يحقق الشرط

$$h(t) = 0 \quad for \quad t < 0$$

إذا اعتبرنا نظام المكامل الذي رأيناه سابقاً، نستطيع أن نقول أن هذا النظام هو سببي لأن استجابته النبضية معدومة من أجل اللحظات السالبة.

لنأخذ الآن مثال نظام القيمة المتوسطة، فمن الواضح أن هذا النظام غير سببي وذلك لأنه يأخذ قيماً غير معدومة في اللحظات السالبة من $-T/2$ وحتى الصفر. من ذلك نستنتج أنه لا يمكننا تحقيق هذا النظام عملياً كما هو، حيث أننا نحتاج لحساب القيمة المتوسطة للإشارة حول اللحظة t إلى قيم إشارة الدخل في اللحظات التي تلي هذه اللحظة بمقدار $T/2$ وهي لم تدخل بعد إلى النظام كما تبين ذلك علاقة حساب إشارة الخرج:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)\,du = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} x(u)\,du$$

يمكن التغلب على هذه المشكلة من الناحية العملية بأخذ النظام المزاح زمنياً نحو اللحظات الموجبة بمقدار $T/2$ لنحصل على النظام الجديد الذي استجابته النبضية معطاة بالعلاقة:

$$\acute{h}(t) = r_T(t - T/2) = \begin{cases} \dfrac{1}{T} & 0 \le t \le T \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

فمن الواضح أن النظام الجديد $\acute{h}(t)$ هو نظام سببي لأن قيمه معدومة من أجل اللحظات السالبة وبالتالي هو قابل للتحقيق عملياً حيث أننا نحتاج لحساب قيمة إشارة الخرج إلى قيم إشارة الدخل في اللحظات السابقة للحظة الحالية t بمقدار T كما توضح ذلك علاقة حساب إشارة الخرج:

$$\acute{y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\acute{h}(t-u)\,du = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(u)\,du$$

انطلاقاً من علاقتي الخرج لنظام القيمة المتوسطة $y(t)$ ونظام القيمة المتوسطة المزاح زمنياً $\acute{y}(t)$ أن $\acute{y}(t) = y(t - T/2)$ وذلك يعني ان النظام الجديد يعطي نفس خرج النظام الأصلي ولكن بإزاحة زمنية بمقدار $T/2$.

يمكن تعميم هذه الفكرة على أي نظام غير سببي بشرط أن يكون امتداد تابع استجابته النبضية في المجال السالب محدوداً. أي أننا نستطيع تحقيق هذا النوع من الأنظمة الغير سببية عملياً ولكن مقابل تأخير زمني في إشارة الخرج.

2.4. الاستقرار (Stability)

عرفنا في الفصل السابق استقرار نظام وقلنا بأن نظام ما يكون مستقراً إذا كان يعطي من أجل كل دخل محدود بالمطال خرجاً محدوداً بالمطال.

$$\forall t, |x(t)| < M < \infty \Rightarrow |y(t)| < M < \infty$$

من أجل النظم المستمرة الخطية الغير متغيرة مع الزمن الموصفة من خلال تابع استجابة النبضية $h(t)$ فإنه يمكن التعبير عن خاصة الاستقرار من خلال الشرط التالي:

شرط الاستقرار: إن الشرط اللازم والكافي لاستقرار نظام هو أن يكون تابع الاستجابة النبضية قابل للتكامل بالقيمة المطلقة للمطال، أي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$$

لنعد إلى مثال نظام القيمة المتوسطة، حيث يمكن التأكد من أن هذا النظام مستقر لأن تكامل القيمة المطلقة لتابع الاستجابة النبضية محدود

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = \int_{-T/2}^{+T/2} \frac{1}{T} dt = 1 < \infty$$

أم إذا أخذنا نظام المكامل الذي استجابته النبضية $h(t) = u(t)$، فإننا نجد أن هذا النظام غير مستقر لأن تكامل الاستجابة النبضية غير منتهي. وهذا منطقي لأننا إذا أخذنا مثلاً إشارة دخل ثابتة $x(t) = a$ وهي إشارة محدودة بالمطال، فإن خرج النظام الذي هو تكامل هذه الإشارة غير محدود. وبالتالي فإن نظام المكامل هو نظام سببي ولكن هو غير مستقر.

5. الاستجابة الخطوية (Step response)

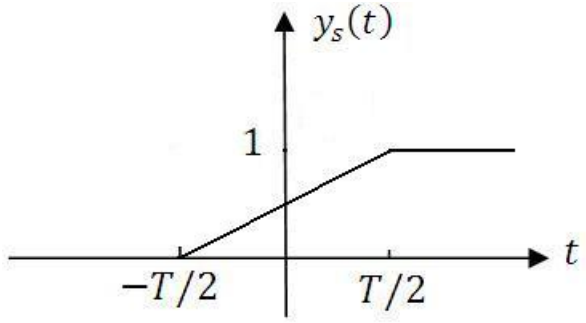
نعرف الاستجابة الخطوية لنظام، بأنها إشارة خرج النظام عندما تكون إشارة الدخل هي إشارة الخطوة $x(t) = u(t)$. فإذا كانت الاستجابة النبضية للنظام هي $h(t)$ فتكون الاستجابة الخطوية

$$y_s(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} h(u) dt$$

وهي عبارة عن تكامل الاستجابة النبضية. وتعبر بشكل عملي عن كيفية تغير استجابة النظام عند حدوث تغير في إشارة الدخل.

على سبيل المثال، لنعتبر نظام القيمة المتوسطة الذي سبقت دراسته في هذا الفصل. لنحسب استجابته الخطوية

$$y_s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(u) dt = \begin{cases} 0 & t < -\dfrac{T}{2} \\ \dfrac{t}{T} + \dfrac{1}{2} & -\dfrac{T}{2} \le t \le \dfrac{T}{2} \\ 1 & t > \dfrac{T}{2} \end{cases}$$



الاستجابة الخطوية لنظام القيمة المتوسطة. :10-**Error! No text of specified style in document.**

وهو يدل على أنه عندما يتغير الدخل فجأة، فإن الخرج سيتغير بشكل خطي تدريجياً من قيمة الوسطية للإشارة قبل حدوث التغير إلى القيمة الوسطية الجديدة للإشارة بعد التغير. فإذا فرضنا مثلاً أن نظام القيمة الوسطية يعبر عن نظام محرك تيار مستمر بحيث تكون سرعته متناسبة مع القيمة الوسطية للتيار المطبق، فإن أي تغير مفاجئ في التيار المطبق سوف يسبب تغيراً تدريجياً من السرعة البدائية إلى السرعة النهائية وذلك بشكل خطي، حيث يدوم هذا الانتقال فترة زمنية قدرها T.

أسئلة وتمارين الفصل الثاني
الإشارات والنظم المستمرة

1– أجب عن الأسئلة التالية:

1. عرف الاستجابة النبضية لنظام خطي غير متغير مع الزمن.
2. ما هي علاقة إشارة الخرج $y(t)$ بإشارة الدخل $x(t)$ في نظام خطي غير متغير مع الزمن ذو الاستجابة النبضية $h(t)$.
3. ما هو الشرط على تابع الاستجابة النبضية $h(t)$ لنظام LTI حتى يكون سببياً.
4. ما هو الشرط على تابع الاستجابة النبضية $h(t)$ لنظام LTI حتى يكون مستقراً.
5. عرف الاستجابة الخطوية لنظام خطي غير متغير مع الزمن.

2– ليكن لدينا النظام المستمر المعطى بعلاقة الدخل/خرج التالية:

$$y(t) = x(t-\tau) - x(t+\tau)$$

1. هل هذا النظام خطي، وهل هو غير متغير مع الزمن مع التعليل.
2. بين ما هي الاستجابة النبضية لهذا النظام.
3. هل هذا النظام سببي مع التعليل.
4. هل هذا النظام مستقر مع التعليل.
5. ماذا تقترح لكي نستطيع تنفيذ هذا النظام عملياً.

مساعدة راجعة: تطبيق مباشر للتعاريف الأساسية ومراجعة فقرة السببية في الفصل من أجل الاقتراح المطلوب.

3– ليكن لدينا النظام المستمر المعطى بتابع الاستجابة النبضية التالي:

$$h(t) = au(t)$$

حيث a عدد حقيقي.

1. ادرس سببية واستقرار هذا النظام.
2. ما هي إشارة خرج النظام $y(t)$ من أجل إشارة دخل ما $x(t)$. ما هو عمل هذا النظام.
3. احسب إشارة الخرج $y_1(t)$ من أجل إشارة الدخل التالية: $x_1(t) = e^{-2t}u(t)$.

مساعدة راجعة: تطبيق مباشر للتعاريف الأساسية ومراجعة علاقة الخرج كجداء تلاف بين الاستجابة النبضية والإشارة المطبقة.

4– ليكن لدينا النظام المستمر المعطى بتابع الاستجابة النبضية التالي:

$$h(t) = r_T(t) = \begin{cases} 1/T & |t| \le T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases}$$

1. ادرس سببية واستقرار هذا النظام.
2. احسب إشارة الخرج $y_1(t)$ من أجل إشارة الدخل التالية:

$$x_1(t) = \cos(2\pi f t)$$

حيث أن f هو عدد حقيقي موجب تماماً.

3. احسب الاستطاعة المتوسطة لإشارة الدخل $x_1(t)$.
4. احسب الاستطاعة المتوسطة لإشارة الخرج، ثم ارسم النسبة بين الاستطاعة المتوسطة لإشارة الخرج والاستطاعة المتوسطة لإشارة الخرج، أي $P_\infty(x)/P_\infty(y)$ بدلالة f وذلك من أجل $T = 1$. ماذا تلاحظ حول أثر هذا النظام على الإشارات المتناوبة؟

مساعدة راجعة: تطبيق مباشر للتعاريف الأساسية ومراجعة علاقة الخرج كجداء تلاف بين الاستجابة النبضية والإشارة المطبقة. والاستفادة من دورية الإشارة في حساب الاستطاعة المتوسطة.

5– ليكن لدينا النظام المستمر المعطى بتابع الاستجابة النبضية التالي:

$$h(t) = e^{-t/2}u(t)$$

1. ادرس سببية واستقرار هذا النظام.
2. احسب إشارة الخرج $y_1(t)$ من أجل إشارة الدخل التالية:

$$x_1(t) = u(t-2) - u(t-6)$$

3. احسب خرج النظام $y_2(t)$ من أجل إشارة الدخل التالية: $x_2(t) = \frac{dx_1(t)}{dt}$. ماهي العلاقة بين $y_2(t)$ و $y_1(t)$.
4. احسب الاستجابة الخطوية للنظام $y_s(t)$.

مساعدة راجعة: تطبيق مباشر للتعاريف الأساسية ومراجعة علاقة الخرج كجداء تلاف بين الاستجابة النبضية والإشارة المطبقة. أعد كتابة إشارة الدخل بعد رسمها كنبضة مستطيلة والانتباه إلى أن مشتق تابع عند نقاط عدم الاستمرارية هو نبضة ديراك موزنة بمقدار القفزة كما هو مبين في فقرة إشارة الخطوة الواحدية.

إجابات – حلول التمارين السابقة

السؤال الأول:

1. الاستجابة النبضية لنظام هي خرج هذا النظام عندما يكون دخله نبضة ديراك.
2. علاقة الخرج بالدخل

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)x(t-u)\,du$$

3. شرط سببية النظام

$$h(t) = 0 \quad for \quad t < 0$$

4. شرط استقرار النظام

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt < \infty$$

5. الاستجابة الخطوية لنظام هي خرج هذا النظام عندما يكون دخله إشارة الخطوة الواحدية.

السؤال الثاني:

1. هذا النظام خطي لأن أي تركيب خطي لإشارات الدخل يعطي نفس التركيب الخطي لإشارات الخرج. حيث يمكن التحقق بسهولة من

$$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \rightarrow a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$$

هذا النظام غير متغير مع الزمن لأن أي إزاحة زمنية في إشارة الدخل تؤدي إلى نفس الإزاحة الزمنية في إشارة الخرج.

$$x(t-\tau) \rightarrow y(t-\tau)$$

2. الاستجابة النبضية: نعلم أن الاستجابة النبضية لنظام التأخير الزمني هو نبضة ديراك مزاحة. وبما أن هذا النظام عبارة عن فرق بين إشارتين الأولى بتأخير بمقدار τ والأخرى بتسبيق بمقدار τ فإن الاستجابة النبضية هي:

$$h(t) = \delta(t-\tau) - \delta(t+\tau)$$

ويمكن التحقق من ذلك بحساب إشارة الخرج

$$y(t) = h(t) * x(t) = x(t) * \delta(t-\tau) - x(t)\delta(t+\tau) = x(t-\tau) - x(t+\tau)$$

3. النظام غير سببي لأن $h(t) \neq 0$ من أجل $t < 0$.
4. النظام مستقر لأن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\delta(t-\tau) - \delta(t+\tau)|dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (\delta(t-\tau) + \delta(t+\tau))dt = 2 < \infty$$

5. بما أن تابع الاستجابة النبضية ذو امتداد زمني محدود، فيمكن تطبق تأخير زمني بمقدار τ حتى يصبح تابع الاستجابة النبضية معدوم في اللحظات السالبة. أي

$$g(t) = h(t-\tau) = \delta(t-2\tau) - \delta(t)$$

السؤال الثالث:

1. النظام سببي لأن $h(t) = 0$ من أجل $t < 0$. كما أنه غير مستقر لأن

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |au(t)|dt = a\int_{0}^{+\infty} 1dt = \infty$$

2. من أجل إشارة دخل $x(\mathrm{t})$، تكون إشارة الخرج

$$y(t) = h(t) * x(\mathrm{t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-u)x(u)\,du = a\int_{-\infty}^{t} x(u)\,du$$

وهذا يعني أن النظام هو مكامل معر ضرب بمعامل.

3. إشارة الخرج هي

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-2u}u(t)\,du$$

الحالة الأولى:

$$t < 0, y_1(t) = 0$$

الحالة الثانية:

$$t > 0, \qquad y_1(t) = \int_{0}^{t} e^{-2u}\,du = \frac{-1}{2}[e^{-2u}]_0^t du = \frac{1}{2}(1-e^{-2t})$$

بدمج النتيجتين السابقتين نجد:

$$y_1(t) = \frac{1}{2}(1-e^{-2t})u(t)$$

السؤال الرابع:

1. هذا النظام غير سببي لأن $h(t) \neq 0$ من أجل $t < 0$. والنظام مستقر لأن

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} 1dt = 1 < \infty$$

2. لنحسب إشارة الخرج

$$y_1(t) = h(t) * x(\mathrm{t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-u)x(u)\,du = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} x(u)\,du$$

$$y_1(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} [\cos(2\pi ft)]\,du = \frac{1}{T}\left[\frac{1}{2\pi f}\sin(2\pi ft)\right]_{t-T/2}^{t+T/2}$$

$$y_1(t) = \frac{1}{2\pi fT}\left[\sin\left(2\pi f\left(t+\frac{T}{2}\right)\right) - \sin\left(2\pi f\left(t-\frac{T}{2}\right)\right)\right]$$

$$y_1(t) = \frac{1}{\pi f T}[\sin(\pi f T)\cos(2\pi f t)]$$

وهنا نلاحظ أن

$$y_1(t) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} x_1(t)$$

أي أن إشارة الدخل خرجت من النظام كما هي مع معامل ضرب يعتمد على قيمة تردد الإشارة f.

3. الإشارة دورية بدور $1/f$ ولذلك تكون الاستطاعة المتوسطة، بالحساب نجد:

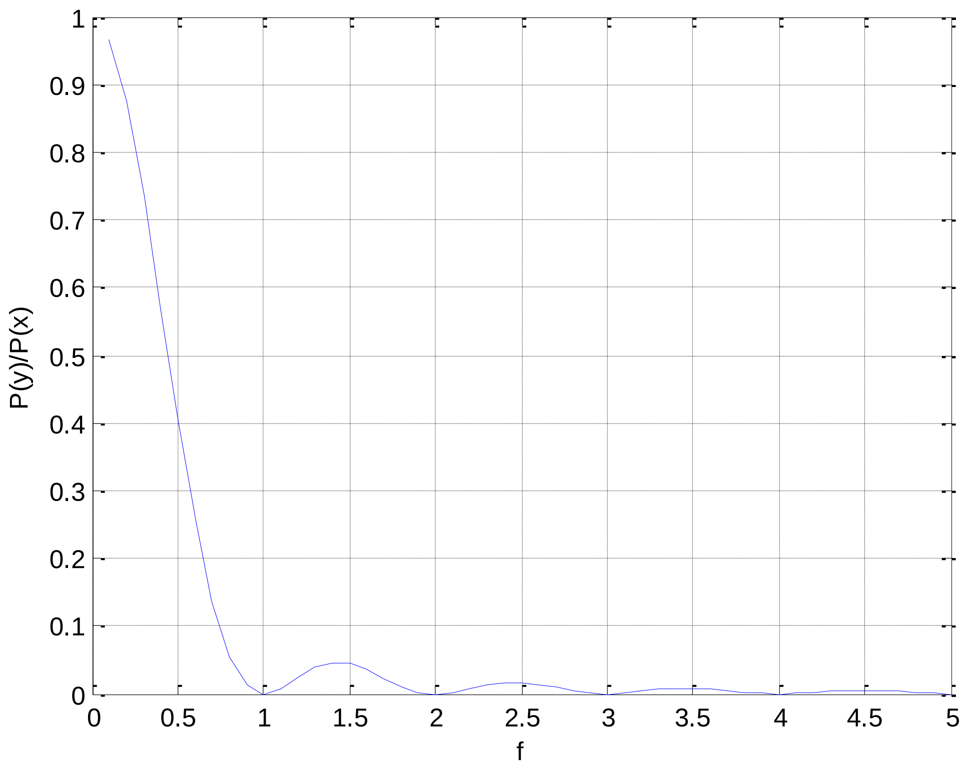
$$P_\infty = \frac{1}{1/f}\int_0^{1/f} |x_1(t)|^2 dt = 1/2$$

4. إشارة الخرج هي أيضاً دورية بدور $1/f$ والاستطاعة المتوسطة هي

$$P_\infty = \frac{1}{1/f}\int_0^{1/f} |y_1(t)|^2 dt = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}\right)^2$$

وبالتالي تكون النسبة في الاستطاعة المتوسطة بين إشارة الخرج وإشارة الدخل هي

$$P_\infty(y)/\ P_\infty(x) = \left(\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}\right)^2$$



وهنا نلا حظ أن الاستطاعة المتوسطة لإشارة الخرج تناقص بشكل متأرجح كما زاد التردد وتنعدم من أجل الترددات$f = \frac{k}{T}, k = 1, 2, \dots, +\infty$.

السؤال الخامس:

1. النظام سببي لأن $h(t) = 0$ من أجل $t < 0$. كما أنه غير مستقر لأن

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-t/2} dt = 2 < \infty$$

2. يمكن إعادة كتابة الإشارة $x_1(t)$ بالشكل التالي:

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & 2 \le t \le 6 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$y_1(t) = h(t) * x_1(\mathrm{t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-u)x(u)\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-0.5(t-u)} u(t-u) x_1(u)\, du$$

$$y_1(t) = \int_{2}^{6} e^{-0.5(t-u)} u(t-u)\, du = \int_{t-6}^{t-2} e^{-0.5v} u(v)\, du$$

وهنا نميز ثلاث حالات:

$$t - 2 < 0, \qquad y_1(t) = 0$$

$$t - 6 < 0, t - 2 > 0, \qquad y_1(t) = \int_{0}^{t-2} e^{-0.5v}\, du = 2\left(1 - e^{-0.5(t-2)}\right)$$

$$t - 6 > 0, \qquad y_1(t) = \int_{t-6}^{t-2} e^{-0.5v}\, du = 2(e^{-0.5(t-6)} - e^{-0.5(t-2)})$$

$$y_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 2 \\ 2(1 - e^{-0.5(t-2)}) & 2 \le t \le 6 \\ 2(e^{-0.5(t-6)} - e^{-0.5(t-2)}) & t > 6 \end{cases}$$

3.

$$x_2(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} = \delta(\mathrm{t} - 2) - \delta(\mathrm{t} - 6)$$

$$y_2(t) = h(t) * x_2(t) = h(t-2) - h(t-6)$$

$$y_2(t) = e^{-(t-2)/2} u(t-2) - e^{-(t-6)/2} u(t-6)$$

$$y_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 2 \\ e^{-0.5(t-2)} & 2 \le t \le 6 \\ e^{-0.5(t-2)} - e^{-0.5(t-6)} & t > 6 \end{cases}$$

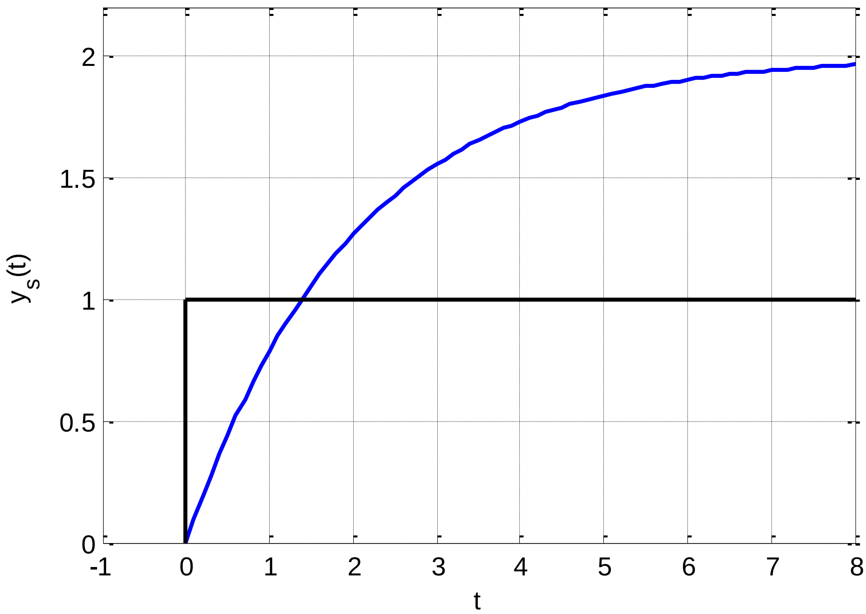
وهنا نلاحظ أن

$$y_2(t) = \frac{dy_1(t)}{dt}$$

4. الاستجابة الخطوية

$$y_s(t) = h(t) * u(t) = \int_0^{\infty} h(t-u)du = \int_0^{\infty} e^{-(t-u)/2} u(t-u)du$$

$$y_s(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-v/2} u(v)dv = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2(1 - e^{-\frac{t}{2}}) & t \geq 0 \end{cases}$$



تحويل فورييه للإشارات المستمرة

الكلمات المفتاحية:

سلاسل فوريه، تحويل فوريه، تحويل فوريه العكسي.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعريف بتحويل فوريه للإشارات الدورية وغير الدورية وكذلك التعريف بتحويل فوريه العكسي. حيث نبين الخواص الأساسية لهذا التحويل ومبدأ انحفاظ الطاقة بين المجالين الزمني والترددي كنتيجة لنظرية بارسفال. ومن ثم نبين تحويل فوريه لبعض الإشارات الأساسية ودلالة المحتوى الترددي لهذه الإشارات.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- سلاسل فوريه للإشارات الدوريه.
- تحويل فوريه للإشارات المستمرة وتحويل فوريه العكسي.
- خواص تحويل فوريه.
- تحويل فوريه لبعض الإشارات الأساسية.

يهدف هذا الفصل إلى التعريف بتحويل فورييه للإشارات الدورية وغير الدورية وكذلك التعريف بتحويل فورييه العكسي. حيث نبين الخواص الأساسية لهذا التحويل ومبدأ انحفاظ الطاقة بين المجالين الزمني والترددي كنتيجة لنظرية بارسفال. ومن ثم نبين تحويل فورييه لبعض الإشارات الأساسية ودلالة المحتوى الترددي لهذه الإشارات.

1. مقدمة (Introduction)

يعتبر تحويل فورييه أكثر التقنيات شيوعاً واستخداماً في معالجة الإشارة وهو عبارة عن صيغة رياضية تحوّل التوابع في المجال الزمني $x(t)$ إلى تمثيلها في المجال الترددي $\tilde{x}(f)$ حيث يمكن وبسهولة تحليل المحتوى الترددي للإشارة. وذلك مما يسهل فهم وتحليل استجابة النظم الخطية الغير متغيرة مع الزمن في المجال الترددي. فإذا أخذنا الإشارة الصوتية على سبيل المثال، فإننا نصف صوتاً بأنه حاد إذا كان يحوي على مركبات ترددية عالية ونصف الصوت بأنه خشن إذا كان يحوي بشكل أساسي على مركبات ترددية منخفضة. وبالتالي فإن توصيفنا للإشارة الصوتية المسموعة يرتكز على المحتوى الترددي لها وليس بناءً على شكل الإشارة الصوتية في المجال الزمني. ويمتد ذلك على الأنظمة الخطية أو المرشحات الخطية حيث نصف عمل مرشح بأنه مرشح تمرير منخفض (Low Pass Filter– LPF) عندما يسمح بمرور الترددات المنخفضة ويمنع مرور المركبات الترددية العالية. والعكس بالعكس عندما نتكلم عن مرشح تمرير مرتفع (High Pass Filter– HPF).

سنقوم في بداية هذا الفصل بعرض سلاسل فورييه للإشارات الدورية التي تحلل المركبات الترددية للإشارات الدورية، ثم ننتقل إلى تحويل فورييه الذي يحلل جميع الإشارات الدورية وغير الدورية إلى مركباتها الترددية.

2. سلاسل فورييه (Fourier series)

تعتبر سلاسل فورييه نوعاً خاصاً من السلاسل الرياضية غير المنتهية (series infinite) والتي تحوي التوابع المثلثية. وقد أخذت اسمها نسبة إلى عالم الرياضيات والفيزياء الفرنسي الشهير فورييه (Fourier) الذي عاش خلال القرنين الثامن عشر والتاسع عشر. تستخدم سلاسل فورييه في الرياضيات التطبيقية وخصوصاً في الفيزياء والالكترونيات لتمثيل التوابع الدورية أو حتى الإشارات ذات الامتداد الزمني المحدود وذلك بعد تحويلها إلى إشارة دورية بتكرارها بالزمن بدور معين T أكبر من امتدادها الزمني.

كما نعلم تكون الإشارة $x_p(t)$ دورية periodic إذا وُجد مقدارٌ حقيقي موجب وغير معدوم T بحيث:

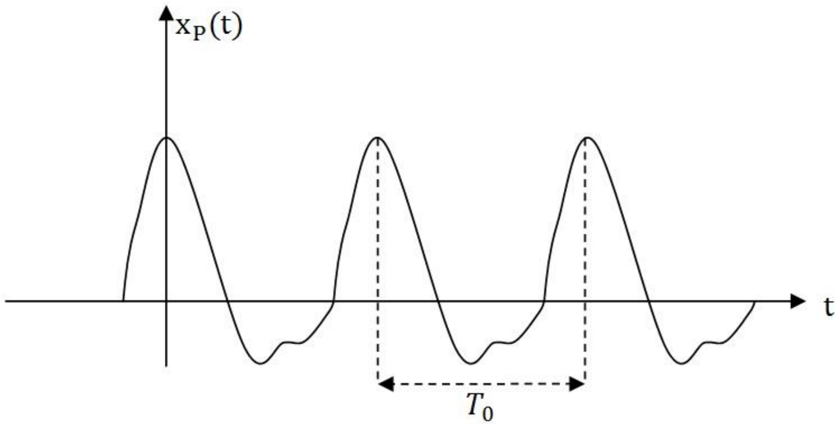
$$x_p(t) = x_p(t+T) \qquad \forall t$$

نسمي أصغر قيمة حقيقية موجبة T_0 مغايرة للصفر وتحقق العلاقة السابقة الدور الأساسي للإشارة (fundamental period) أو دور الإشارة. ونسمي المقدار $F_0 = \frac{1}{T_0}$ التردد الأساسي للإشارة (fundamental frequency). ونسمي المقدار $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ التردد الزّاوي الأساسي.

إذا كانت الإشارة الدورية $x_p(t)$ قابلة للتمثيل بسلسلة فورييه فإنها تكتب بالشكل التالي:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{2\pi j\frac{k}{T}t}$$

أي أنّه يمكن تمثيل الإشارة الدورية كمجموع من المركبات الترددية عند الترددات $\frac{k}{T}$ من $k = -\infty$ إلى $k = +\infty$ مُثقّلة بثوابت النشر c_k التي تمثل مطالات عقدية لهذه المركبات. ونلاحظ أن جميع المركبات $e^{2\pi j\frac{k}{T}t}$ هي إشارات دورية، تقبل T دوراً لها.



الشكل **.Error! No text of specified style in document**-1: إشارة دورية.

لحساب الثوابت c_k يمكن أن نضرب طرفي العلاقة السابقة بالحد $e^{-2\pi j\frac{k}{T}t}$ ثم نكامل على دور واحد ونقسم على طول الدور T. وتعني هذه العملية حساب الجداء الداخلي للإشارة $x_p(t)$ بالمركبة $e^{2\pi j\frac{k}{T}t}$ أي حساب مسقط الإشارة على هذه المركبة، لأن الجداء الداخلي لإشارتين دوريتين بالتعريف هو القيمة المتوسطة على دور لجداء الإشارة الأولى بمرافق الإشارة الثانية، أي $x_{p1}x_{p2} = \frac{1}{T}\int_T x_{p1}(t)x_{p2}{}^*dt$ وبذلك تعطى ثوابت النشر c_k بالعلاقة التالية:

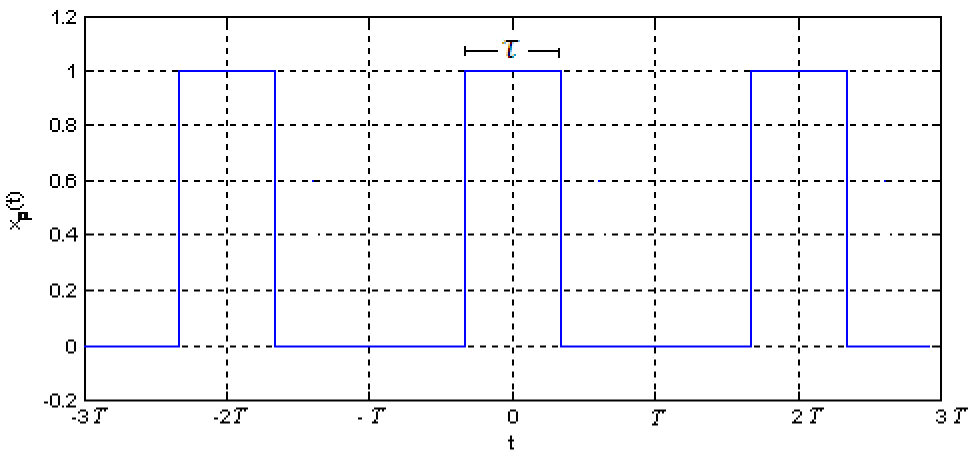
$$c_k = \frac{1}{T}\int_T x_p(t)e^{-2\pi j\frac{k}{T}t}dt$$

ويؤخذ التكامل على مجال زمني طوله دور واحد T مثلاً من $-\frac{T}{2}$ وحتى $+\frac{T}{2}$ أو من 0 وحتى T.

يعني نشر بسلسلة فورييه لإشارة دورية دورها T أنّ هذه الإشارة هي مجموع مركبات عقدية من الشكل $c_k e^{2\pi j\frac{k}{T}t}$ عند الترددات $\frac{k}{T}$ مطالاتها هي $A_k = |c_k|$ وأطوارها هي $\varphi_k = Arg[c_k]$. أي أنها تتضمن المركبة المستمرة c_0 عند التردد 0 إضافة إلى المركبات الترددية الموجبة والسالبة حسب قيمة k من مضاعفات المركبة الأساسية أو التوافقية الأولى $\frac{1}{\mathrm{T}}$.

تشكل الإشارات الدورية $e^{2\pi j\frac{k}{T}t}$ قاعدة متعامدة نظامية (orthonormal base) في الفضاء الشعاعي المُشكّل من الإشارات الدورية التي دورها T والتي تقبل نشر فورييه. كما أنّ معرفة أمثال نشر فورييه للإشارة هي تمثيل للإشارة في المجال الترددي. وإذا أردنا تمثيل الإشارة بيانياً فيجب أن يجري ذلك على مخططين بيانيين بدلالة التردد، لأنّ هذه الأمثال عقدية في الحالة العامة. حيث يمكن تمثيل القيم الحقيقية والقيم العقدية لهذه الأمثال عند المركبات الترددية $\frac{k}{\mathrm{T}}$. إنما يجري عادة تمثيل المطال والطور لهذه الأمثال ونحصل عند ذلك على طيف المطال (amplitude spectrum) وطيف الطور (phase spectrum).

مثال: لنحسب معاملات نشر سلسلة فورييه للإشارة الدورية $x_p(t)$ الناتجة عن تكرار الإشارة الممستطيلة $r_\tau(t)$ بعرض τ وبدور مقداره T المبينة في الشكل التالي:



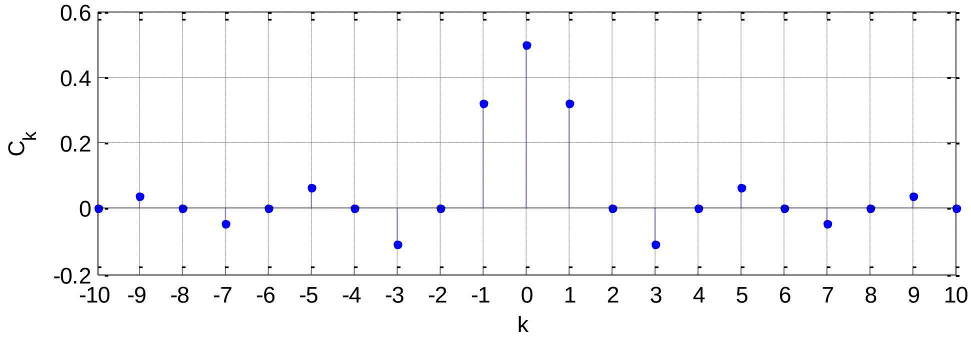
الشكل **Error! No text of specified style in document.**-1: الإشارة المستطيلة الدورية.

$$c_k = \frac{1}{T}\int_T x_p(t)e^{-2\pi j\frac{k}{T}t}dt = \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} 1.e^{-2\pi j\frac{k}{T}t}dt = \frac{1}{T}\left[\frac{e^{-2\pi j\frac{k}{T}t}}{-2\pi j\frac{k}{T}}\right]_{-\tau/2}^{\tau/2}$$

$$c_k = \frac{1}{T}\frac{1}{2\pi j\frac{k}{T}}\left[e^{\pi j\frac{k}{T}\tau} - e^{-\pi j\frac{k}{T}\tau}\right] = \frac{\tau}{T}\frac{\sin(\pi k\tau/T)}{\pi k\tau/T} = \frac{\tau}{T}sinc(k\tau/T)$$

حيث: $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$.

في حالة $\tau = T/2$ نجد: $c_k = \frac{1}{2}\frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2}$.



الشكل .**Error! No text of specified style in document**-2: معاملات نشر فورييه للإشارة الدورية المستطيلة.

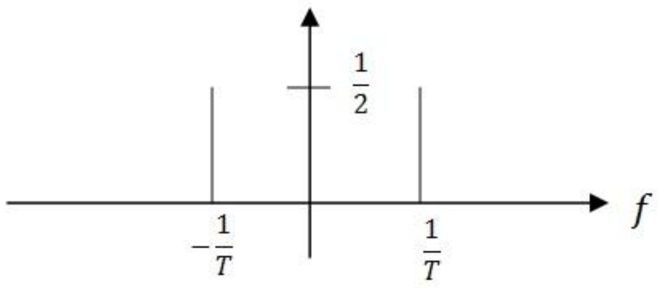
1.2. معنى التردد السالب (Meaning of negative frequency)

إن مصطلح "الترددات السالبة هو معنى رياضيٌّ فقط (وليس فيزيائياً) على غرار الجزء التخيلي من إشارة العقدية.

بفرض لدينا الإشارة الجيبية الممثلة بالعلاقة التالية:

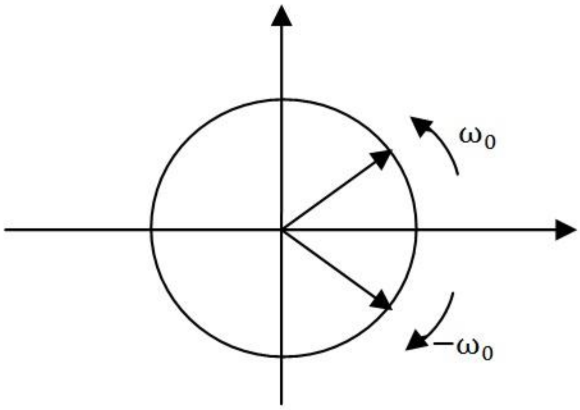
$$x_p(t) = cos\left(2\pi\frac{k}{T}t\right) = \frac{1}{2}\left[e^{2\pi j\frac{k}{T}t} + e^{-2\pi j\frac{k}{T}t}\right]$$

يحوي طيف هذه الإشارة مركبتين عند الترددين $\frac{1}{T}$ و $-\frac{1}{T}$ ومطال كلٍّ منهما $\frac{1}{2}$ كما في الشكل التالي:



الشكل .**Error! No text of specified style in document**-3: المركبات الترددية للإشارة الجيبية.

يمكن تمثيل المركّبة $e^{2\pi jf_0t}$ بالإحداثيات القطبية بشعاع فرنل (Fresnel) بطول واحدي (1) يدور حول المبدأ بسرعة f_0 دورة/ ثانية أو بسرعةٍ زاويّةٍ قدرها ω_0 راديان/ ثانية. عندها تبدو الإشارة الجيبية الحقيقية $\cos(2\pi f_0 t)$ كأنها مجموع لمركبتين ممثَّلتين بشعاعي فرنل متناظرين ويدوران باتجاهين متعاكسين، حيث يدور الشعاع الأول بسرعةٍ زاويّةٍ $\omega_0 = 2\pi f_0$ بينما يدور الشعاع الثاني بسرعةٍ زاويّةٍ $-\omega_0 = 2\pi f_0$ كما هو موضح في الشكل التالي.



الشكل .Error! No text of specified style in document-4: شعاعي فرنل للإشارة الجيبية.

وبالتالي يمثل التردد السالب مركبة عقدية ولكن تدور صفحتها بالاتجاه السالب.

3. تعريف تحويل فورييه (Definition of Fourier transform)

يمكن تعميم سلاسل فورييه للإشارات الدورية إلى الإشارات الغير دورية باعتبار أن الإشارة الغير دورية هي إشارة دورية ولكن بدور لانهائي. حيث يتحول الطيف الترددي المتقطع للإشارات الدورية المفصولة فيما بينها تردديا بمقدار $1/T$ إلى طيف مستمر عندما يسعى T إلى اللانهاية ويتحول المجموع إلى تكامل ونستخدم الترميز $\breve{x}(f)$ المستمر بدل من المعاملات c_k المتقطعة للدلالة على مطال المركبات الترددية.
يعتبر تحويل فورييه أداة رياضية تسمح بتحليل أي إشارة إلى مجموع من عدّة إشارات جيبية أساسية وهي الإشارات الأسّية العقدية أو الجيبية العقدية من الشكل $\exp(j\omega t)$. أي تمثيل الإشارة في المجال الترددي. حيث يمكن باستخدام تحويل فورييه تمثيل إشارة ما كمجموع مستمر (تكامل) من الإشارات الجيبية العقدية $\exp(j\omega t)$، كما في المعادلة التالية.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \breve{x}(f) e^{2\pi jft} df$$

حيث تظهر الإشارة كمجموع من المركبات الترددية $\exp(2\pi jft)$ مُثقّلة بالأمثال $\breve{x}(f)$ والتي تعبّر عن المطالات العقدية (complex amplitudes) للمركبات الترددية. إنّ العلاقة السابقة هي تحويل فورييه العكسي حيث $\breve{x}(f)$ هو تحويل فورييه للإشارة $x(t)$ وهو تابع عقدي للمتحول الحقيقي f (التردد).
يعطى تحويل فورييه $\breve{x}(f)$ للإشارة $x(t)$ بالعلاقة:

$$\breve{x}(f) = FT[\breve{x}(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \breve{x}(f) e^{-2\pi jft}\, dt$$

حيث $j = \sqrt{-1}$ و f يمثل التردد.

4. تحويل فورييه العكسي (IFT) (Inverse Fourier Transform)

إنّ تحويل فورييه لإشارة هو تمثيل لها، لذلك يمكن استنتاج الإشارة $x(t)$ باستخدام تحويل فورييه العكسي وفق العلاقة التالية:

$$x(t) = FT^{-1}[\tilde{x}(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}(f)e^{2\pi jft}\,df$$

تبقى علاقة تحويل فورييه العكسي صحيحة حتى في حال وجود نقاط عدم استمرار في الإشارة (قفزات)، إنّما يتقارب التكامل في نقاط عدم الاستمرار هذه إلى القيمة الوسطى $\frac{x(t_+)+x(t_-)}{2}$.

إنّ البعد الفيزيائي للتردد f هو مقلوب الزمن ويقاس بالهرتز (Hz)، كما يرتبط بالتردد الزّاوي أو النبضي ω والذي يقاس بالراديان/ ثانية (rad/s) بالعلاقة $\omega = 2\pi f$ يستخدم التردد الزاوي ω عند شرح مخطط بود.

ويمكن أن نكتب علاقة تحويل فورييه بدلالة التردد الزّاوي ω بالشكل التالي.

$$\tilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

بالتالي يمكن أن نكتب تحويل فورييه العكسي بدلالة التردد الزّاوي ω بالشكل التالي:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{X}(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

نلاحظ أن هاتين العلاقتين تقابلان تماماً العلاقتين (6) و(7) بتبديل ω بقيمتها $2\pi f$ ويُفضل غالباً استخدام (6) و(7) لأنهما تُظهران تناظراً تاماً بين تحويل فورييه وتحويل فورييه العكسي. يرتبط التابعان $\tilde{x}(f)$ و $\tilde{X}(\omega)$ بالعلاقتين التاليتين:

$$\tilde{X}(\omega) = \tilde{x}(\frac{\omega}{2\pi})$$

$$\tilde{x}(f) = \tilde{X}(2\pi f)$$

تعطي علاقة تابع تحويل فورييه العكسي تمثيلاً للإشارة $x(t)$ كمجموع مستمر (تكامل) من الإشارات الأسية العقدية (المركبات الترددية) $e^{2\pi jft}$ لكل الترددات على كامل المحور الترددي من $-\infty$ وحتى $+\infty$ مُثقّلة بالمعاملات $\tilde{x}(f)$ والتي تمثل المطالات العقدية للمركبات الترددية. وتعتبر علاقة تحويل فورييه (6) علاقة تحليل بينما تعتبر علاقة تحويل فورييه العكسي (7) علاقة تركيب. كما أنّ تحويل فورييه هو تمثيل للإشارة لأنه يمكن الانتقال من الإشارة إلى تحويل فورييه لها وبالعكس. إضافة إلى أنه يعطي تمثيلاً جديداً للإشارة على المحور الترددي بدلاً من التمثيل الزمني، وذلك بمعرفة المطال العقدي $\tilde{x}(f)$ عند كل تردد من $-\infty$ وحتى $+\infty$.

5. خواص تحويل فورييه(Properties of Fourier transform)

يعتبر تحويل فورييه حجر الأساس في تحليل وتمثيل النظم غير المتغيرة مع الزمن، وتأتي هذه الأهمية خصائصه التي سنناقشها فيما يلي.

1.5. الخطية (Linearity)

تعني خاصية الخطية أن تحويل فورييه لتركيب خطي من عدة إشارات يعطي التركيب الخطي نفسه من تحويلات فورييه لهذه الإشارات. فإذا كان $\tilde{x}_1(f), \tilde{x}_2(f)$ هما تحويلا فورييه FFT للإشارتين $x_1(t), x_2(t)$ على الترتيب، وكانت λ_1, λ_2 ثوابت عقدية فإن:

$$\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t) \xrightarrow{FT} \lambda_1 \tilde{x}_1(f) + \lambda_1 \tilde{x}_2(f)$$

2.5. التناظرأو المثنوية (Symmetry or Duality)

إن خاصة التناظر لتحويل فورييه تنص على أنه إذا قمنا بتحويل فورييه للإشارة مرتين فإننا نحصل على نفس الإشارة ولكن معكوسة بالزمن. أي

$$x(t) \xrightarrow{FT} \tilde{x}(f) \xrightarrow{FT} x(-t)$$

يمكن برهنة ذلك بالشكل التالي:

$$FT[\tilde{x}(f)](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}(f) e^{-2\pi jft} df = FT^{-1}[\tilde{x}(f)](-t) = x(-t)$$

3.5. عكس الزمن (Time reversing)

إذا كان $y(t) = x(-t)$، فإنّ $\tilde{y}(f) = \tilde{x}(-f)$. ومنه نلاحظ أنه إذا كانت الإشارة $x(t)$ زوجية $(x(t) = x(-t))$ فإن تحويل فورييه لها يكون زوجياً أيضاً $(\tilde{x}(f) = \tilde{x}(-f))$. أمّا إذا كانت الإشارة $x(t)$ فردية $(x(t) = -x(-t))$ فإن تحويل فورييه لها يكون فردياً أيضاً $(\tilde{x}(f) = -\tilde{x}(-f))$.

4.5. تغيير سلم الزمن (Time scaling)

إذا كان $y(t) = x(\alpha t)$ حيث α عدد حقيقي، فإنّ $\tilde{y}(f) = \frac{1}{|\alpha|}\tilde{x}(\frac{f}{\alpha})$.

نلاحظ هنا المثنوية بين التردد والزمن ونرى أن التضيق أو الضغط (compressing) في المجال الزمني يقابله توسيع (stretching) في المجال الترددي والعكس صحيح. كما نلاحظ أيضاً أن خاصة عكس الزمن هي حالة خاصة من تغيير سلم الزمن بوضع $\alpha = -1$.

5.5. المرافق العقدي (Complex conjugate)

إذا كان $y(t) = x^*(t)$ (النجمة * تشير إلى المرافق العقدي)، فإنّ $\tilde{y}(f) = \tilde{x}^*(-f)$.

وهذا يعني أنه إذا كانت الإشارة $x(t)$ حقيقية (أي $x(t) = x^*(t)$) فإن تحويل فورييه لها يحقق الخاصة التالية: $\tilde{x}(f) = \tilde{x}^*(-f)$ وهذا ما نسميه خاصة التناظر الترافقي أو الهيرميتي (Hermitian symmetry) وتعني أن مطال الإشارة زوجيٌ بينما الطور فرديٌ، أو أن القسم الحقيقي للإشارة زوجيٌ بينما القسم التخيلي فردي. مما تقدم نخلص إلى أنه وبسبب التناظر فإن الترددات الموجبة كافية لوحدها لتمثيل إشارة حقيقية ولا تضيف الترددات السالبة أي معلومات جديدة.

6.5. الانزياح الزمني (Time shifting)

إذا كان $y(t) = x(t - \tau)$ حيث τ ثابت حقيقي، فإن $\tilde{y}(f) = e^{-2\pi f\tau}\tilde{x}(f)$.

تنتج الإشارة $y(t)$ عن تأخير $x(t)$ بمقدار τ أي إزاحة $x(t)$ نحو اليمين إذا كان τ موجباً أو تسبيق $x(t)$ بمقدار τ أي إزاحة $x(t)$ نحو اليسار إذا كان τ سالباً.

نلاحظ من العلاقة السابقة أن الانزياح الزمني لا يؤثر في طيف مطال تحويل فورييه إنما يعطي إزاحة خطية في الطور أي إزاحة متناسبة مع التردد ($\varphi(f) = -2\pi f\tau$). وينتج عن التأخير إزاحة سالبة في الطور بينما ينتج عن التسبيق إزاحة موجبة (وذلك عند الترددات الموجبة).

7.5. الانزياح الترددي (Frequency shifting)

ينتج الانزياح الترددي أو التعديل (modulation) عن ضرب الإشارة بمركبة جيبية (عقدية)، فإذا كان $y(t) = e^{2\pi f_0 t}x(t)$ حيث f_0 ثابت حقيقي فإن $\tilde{y}(f) = \tilde{x}(f - f_0)$.

أي أن ضرب الإشارة $x(t)$ بمركبة ترددية $e^{2\pi f_0 t}$ يؤدي إلى انزياح ترددي بمقدار f_0. وهذا ما يسمى تعديلاً (في هذه الحالة هو تعديل مطالي) لأنه جرى تعديل مطال الإشارة الجيبية العقدية $e^{2\pi f_0 t}$ بالإشارة $x(t)$. بالتالي يمكن اعتبار أن الإشارة $y(t) = e^{2\pi f_0 t}x(t)$ هي إشارة جيبية عقدية ترددها f_0 ومطالها هو الإشارة $x(t)$.

8.5. التفاضل في المجال الزمني (Differentiation in time domain)

إذا كان $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ فإن $\tilde{y}(f) = 2\pi jf\tilde{x}(f)$. إنّ هذه العلاقة صحيحة فقط إذا كان تحويل فورييه للمشتق موجوداً ويمكن تعميم العلاقة السابقة في حال الاشتقاق من المرتبة n لتصبح: $\frac{d^n x(t)}{dt^n} \overset{FT}{\leftrightarrow} (2\pi jf)^n\tilde{x}(f)$.

9.5.التكامل (Integration)

لنتأمل الإشارة التالية $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\theta)d\theta$ وليكن $\tilde{y}(f)$ تحويل فورييه لها في حال وجوده. وفقاً لخاصية الاشتقاق في المجال الزمني يمكن التعبير عن هذا التحويل بالعلاقة التالية:

$$\tilde{y}(f) = \frac{1}{2\pi jf}\tilde{x}(f)$$

وهي علاقة صحيحة فقط إذا كان $\tilde{x}(0) = 0$، وبما أن $x(t)$ هي مشتق $y(t)$ وحسب خاصية الاشتقاق السابقة فإن $\tilde{x}(f) = (2\pi jf).\tilde{y}(f)$ أي $\tilde{x}(0) = 0$ وهذا يعني أنّ:

$$\tilde{x}(0) = y(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta)d\theta = 0$$

أي أن المركبة المستمرة للإشارة $x(t)$ يجب أن تكون معدومة. وإلا فإنّ وجود هذه المركبة المستمرة سيعطي في التكامل مقداراً تراكمياً ليس له تحويل فورييه بالمعنى العادي، وسنرى لاحقاً كيفية معالجة هذه الحالة والتي تظهر مثلاً عند حساب تحويل فورييه لإشارة الخطوة $u(t)$.

10.5. التفاضل في المجال الترددي (Differentiation in frequency domain)

باشتقاق علاقة تحويل فورييه بالنسبة للتردد نجد:

$$(-2\pi jt)^n x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} \frac{d^n\tilde{x}(f)}{df^n}$$

11.5. جداء التلاف (Convolution)

إذا كانت $y(t)$ إشارة ناتجة عن جداء تلاف بين إشارتين ومعرفة كالتالي:

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\theta).x_2(t-\theta)d\theta$$

فإنّ تحويل فورييه لها يعطى بالعلاقة:

$$\tilde{y}(f) = \tilde{x}_1(f).\tilde{x}_2(f)$$

نلاحظ هنا أنّ تحويل فورييه يحوّل جداء التلاف في المجال الزمني إلى جداء عادي في المجال الترددي. تُظهر هذه الخاصية أهمية تحويل فورييه في تحليل النظم الخطية غير المتغيرة مع الزمن (المرشحات) والتي يُعبر عنها بجداءات تلاف بين إشارة الدخل والاستجابة النبضية للنظام.

12.5. جداء إشارتين (Product of two signals)

إذا كان

$$y(t) = x_1(t).x_2(t)$$

فإنّ

$$\tilde{y}(f) = \tilde{x}_1(f).\tilde{x}_2(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}_1(u).\tilde{x}_2(f-u)du$$

إنّ تحويل فورييه لجداء تلاف لإشارتين هو جداء عادي لتحويلي فورييه لهما كما أنّ تحويل فورييه لجداء عادي لإشارتين هو جداء تلاف لتحويلي فورييه لهما.

6. نظرية بارسفال (Parseval Theorem)

إن من أهم نتائج نظرية بارسفال (Parseval Theorem) هو مبدأ انحفاظ الطاقة للإشارة بعد إجراء تحويل فورييه لها ويستفاد من ذلك في حساب طاقة الإشارة من خلال معرفة تحويل فورييه لها.

تنص نظرية بارسفال (Parseval Theorem) على أن الجداء الداخلي في المجال الزمني هو نفسه الجداء الداخلي في المجال الترددي:

$$\langle \tilde{x}_1(f), \tilde{x}_2(f) \rangle = \langle x_1(t), x_2(t) \rangle$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t).x^*{}_2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}_1(f).\tilde{x}_2{}^*(f)\,df$$

وفي حالة $x_1(t) = x_2(t) = x(t)$ نجد:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{x}(f)|^2\,df$$

تعبر العلاقة (22) عن انحفاظ الطاقة في تحويل فورييه، أي أنّ الطاقة E_x موزّعة على المحور الزمني بكثافة زمنية قدرها $|x(t)|^2$ هي الاستطاعة اللحظية للإشارة. وهذه الطاقة E_x موزّعة أيضاً على المحور الترددي بكثافة طيفية للطاقة (energy spectral density) قدرها $|\tilde{x}(f)|^2$.

7. تحويل فورييه لبعض الإشارات الأساسية (Fourier transform of basic signals)

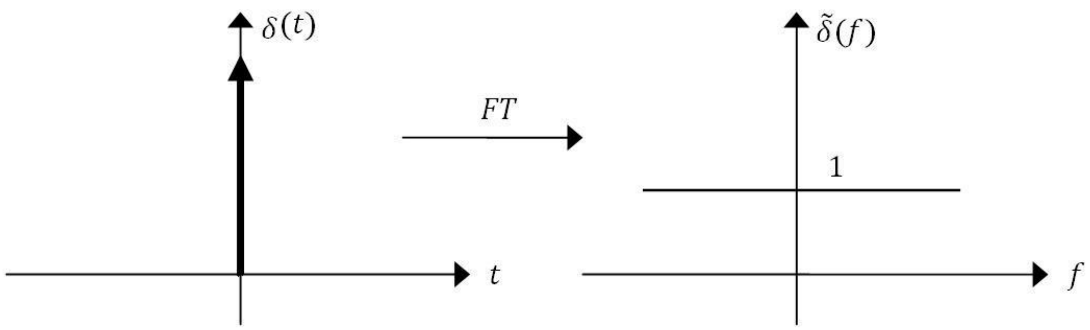
1.7 تحويل فورييه لنبضة ديراك (Dirac impulse)

لو أردنا أن نكون أكثر دقة من الناحية الرياضية لوجب أن نعرف تحويل فورييه للتوزيعات (distributions) ذلك أن نبضة ديراك هي توزيع، ولكن نريد تبسيط الأمر هنا ونعالجه معالجة حدسية. لنحسب تحويل فورييه للإشارة $x(t) = \delta(t)$:

$$\tilde{x}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-2\pi j f t} dt = 1$$

أو $FT[\delta(t)] = 1$ ذلك أنه كما نعرف $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) g(t) dt = g(0)$.

أي أن طيف نبضة ديراك يمتد على كل المحور الترددي ويأخذ قيمة ثابتة تساوي 1. إن هذا يعني أن طاقة الإشارة غير محدودة، ونذكر هنا أن نبضة ديراك هي نموذج رياضي، وليست إشارة لها وجود فيزيائي فعلي.



الشكل **5-Error! No text of specified style in document.**: نبضة ديراك وطيف نبضة ديراك.

2.7 تحويل فورييه للإشارة الثابتة (FT for Constant signal)

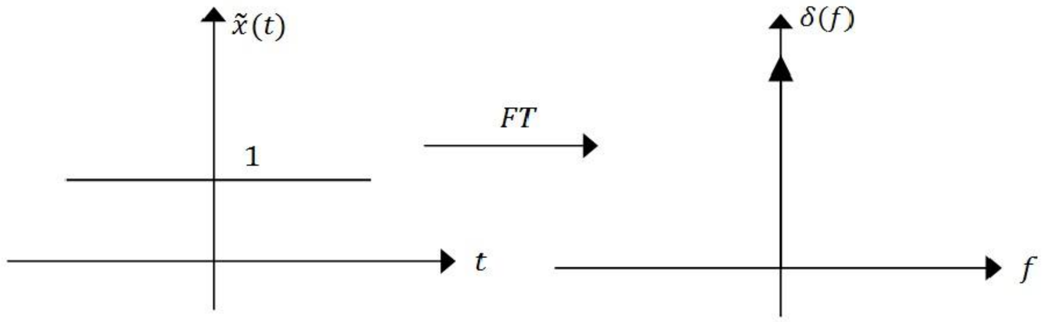
إن تحويل فورييه لإشارة ثابتة (لتكن مثلاً 1) غير موجود بالمعنى العادي لتحويل فورييه لتابع، ذلك أن التكامل $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi j f t} dt$ غير موجود بالمعنى العادي، ولكن المثال السابق يوحي لنا أن هذا التكامل يساوي نبضة ديراك في المجال الترددي.

لنتأمل الإشارة الثابتة $x(t) = \alpha$ حيث α عدد ثابت. إن تحويل فورييه لهذه الإشارة هو:

$$\tilde{x}(f) = \alpha \delta(f)$$

وذلك لأن تحويل فورييه العكسي للإشارة $\tilde{x}(f)$ يعطي $x(t) = \alpha$.

$$FT^{-1}[\tilde{x}(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha \delta(f) e^{2\pi j f t} df = \alpha$$



الشكل **Error! No text of specified style in document.**-6: الإشارة المستمرة وطيفها.

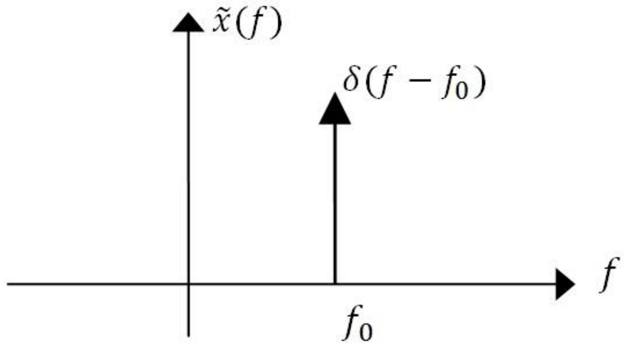
أي إن طيف إشارة ثابتة ذات امتداد زمني لانهائي هو نبضة وحيدة على التردد صفر أي هي مركبة ساكنة. نلاحظ من المثالين السابقين المثنوية بين التمثيل في المجال الزمني والتمثيل في المجال الترددي. فالامتداد الزمني الكبير لإشارة يقابله تمركز للطيف، وبالعكس فإن الإشارة المركزة زمنياً ذات الامتداد الزمني الضيق هي ذات امتداد طيفي كبير في المجال الترددي.

3.7. تحويل فورييه لإشارة أسية عقدية (FT for complex exponential signal)

لنحسب تحويل فورييه للإشارة الجيبية العقدية $x(t) = e^{2\pi j f_0 t}$ وهي كما نعرف مركبة ترددية عند التردد f_0.
باستخدام خاصة الإزاحة الترددية وبالنظر إلى الإشارة كجداء للإشارة الأسية بالإشارة الثابتة التي تساوي 1 نجد:

$$FT[e^{2\pi j f_0 t} \times 1] = \delta(f - f_0)$$

ويمثل طيفها بنبضة وحيدة عند التردد f_0.



الشكل **Error! No text of specified style in document.**-7: طيف الإشارة الأسية العقدية.

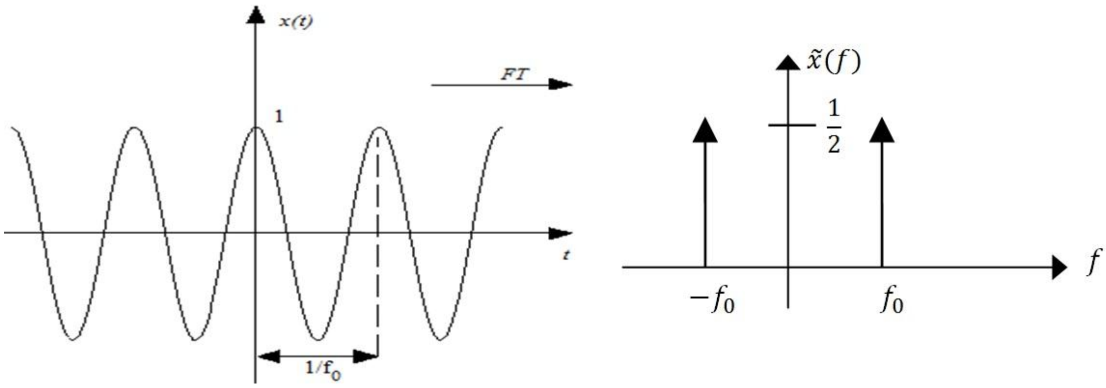
4.7. تحويل فوريه لإشارة جيبية حقيقية(FT for real sinusoidal) signal

إن تحويل فوريه للإشارة الجيبية $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ هو عبارة عن نبضتي ديراك عند الترددين f_0 و $-f_0$ بثقل $\frac{1}{2}$ لكل منهما، ذلك لأن:

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}[e^{2\pi j f_0 t} + e^{-2\pi j f_0 t}]$$

ومنه:

$$\tilde{x}(f) = FT[\cos(2\pi f_0 t)] = \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$



الشكل **Error! No text of specified style in document.**-8: الإشارة الجيبية الحقيقية وطيفها.

إن طيف الإشارة الجيبية الحقيقية يظهر مركبتين ترددیتين عند الترددين f_0 و $-f_0$ وهو يتميز بخاصة التناظر، مثله مثل طيف كل إشارة حقيقية. ونعيد إلى الأذهان هنا الملاحظة المذكورة سابقاً عن معنى التردد السالب، وكذلك الملاحظة المذكورة بخصوص كفاية الترددات الموجبة لتمثيل إشارة حقيقية. نعلم أن الإشارة الجيبية الحقيقية يمكن أن تمثل بشعاع فرنل الذي يقابل المركبة الأسية العقدية $e^{2\pi jft}$ أي بالاكتفاء بالمركبة ذات التردد الموجب.

إن الإشارات المعروضة في الأمثلة السابقة هي إشارات ذات طاقة غير محدودة، ولكن بالنظر إلى الإشارة الثابتة، أو الجيبية العقدية أو الجيبية الحقيقية، نرى أن الاستطاعة المتوسطة لكل منها محدودة، وتحويل فوريه لها بالمعنى العادي ليس متقارباً. إنها إشارات ذات أهمية كبيرة، وقد لجأنا إلى التوزيعات لتمديد تعريف تحويل فوريه عليها، حيث يسمح لنا استخدام التوزيعات برؤية متكاملة للتحليل الطيفي.

5.7. تحويل فورييه لنبضة مستطيلة (FT for rectangular signal)

لتكن $r_T(t)$ الإشارة المستطيلة الممركزة حول الصفر وبعرض T المعرفة كما يلي:

$$r_T(t) = \begin{cases} A \; for \; |t| \leq \dfrac{T}{2} \\ 0 \; for \; |t| > \dfrac{T}{2} \end{cases}$$

بالتطبيق المباشر للتعريف نحسب تحويل فورييه فنجد:

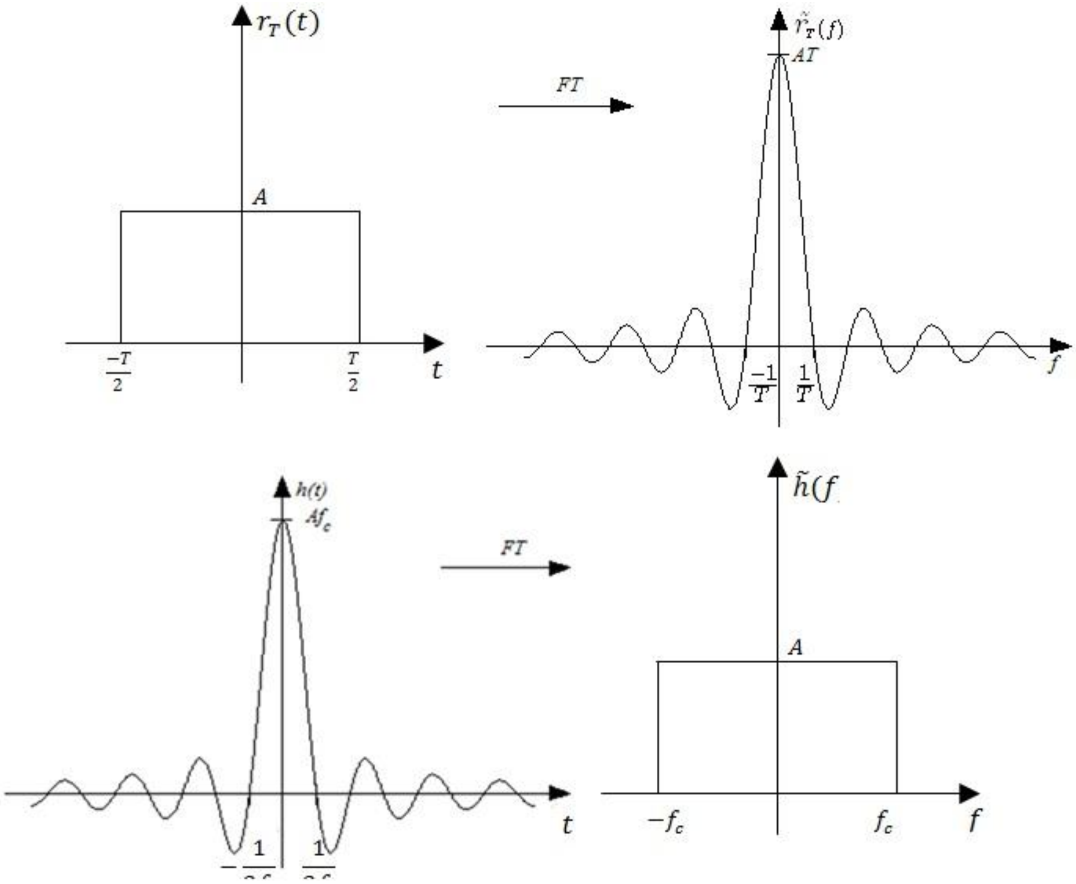
$$\tilde{r}_T(f) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} Ae^{-2\pi jft} dt = A\,\frac{e^{2\pi jf\frac{T}{2}} - e^{-2\pi jf\frac{T}{2}}}{2\pi jf}$$

ومنه

$$\tilde{r}_T(f) = AT\,\frac{\sin(\pi ft)}{\pi ft} = AT\,\text{sinc}(\pi ft)$$

حيث $\text{sinc}(u) = \frac{\sin(u)}{u}$.

نلاحظ أن طيف الإشارة المربعة ذات الامتداد الزمني المحدود يمتد على كل المحور الترددي، متخامداً مع الابتعاد باتجاه الترددات العالية، ويمكن أن نعتبر أن توزع طيف الطاقة هو في المقام الأول حول الترددات المنخفضة $\left[-\frac{1}{T},\frac{1}{T}\right]$. وهكذا فإن امتداد طيف الإشارة يتناسب عكساً مع امتدادها في المجال الزمني (T).



الشكل 9-**Error! No text of specified style in document.**: الإشارة الجيبية الحقيقية وطيفها.

6.7. تحويل فورييه لمشط ديراك (FT for Dirac train)

إن مشط ديراك أو قطار ديراك (impulses train) هو توزيع ينتج عن تكرار نبضة ديراك دورياً.

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

إذا أردنا حساب تحويل فورييه لهذه الإشارة، بتطبيق خاصتي الخطية والانزياح الزمني، نجد:

$$\tilde{\delta}_T(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi jfT}$$

إنّ هذه المتسلسلة غير متقاربة بمعنى التوابع ولكنها متقاربة بمعنى التوزيعات، والتابع الناتج دوري ودوره $\frac{1}{T}$، وهي تظهر كنشر بسلسلة فورييه لـ $\tilde{\delta}_T(f)$ وبثوابت نشر ثابتة وتساوي 1.

إذا اعتبرنا "التابع" $\delta(f)$ على المجال الترددي $\left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right]$ فإن نشر فورييه له يعطي

$$c_k = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \delta(f) e^{-2\pi jfT} df = T$$

وهكذا نرى أن السلسلة $\tilde{\delta}_T(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi jfT}$ هي نشر للتابع

$$\frac{1}{T}\delta_{\frac{1}{T}}(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

أي:

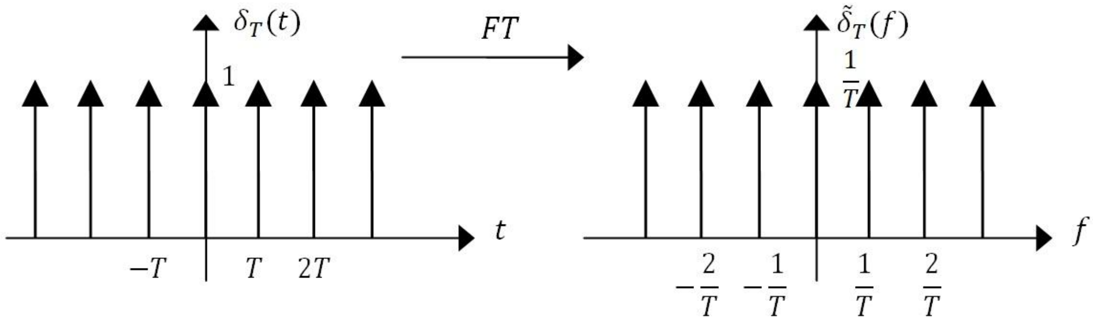
$$\tilde{\delta}_T(f) = FT[\delta_T(t)] = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

وهكذا فإن تحويل فورييه لمشط ديراك هو مشط ديراك في المجال الترددي ولكن بوزن $\frac{1}{T}$ للنبضات. ونرى هنا أنه بمعنى التوزيعات يمكن أن نكتب:

$$\delta_F(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f - nF) = \frac{1}{F}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi j\frac{n}{F}f}$$

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t - nT) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi j\frac{n}{T}t}$$

وهما يمثلان النشر بسلاسل فورييه لمشطي ديراك $\delta_F(f)$ و $\delta_T(t)$.



الشكل **Error! No text of specified style in document.**-10: إشارة مشط ديراك وطيفها.

7.7. تحويل فورييه لإشارة الخطوة (FT for step signal)

إن إشارة الخطوة $u(t)$ هي إشارة ذات طاقة غير محدودة، ويظهر تطبيق تعريف تحويل فورييه عليها أن التكامل غير متقارب. لكن سنرى أنه يمكن حساب تحويل فورييه لهذه الإشارة بمعنى التوزيعات.

لنتأمل الإشارة المعرفة كما يلي:

$$v(t) = sgn(t) = \begin{cases} +1 & for\ t > 0 \\ -1 & for\ t < 0 \end{cases}$$

يمكن كتابة إشارة الخطوة $u(t)$ كما يلي:

$$u(t) = \frac{1}{2}[1 + v(t)]$$

وباستخدام خاصة خطية تحويل فورييه يكون تحويل فورييه لهذه الإشارة:

$$\tilde{u}(f) = \frac{1}{2}[\delta(f) + \tilde{v}(f)]$$

لحساب تحويل فورييه للإشارة $v(t) = sgn(t)$، نلاحظ أنها إشارة حقيقية وفردية أي يجب أن يكون تحويل فورييه لها فردياً وتخيلياً صرفاً، وكذلك مشتقها:

$$v'(t) = 2u'(t) = 2\delta(t)$$

وباستخدام خاصة الاشتقاق نجد:

$$\tilde{v}(f) = \frac{1}{\pi jf}$$

وهو فردي وتخيلي صرف وذلك يوافق تناظر $v(t)$. ومنه نجد:

$$\tilde{u}(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2\pi jf}$$

بإعادة النظر قليلاً في الحساب الذي أجريناه. يتضح أن للإشارتين $v(t)$ و$2u(t)$ المشتق نفسه، ولكن هذا لا يعني أن لهما تحويل فورييه نفسه، فهما مختلفتان والفرق بينهما مقدار ثابت. أي أن استخدام خاصة تحويل فورييه للمشتق ليست كافية وحدها للحصول على تحويل فورييه للإشارة. ولذلك اعتبرنا خاصة التناظر في الإشارة $v(t)$ وهي ليست محققة في $u(t)$. بوجهٍ عام من أجل إشارتين لهما المشتق نفسه (أي الفرق بينهما مقدار ثابت)، يكون تحويل فورييه لأحدى هاتين الإشارتين مساوياً لتحويل فورييه للإشارة الأخرى مضافاً إليه نبضة ديراك مثقّلة بالمقدار الثابت والتي تقابل المركبة الساكنة.

8. تحويل فورييه لإشارة دورية (Fourier transform of a) periodic signal

لتكن الإشارة الدورية $x_p(t)$ بدور T ولنكتب النشر بسلسلة فورييه لها:

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{2\pi j \frac{k}{T} t}$$

فيكون تحويل فورييه:

$$\tilde{x}_p(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

أي إن طيف الإشارة الدورية متقطع وهو يتكون من نبضات (مركبات ترددية) عند الترددات $\frac{k}{T}$ ومثقلة بالأمثال c_k. إن الإشارات الدورية هي إشارات ذات طيف متقطع، ولكن العكس غير صحيح، أي إذا كان لإشارة طيف متقطع (تحويل فورييه لها يساوي مجموع نبضات ديراك في المجال الترددي) فهي ليست بالضرورة دورية. وأن تكون الإشارة دورية يعني أن تكون المركبات الترددية كلها من مضاعفات تردد أساسي يسمى التوافقية الأساسية. إن مجموع إشارتين جيبيتين (من ثم دوريتين) مع أنه يمثل في المجال الترددي بمركبات متقطعة (وهنا مركبتين) فإنه يمكن لهذا المجموع ألا يكون إشارة دورية، وحتى يكون هذا المجموع دورياً يجب أن يكون للترددين مضاعف قاسم مشترك أعظم غير معدوم.

لنتأمل الآن الإشارة $x_T(t)$ ذات الحامل الزمني المحدود، المقتطعة من الإشارة الدورية $x_p(t)$، والتي دورها T، على امتداد زمني طوله T. نعلم أن الإشارة الدورية $x_p(t)$ تنتج عن تكرار $x_T(t)$ دورياً:

$$x_p(t) = Rep[x_T(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_T(t - nT)$$

والتي يمكن أن نكتبها كما يلي:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_T(t) * \delta(t - nT) = x_T(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

ذلك أننا نعلم أن جداء التلاف لنبضة مزاحة يعطي إزاحة زمنية بمقدار إزاحة النبضة

$$x(t) * \delta(t - \theta) = x(t - \theta)$$

وهكذا نرى أن الإشارة الدورية بدور T هي جداء تلاف لإشارة ممثلة لها $x_T(t)$ ذات امتداد زمني (حامل) محدود طوله T بمشط ديراك.

$$x_p(t) = x_T(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = x_T(t) * \delta_T(t)$$

وبتحويل فورييه نجد

$$\tilde{x}_p(f) = \tilde{x}_T(f).\tilde{\delta}_T(f) = \tilde{x}_T(f).\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

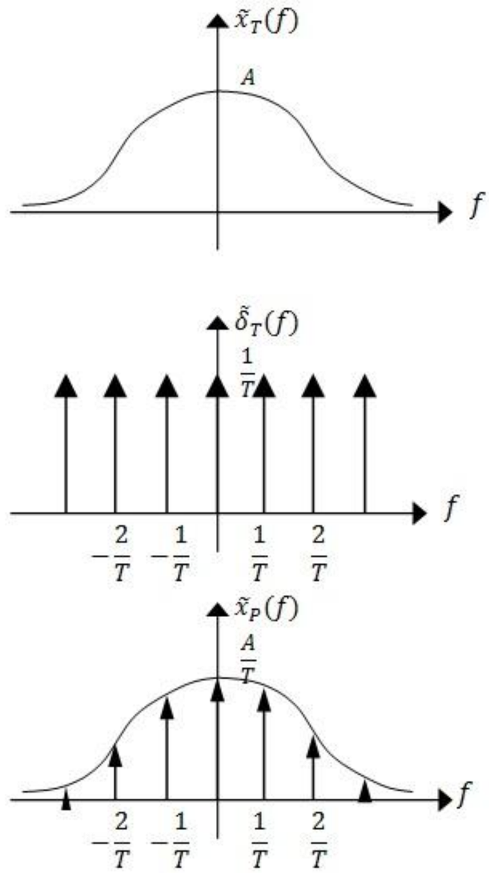
والتي يمكن أن نكتبها أيضاً

$$\tilde{x}_p(f) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{x}_T\left(\frac{k}{T}\right).\delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

بالنظر إلى العلاقتين (45) و(51) نجد أن c_k أمثال نشر سلسلة فورييه للإشارة $x_p(t)$ هي قيم تحويل فورييه للإشارة الممثلة على حامل محدود $x_T(t)$ عند الترددات $\frac{k}{T}$ مقسومة على T، ويمكن التحقق من ذلك مباشرة:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_p(t)e^{-2\pi j\frac{k}{T}t}dt = \frac{1}{T}\tilde{x}_T\left(\frac{k}{T}\right)$$

كما نستنتج من العلاقة (51) أن طيف الإشارة الدورية، وهو طيف متقطع ينتج عن ضرب طيف الإشارة الممثلة على حامل محدود $x_T(t)$ بمشط ديراك في المجال الترددي. إن عملية الضرب بمشط ديراك تعني تقطيعاً وهي نتيجة لجداء التلاف في مشط ديراك في المجال الزمني



الشكل **Error! No text of specified style in document.**-11: تكرار إشارة محدودة بالزمن وطيفها.

إن جداء التلاف في مشط ديراك في المجال الزمني يعني دورية في هذا المجال، ويقابله تقطيع في المجال الترددي (ينتج عن الضرب بمشط ديراك في المجال الترددي). والعكس صحيح، فكما الدورية في المجال الزمني يقابلها تقطيع في المجال الترددي، فإن التقطيع في المجال الزمني يقابله دورية في المجال الترددي. وكما سنرى عند معالجة موضوع التقطيع (sampling) فإن طيف الإشارة المتقطعة يكون دورياً.

أسئلة وتمارين الفصل الثالث

تحويل فورييه للإشارات المستمرة

1– أجب عن الأسئلة التالية:

1. ما هو نشر سلسلة فورييه لإشارة دورية $x_p(t)$ بدور T مع تحديد علاقة حساب معاملات النشر c_k.

2. ما هو تعريف تحويل فورييه لإشارة $x(t)$ وتعريف تحويل فورييه العكسي الموافق.

3. ما هي الخاصة التي تميز تحويل فورييه لإشارة حقيقية.

4. كيف يمكن تمديد النشر بسلسلة فورييه للإشارات الدورية وذلك من أجل إشارة ذات امتداد زمني محدود، وما علاقة ثوابت النشر c_k بطيف الإشارة $\breve{x}(f)$.

مساعدة راجعة: بالنسبة للطلب الرابع راجع فقرة تحويل فورييه لإشارة دورية.

2– احسب تحويل فورييه لكل من الإشارات التالية:

أ– $x_1(t) = e^{-2t}u(t)$.

ب– $x_2(t) = e^{-2|t|}$.

ج– $x_3(t) = \delta(t+1) + \delta(t-1)$.

د– $x_4(t) = \sin(2\pi t + \frac{\pi}{4})$.

مساعدة راجعة: احسب تحويل فورييه انطلاقاً من التعريف. أما بالنسبة للطلب الرابع فاكتب الإشارة الجيبية كفرق بين إشارتين أسيتين عقديتين.

3– احسب تحويل فورييه العكسي للتابع التالي:

$$\breve{x}(f) = \begin{cases} -1 & -f_0 \le f < 0 \\ +1 & 0 \le f \le f_0 \\ 0 & |f| > f_0 \end{cases}$$

ما هي طاقة الإشارة $x(t)$.

مساعدة راجعة: احسب تحويل فورييه العكسي انطلاقاً من التعريف. ومن ثم استخدم نظرية بارسفال لحساب الطاقة في المستوي الترددي.

4– لنعتبر الإشارة التالية مع تحويل فورييه لها:

$$x(t) = e^{-|t|} \xrightarrow{FT} \frac{2}{1 + 4\pi^2 f^2}$$

أ– استخدم خواص تحويل فورييه المناسبة لحساب تحويل فورييه للإشارة:

$$y(t) = te^{-|t|}$$

ب– انطلاقاً من نتيجة الطلب السابق وباستخدام خاصة المثنوية، حدد تحويل فورييه للإشارة التالية:

$$z(t) = \frac{4t}{(1+t^2)^2}$$

مساعدة راجعة: راجع خواص الاشتقاق والتناظر والتقييس لتحويل فورييه.

5- ليكن لدينا الإشارة التالية:

$$x(t) = \cos(2\pi f_m t)$$

ولتكن لدينا الإشارة:

$$y(t) = \cos(2\pi f_c t)\, x(t)$$

أ- احسب تحويل فورييه للإشارة $x(t)$ ومثلها بيانياً.

ب- باستخدام خواص تحويل فورييه احسب تحويل فورييه للإشارة $y(t)$ ومثلها بيانياً بفرض أن $f_c \gg f_m$.

مساعدة راجعة: راجع خاصة الجداء لتحويل فورييه.

إجابات – حلول التمارين السابقة

السؤال الأول:

1. إذا كانت الإشارة الدورية $x_p(t)$ قابلة للتمثيل بسلسلة فورييه فإنها تكتب بالشكل التالي:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{2\pi j \frac{k}{T} t}$$

وبذلك تعطى ثوابت النشر c_k بالعلاقة التالية:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_T x_p(t) e^{-2\pi j \frac{k}{T} t} dt$$

2. يعطى تحويل فورييه $\tilde{x}(f)$ للإشارة $x(t)$ بالعلاقة:

$$\tilde{x}(f) = FT[\tilde{x}(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}(f) e^{-2\pi jft}\, dt$$

وتحويل فورييه العكسي وفق العلاقة التالية:

$$x(t) = FT^{-1}[\tilde{x}(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}(f) e^{2\pi jft}\, df$$

3. حسب خاصة المرافق العقدي لتحويل فورييهإذا كان $y(t) = x^*(t)$، فإنّ $\tilde{y}(f) = \tilde{x}^*(-f)$. ومن أجل إشارة حقيقية فإن تحويل فورييه لها يتمتع بالخاصة $\tilde{x}(f) = \tilde{x}^*(-f)$ وهي خاصة التناظر الترافقي أو الهيرميتي، أي أن المطال تابع زوجي والصفحة تابع فردي بالنسبة للتردد.

4. يمكن تمديد النشر بسلسلة فورييه لإشارة $x_T(t)$ ذات امتداد زمني محدود في المجال $[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$، بتكرار هذه الإشارة بدور T للحصول على الإشارة الدورية $x_p(t)$ التي تكتب بدلالة $x_T(t)$ بالشكل:

$$x_p(t) = Rep[x_T(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_T(t - nT)$$

وتكون أمثال نشر فورييه لهذه الإشارة هي:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_p(t) e^{-2\pi j \frac{k}{T} t} dt = \frac{1}{T} \tilde{x}_T\left(\frac{k}{T}\right)$$

السؤال الثاني:

أ- انطلاقاً من تعريف تحويل فورييه، نكتب:

$$\tilde{x}_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)e^{-2\pi jft}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t}u(t)e^{-2\pi jft}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-2(\pi jf+1)t}dt$$
$$= \left[\frac{e^{-2(\pi jf+1)t}}{-2(\pi jf+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2(\pi jf+1)}$$

ب- بنفس الطريقة نكتب:

$$\tilde{x}_2(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t)e^{-2\pi jft}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t|}e^{-2\pi jft}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-2(\pi jf-1)t}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-2(\pi jf+1)t}dt$$
$$= \left[\frac{e^{-2(\pi jf-1)t}}{-2(\pi jf-1)}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-2(\pi jf+1)t}}{-2(\pi jf+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{-2(\pi jf-1)} + \frac{1}{2(\pi jf+1)}$$
$$= \frac{1}{\pi^2 f^2+1}$$

ج- نعلم أن تحويل فورييه لنبضة ديراك هو التابع الثابت بقيمة واحد. بتطبيق خاصة الانزياح الزمني مع خاصة الخطية لتحويل فورييه نجد:

$$\tilde{x}_3(f) = e^{+2\pi jf} + e^{-2\pi jf} = 2\cos(2\pi f)$$

د- يمكن أن نعيد كتابة الإشارة المعطاة بالشكل:

$$x_4(t) = \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{2\pi jt+j\frac{\pi}{4}} - e^{-2\pi jt-j\frac{\pi}{4}}\right)$$

ونعلم أن $FT\{e^{2\pi jf_0t}\} = \delta(f-f_0)$، وبالتالي بفضل خاصة الخطية نستنتج أن:

$$\tilde{x}_4(f) = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\delta(f-1) - e^{-j\frac{\pi}{4}}\delta(f+1)\right)$$

السؤال الثالث:

انطلاقاً من تعريف تحويل فورييه نكتب:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{2\pi jft}df = \int_{-f_0}^{0} -e^{-2\pi jft}df + \int_{0}^{+f_0} e^{-2\pi jft}df = \left[\frac{-e^{-2\pi jft}}{-2\pi jt}\right]_{-f_0}^{0} + \left[\frac{e^{-2\pi jft}}{-2\pi jt}\right]_0^{+f_0}$$
$$= \frac{1}{2\pi jt}(1 - e^{2\pi jf_0t} - e^{-2\pi jf_0t} + 1) = \frac{1}{2\pi jt}(2 - 2\cos(2\pi f_0 t)) = \frac{1}{\pi jt}\sin^2(\pi f_0 t)$$

ومنه:

$$x(t) = -j\frac{1}{\pi t}\sin^2(\pi f_0 t)$$

لحساب طاقة الإشارة، فمن الصعب حساب التكامل في المستوي الزمني، لذلك وبفضل نظرية بارسفال في انحفاظ الطاقة بين المستوي لزمني والمستوي الترددي نقوم بحساب الطاقة في المستوي الترددي.

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{x}(f)|^2 df = \int_{-f_0}^{f_0} 1 df = 2f_0$$

السؤال الرابع:

أ- باستخدام خاصة الاشتقاق في المجال الترددي العامة التالية:

$$(-2\pi jt)^n x(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{d^n \tilde{x}(f)}{df^n}$$

وبشكل خاص من أجل $n = 1$، يكون:

$$(-2\pi jt)x(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{d\tilde{x}(f)}{df}$$

ومنه نستنتج أن:

$$tx(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{-2\pi j}\frac{d\tilde{x}(f)}{df}$$

نطبق هذه الخاصة على الإشارة $y(t)$، فيكون

$$\tilde{y}(f) = \frac{1}{-2\pi j}\frac{d\tilde{x}(f)}{df} = \frac{1}{-2\pi j}\left(\frac{-16\pi^2 f}{(1+4\pi^2 f^2)^2}\right) = -j\left(\frac{4\omega}{(1+\omega^2)^2}\right)$$

حيث فرضنا أن $\omega = 2\pi f$.

وحسب خاصة التناظر فإن

$$FT\{\tilde{y}(f)\}(t) = y(-t)$$

$$FT\left\{-j\left(\frac{4\omega}{(1+\omega^2)^2}\right)\right\}(t) = y(-t) = -te^{-|t|}$$

أي أن:

$$FT\left\{\left(\frac{4(2\pi f)}{(1+(2\pi f)^2)^2}\right)\right\}(t) = -jte^{-|t|}$$

وبالتبديل بين المتحول t و f

وبتغير المتحول

$$FT\left\{\left(\frac{4(2\pi t)}{(1+(2\pi t)^2)^2}\right)\right\} = -jfe^{-|f|}$$

وحسب خاصة التقييس

$$FT\{x(at)\} = \frac{1}{|a|}\tilde{x}(\frac{f}{a})$$

حيث نأخذ $a = \frac{1}{2\pi}$، فنحصل على

$$FT\left\{\left(\frac{4t}{(1+t^2)^2}\right)\right\} = 2\pi\left(-j2\pi fe^{-|2\pi f|}\right)$$

$$FT\left\{\left(\frac{4t}{(1+t^2)^2}\right)\right\} = -2\pi j\ \left(2\pi fe^{-|2\pi f|}\right)$$

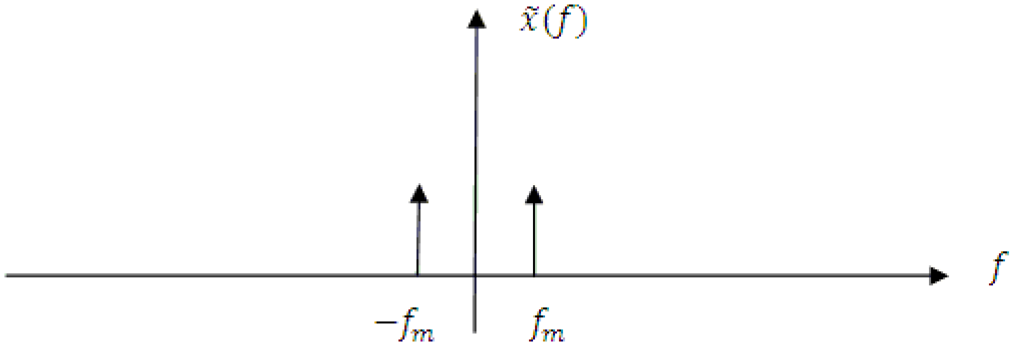
السؤال الخامس:

أ- نكتب الإشارة $x(t)$ بالشكل:

$$x(t) = \cos(2\pi f_m t) = \frac{1}{2}(e^{2\pi j f_m t} + e^{-2\pi j f_m t})$$

وبأخذ تحويل فورييه للطرفين نجد بسهولة.

$$\tilde{x}(f) = \frac{1}{2}\big(\delta(f - f_m) + \delta(f + f_m)\big)$$



ب- الإشارة $y(t)$ هي عبارة عن جداء إشارتين.

$$y(t) = \cos(2\pi f_c t)\, x(t)$$

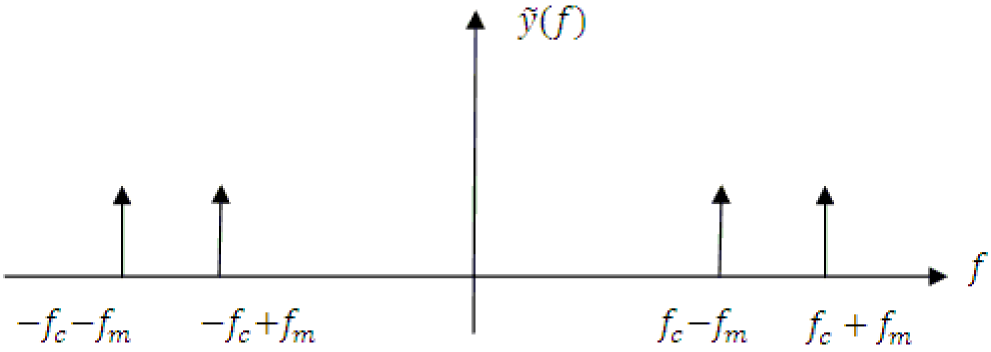
باستخدام خاصة الجداء يكون:

$$\tilde{y}(f) = \frac{1}{2}\big(\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)\big) * \tilde{x}(f)$$

$$\tilde{y}(f) = \frac{1}{2}\big(\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)\big) * \frac{1}{2}\big(\delta(f - f_m) + \delta(f + f_m)\big)$$

$$\tilde{y}(f) = \frac{1}{4}\big(\delta(f - f_c - f_m) + \delta(f - f_c + f_m) + \delta(f + f_c - f_m) + \delta(f + f_c + f_m)\big)$$

أي أن تحويل فورييه للإشارة $y(t)$ يحتوي على أربع نبضات ديراك كما يبين الشكل التالي:



تحويل لابلاس

الكلمات المفتاحية:

تحويل لابلاس، تحويل لابلاس العكسي، حساب الرواسب، خواص تحويل لابلاس، نظريتا القيمة البدائية والقيمة النهائية.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعريف بتحويل لابلاس واستخدامه في تمثيل الإشارات والنظم الخطية غير المتغيرة مع الزمن. كما يهدف هذا الفصل إلى معرفة خواص هذا التحويل ودوره في دراسة النظم المعطاة بمعادلات تفاضلية خطية حيث يستخدم تحويل لابلاس كأداة في حل المعادلات التفاضلية. كما يسهل تحويل لابلاس دراسة النظم بفضل خاصة جداء التلاف التي تحول جداء التلاف في المجال الزمني إلى جداء عادي في مستوي لابلاس.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- منشأ وتعريف تحويل لابلاس وتحويل لابلاس العكسي.
- خواص تحويل لابلاس.
- خواص السببية والاستقرار للنظم LTI في مستوي لابلاس.
- علاقة تحويل فورييه بتحويل لابلاس.

يهدف هذا الفصل إلى التعريف بتحويل لابلاس واستخدامه في تمثيل الإشارات والنظم الخطية غير المتغيرة مع الزمن. كما يهدف هذا الفصل إلى معرفة خواص هذا التحويل ودوره في دراسة النظم المعطاة بمعادلات تفاضلية خطية حيث يستخدم تحويل لابلاس كأداة في حل المعادلات التفاضلية. كما يسهل تحويل لابلاس دراسة النظم بفضل خاصة جداء التلاف التي تحول جداء التلاف في المجال الزمني إلى جداء عادي في مستوي لابلاس.

1. التوابع الذاتية للنظم الخطية (systems Eigen functions of linear)

إنّ النظم الخطية غير المتغيرة مع الزمن هي نظم تعطي على خرجها جداء تلاف لإشارة دخلها بإشارة خاصة تُعرّف النظام وتسمى الاستجابة النبضية للنظام. من أهم الخواص الأساسية للأنظمة الخطية، أنها مؤثرات خطية توابعها الذاتية (functions Eigen) هي الإشارات الأسية العقدية من الشكل $x(t) = e^{pt}$ حيث p ثابت عقدي.

لنحسب إشارة الخرج الموافقة لإشارة الدخل $x(t) = e^{pt}$:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) e^{p(t-\theta)} d\theta$$

$$= e^{pt} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) e^{-p\theta} d\theta$$

أي:

$$y(t) = H(p).e^{pt}$$

حيث المقدار العقدي $H(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) e^{-p\theta} d\theta$ والمتعلق بـ p هو القيمة الذاتية المقابلة للتابع الذاتي $x(t) = e^{pt}$. يسمى هذا المقدار تابع التحويل للنظام أو تابع النقل (function Transfer) وهو يمثل تحويل لابلاس للاستجابة النبضية للنظام.

تعطى القيمة الذاتية الموافقة للإشارة الذاتية $x(t) = e^{j\omega t}$، في الحالة التي يكون فيها $p = j\omega$ بالعلاقة التالية.

$$\mathrm{H}(\omega) = H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)\, e^{-j\omega\theta} d\theta$$

وهي تمثل، كما مرّ معنا سابقاً، تحويل فورييه للاستجابة النبضية، وتسمى الاستجابة الترددية أو تابع التحويل الترددي.

نستنتج مما سبق: أنّه إذا أمكن تحليل إشارة الدخل إلى مجموعة مركبات من الشكل e^{pt} أو من الشكل $e^{j\omega t}$ فإنّه يمكن حساب إشارة الخرج بمعرفة القيم الذاتية لهذه المركبات الأساسية أو مايسمى بالاستجابة الترددية.

2. تحويل لابلاس (Laplace transform)

نُعرّف تحويل لابلاس لإشارة ما $x(t)$ بالتكامل التالي:

$$X(p) = LT\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-pt} dt$$

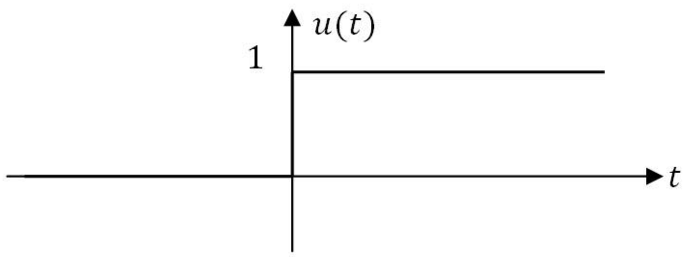
أي أنّ تحويل لابلاس هو تابع للمتحول العقدي $p = \alpha + j\omega$ حيث α القسم الحقيقي و ω القسم التخيلي للمتحول p. يسمى هذا التابع تحويل لابلاس الثنائي الجانب حيث يمتد التكامل على كامل المحور الزمني من $-\infty$ وحتى $+\infty$. وذلك لتمييزه عن تحويل لابلاس الأحادي الجانب الذي يمتد التكامل فيه على اللحظات الموجبة فقط من 0 وحتى $+\infty$.

1.2. حيز التقارب (Convergence domain)

لتعريف تحويل لابلاس $X(p)$ يجب دراسة تقارب التكامل الذي يعطي $X(p)$ وإيجاد مجموعة النقاط p من المستوي العقدي التي من أجلها يكون هذا التكامل متقارباً. وهذا ما يُعرف بحيّز التقارب، حيث يمثّل تحديد هذا الحيّز جزءاً لا يكتمل بدونه تعريف تحويل لابلاس لأنّ التابع $X(p)$ قد ينتج عن تحويل لابلاس لإشارتين مختلفتين تماماً إذا اختلف حيز التقارب لهما.

مثال:

لتكن الإشارة $x_1(t) = u(t)$ إشارة الخطوة الواحدية.



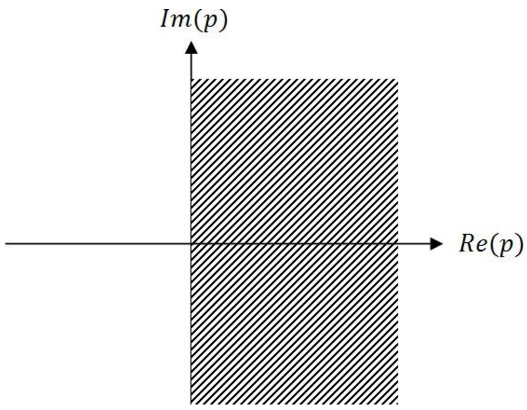
الشكل 1-Error! No text of specified style in document.: إشارة الخطوة الواحدية الموجبة.

بتطبيق تعريف تحويل لابلاس على هذه الإشارة نجد:

$$X_1(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-pt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\, e^{-pt} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-pt} dt$$

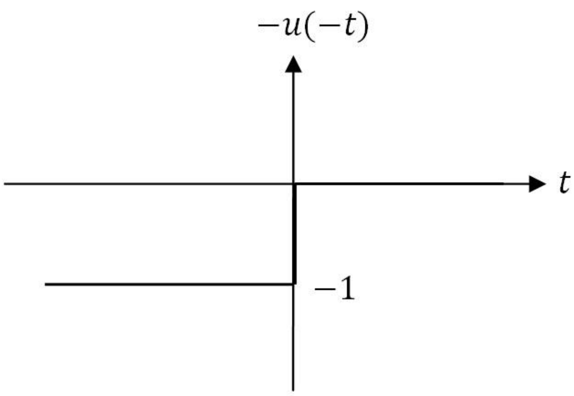
$$X_1(p) = \left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{+\infty} = \frac{0-1}{-p} = \frac{1}{p} \quad , Re(p) > 0$$

إن التكامل الذي يُعرّف تحويل لابلاس لهذه الإشارة يتقارب إلى $X_1(p) = \frac{1}{p}$ إنّما في حالة $Re(p) > 0$، أي نصف المستوي على يمين المحور التخيلي كما هو موضح في الشكل التالي حيث جرى تخطيط حيّز التقارب.



الشكل **Error! No text of specified style in document.**-2: تحويل لابلاس لإشارة الخطوة الواحدية الموجبة.

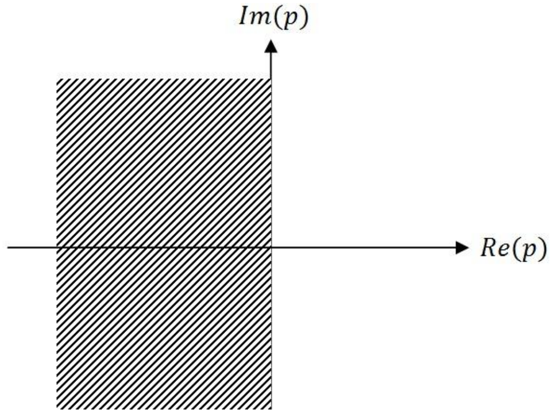
بينما نجد أنّه من أجل الإشارة $x_2(t) = -u(-t)$ المبينة في الشكل التالي:



الشكل **Error! No text of specified style in document.**-3: إشارة الخطوة الواحدية السالبة.

$$X_2(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} -u(-t)\, e^{-pt} dt = \left[\frac{-e^{-pt}}{-p}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{p} \quad , Re(p) < 0$$

يتقارب التكامل الذي يُعرّف تحويل لابلاس لها إلى التابع نفسه $X_2(p) = \frac{1}{p}$ ولكن في حالة $Re(p) < 0$ فقط، أي نصف المستوي على يسار المحور التخيلي كما هو موضح في الشكل التالي.



الشكل **.4-Error! No text of specified style in document**: تحويل لابلاس لإشارة الخطوة الواحدية السالبة.

لذلك يجب تعريف تحويل لابلاس بالثنائية $[X(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-pt} dt, S]$ حيث S هو حيّز التقارب للتكامل $X(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-pt} dt$.

إنّ حيّز التقارب S هو مجموعة النقاط p في المستوي العقدي الذي يتقارب فيه التكامل الذي يعرف $X(p)$. وكما رأينا في المثال السابق فإنه يمكن البرهان في الحالة العامة بأن حيز التقارب لا يتعلق إلا بالقيم الحقيقية للمتحول p. لذلك يتم التعبير عنه مجازاً بمجال حقيقي من الشكل $S =]\alpha, \beta[$ أو بالشكل $S(\alpha, \beta)$. الذي يعطي المجال للقسم الحقيقي للمتحول p الذي يكون فيه التكامل متقارباً وهذا يعني أن حيز التقارب في حال وجوده هو عبارة عن شريط (strip) من المستوي العقدي محدود بمستقيمين موازيين للمحور التخيلي. بالتالي يمكن أن يكون حيّز التقارب نصف مستوٍ عقدي أو كامل المستوي العقدي إذا انتهى أحد طرفي الشريط أو كلاهما إلى اللانهاية.

بتقسيم التكامل الذي يُعرّف تحويل لابلاس إلى قسمين:

$$X(p) = X_+(p) + X_-(p)$$

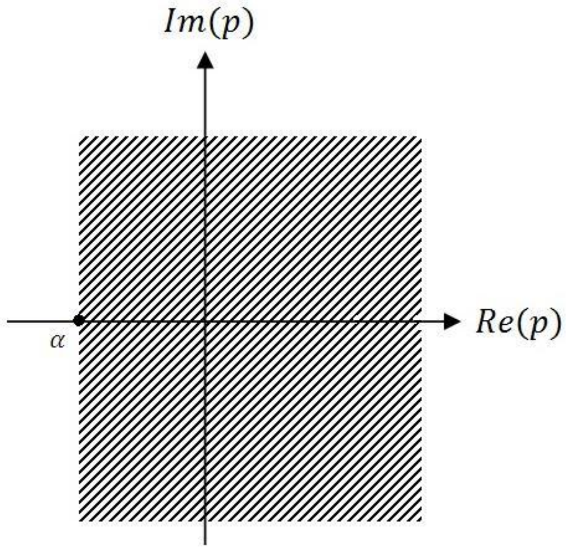
ويسمّى المقدار $X_+(p) = \int_{0}^{+\infty} x(t)\, e^{-pt} dt$ القسم السببي من الإشارة أي الجزء من الإشارة الموجود في اللحظات الزمنية الموجبة فقط. بينما يسمّى المقدار $X_-(p) = \int_{-\infty}^{0} x(t)\, e^{-pt} dt$ القسم عكس السببي من الإشارة أي الجزء من الإشارة الموجود في اللحظات الزمنية السالبة فقط.

وإذا كان القسم السببي متقارباً على حيّز تقارب فهذا الحيّز هو نصف مستوٍ على يمين مستقيم فاصلته α يوازي المحور التخيلي. أي أن حيز تقاربه من الشكل $S_+ =]\alpha, +\infty[$.

أما القسم عكس السببي فيكون حيزّ التقارب له، إن وجد، هو نصف مستوٍ على يسار مستقيم فاصلته β يوازي المحور التخيلي أي ن حيز تقاربه من الشكل $S_- =]-\infty, \beta[$.

ويكون حيز التقارب الكلي للإشارة هو تقاطع حيزي التقارب لكل من القسم السببي والقسم العكس سببي، أي $S =]\alpha, \beta[$.

يتضح مما سبق أنّ سببية الإشارة تنعكس على حيّز التقارب، وتكون الإشارة سببية إذا كان حيّز التقارب لتحويل لابلاس لها هو نصف مستوٍ على يمين مستقيمٍ ما يوازي المحور التخيلي كما هو موضح في الشكل التالي.



الشكل **Error! No text of specified style in document.**-5: تحويل لابلاس لإشارة سببية.

2.2. تحويل لابلاس لنبضة ديراك (LT of Dirac pulse)

يعطى تحويل لابلاس لنبضة ديراك بالعلاقة التالية:

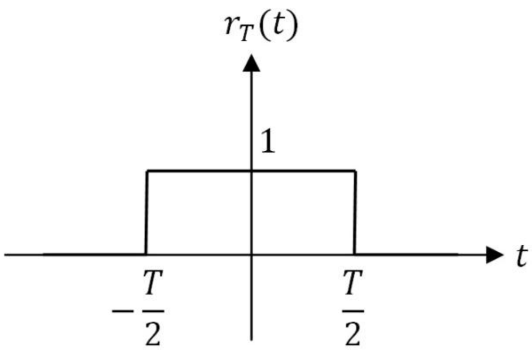
$$X(p) = LT\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-pt} dt = e^{-p0} = 1$$

وحيّز التقارب هو المستوي العقدي كله. $\delta(t) \overset{LT}{\leftrightarrow} [L, S(-\infty, +\infty)]$

3.2. تحويل لابلاس للإشارة المستطيلة (LT of rectangular pulse)

لتكن $r_T(t)$ الإشارة المربعة المتمركزة حول الصفر بعرض T والمعرّفة كما يلي:

$$r_T(t) = \begin{cases} 1\ for\ |t| \le \dfrac{T}{2} \\ 0\ for\ \ |t| \ge \dfrac{T}{2} \end{cases}$$



الشكل **6-Error! No text of specified style in document.**: إشارة مربعة متمركزة حول الصفر .

لحساب تحويل لابلاس لهذه الإشارة، نكتب:

$$LT\{r_T(t)\} = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{-pt}\, dt$$

وبالحساب نجد:

$$r_T(t) \overset{LT}{\leftrightarrow} \left[\frac{1}{p}\left(e^{p\frac{T}{2}} - e^{-p\frac{T}{2}}\right), B(-\infty, +\infty)\right]$$

إنّ حيّز التقارب لتحويل لابلاس لهذه الإشارة هو المستوي العقدي كله، ويبقى ذلك صحيحاً في حالة أية إشارة ذات امتداد زمني محدود.

4.2. تحويل لابلاس للإشارة نصف الأسية (LT of semi−exponential)

لتكن لدينا الإشارة نصف الأسية الغقدية المعرفة بالشكل التالي:

$$x(t) = e^{p_0 t} u(t)$$

حيث p_0 هو عدد عقدي و $u(t)$ هي إشارة الخطوة.

تلعب هذه الإشارة دوراً مهماً في حساب تحويل لابلاس وتحويل لابلاس العكسي كما سنرى فيما بعد من هذا الفصل. إن تحويل لابلاس لهذه الإشارة هو:

$$X(p) = \frac{1}{p - p_0}, \qquad Re(p) > Re(p_0)$$

إن حيز التقارب هو نصف المستوي $S(Re(p_0), +\infty)$ وذلك طبيعي لأن الإشارة سببية، ونلاحظ أن p_0 هو قطب للتابع $X(p)$ يقع على يسار حيز التقارب.

وبشكل مماثل فإن تحويل لابلاس للإشارة:

$$x(t) = -e^{p_0 t} u(-t)$$

هو:

$$X(p) = \frac{1}{p - p_0}, \qquad Re(p) < Re(p_0)$$

إن حيز التقارب هو نصف المستوي $S(-\infty, Re(p_0))$ كون الإشارة عكس سببية، ويقع القطب على يمين حيز التقارب.

ونلاحظ أن لكلا الإشارتين السابقتين نفس تابع تحويل لابلاس، ولكن بحيزي تقارب مختلفين. كما نلاحظ أن الأقطاب تشكل حدوداً لحيز التقارب.

5.2. سببية واستقرار النظم في مستوي لابلاس causality and) stability in Laplace (domain

من أجل نظام معطى بتابع استجابته النبضية $h(t)$، فإننا نعلم أنه يكون سببياً إذا كان معدوم في اللحظات السالبة، وبالتالي فإن حيز تقارب تحويل لابلاس له سيكون نصف مستوي يميني وأن جميع أقطاب هذا التابع يجب أن تقع على يسار حيز التقارب.

كما نعلم أيضاً أن النظام يكون مستقراً إذا كان تابع الاستجابة النبضية قابل للتكامل بالإطلاق، أي أن $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|\,dt < +\infty$ وبمقارنة هذا التكامل بتحويل لابلاس للاستجابة النبضية:

$$H(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-pt}\, dt$$

فإنه يمكن أن نستنتج أنه إذا كان $H(p)$ معرفاً على كامل المحور التخيلي، فإن $h(t)$ يكون قابل للتكامل بالإطلاق (نقبل هذه النتيجة دون برهان). ومن ذلك نستنتج أن النظام يكون مستقراً إذا كان حيز التقارب لتحويل لابلاس للاستجابة النبضية يحتوي على المحور التخيلي.

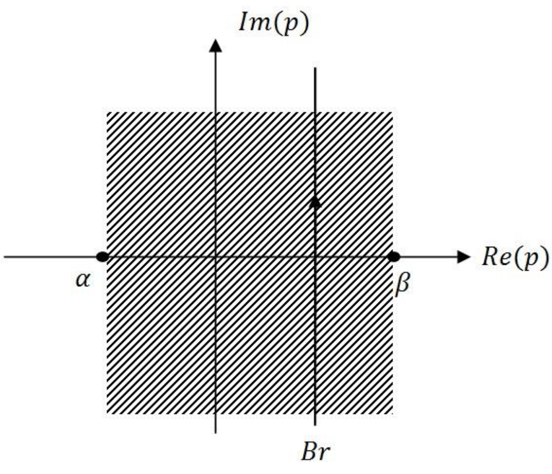
مما سبق نجد أننا نستطيع أن نحكم على سببية النظام واستقراره إذا ما عرفنا حيز التقارب لتحويل لابلاس لاستجابته النبضية، وهي نتيجة مهمة في دراسة النظم في مستوي لابلاس دون العودة إلى المجال الزمني.

3. تحويل لابلاس العكسي (Transform The Inverse Laplace)

إن تحويل لابلاس لإشارة $x(t)$ إن وُجدَ هو تمثيل للإشارة، حيث يمكن باستخدام التحويل العكسي، الانتقال إلى $x(t)$ انطلاقاً من معرفة تحويل لابلاس $[X(p), S(\alpha,\beta)]$.

$$[X(p), S(\alpha,\beta)] \xrightarrow{LT^{-1}} x(t)$$

يعطى تحويل لابلاس العكسي بتكامل عقدي على أي محور شاقولي Br (ويسمى محور برومويش *Bromwich*) موازٍ للمحور التخيلي موجّه من الأسفل إلى الأعلى ويقع ضمن حيّز التقارب كما في الشكل التالي:



الشكل **Error! No text of specified style in document.**-7: إطار تكامل تحويل لابلاس العكسي.

$$x(t) = LT^{-1}[X(p), B(\alpha, \beta)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{Br} X(p)\, e^{pt} dp$$

إن حساب هذا التكامل بشكل مباشر صعب بالحالة العامة ولكن يمكن حسابه بطريقتين أكثر سهولة وهما: طريقة حساب الرواسب، وطريقة التحليل.

1.3. طريقة الرواسب (Residue method)

تعتمد هذه الطريقة على نتائج نظرية كوشي (Cauchy) في حساب التكاملات في المستوي العقدي على إطار مغلق. ولذلك يمكن استخدام هذه الطريقة فقط إذا ما تحقق الشرط التالي:

$$\lim_{|p|\to\infty} X(p) = 0$$

وعندها يمكن استخدام العلاقتين التاليتين في ايجاد القسم السببي والقسم العكس سببي للإشارة $x(t)$:

$$x(t) = \sum_{p_k\in D_-} Res[X(p)e^{pt}]_{p_k} \;, t \geq 0$$

حيث $p_k \in D_-$ تدل على جميع الأقطاب التي تقع على يسار حيز التقارب.

$$x(t) = -\sum_{p_k\in D+_-} Res[X(p)e^{pt}]_{p_k} \;, t < 0$$

حيث $p_k \in D_-$ تدل على جميع الأقطاب التي تقع على يمين حيز التقارب.

أما القيمة $Res[X(p)e^{pt}]_{p_k}$ فهي تدل على قيمة الراسب للتابع $X(p)e^{pt}$ عند قيمة القطب p_k. ويتم حسابه حسب العلاقة العامة التالية:

$$Res[X(p)e^{pt}]_{p_k} = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^m((p-p_k)^m X(p)e^{pt})}{dp^{m-1}}\Bigg|_{p=p_k}$$

حيث أن m هي درجة القطب.

وفي حالة قطب بسيط من الدرجة الأولى $(m = 1)$ فإن العلاقة السابقة تصبح أبسط بكثير حسب الشكل التالي:

$$Res[X(p)e^{pt}]_{p_k} = (p - p_k)X(p)e^{pt}|_{p=p_k}$$

مثال: لنحسب تحويل لابلاس العكسي للتابع التالي

$$H(p) = \frac{1}{(p-2)(p-3)}$$

من أجل حيز التقارب $S(2,3)$.

في البداية لابد من التحقق من أن شرط تطبيق طريقة الرواسب محقق.

$$\lim_{|p|\to\infty} H(p) = \lim_{|p|\to\infty}\frac{1}{(p-2)(p-3)} = 0$$

للتابع $H(p)$ قطبان بسيطان وهما: $p_1 = 2$ و $p_2 = 3$. لنحسب الرواسب عند هذين القطبين:
بما أن القطبين بسيطين من الدرجة الأولى فإننا نستخدم العلاقة

$$Res[\,H(p)e^{pt}]_{p_1} = (p-p_1)H(p)e^{pt}|_{p=p_1} = \left.\frac{e^{pt}}{(p-3)}\right|_{p=2} = -e^{2t}$$

$$Res[\,H(p)e^{pt}]_{p_2} = (p-p_2)H(p)e^{pt}|_{p=p_2} = \left.\frac{e^{pt}}{(p-2)}\right|_{p=3} = -e^{3t}$$

القطب الأول p_1 يقع على يسار حيز التقارب والقطب p_2 يقع على يمين حيز التقارب. بتطبيق علاقتي الرواسب لتحويل لابلاس العكسي من أجل اللحظات الموجبة والسالبة نجد:

من أجل $t \geq 0$ فإن:

$$h(t) = \sum_{p_k \in D_-} Res[H(p)e^{pt}]_{p_k} = Res[H(p)e^{pt}]_{p_1} = -e^{2t}$$

ومن أجل $t < 0$ فإن:

$$h(t) = -\sum_{p_k \in D_+} Res[H(p)e^{pt}]_{p_k} = -Res[H(p)e^{pt}]_{p_2} = -e^{3t}$$

وبدمج النتيجتين السابقتين نجد:

$$h(t) = -e^{2t}u(t) - e^{3t}u(-t)$$

وهي إشارة غير سببية (ليست سببية وليست عكس سببية) وهذا ما يتوافق مع حيز التقارب المعطى بشريط محدود من الجانبين بأقطاب سببية وعكس سببية.

2.3. طريقة التحليل (Decomposition method)

يمكن أيضاً لحساب تحويل لابلاس العكسي للتابع $X(p)$ أن نحلل هذا التابع إلى مجموعة توابع أبسط نعلم تحويل لابلاس العكسي لها من أجل حيز التقارب المعطى بفضل خاصية الخطية لتحويل لابلاس. وهي كثيرة الاستخدام في ايجاد تحويل لابلاس العكسي للتوابع الكسرية.

لتوضيح هذه الطريقة سوف نقوم بأخذ نفس المثال السابق.

مثال: لنحسب تحويل لابلاس العكسي للتابع التالي

$$H(p) = \frac{1}{(p-2)(p-3)}$$

من أجل حيز التقارب $S(2,3)$.

التابع $H(p)$ هو تابع كسري ذو أقطاب من الدرجة الأولى يمكن تحليله بالشكل:

$$H(p) = \frac{1}{(p-2)(p-3)} = \frac{a}{(p-2)} + \frac{b}{(p-3)}$$

حيث

$$a=(p-2)H(p)|_{p=2}=\left.\frac{1}{(p-3)}\right|_{p=2}=-1$$

$$b=(p-3)H(p)|_{p=3}=\left.\frac{1}{(p-2)}\right|_{p=3}=+1$$

أي أن $H(p)$ يكتب كفرق تابعين بالشكل التالي:

$$H(p)=\frac{1}{(p-2)(p-3)}=-H_1(p)+H_2(p)$$

حيث $H_1(p)=\frac{1}{(p-2)}$ و $H_2(p)=\frac{1}{(p-3)}$.

لنحسب الآن تحويل لابلاس العكسي لكلا التابعين من أجل حيز التقارب المعطى $S=]2,3[$.

للتابع $H_1(p)$ قطب وحيد هو $p_1=2$ وهو قطب عكس سببي لأنه يقع على يسار حيز التقارب المعطى، لذلك نحسب تحويل لابلاس العكسي للتابع $H_1(p)$ من أجل حيز التقارب التالي: $S_1=]2,+\infty[$

نعلم أن تحويل لابلاس للإشارة $h_1(t)=e^{2t}u(t)$ هو $H_1(p)$ من أجل $S_1=]2,+\infty[$.

كما نعلم أن تحويل لابلاس للإشارة $h_2(t)=-e^{3t}u(-t)$ هو $H_2(p)$ من أجل حيز التقارب $S_2=]-\infty,3[$. ومنه نستنتج أن:

$$h(t)=-h_1(t)+h_2(t)=-e^{2t}u(t)-e^{3t}u(-t)$$

وهو ما حصلنا عليه باستخدام طريقة الرواسب في الفقرة السابقة.

وبشكل عام عند وجود قطب مضاعف p_k من الدرجة m للتابع $H(p)$ فإن هذا القطب يعطي بالتحليل كسور جزئية من الشكل:

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha_i}{(p-p_k)^i}$$

حيث تعطى الثوابت α_i بعلاقة مشابهة لعلاقة الرواسب كالتالي:

$$\alpha_i=\frac{1}{(m-i)!}\left.\frac{d^{(m-i)}\left((p-p_k)^m H(p)\right)}{dp^{(m-i)}}\right|_{p=p_k}$$

4. خواص تحويل لابلاس (Laplace transform Properties)

1.4. الخطية (linearity)

إذا كان $\{X_1(p),S_1\}$ و $\{X_2(p),S_2\}$ تحويلي لابلاس للإشارتين $x_1(t)$ و $x_2(t)$ فإنّ:

$$\alpha_1x_1(t)+\alpha_2x_2(t)\overset{LT}{\leftrightarrow}\{\alpha_1X_1(p)+\alpha_2X_2(p),S\}$$

إن حيز التقارب S يحتوي على الأقل تقاطع حيزي التقارب للتابعين $X_1(p)$ و $X_2(p)$ أي أن: $S\supseteq S_1\cap S_2$.

أما إذا كان تقاطع حيزي التقارب خالياً فإن تحوي لابلاس للمجموع لا يكون موجوداً.

مثال:

ليكن $X_1(p)=\frac{1}{p+2}, Re(p)>-2$ و $X_2(p)=\frac{1}{(p+2)(p+3)}, Re(p)>-2$ تحويلي لابلاس للإشارتين $x_1(t)$ و $x_2(t)$ ولتكن $x(t)=x_1(t)-x_2(t)$ فيكون تحويل لابلاس لها:

$$X(p)=\frac{1}{p+2}-\frac{1}{(p+2)(p+3)}=\frac{p+2}{(p+2)(p+3)}=\frac{1}{p+3}$$

إن تقاطع حيزي التقارب هو الشريط $S(-2,+\infty)$ ولكن التركيب الخطي الناتج يظهر أن القطب $p=-2$ تم حذفه بالصفر $p=-2$ ولم يبق إلا القطب $p=-3$ بالتالي يكون حيز التقارب لـ $X(p)$ هو الشريط $S(-3,+\infty)$.

2.4. تقييس الزمن (time scaling) وعكس الزمن (time reversing)

إذا كان $\{X(p),S(\alpha,\beta)\}$ تحويل لابلاس للإشارة $x(t)$ فيكون لدينا:

$$x(-t)\overset{LT}{\leftrightarrow}\{X(-p),S(-\beta,-\alpha)\}$$

أي أن عكس الإشارة في المستوي الزمني يوافق العكس في مستوي لابلاس أيضاً.

ولدينا أيضاً إذا كان a عدد حقيقي

$$x(at)\overset{LT}{\leftrightarrow}\left\{\frac{1}{|a|}X\left(\frac{p}{a}\right),S(a\alpha,a\beta)\right\}$$

وهذا يدل أن تغيير المقياس الزمني يوافق تغييراً معاكساً في المقياس في مستوي لابلاس مع الضرب بثابت موجب. وفي حال $a=-1$، فإننا نحصل على خاصة عكس الزمن السابقة.

3.4. الإزاحة الزمنية (time shifting)

إذا كان $x(t)\overset{LT}{\longleftrightarrow}\{X(p),S(\alpha,\beta)\}$ فإن:

$$x(t-\tau)\overset{LT}{\longleftrightarrow}\{e^{-p\tau}X(p),S(\alpha,\beta)\}$$

أي أن الانزياح في الزمن يوافق الضرب بإشارة أسية عقدية في مستوي لابلاس.

4.4. الإزاحة في مستوي لابلاس أو الضرب بإشارة أسية (shifting in the p–domain)

اذا كانت $x(t)$ إشارة ما، فإن:

$$e^{p_0t}x(t)\overset{LT}{\longleftrightarrow}\{X(p-p_0),S(\alpha,\beta)+Re(p_0)\}$$

أي أن الضرب بإشارة أسية عقدية في الزمن يوافق انزياح في مستوي لابلاس.

5.4. المرافق العقدي والإشارات الحقيقية (real signals complex conjugate and)

اذا كانت $x(t)$ إشارة عقدية فإن:

$$x^*(t)\overset{LT}{\leftrightarrow}\{X^*(p^*),S(\alpha,\beta)\}$$

وإذا كانت الإشارة $x(t)$ حقيقية فإن $X(p)=X^*(p^*)$ وهذا ما يدعى بالتناظر التوافقي في مستوي لابلاس.

6.4. جداء التلاف (convolution product)

إذا كانت $y(t)$ تنتج عن جداء تلاف الإشارتين $x_1(t)$ و $x_2(t)$:

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t)$$

فيكون:

$$Y(p) = X_1(p).X_2(p)$$

حيث $S \supseteq S_1 \cap S_2$. وهكذا فإن تحويل لابلاس لجداء التلاف هو جداء تحويلي لابلاس وهي نتيجة هامة جداً، فكما نعلم، تعطى المرشحات الخطية بجداءات تلاف من الشكل $y(t) = h(t) * x(t)$، ويمكّننا تحويل لابلاس إذاً من تحويل حساب جداء التلاف "المعقد" إلى جداء جبري بسيط في مستوي لابلاس بالشكل $Y(p) = H(p)X(p)$.

7.4. الاشتقاق (differentiation)

إذا كان $x(t) \overset{LT}{\longleftrightarrow} \{X(p), S\}$ فإن:

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{LT}{\longleftrightarrow} \{pX(p), S'\}$$

حيث يكون الحيز S' محتوياً للحيز S.

مثال:

إن تحويل لابلاس لإشارة الخطوة الواحدية $x(t) = u(t)$ هو $X(p) = \frac{1}{p}$ في حال $Re(p) > 0$ أما تحويل لابلاس للمشتق $\frac{dx(t)}{dt} = \delta(t)$ فهو يساوي 1 على المستوي العقدي كله.

8.4. التكامل (integration)

إذا كان $x(t) \overset{LT}{\leftrightarrow} \{X(p), S\}$ فإن:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\theta)d\theta \overset{LT}{\longleftrightarrow} \left\{\frac{1}{p}X(p), S''\right\}$$

حيث يكون S'' محتوياً للحيز $S \cap S(0, +\infty)$.

نتيجة هامة: إن الاشتقاق في المجال الزمني يقابله الضرب بالمتحول p في مجال لابلاس، والتكامل في المجال الزمني يقابله التقسيم على المتحول p في مجال لابلاس.

9.4. الاشتقاق في المستوى p (differentiation in the p–domain)

باشتقاق طرفي تحويل لابلاس بالنسبة للمتحول p نجد:

$$\frac{dX(p)}{dp} = \int_{-\infty}^{+\infty} (-t)x(t)e^{-pt}dt$$

ومنه نستنتج أن:

$$-tx(t) \overset{LT}{\longleftrightarrow} \left\{\frac{dX(p)}{dp}, S\right\}$$

مما يعني أن الاشتقاق في مستوي لابلاس يقابلا الضرب بالمتحول $-t$ في المجال الزمني. وتفيد هذه الخاصة بايجاد تحويل لابلاس العكسي للكسور من لشكل $\frac{1}{(p-p_k)^i}$ الناتج من الاشتقاق من الدرجة i للكسر البسيط $\frac{1}{(p-p_k)}$ كما هو معروض في جدول تحويلات لابلاس الشهيرة.

10.4. تحويلات لابلاس لبعض الإشارات الأساسية (signals LT for basic)

فيما يلي نجد تحويلات لابلاس لبعض الإشارات الأساسية ويمكن التحقق منها بسهولة اعتماداً على خواص تحويل لابلاس التي عرضناها.

حيز التقارب	$X(p)$	$x(t)$
$]-\infty,+\infty[$	1	$\delta(t)$
$]-\infty,+\infty[$	e^{-pt}	$\delta(t-\tau)$
$]0,+\infty[$	$1/p$	$u(t)$
$]-\infty,0[$	$1/p$	$-u(-t)$
$]0,+\infty[$	$\frac{1}{p^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$
$]-\alpha,+\infty[$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$e^{-\alpha t}u(t)$
$]-\alpha,+\infty[$	$\frac{1}{(p+\alpha)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t)$
$]0,+\infty[$	$\frac{p}{p^2+\omega_0^2}$	$\cos(\omega_0 t).u(t)$
$]0,+\infty[$	$\frac{\omega_0}{p^2+\omega_0^2}$	$\sin(\omega_0 t).u(t)$

5. تحويل لابلاس أحادي الجانب (Unilateral Laplace transform)

إن تحويل لابلاس الذي عرفناه ودرسنا خواصه في الفقرات السابقة هو تحويل لابلاس ثنائي الجانب. هناك شكل آخر لتعريف تحويل لابلاس يقتصر التكامل فيه على الزمن الموجب ويسمى تحويل لابلاس أحادي الجانب. يؤدي تحويل لابلاس أحادي الجانب دوراً مهماً في تحليل النظم الخطية السببية المحكومة بمعادلات تفاضلية خطية ذات أمثال ثابتة مع شروط ابتدائية غير معدومة.

يعرف تحويل لابلاس أحادي الجانب $X_+(p)$ لإشارة $x(t)$ بالعلاقة التالية:

$$X_+(p) = LT_+[x(t)] = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt}dt$$

نلاحظ أن التكامل يمتد من $t = 0$ وحتى $+\infty$، أي إن تحويل لابلاس أحادي الجانب لا يتعلق إلا بقيم الإشارة في اللحظات الموجبة. أي أن تحويل لابلاس ثنائي الجانب هو تمثيل للإشارة، بينما تحويل لابلاس أحادي الجانب ليس تمثيلاً للإشارات غير المعدومة في اللحظات السالبة. يمكن النظر إلى تحويل لابلاس أحادي الجانب على أنه تحويل لابلاس ثنائي الجانب لإشارات معدومة في اللحظات السالبة.

تبقى معظم خواص تحويل لابلاس ثنائي الجانب محققة في حال تحويل لابلاس أحادي الجانب، ويكمن الاختلاف فقط في خاصة الاشتقاق. في تحويل لابلاس ثنائي الجانب، يقابل الاشتقاق في المستوي الزمني الضرب بالمتحول p في مستوي لابلاس. أما في تحويل لابلاس أحادي الجانب فهناك اختلاف بسيط.

فإذا كانت

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

فإن:

$$Y_+(p) = pX_+(p) - x(0)$$

حيث $x(0)$ هو قيمة الإشارة عند اللحظة $t = 0$، فإذا كان معدوماً فإننا نحصل على خاصة الاشتقاق لتحويل لابلاس ثنائي الجانب.

ويمكن تعميم ذلك لاشتقاقات من درجة أعلى بشكل عودي، فمثلاً في حالة المشتق الثاني للإشارة:

$$y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

فإن تحويل لابلاس أحادي الجانب يصبح:

$$Y_+(p) = p^2X_+(p) - px(0) - x'(0)$$

حيث $x'(0)$ هو قيمة مستق الإشارة $x(t)$ عند الصفر .

يسمح استخدام تحويل لابلاس أحادي الجانب بدراسة نظم خطية تعطى بمعادلات تفاضلية مع شروط ابتدائية غير معدومة، مثل التي نصادفها في مسائل الدارات الكهربائية والتحكم وغيرها، حيث نتعامل مع نظم سببية نطبق على دخلها إشارات اختبار سببية بغية دراسة خواص هذه النظم وسلوكها في الحالة العابرة والحالة الدائمة.

6. نظريتا القيمة البدائية والقيمة النهائية (value theorem Initial and final)

في حالة إشارة سببية، أي معدومة في اللحظات السالبة، وبحيث لا تتضمن نبضات أو مشتقات نبضات في اللحظة $t = 0$، فإنه يمكن معرفة القيمة البدائية والقيمة النهائية للإشارة انطلاقاً من تحويل لابلاس لها من دون الحاجة إلى حساب تحويل لابلاس العكسي لها وذلك باستخدام العلاقتين التاليتين:

$$x(0) = \lim_{p\to\infty}[pX(p)]$$

$$\lim_{t\to\infty}[px(t)] = \lim_{p\to 0}[pX(p)]$$

يمكن اثبات هاتين العلاقتين بالاعتماد على خاصية الاشتقاق.

7. العلاقة بين تحويل لابلاس وتحويل فورييه (between LT and FT Relation)

نتساءل: أيكون فورييه حالة خاصة من تحويل لابلاس؟ وهل بالإمكان إبدال $j\omega$ أو $2\pi jf$ بالمتحول العقدي p في $X(p)$ للحصول على تحويل فورييه $\tilde{X}(\omega)$ (أو $\tilde{x}(f)$)؟ في الحقيقة إن التحويلين يتكاملان في مسائل معالجة الإشارة والتحكم وغيرها، لتمثيل الإشارات وتحليلها وتحليل النظم. رأينا أنه بالإمكان استخدام تحويل لابلاس لتمثيل إشارات ليس لها تحويل فورييه بالمعنى العادي (كإشارة الخطوة مثلاً) ذلك أنه في تعريف تحويل لابلاس يدخل حيّز التقارب. قد يُفهم من ذلك أنه يمكن أن نشمل بتحويل لابلاس مجموعة أكبر من الإشارات. بيد أن إدخال استخدام التوزيعات، وبوجه خاص نبضة ديراك في تحويل فورييه، يسمح بالتعامل مع إشارات ليس لها تحويل لابلاس بالمعنى الذي اعتبرناه. فمثلاً نعرف أنه لا يوجد تحويل لابلاس للإشارة الثابتة ولكن يوجد لها تحويل فورييه بمعنى التوزيعات، وهي مركبة مستمرة تقابل في المجال الترددي نبضة ديراك عند التردد 0.

مع ذلك نبدل في كثير من الحالات العملية $j\omega$ أو $2\pi jf$ بالمتحول p في $X(p)$ للحصول على تحويل فورييه. وفي الحقيقة فإننا نجري ذلك ضمن شروط، إذ يجب أن يكون تحويل فورييه للإشارة معرفاً، وهذا يعني أنه بالمعنى العادي يجب أن يحوي حيّز التقارب لتحويل لابلاس المحور التخيلي. لنأخذ مثلاً إشارة الخطوة $u(t)$، تحويل لابلاس لها هو $\left[\frac{1}{p}, S(0,+\infty)\right]$ ولكن تحويل فورييه لها لا يساوي $\frac{1}{j\omega}$ أو $\frac{1}{2\pi jf}$ لأن تحويل لابلاس غير متقارب على المحور التخيلي ولا يجوز أن نستبدل ببساطة $j\omega$ أو $2\pi jf$ بالمتحول p.

بالنتيجة يمكن الحصول على تحويل فورييه انطلاقاً من تحويل لابلاس فقط إذا كان حيز التقارب لتحويل لابلاس يحوي المحور التخيلي وعندها يتم ذلك باستبدال المتحول p بالقيمة $j\omega$.

أسئلة وتمارين الفصل الرابع

تحويل لابلاس

1- أجب عن الأسئلة التالية:

1. عرف تحويل لابلاس للإشارة $x(t)$.
2. كيف تصبح علاقة الخرج بالدخل لنظام LTI ذو الاستجابة النبضية $h(t)$ في مجال لابلاس؟
3. ما هو الشرط على تحويل لابلاس للاستجابة النبضية $h(t)$ لنظام LTI حتى يكون سببياً.
4. ما هو الشرط على تحويل لابلاس للاستجابة النبضية $h(t)$ لنظام LTI حتى يكون مستقراً.
5. هل نستطيع دائماً الحصول على تحويل فورييه $X(\omega)$ للإشارة $x(t)$ انطلاقاً من تحويل لابلاس لها؟ علل إجابتك.

2- احسب تحويل لابلاس وحدد حيز التقارب المقابل للإشارات التالية:

1. $x_1(t) = e^{-\alpha t}u(t)$.
2. $x_2(t) = e^{-\alpha t}u(-t)$.
3. $x_3(t) = e^{-\alpha|t|}$ من أجل $\alpha > 0$.

مساعدة راجعة: احسب تحويل لابلاس انطلاقاً من التعريف الأساسي بحساب التكامل.

3- احسب تحويل لابلاس العكسي لكل من التوابع التالية:

1. $X_1(p) = \frac{1}{p+\alpha}$ حيز التقارب: $S =]-\alpha, +\infty[$.
2. $X_2(p) = \frac{1}{p+\alpha}$ حيز التقارب: $S =]-\infty, -\alpha[$.
3. $X_3(p) = \frac{p}{p^2+\Omega_0^2}$ حيز التقارب: $S =]0, +\infty[$.
4. $X_4(p) = \frac{p+1}{p^2+7p+12}$ حيز التقارب: $S =]-3, +\infty[$.

مساعدة راجعة: احسب تحويل لابلاس العكسي بطريقة الرواسب أو باستخدام خواص تحويل لابلاس ولا سيما الضرب بإشارة أسيه عقدية انطلاقاً من تحويل لابلاس لإشارة الخطوة الواحدية. وأيضاً يمكن استخدام طريقة التحليل إلى كسور جزئية في الحالتين 3 و4.

4– احسب الاستجابة النبضية للنظام المعطى بتابع التحويل التالي:

$$H(p) = \frac{1}{p^2 - 1}$$

في الحالات الثلاث التالية:

أ– $S_1 =]1, +\infty[$.

ب– $S_2 =]-\infty, -1[$.

ت– $S_3 =]-1, +1[$.

ادرس سببية النظام واستقراره في الحالات الثلاث. ثم احسب تحويل فورييه للاستجابة النبضية من أجل S_3.

مساعدة راجعة: استخدم طريقة التحليل إلى كسور جزئية وناقش حسب حالة كل قطب فيما إذ كان سببياً أم عكس سببي لإيجاد التحويل العكسي المناسب، ثم احكم على سببية النظام واستقراره حسب حيز التقارب كما ورد في فقرة سببية واستقرار النظم في مستوي لابلاس من هذا الفصل.

إجابات – حلول التمارين السابقة

السؤال الأول:

1. تعريف تحويل لابلاس للإشارة $x(t)$ هو التحويل:

$$x(t) \xrightarrow{LT} \{X(p), S\}$$

حيث:

$$X(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-pt} dt$$

و S هو حيز التقارب لقيم المتحول p من المستوي العقدي الذي يكون فيه التكامل معرفاً.

2. علاقة الخرج بالدخل في المجال الزمني:

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

باستخدام خاصة جداء التلاف لتحويل لابلاس، تصبح العلاقة:

$$Y(p) = H(p)X(p)$$

3. شرط سببية النظام في مستوي لابلاس هو أن يكون حيز التقارب لتحويل لابلاس للاستجابة النبضية هو نصف مستوي يميني وجميع الأقطاب على يسار حيز التقارب.
4. شرط استقرار النظام في مستوي لابلاس هو أن يحوي حيز التقارب لتحويل لابلاس للاستجابة النبضية المحور التخيلي.
5. لا يمكن دائماً الحصول على تحويل فورييه لإشارة انطلاقاً من تحويل لابلاس لها، ولكن يمكن ذلك فقط إذا كان حيز التقارب للإشارة يحتوي على المحور التخيلي.

السؤال الثاني:

1. يعطى تحويل لابلاس بالعلاقة

$$X_1(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-pt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t} u(t)\, e^{-pt} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t}\, e^{-pt} dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-(p+\alpha)t} dt = \left[\frac{e^{-(p+\alpha)t}}{-(p+\alpha)}\right]_0^{+\infty}$$

وبالتالي، ومن أجل $Re(p+\alpha) > 0$ يكون

$$X_1(p) = \frac{1}{p+\alpha}$$

ويكون حيز التقارب $S =]-\alpha, +\infty[$

2. يعطى تحويل لابلاس بالعلاقة

$$X_2(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-pt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t} u(-t)\, e^{-pt} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha t}\, e^{-pt} dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-(p+\alpha)t} dt = \left[\frac{e^{-(p+\alpha)t}}{-(p+\alpha)}\right]_{-\infty}^{0}$$

وبالتالي، ومن أجل $Re(p+\alpha) < 0$ يكون

$$X_2(p) = \frac{1}{p+\alpha}$$

ويكون حيز التقارب $S =]-\infty, -\alpha[$

3. يمكن ايجاد تحويل لابلاس بالحساب المباشر، أو باستخدام خواص تحويل لابلاس كالتالي:

$$x_3(t) = e^{-\alpha|t|} = e^{-\alpha t}u(t) + e^{+\alpha t}u(-t)$$

من الطلب الأول نعلم أن:

$$e^{-\alpha t}u(t) \overset{\text{LT}}{\longleftrightarrow} \left\{\frac{1}{p+\alpha}, \text{S} =]-\alpha, +\infty[\right\}$$

وباستخدام خاصية عكس الزمن لهذه النتيجة نجد

$$e^{+\alpha t}u(-t) \overset{\text{LT}}{\longleftrightarrow} \left\{\frac{1}{-p+\alpha}, \text{S} =]-\infty, +\alpha[\right\}$$

وبحسب خاصية الخطية لتحويل لابلاس نجد

$$e^{-\alpha|t|} \overset{\text{LT}}{\longleftrightarrow} \left\{\frac{1}{p+\alpha} - \frac{1}{p-\alpha}, \text{S} =]-\alpha, +\infty[\cap]-\infty, +\alpha[\right\}$$

وبالنهاية:

$$e^{-\alpha|t|} \overset{\text{LT}}{\longleftrightarrow} \left\{\frac{-2\alpha}{p^2-\alpha^2}, \text{S} =]-\alpha, +\alpha[\right\}$$

السؤال الثالث:

1. يمكن حساب تحويل لابلاس العكسي باستخدام الرواسب أو خواص تحويل لابلاس. سنستخدم هنا خواص تحويلا لابلاس حيث أننا نعلم:

$$u(t) \overset{\text{LT}}{\longleftrightarrow} \left\{\frac{1}{p}, \text{S} =]0, +\infty[\right\}$$

وباستخدام خاصة الضرب بإشارة أسية عقدية التي توافق انزياح في مستوي لابلاس نجد

$$e^{-\alpha t}u(t) \overset{\text{LT}}{\longleftrightarrow} \left\{\frac{1}{p+\alpha}, \text{S} =]0, +\infty[-\alpha\right\}$$

أي:

$$x_1(t) = e^{-\alpha t}u(t) \overset{\text{LT}}{\longleftrightarrow} \left\{\frac{1}{p+\alpha}, \text{S} =]-\alpha, +\infty[\right\}$$

2. بما أن هذه الإشارة عكس سببية لأن حيز التقارب هو نصف مستوي يساري، فإننا سنستخدم خاصة الضرب بإشارة أسية لإشارة الخطوة الواحدية المعكوسة، أي:

$$-u(-t) \overset{\text{LT}}{\longleftrightarrow} \left\{\frac{1}{p}, \text{S} =]-\infty, 0, [\right\}$$

وباستخدام خاصة الضرب بإشارة أسية عقدية التي توافق انزياح في مستوي لابلاس نجد

$$-e^{-\alpha t}u(-t) \overset{\text{LT}}{\longleftrightarrow} \left\{\frac{1}{p+\alpha}, \text{S} =]-\infty, 0[-\alpha\right\}$$

أي:

$$x_2(t) = -e^{-\alpha t}u(-t) \overset{\text{LT}}{\longleftrightarrow} \left\{\frac{1}{p+\alpha}, \text{S} =]-\infty, -\alpha[\right\}$$

3. نوجد أولاً أقطاب هذا التابع: للتابع قطبان عقديان مترافقان وهما $p_1 = j\Omega_0$ و $p_2 = -j\Omega_0$. وبالنظر إلى حيز التقارب فهما قطبان بسيطان سببيان. أي يمكن كتابة التابع $X_3(p)$ بالشكل:

$$X_3(p) = \frac{p}{(p-p_1)(p-p_2)}$$

يمكننا هنا استخدام الرواسب لأن شرط استخدام الرواسب محقق:

$$\lim_{|p|\to\infty} X_3(p) = \lim_{|p|\to\infty} \frac{p}{(p-p_1)(p-p_2)} = 0$$

الراسب عند القطب الأول هو:

$$Res[\,X_3(p)e^{pt}]_{p_1} = (p-p_1)X_3(p)e^{pt}|_{p=p_1} = \left.\frac{pe^{pt}}{(p-p_2)}\right|_{p=p_1} = \frac{e^{j\Omega_0 t}}{2}$$

الراسب عند القطب الثاني هو:

$$Res[\,X_3(p)e^{pt}]_{p_2} = (p-p_2)X_3(p)e^{pt}|_{p=p_2} = \left.\frac{pe^{pt}}{(p-p_1)}\right|_{p=p_2} = \frac{e^{-j\Omega_0 t}}{2}$$

لإيجاد تحويل لابلاس العكسي نستخدم علاقة الرواسب في الحالتين:

من أجل $t \geq 0$ فإن:

$$\begin{aligned} x_3(t) &= \sum_{p_k \in D_-} Res[H(p)e^{pt}]_{p_k} \\ &= Res[H(p)e^{pt}]_{p_1} + Res[H(p)e^{pt}]_{p_2} \\ &= \frac{1}{2}(e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\Omega_0 t}) = \cos(\Omega_0 t) \end{aligned}$$

ومن أجل $t < 0$ فإن:

$$x_3(t) = 0$$

وبدمج النتيجتين السابقتين نجد:

$$x_3(t) = cos(\Omega_0 t)\,u(t)$$

4. سنستخدم هنا طريقة التحليل.

لدينا تابع كسري، له قطبان بسيطان هما $p_1 = -3$ و $p_2 = -4$ وهما قطبان سببيان يقعان على يسار حيز التقارب. نعيد كتابة $X_4(p)$ بالشكل التالي:

$$X_4(p) = \frac{p+1}{p^2+7p+12} = \frac{p+1}{(p+3)(p+4)}$$

بما أن كلا القطبين بسيطين، فإننا نحلل هذا الكسر إلى كسور بسيطة بالشكل التالي:

$$X_4(p) = \frac{a}{(p+3)} + \frac{b}{(p+4)}$$

نوجد الثوابت a و b بالشكل التالي:

$$a = (p+3)X_4(p)|_{p=-3} = \left.\frac{p+1}{(p+4)}\right|_{p=-3} = -2$$

$$b = (p+4)H(p)|_{p=-4} = \left.\frac{p+1}{(p+3)}\right|_{p=-4} = +3$$

مما يعني أن:

$$X_4(p) = \frac{-2}{(p+3)} + \frac{3}{(p+4)}$$

وبما أن القطبين سببيين وباستخدام خاصة الخطية نجد بتحويل لابلاس العكسي للكسور الجزئية:

$$x_4(t) = (-2e^{-3t} \mp 3e^{-4t})u(t)$$

السؤال الرابع:

يمكن إعادة كتابة التابع $H(p)$ بطريقة التحليل بالشكل:

$$H(p) = \frac{1}{p^2-1} = \frac{1}{(p-1)(p+1)} = \frac{1/2}{p-1} - \frac{1/2}{p+1}$$

ولهذا التابع قطبين بسيطين هما $p_1 = +1$ و $p_2 = -1$

الحالة $S_1 =]1, +\infty[$.

في هذه الحالة القطبيين سببيين مما يعطي

$$h(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})u(t)$$

والنظام سببي وغير مستقر لأن حيز التقارب لا يحوي المحور التخيلي.

الحالة $S_2 =]-\infty, -1[$

في هذه الحالة القطبيين عكس سببيين مما يعطي:

$$h(t) = -\frac{1}{2}(e^t - e^{-t})u(-t)$$

والنظام عكس سببي وغير مستقر لأن حيز التقارب لا يحوي المحور التخيلي.

الحالة $S_3 =]-1, +1[$.

في هذه الحالة القطب $p_1 = +1$ هو قطب عكس سببي والقطب $p_2 = -1$ هو قطب سببي مما يعطي:

$$h(t) = -\frac{1}{2}(e^t u(-t) + e^{-t}u(t))$$

والنظام غير سببي ولكنه مستقر لأن حيز التقارب يحوي المحور التخيلي.

في هذه الحالة يمكن استنتاج الاستجابة الترددية من تحويل لابلاس بتعويض $p = j\omega$، أي

$$H(\omega) = \left.\frac{1}{p^2-1}\right|_{p=j\omega} = \frac{1}{(j\omega)^2-1} = \frac{-1}{\omega^2+1}$$

المرشحات المستمرة

الكلمات المفتاحية:

المرشحات المستمرة، وصل النظم، مخطط بود، مرشح من الدرجة الأولى، مرشح من الدرجة الثانية.

ملخص:

يهدف هذا الفصل دراسة النظم الخطية الغير متغيرة مع الزمن أو المرشحات المستمرة باستخدام الأدوات التي تم عرضها في الفصول السابقة من تحويل لابلاس وتحويل فوربيه. حيث نبين كيفية دراسة الأنظمة المركبة من نظم جزئية مربوطة مع بعضها البعض. هذا بالإضافة إلى طرق تمثيل الاستجابة الترددية للنظم بيانياً باستخدام مخطط بود. سنركز في هذا الفصل إلى دراسة المرشحات التي تعطى بمعادلات تفاضلية وكيفية تمثيل مخططاتها الصندوقية بالاعتماد على تحويل لابلاس. لتوضيح ما سبق سنقوم بدراسة المرشحات من الدرجة الأولى والمرشحات من الدرجة الثانية.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- كيفية دراسة النظم الخطية المركبة من نظم خطية جزئية.
- كيفية تمثيل الاستجابة الترددية بيانياً للنظم الخطية باستخدام مخططات بود.
- دراسة المرشحات من الدرجة الأولى.
- دراسة المرشحات من لدرجة الثانية.

يهدف هذا الفصل دراسة النظم الخطية الغير متغيرة مع الزمن أو المرشحات المستمرة باستخدام الأدوات التي تم عرضها في الفصول السابقة من تحويل لابلاس وتحويل فورييه. حيث نبين كيفية دراسة الأنظمة المركبة من نظم جزئية مربوطة مع بعضها البعض. هذا بالإضافة إلى طرق تمثيل الاستجابة الترددية للنظم بيانياً باستخدام مخطط بود. سنركز في هذا الفصل إلى دراسة المرشحات التي تعطى بمعادلات تفاضلية وكيفية تمثيل مخططاتها الصندوقية بالاعتماد على تحويل لابلاس. لتوضيح ما سبق سنقوم بدراسة المرشحات من الدرجة الأولى والمرشحات من الدرجة الثانية.

1. مقدمة (Introduction)

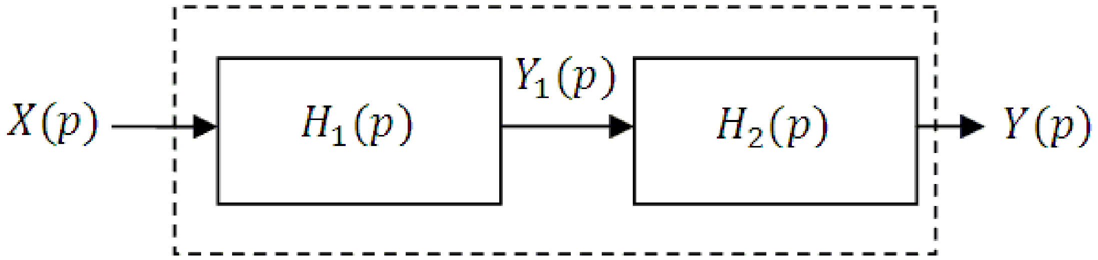
نطلق غالباً اسم المرشحات الخطية على النظم الغير متغيرة مع الزمن في مجال معالجة الإشارة وذلك بسبب استخدام هذه الأنظمة في تغيير المحتوى الترددي لإشارة الدخل. فعلى سبيل المثال، عند قياس درجة الحرارة الجو باستخدام مقياس حرارة فإنه قد يتراكب مع إشارة درجة الحرارة إشارة ضجيج ناجمة عن مصدر التغذية الكهربائية أو من عيوب لا يمكن تجنبها في عمل الحساس نفسه. ولما كانت تغيرات درجة الحرارة تتم ببطئ مع الزمن وذلك مقارنة بتغيرات إشارة الضجيج فإننا نلجأ إلى استخدام نظام معالجة خطي يقوم بالتخلص من الترددات العالية في إشارة خرج الحساس الناجمة عن الضجيج والإبقاء على الترددات المنخفضة التي تمثل إشارة درجة الحرارة. نسمي هكذا نظام بمرشح تمرير ترددات منخفضة أو اختصاراً مرشح تمرير منخفض. مع ذلك فإن استخدام مصطلح المرشحات الخطية قد لا يكون متداولاً في تطبيقات أخرى مثل أنظمة التحكم الخطية بمنظومات ميكانيكية أو غيرها، إلا أن دراسة خواص الاستجابة الترددية لهذه لنظم الخطية تبقى مفيدةً في فهم عمل هذه النظم. لذلك سوف نبين في هذا الفصل كيفية تمثيل الاستجابة الترددية للنظم الخطية بيانياً باستخدام مخططات بود (Bode Diagrams) بهدف توضيح عملها. ولكن قبل ذلك سوف نقوم بدراسة النظم الخطية المكونة من مجموعة نظم خطية جزئية وموصولة مع بعضها بطرق مختلفة.

2. وصل النظم (Interconnected systems)

تتكون النظم العملية المعقدة في معظم الأحيان من عدة مكونات جزئية، حيث يمكن اعتبار كل مكون نظام جزئي خطي. وتتصل هذه النظم الجزئية ببعضها البعض بعدة طرق. سوف نوضح هنا كيفية دراسة هذه النظم المعقدة من خلال دراسة النظم الجزئية وطريقة الوصل فيما بينها.

1.2. وصل النظم على التسلسل (Systems connected in series)

يتم ربط نظامين على التسلسل بربط مخرج النظام الأول بمدخل النظام الثاني كما هو مبين في الشكل التالي:



الشكل Error! No text of specified style in document.-1: ربط نظامين على التسلسل.

إذا كان كل من النظامين الجزئيين معرفين بتابعي الاستجابة $H_1(p)$ و $H_1(p)$، يكون تابع التحويل للنظام الكلي هو:

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = H_1(p)H_2(p)$$

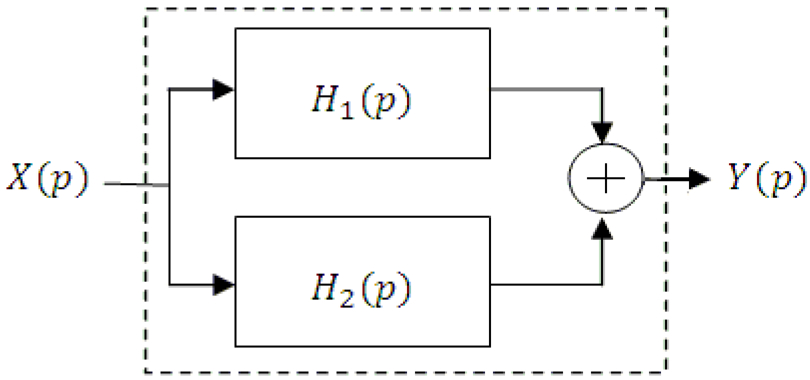
وذلك لأن:

$$Y(p) = H_2(p)Y_1(p) = H_2(p)H_1(p)X(p)$$

وبالتالي فإن ربط نظامين على التسلسل يعطي نظاماً يكون تابع التحويل له هو جداء تابعي التحويل لكلا النظامين الجزئيين المكونين للنظام الكلي.

2.2.وصل النظم على التفرع (Systems connected in parallel)

يتم ربط نظامين على التفرع عندما يتم تطبيق إشارة الدخل على كلا النظامين، ويتم الحصول على إشارة الخرج بجمع مخرجي النظامين كما يوضح الشكل التالي:



الشكل Error! No text of specified style in document.- 2: ربط نظامين على التفرع.

إذا كان كل من النظامين الجزئيين معرفين بتابعي الاستجابة $H_1(p)$ و $H_1(p)$، يكون تابع التحويل للنظام الكلي هو:

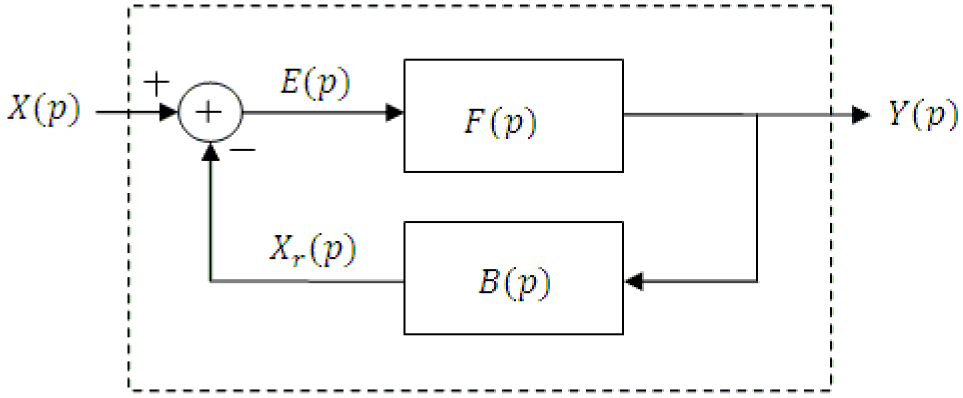
$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = H_1(p) + H_2(p)$$

وذلك لأن:

$$Y(p) = H_1(p)X(p) + H_2(p)X(p) = \big(H_1(p) + H_2(p)\big)X(p)$$

3.2. نظم الحلقة المغلقة (Closed loop systems)

يتألف نظام الحلقة المغلقة (closed loop systems) من مسارين: المسار الأول ويسمى المسار المباشر (Forward) والمسار الثاني ويسمى مسار التغذية الراجعة (feedback) كما هو مبين في الشكل التالي.



الشكل Error! No text of specified style in document.-3: نظام حلقة مغلقة.

يُطبق نظام المسار المباشر $F(p)$ على إشارة الفرق $E(p)$ بين إشارة الدخل $X(p)$ والإشارة الراجعة $X_r(p)$ للحصول على إشارة الخرج $Y(p)$. بينما يتم الحصول على الإشارة الراجعة $X_r(p)$ من خلال تطبيق النظام $B(p)$ على إشارة الخرج.

للحصول على استجابة النظام الكلي نكتب إشارة الخرج بالشكل:

$$Y(p) = F(p)E(p) = F(p)\big(X(p) - X_r(p)\big)$$

حيث

$$X_r(p) = B(p)Y(p)$$

بتعويض $X_r(p)$ في معادلة إشارة الخرج نجد

$$Y(p) = F(p)X(p) + F(p)B(p)Y(p)$$

أو بشكل آخر

$$Y(p)\big(1 + F(p)B(p)\big) = F(p)X(p)$$

مما يعطي استجابة النظام الكلي بالمعادلة التالية:

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{F(p)}{1 + F(p)B(p)}$$

تُستخدم هذه البنية في نظم الاتصالات ونظم التحكم بشكل واسع حيث تعبر إشارة الدخل عن إشارة التحكم التي تتحكم في نظام يتم نمذجته بنظام المسار المباشر $F(p)$ مثل محرك تيار مستمر على سبيل المثال يتحكم بزاوية ذراع آلية متحركة، وفي هذه الحالة تدل إشارة الدخل $X(p)$ على جهد متناسب مع زاوية محور المحرك التي يريد المستخدم أن ينتقل إليها بينما تعبر إشارة الخرج $Y(p)$ عن زاوية دوران المحرك. ولكي يتم التأكد من أن المحرك قد وصل إلى الموقع المرغوب، يتم قياس زاوية الدوران من خلال حساس موقع وتحويل نتيجة القياس إلى جهد يعطي الإشارة الراجعة $X_r(p)$. ولذلك لا يتم تطبيق إشارة التحكم $X(p)$ بشكل مباشر على المحرك ولكن يتم تطبيق إشارة الفرق $E(p)$ بين إشارة التحكم $X(p)$ وإشارة خرج الحساس $X_r(p)$. فعندما تكون الإشارتان متساويتان أي أن المحرك وصل إلى المكان المطلوب يتم إيقاف المحرك بتطبيق جهد معدوم على المحرك وإلا يستمر تطبيق إشارة الفرق حتى نصل إلى حالة المساواة.

3. النظم التي تعطى بمعادلات تفاضلية خطية (Systems given by linear differential equations)

سبق وأن رأينا أنه يتم توصيف عمل الكثير من النظم العملية بواسطة معادلة تفاضلية تربط بين إشارة الدخل وإشارة الخرج حسب الشكل العام

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y(t) = b_n\frac{d^n x(t)}{dt^n} + b_{n-1}\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + b_0 x(t)$$

حيث أن الثوابت a_i و b_i هي ثوابت عقدية بشكل عام.

وبأخذ تحويل لابلاس للطرفين والاستفادة من خاصة الاشتقاق من المرتبة i في المجال الزمني يكافئ الضرب بالحد p^i في مستوي لابلاس، وجدنا أن تابع التحويل للنظام يكتب عن طريق تابع كسري يعطى بالشكل العام التالي:

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \cdots + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_0}$$

نسمي النظام المعطى بتابع التحويل الكسري هذا بمرشح من الدرجة n والتي هي أكبر قوة للمعامل p في المقام. وتكون درجة البسط أصغر أو تساوي درجة المقام. أما في النظم التي تكون فيها درجة البسط أكبر من درجة المقام فهي ليست ذات تطبيقات عملية واسعة لذلك لا نعتبرها في هذه الدراسة.

1.3. تمثيل المخطط الصندوقي (Block diagram)

لتحقيق نظام معطى بمعادلة تفاضلية وانطلاقاً من تابع الاستجابة الكسري الموافق، يمكن التعبير عن الخرج في مستوي لابلاس بالشكل التالي:

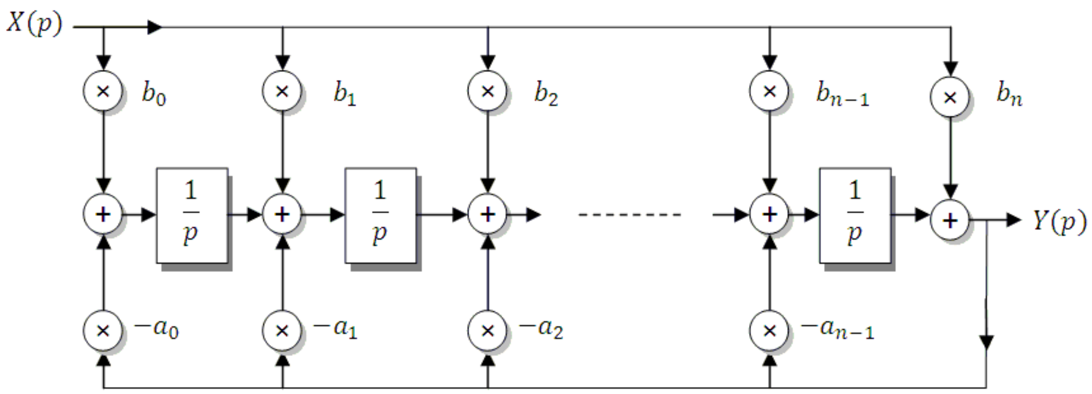
$$Y(p) = b_n X(p) + \frac{1}{p}[b_{n-1}X(p) - a_{n-1}Y(p)] + \cdots + \frac{1}{p^{n-1}}[b_1 X(p) - a_1 Y(p)] + \frac{1}{p^n}[b_0 X(p) - a_0 Y(p)]$$

وبإخراج المعامل المشترك $\frac{1}{p}$ بشكل عودي في كل مرة نحصل على الشكل التالي:

$$Y(p) = b_n X(p) + \frac{1}{p}\Bigg([b_{n-1}X(p) - a_{n-1}Y(p)] + \frac{1}{p}\bigg([b_{n-2}X(p) - a_{n-2}Y(p)] + \cdots + \frac{1}{p}\Big([b_1 X(p) - a_1 Y(p)] + \frac{1}{p}[b_0 X(p) - a_0 Y(p)]\Big) \ldots\bigg)\Bigg)$$

تدل هذه العلاقة على أننا نستطيع الحصول على إشارة الخرج عن طريق نظام ذو تغذية راجعة (أو تغذية خلفية) يقوم بعمليات ضرب بثوابت معينة وجمع وطرح بالإضافة إلى استخدام نظم جزئية ذات تابع استجابة $\frac{1}{p}$ أي تقوم بعملية مكاملة.

يمكن التعبير عن العلاقة السابقة باستخدام المخطط الصندوقي التالي:



الشكل **Error! No text of specified style in document.**-4: المخطط الصندوقي لتحقيق نظام معطى بمعادلة تفاضلية خطية.

يمكن تحقيق عمليات الجمع والضرب بسهول باستخدام دارات الكترونية مناسبة تستخدم مكبرات عمليات (Operation Amplifier). فعملية الضرب بثابت هي دارة تكبير (أو تخميد) بمقدار هذا الثابت. وكذلك يتم تحقيق التكامل باستخدام دارة الكترونية تحتوي على مكثفة.

تعتبر الطريقة السابقة طريقة عامة لتمثيل مرشح من الدرجة n. ولكن بشكل عملي، يتم استخدام طرق أخرى لتحقيق النظم ذات تابع استجابة كسري وذلك من خلال تحليل هذا النظام كتركيب من مجموعة من النظم الجزئية من الدرجة الأولى والدرجة الثانية (المربوطة على التسلسل أو التفرع أو ضمن حلقة مغلقة)، ولكن لا يدخل هذا ضمن إطار دراستنا هنا ولكننا مع ذلك سوف نقوم بدراسة النظم من الدرجة الأولى والثانية بتفصيل أكثر في هذا الفصل.

2.3. الاستجابة النبضية والاستجابة الخطوية(Impulse and Step) response

في النظم المعطاة بمعادلة تفاضلية، وبعد الحصول على تابع الاستجابة $H(p)$، والذي هو تابع تحويل لابلاس للاستجابة النبضية، يمكن الحصول على الاستجابة النبضية نفسها $h(t)$ بأخذ تحويل لابلاس العكسي لتابع التحويل، كما رأينا في فصل تحويل لابلاس.

بالإضافة إلى الاستجابة الخطوية والتي تمثل خرج النظام عندما يكون دخله هو إشارة نبضة ديراك، تمثل الاستجابة الخطوية (والتي تمثل خرج النظام عندما يكون دخله هو إشارة الخطوة) وسيلة مفيدة في بعض التطبيقات لفهم استجابة النظام عندما يطرأ أي تغير مفاجئ في إشارة الدخل. فمثلاً كيف سيتغير موقع ذراع آلية عند تطبيق إشارة التحكم بالموقع من موقع أول إلى موقع آخر. يمكن الحصول على الاستجابة الخطوية في المجال الزمني بإجراء جداء التلاف بين الاستجابة النبضية وإشارة الخطوة $y_s(t) = h(t) * u(t)$. أو في مجال لابلاس وفق المعادلة $Y_s(p) = H(p).\frac{1}{p}$. ويمكن الانتقال من مجال إلى آخر باستخدام تحويل لابلاس وتحويل لابلاس العكسي.

4. مخططات بود للاستجابة الترددية (frequency Bode diagrams of response)

نعلم أنه يمكننا الحصول على الاستجابة الترددية لنظام $\tilde{h}(f)$ أو $H(\omega)$ بإجراء تحويل فورييه للاستجابة النبضية للنظام، وكذلك إذا كان النظام مستقراً فيمكن الحصول على الاستجابة الترددية بتعويض المتحول $p = j\omega = j2\pi f$ في تابع تحويل لابلاس للاستجابة النبضية للنظام.

بشكل عام، تكون الاستجابة الترددية تابع عقدي يتكون من جزء حقيقي وجزء تخيلي. كما يمكن التعبير عنه بالشكل القطبي كما يلي:

$$H(\omega) = A(\omega)e^{j\Phi(\omega)}$$

حيث $A(\omega)$ هو تابع المطال وهو مقدار موجب، و $\Phi(\omega)$ هو تابع الصفحة أو الطور.

وعندما يكون تابع الاستجابة النبضية حقيقياً، فإن تابع الاستجابة الترددية ذو تناظر توافقي. أي أن تابع المطال يكون زوجياً، وتابع الصفحة يكون فردياً. وبالتالي يمكن فقط النظر إلى القسم الموجب من هذه التوابع.

لتمثيل الاستجابة الترددية بيانياً، يمكن رسم كل من تابعي المطال والصفحة بدلالة التردد الزاوي ω. وعادة يتم تمثيل المطال (أو الربح) بوحدة الديسيبل dB (decibel) وذلك برسم التابع التالي

$$A(\omega)\ (dB) = 20\log_{10}\big(A(\omega)\big)$$

ويتم ذلك على مقياس لوغاريتمي لمحور التردد الزاوي (أو التردد) وذلك لتمثيل مجال أوسع من الترددات مقارنة بالمقياس الخطي لمحور التردد. تذكر بأن $A(\omega)$ لا وحدة له إذا أنه يمثل نسبة بين مطال الخرج إلى مطال الدخل، أما $\Phi(\omega)$ فهو يقدر بوحدة الراديان (rad) أو الدرجات (deg).

تسمى هذه المنحنيات لكل من المطال والصفحة للاستجابة الترددية بمخطط بود (Bode Diagram) للاستجابة الترددية والتي سنرى كيف يتم رسمها من خلال دراسة مثالين هامين عن المرشحات الخطية وهما المرشحات من الدرجة الأولى والمرشحات من الدرجة الثانية.

5. مرشح من الدرجة الأولى (First order filter)

يعتبر مرشح الدرجة الأولى من أبسط النظم LTI. ويعطى المرشح من الدرجة الأولى بمعادلة تفاضلية من الدرجة الأولى كالتالي:

$$\frac{dy(t)}{dt} + \tau y(t) = bx(t)$$

حيث أن τ هو ثابت حقيقي موجب يسمى الثابت الزمني للمرشح، و b هو عدد حقيقي وهو يشكل معامل ربح ساكن للمرشح لا يؤثر في طريقة استجابة النظام ولذلك سوف نفرض هنا أن هذا الثابت $b = 1$.

يكون تابع تحويل هذا المرشح هو

$$H(p) = \frac{b}{1 + \tau p}$$

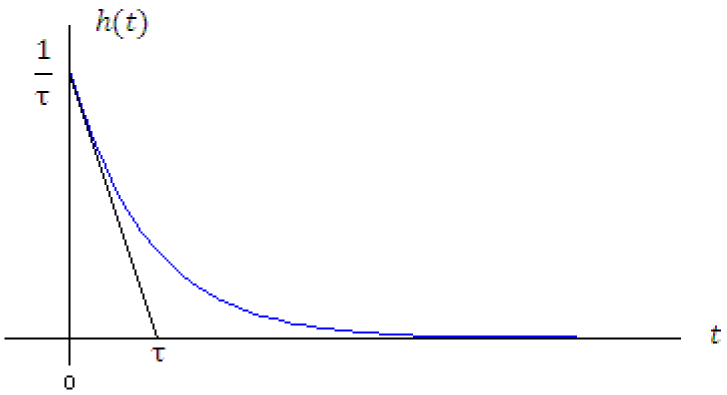
إن الربح الساكن للمرشح هو قيمة تابع التحويل عند الصفر أي $H(0)$. وهو في حالتنا هنا هو $H(0) = b$. وهو يقابل في المجال الزمني ربح النظام من أجل الإشارات الثابتة. سوف نفرض أن الربح الساكن للمرشح هنا هو واحد أي $b = 1$ دون أن يؤثر على عمومية دراسة المسألة.

لهذا التابع قطب وحيد وهو $p_0 = -\frac{1}{\tau}$. وبفرض أن هذا المرشح سببي فإن حيز التقارب له هو $S =]-\frac{1}{\tau}, +\infty[$. وهذا يعني أن هذا النظام مستقر لأن حيز التقارب يحوي على المحور التخيلي (أي الصفر).

1.5. الاستجابة النبضية (Impulse response)

يمكن الحصول على الاستجابة النبضية بأخذ تحويل لابلاس العكسي لتابع التحويل من أجل حيز التقارب S. ذلك يعطي التابع التالي للاستجابة النبضية:

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t)$$

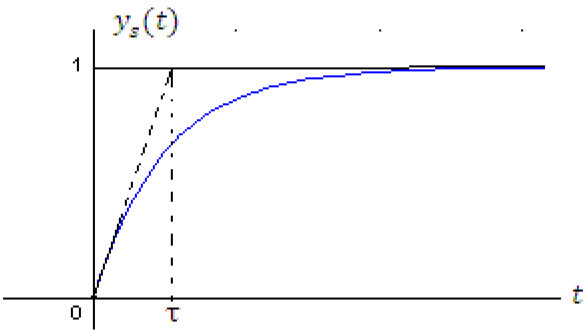


الشكل **.Error! No text of specified style in document**- 5: الاستجابة النبضية لمرشح من الدرجة الأولى.

2.5. الاستجابة الخطوية (Step response)

نحصل على الاستجابة الخطوية بحساب خرج النظام $y_s(t)$ عندما تكون إشارة الدخل هي إشارة الخطوى الواحدية. ويمكن الحصول على ذلك بحساب جداء التلاف بين الاستجابة النبضية وإشارة الدخل. أي

$$y_s(t) = h(t) * u(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) u(t)$$



الشكل **.Error! No text of specified style in document**- 6: الاستجابة الخطوية لمرشح من الدرجة الأولى.

3.5. الاستجابة الترددية (Frequency response)

بما أن نظام المرشح من الدرجة الأولى هو نظام مستقر فيمكننا الحصول على الاستجابة الترددية مباشرة من تابع التحويل $H(p)$ بتعويض $p = j\omega$ من دون اللجوء إلى الحساب المباشر لتحويل فورييه لتابع الاستجابة النبضية $h(t)$. مما يعطي تابع الاستجابة الترددية التالي:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\tau\omega}$$

4.5. مخطط بود (Bode Diagram)

نحسب مطال الاستجابة الترددية بدلالة التردد الزاوي ω، فنحصل على العبارة التالية:

$$A(\omega) = |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}$$

وبوحدة الديسيبل (dB) يصبح تابع الربح بالصيغة التالية:

$$A(\omega)(dB) = 20log_{10}\big(A(\omega)\big) = -10log_{10}(1 + (\tau\omega)^2)$$

نلاحظ أن الربح من أجل الترددات المنخفضة، في حال $\tau\omega \ll 1$، فإن الربح يقارب الواحد أو 0 dB. أما من أجل الترددات العالية، في حال $\tau\omega \gg 1$، فإن الربح يقارب المقدار :

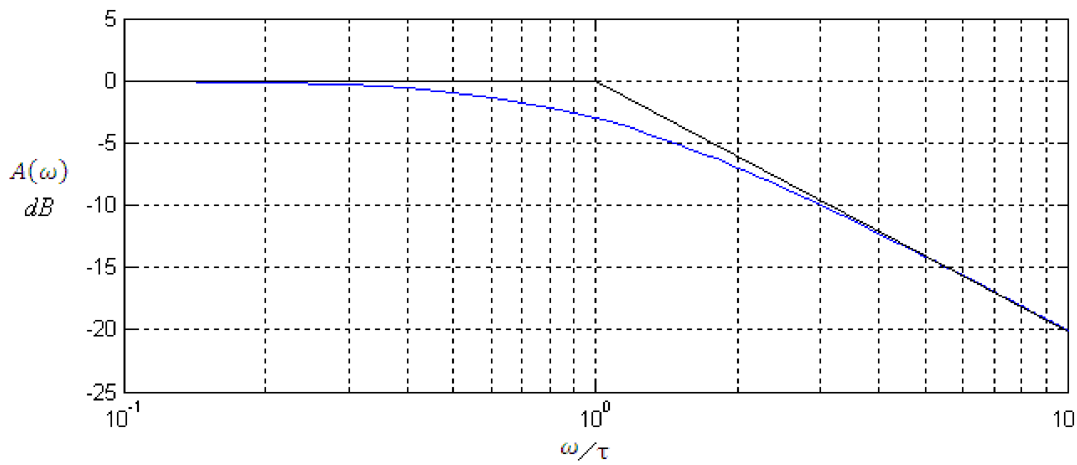
$$G(\omega)(dB) = -20log_{10}(\tau\omega) = -20log_{10}(\tau) - 20log_{10}(\omega)$$

وهو عبارة عن مستقيم مقارب بالمقياس اللوغاريتمي للتردد الزاوي. أي أن مخطط الربح يمكن تقريبه بمستقيمين يتقاطعان عن النقطة $\omega = \frac{1}{\tau}$. إن الربح عند هذا التردد هو *−3dB* أي أقل من الربح الساكن (وهو الربح الأعظمي هنا) بمقدار *3dB*. ونقول عن هذا التردد بأنه تردد القطع عند *3dB*. ومع زيادة التردد نرى الربح بمقدار *6dB* عندما يتضاعف التردد(*octave*)، أو يتناقص بمقدار *20dB* عندما يتضاعف التردد عشر مرات (*decade*).

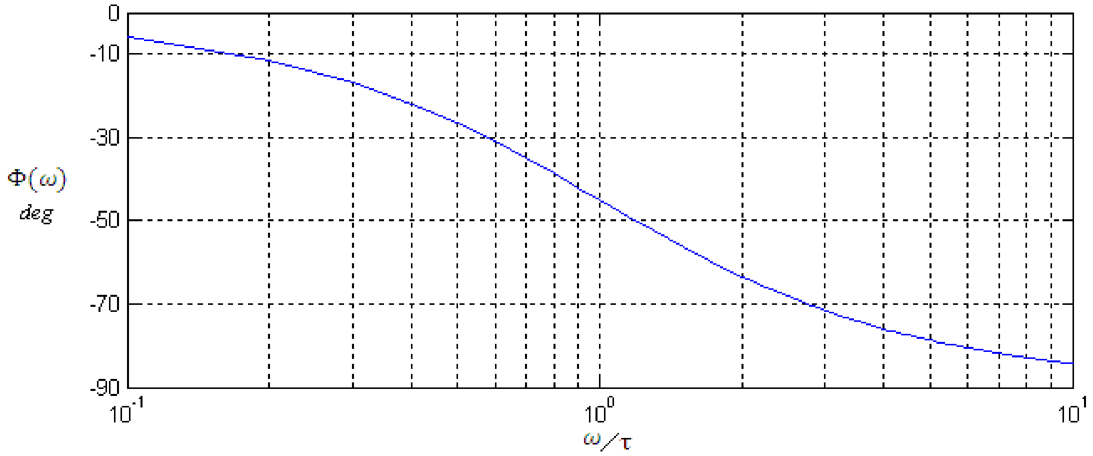
أما صفحة الاستجابة الترددية، فتعطى بالعبارة التالية:

$$\Phi(f) = Arg\big(H(\omega)\big) = -\arctan(\tau\omega)$$

يبين الشكلان التاليان مخطط بود للاستجابة الترددية لكل من المطال والصفحة.



الشكل **Error! No text of specified style in document.**- 7: مطال الاستجابة الترددية لمرشح من الدرجة الأولى.



الشكل **Error! No text of specified style in document.**- 8: صفحة الاستجابة الترددية لمرشح من الدرجة الأولى.

6. مرشح من الدرجة الثانية (Second order filter)

يعطى المرشح من الدرجة الثانية بمعادلة تفاضلية من الدرجة الثانية كالتالي:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0y(t) = b_0x(t)$$

يكون تابع تحويل هذا المرشح هو:

$$H(p) = \frac{b_0}{p^2 + a_1p + a_0}$$

إن الربح السكن للمرشح هو $H((0) = \frac{b_0}{a_0}$ لذلك سوف نفرض أن $b_0 = a_0$ للحصول على ربح ساكن واحدي. لهذا التابع قطبان هما p_1 و p_2 وهما القيم التي تعدم المقام. وبما أن الأمثال في المقام حقيقية فإن هذين القطبين حقيقيين أو عقديين مترافقين. بفرض أن هذا المرشح سببي، فإن حيز تقارب تابع تحويل لابلاس له يمتد من القطب ذو الفاصلة (القسم الحقيقي) الأكبر وحتى اللانهاية. لكي يكون المرشح مستقراً، يجب أن يكون القسم الحقيقي لكلا القطبين سالباً. عندها يكون $-(p_{1+}p_2)$ و p_1p_2 مقدارين موجبين. أي أنه يجب أن يكون a_0 و a_1 ثابتين حقيقيين موجبين.

لإظهار الأقطاب، يمكن إعادة تابع الاستجابة بالشكل التالي:

$$H(p) = \frac{p_1p_2}{(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{p_1p_2}{p^2 - (p_{1+}p_2)p + p_1p_2}$$

وفي حالة مرشح مستقر ، يمكن إعادة كتابة تابع الاستجابة بالشكل العام التالي:

$$H(p) = \frac{\Omega_0^2}{p^2 + 2\xi\Omega_0p + \Omega_0^2}$$

حيث $\Omega_0^2 = p_1p_2$، و $2\xi\Omega_0 = -(p_{1+}p_2)$.

نسمي Ω_0 التردد الزاوي الخاص للنظام (natural frequency)، و ξ معامل التخامد (damping ratio) كما سنرى دلالتهما العملية عند دراسة الاستجابة لنبضية لهذا المرشح.

1.6. الاستجابة النبضية (Impulse response)

يمكن الحصول على الاستجابة النبضية بأخذ تحويل لابلاس العكسي لتابع التحويل من أجل حيز التقارب S.
وسوف نميز ثلاث حالات حسب طبيعة الأقطاب التي نحصل عليها.

حالة $(\xi > 1)$:

في هذه الحالة نحصل على قطبين حقيقيين بسيطين، وهما:

$$p_{1,2} = \Omega_0\left(-\xi \mp \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$$

وباستخدام طريقة التحليل، يمكن تفريق التابع إلى كسرين كالتالي:

$$H(p) = \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2}\left[\frac{1}{p - p_1} - \frac{1}{p - p_2}\right]$$

وذلك يقابل مجموع مرشحين من الدرجة الأولى. وتكون الاستجابة النبضية

$$h(t) = \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2}\left[e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right]u(t)$$

وبتعويض قيم الأقطاب، نجد الصيغة التالية للاستجابة النبضية:

$$h(t) = \frac{\Omega_0}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} e^{-\xi\Omega_0 t}\left[e^{\Omega_0\sqrt{\xi^2-1}t} - e^{-\Omega_0\sqrt{\xi^2-1}t}\right]u(t)$$

حالة $(\xi = 1)$:

في هذه الحالة نحصل على قطب حقيقي وحيد مضاعف، وهو:

$$p_{1,2} = -\xi\Omega_0$$

ذلك يعطي التابع التالي للاستجابة النبضية:

$$h(t) = \Omega_0^2 t e^{-\Omega_0 t} u(t)$$

حالة $(\xi < 1)$:

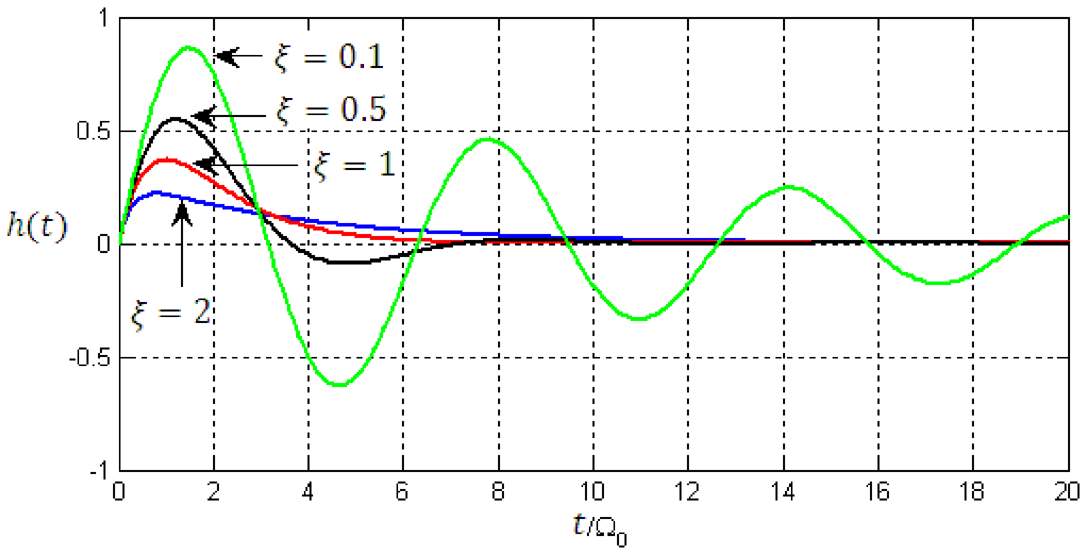
في هذه الحالة نحصل على قطبين عقديين مترافقين بسيطين، وهما:

$$p_{1,2} = \Omega_0\left(-\xi \mp j\sqrt{1 - \xi^2}\right)$$

ذلك يعطي التابع التالي للاستجابة النبضية:

$$h(t) = \frac{\Omega_0}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\Omega_0 t}\sin(\Omega_0\sqrt{1 - \xi^2}\, t)u(t)$$

وفي هذه الحالة يبدي تابع الاستجابة النبضية شكل متناوب بمطال متخامد حسب قيمة معامل التخامد ξ.



الشكل **Error! No text of specified style in document.**- 9: الاستجابة النبضية لمرشح من الدرجة الثانية.

2.6. الاستجابة الخطوية (Step response)

نحصل على الاستجابة الخطوية بحساب خرج النظام $y_s(t)$ عندما تكون إشارة الدخل هي إشارة الخطوى الواحدية. ويمكن الحصول على ذلك بحساب الاستجابة الخطوية في مجال لابلاس ومن ثم استخدام تحويل لابلاس العكسي. ونورد فيما يلي علاقات الاستجابة الخطوية في الحالات الثلاث.

حالة $(\xi > 1)$:

$$y_s(t) = \left[1 - \frac{e^{-\xi\Omega_0 t}}{2\sqrt{\xi^2-1}}\left(\frac{e^{\Omega_0\sqrt{\xi^2-1}t}}{\xi-\sqrt{\xi^2-1}} - \frac{e^{-\Omega_0\sqrt{\xi^2-1}t}}{\xi+\sqrt{\xi^2-1}}\right)\right]u(t)$$

حالة $(\xi = 1)$:

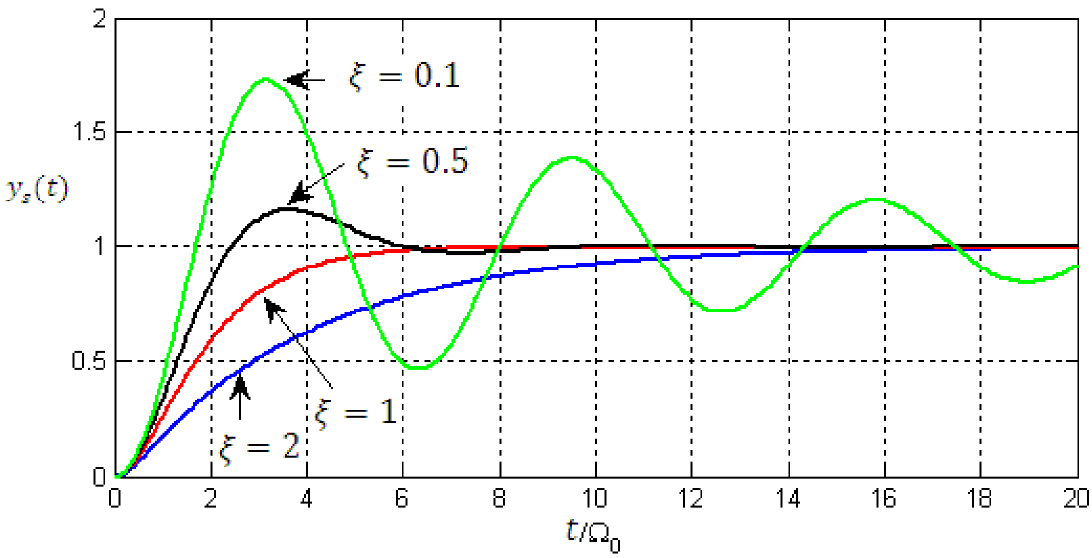
$$y_s(t) = [1 - e^{-\Omega_0 t} - \Omega_0 t e^{-\Omega_0 t}]u(t)$$

حالة $(\xi < 1)$:

$$y_s(t) = \left[1 - \frac{e^{-\xi\Omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\Omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t + \theta)\right]u(t)$$

حيث

$$\theta = Arccossin(\xi)$$



الشكل **.Error! No text of specified style in document**- 10: الاستجابة الخطوية لمرشح من الدرجة الثانية.

3.6. الاستجابة الترددية (Frequency response)

في حال مرشح من الدرجة الثانية ومستقر فيمكننا الحصول على الاستجابة الترددية مباشرة من تابع التحويل $H(p)$ بتعويض $p = j\omega$ من دون اللجوء إلى الحساب المباشر لتحويل فورييه لتابع الاستجابة النبضية $h(t)$.

مما يعطي تابع الاستجابة الترددية التالي:

$$H(\omega) = \frac{\Omega_0^2}{-\omega^2 + \Omega_0^2 + 2\xi\Omega_0 j\omega}$$

ونرى بوضوح أنه يتناسب عكساً مع مربع التردد الزاوي.

4.6. مخطط بود (Bode Diagram)

انطلاقاً من الاستجابة الترددية العقدية، نحسب مطال هذه الاستجابة بالديسيبل مما يعطي العلاقة التالية:

$$A(\omega)(dB) = -10\log\left(\left[1-\left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\xi^2\left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2\right)$$

ومن أجل الترددات المنخفضة يقارب ربح المرشح قيمة 0 dB. أما من أجل الترددات العالية مقارنة مع التردد الخاص للنظام $\frac{\omega}{\Omega_0} >> 1$، تقارب قيمة الربح القيمة التالية:

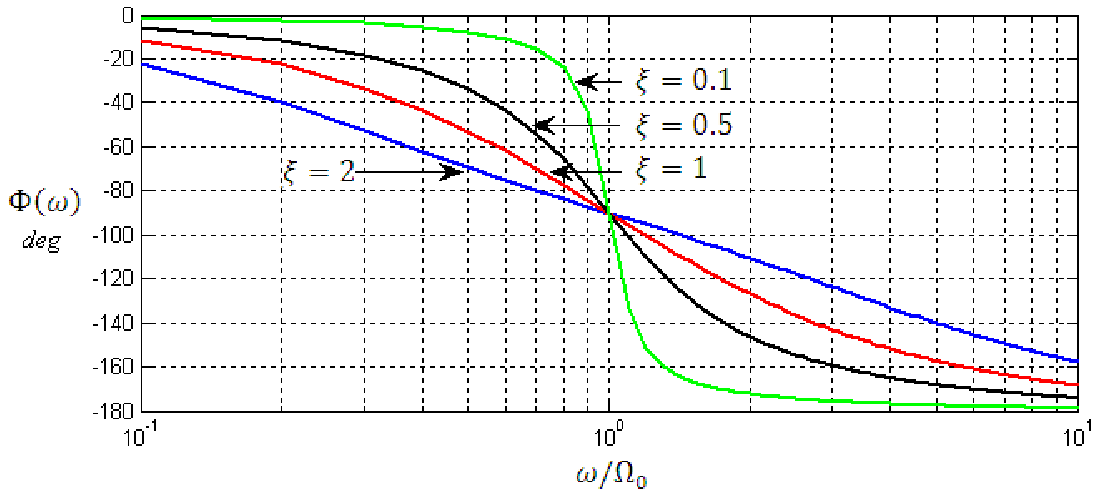
$$A(\omega)(dB) = -40\log_{10}\left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)$$

وهي معادلة مستقيم بالمقياس اللوغاريتمي بميل قدره −40dB/decade (أو −12dB/octave) أي ضعف القيمة التي حصلنا عليها في حالة مرشح من الدرجة الأولى. ويتقاطع المستقيمين المقاربين عند $\omega = \Omega_0$.

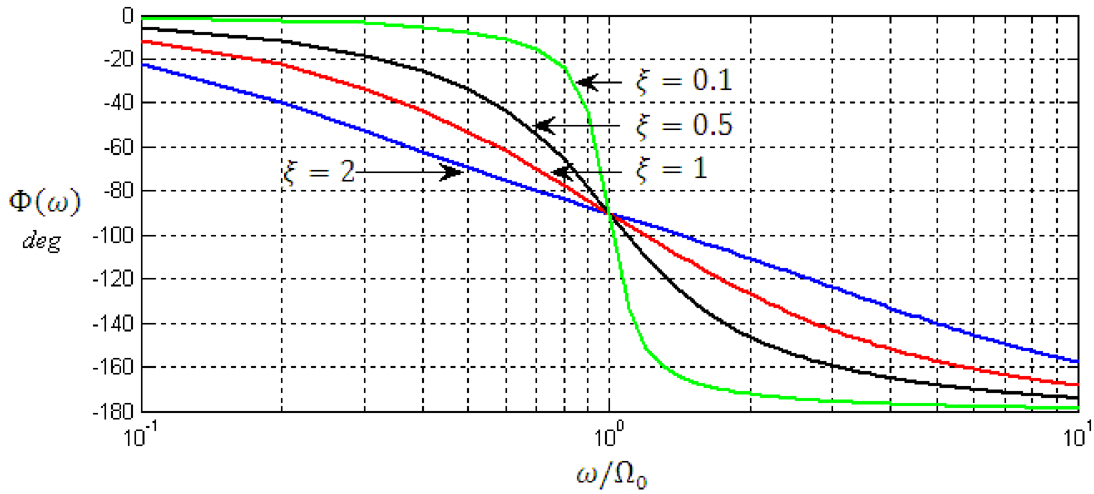
وبحساب صفحة الاستجابة الترددية، نجد العلاقة التالية:

$$\Phi(f) = Arg\big(H(\omega)\big) = -\arctan\left(\frac{2\xi\left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2}\right)$$

يبين الشكلين التاليين مخطط بود لكل المطال والصفحة بدلالة التردد الزاوي.



الشكل .Error! No text of specified style in document- 11: مطال الاستجابة الترددية لمرشح من الدرجة الثانية.

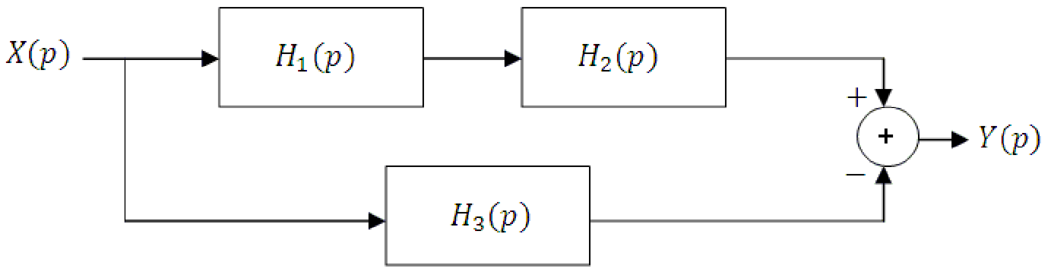


الشكل .Error! No text of specified style in document- 12: صفحة الاستجابة الترددية لمرشح من الدرجة الثانية.

نلاحظ في منحني المطال وجود ظاهرة تجاوب (resonance) عند القيم الصغيرة لمعامل التخامد حيث نحصل على أعلى قيمة للربح عند التردد الزاوي $\omega_r = \Omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$ وذلك من أجل $\xi < 1/\sqrt{2}$. وتكبر قيمة هذا الربح كلما نقص معامل التخامد.

أسئلة وتمارين الفصل الخامس
المرشحات المستمرة

1− لنعتبر النظام LTI المبين في الشكل التالي:



احسب تابع التحويل للنظام الكلي.

مساعدة راجعة: راجع ربط النظم على التسلسل وعلى التفرع.

2− لنعتبر النظام السببي LTI المعطى بالاستجابة الترددية التالية:

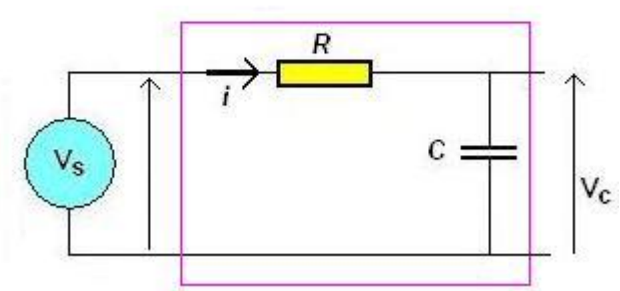
$$H(\omega) = -2j\omega$$

حدد استجابة النظام لكل من الإشارات التالية:

$$x_1(t) = e^{jt}$$
$$x_2(t) = \sin(\omega_0 t)$$

مساعدة راجعة: أوجد إشارة الخرج في المجال الترددي وقارن مع خاصية الاشتقاق في المجال الزمني لتحويل فورييه.

3− ليكن لدينا الدارة الكهربائية التالية:



1. اكتب المعادلة التفاضلية التي تربط خرج الدارة $V_c(t)$ بدخلها $V_s(t)$ علماً أن العلاقة بين جهد المكثفة والتيار المار فيها يعطى بالعلاقة $i(t) = C\frac{dV_c(t)}{dt}$. واستنتج من هذه المعادلة التفاضلية تابع تحويل لابلاس للدارة.

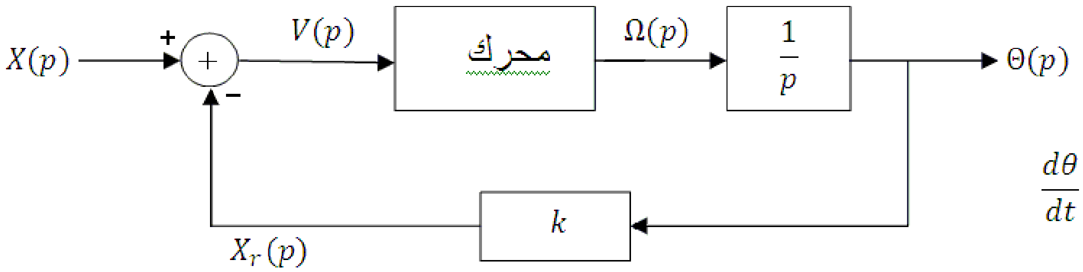
2. ادرس استقرار الدارة.
3. احسب الاستجابة الترددية للدارة وارسم مخطط بود لكل من المطال والصفحة.
4. احسب استجابة الدارة من أجل إشارة الدخل

$$V_s(t) = a\sin(2\pi f_0 t)$$

حيث: $A = 5Volts$ و $f_0 = 50\ Hz$ و $R = 10\ K\Omega$ و $C = 10\ \mu F$.

مساعدة: راجع تحويل لابلاس لنظام معطى بمعادلة تفاضلية وكيفية رسم مخططات بود لنظام من الدرجة الأولى.

4– ليكن لدينا نظام التحكم بمحرك تيار مستمر باستخدام الحلقة المغلقة المبينة في الشكل التالي:



نعتبر المحرك نظام خطي غير متغير مع الزمن يُطبق على دخله جهد مستمر ليدور بسرعة زاوية $d\theta/dt$.
ويعطى تابع تحويل المحرك كنظام من الدرجة الأولى من الشكل:

$$M(p) = \frac{\Omega(p)}{V(p)} = \frac{A}{1+\tau p}$$

نريد أن نتحكم من خلال إشارة دخل $x(t)$ بالموقع الزاوي للمحرك، ومن أجل التأكد من أن المحرك استجاب لأمر التحكم بشكل صحيح، يقوم حساس بقياس الموقع الزاوي θ والذي نعتبره خرج النظام وبعد ضرب نتيجة القياس بمعامل تقييس k للحصول على إشارة التغذية الراجعة $x_r(t)$ يتم الحصول على جهد التحكم بالمحرك بالعلاقة التالية:

$$v(t) = x(t) - x_r(t)$$

1. إذا عرفنا أن المحرك يدور بسرعة 1500 دورة بالدقيقة عند تطبيق جهد ساكن مقداره 10V، حدد قيمة الثابت A.
2. أعط تابع التحويل $F(p)$ الذي يربط بين الموقع الزاوي للمحرك θ والجهد المطبق على دخل المحرك.
3. احسب تابع التحويل لنظام التحكم الكلي. هل هذا النظام مستقر؟ علل ذلك.
4. احسب الاستجابة الخطوية لنظام التحكم.

$$k = \frac{10}{\pi}\ \left(\frac{V}{rad}\right), \tau = 10\ ms$$

مساعدة: راجع تابع التحويل لنظام الحلقة المغلقة مع التعويض المناسب لنظام النقل الأمامي والإرجاع الخلفي مع مراجعة الاستجابة الخطوية لنظام من الدرجة الثانية.

إجابات – حلول التمارين السابقة

السؤال الأول:

يتكون النظام من جمع نظامين جزئيين مربوطين على التفرع. يتكون النظام العلوي بدوره من نظامين جزئيين مربوطين على التسلسل.

$$Y(p) = H_1(p)H_2(p)X(p) - H_3(p)X(p)$$

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = H_1(p)H_2(p) - H_3(p)$$

السؤال الثاني:

بما أن المرشح معطى في المجال الترددي، لذلك سوف نقوم بحساب إشارة الخرج في المجال الترددي، وبعد ذلك نعود إلى المجال الزمني من خلال تحويل فورييه العكسي.

من أجل الإشارة الأولى، نقوم أولاً بحساب طيف إشارة الدخل

$$\tilde{x}_1(\omega) = \delta(f - \frac{1}{2\pi})$$

إن تطبيق المرشح في المجال الترددي يتم من خلال حساب جداء الاستجابة الترددية للمرشح مع طيف إشارة الدخل.

$$\tilde{y}_1(f) = \tilde{h}(f)\tilde{x}_1(\omega) = -4j\pi f\delta\left(f - \frac{1}{2\pi}\right) == -2j\delta\left(f - \frac{1}{2\pi}\right)$$

وبأخذ تحويل فورييه المعاكس نجد:

$$y_1(t) = -2je^{jt}$$

وهنا نلاحظ أن هذا المرشح يقوم بعملية الاشتقاق بالزمن لإشارة الدخل مع معامل ضرب بمقدار (-2).

وبشكل مماثل من أجل الإشارة الثانية:

$$x_2(t) = \sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

$$\tilde{x}_2(f) = \frac{1}{2j}\big(\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\big)$$

$$\tilde{y}_2(f) = \tilde{h}(f)\tilde{x}_2(\omega) = \frac{-4j\pi f}{2j}(\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0))$$

$$\tilde{y}_2(f) = -\big(\omega_0\delta(f - f_0) + \omega_0\delta(f + f_0)\big)$$

$$y_2(t) = -\omega_0(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

$$y_2(t) = -2\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

وهو كما ذكرنا مشتق إشارة الدخل مع معامل ضرب بمقدار -2.

السؤال الثالث:

1. باستخدام قوانين كيرشوف للدارات الكهربائية يمكن أن نكتب إشارة الخرج كالتالي:

$$V_c(t) = V_s(t) - Ri(t)$$

وبتعويض قيمة التيار المار في الدارة في المعادلة السابقة، نحصل على العلاقة التالية:

$$V_c(t) = V_s(t) - RC\frac{dV_c(t)}{dt}$$

أو بشكل آخر

$$V_c(t) + \tau\frac{dV_c(t)}{dt} = V_s(t)$$

حيث أن $\tau = RC$.

بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة التفضلية نحصل على

$$V_c(p) + \tau p V_c(p) = V_s(p)$$
$$V_c(p)(1 + \tau p) = V_s(p)$$

وبالتالي يكون تابع التحويل هو

$$H(p) = \frac{V_c(p)}{V_s(p)} = \frac{1}{1 + \tau p}$$

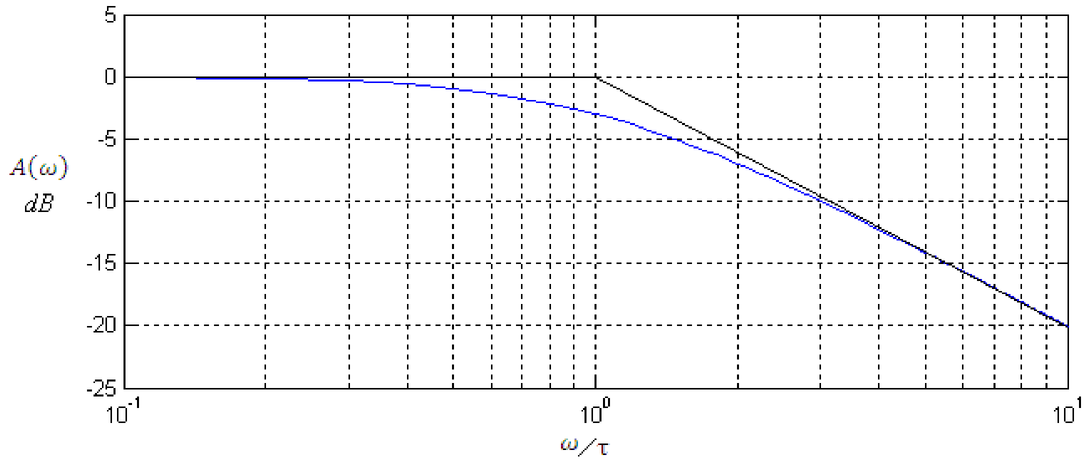
وهو عبارة عن مرشح من الدرجة الأولى.

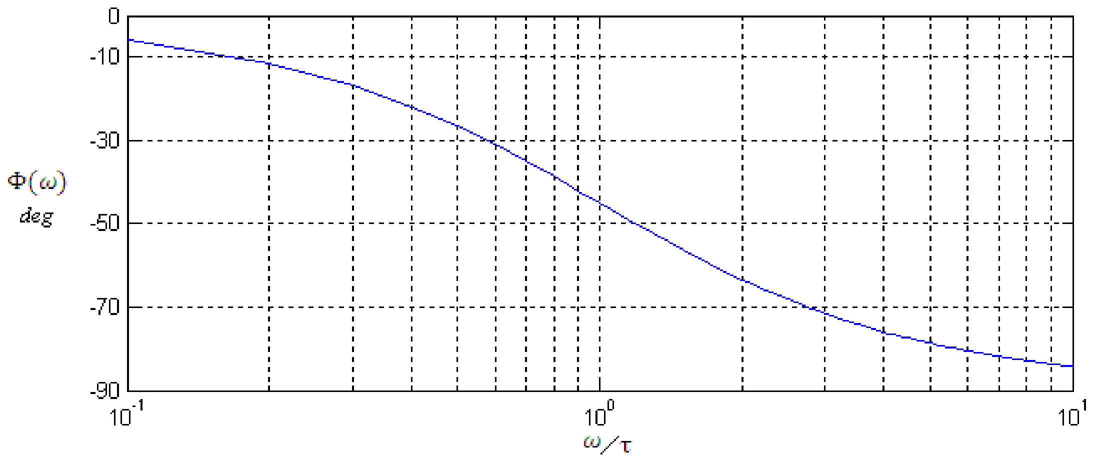
2. نعلم أن النظام سببي لأنه نظام محقق عملياً. وبما أن للنظام قطب وحيد وهو $p_0 = -\frac{1}{\tau}$. ومن ذلك نستنتج أن حيز التقارب لتابع التحويل يجب أن يكون $p =]-\frac{1}{\tau}, +\infty[$. وبما أن حيز التقارب يحوي على المحور التخيلي، فإن النظام مستقر.

3. بما أن النظام مستقر، فيمكن الحصول على الاستجابة الترددية له انطلاقاً من تابع تحويل لابلاس بتعويض $p = j\omega$ في تابع التحويل لنحصل على العلاقة التالية للاستجابة الترددية بدلالة التردد الزاوي:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\tau\omega}$$

وبنفس الطريقة التي وردت في هذا الفصل، يمكن الحصول على مخطط بود للاستجابة الترددية.





4. يمكن كتابة إشارة الدخل بدلالة الإشارات الأسية العقدية بالشكل التالي:

$$V_s(t) = A\sin(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2j}\left(e^{2\pi j f_0 t} - e^{-2\pi j f_0 t}\right)$$

للحصول على خرج الدارة، يمكن حساب جداء التلاف بين إشارة الدخل والاستجابة النبضية للمرشح بأخذ تحويل لابلاس العكسي لتابع التحويل. ولكننا نعلم أن التوابع الأسية العقدية e^{pt} هي توابع ذاتية للمرشحات الخطية، وبالتالي

$$V_c(t) = \frac{a}{2j}\left(H(2\pi j f_0)e^{2\pi j f_0 t} - H(-2\pi j f_0)e^{-2\pi j f_0 t}\right)$$

$$H(2\pi j f_0) = \frac{1}{1 + j\tau 2\pi j f_0} = A(f_0)e^{j\phi(f_0)}$$

$$V_c(t) = \frac{a}{2j}\left(A(f_0)e^{j\phi(f_0)}e^{2\pi j f_0 t} - A(f_0)e^{-j\phi(f_0)}e^{-2\pi j f_0 t}\right)$$

$$V_c(t) = a.Im\left(A_0 e^{j(2\pi f_0 t + \phi(f_0))}\right) = aA(f_0)\sin(2\pi f_0 t + \phi(f_0))$$

السؤال الرابع:

1. إن الربح الساكن للمرشح يعطى بالقيمة $M(0)$:

$$M(0)=\frac{\Omega(0)}{V(0)}=A=\frac{1500*2\pi/60}{10}=5\pi \quad rad/s/V$$

حيث قمنا في البسط بتحويل القيمة من دورة بالدقيقة إلى الوحدة النظامية وهي راديان بالثانية.

2. يتكون النظام الذي يعطي الموقع الزاوي للمحرك $\Theta(p)$ انطلاقاً من جهد التحكم $V(p)$ من نظامين مربوطين على التسلسل وهما المحرك والحساس (مكامل). لذلك يعطى تابع الاستجابة لهذا النظام كجداء لتابعي الاستجابة للنظامين الجزئيين كالتالي:

$$F(p)=\frac{\Theta(p)}{V(p)}=M(p)\times\frac{1}{p}=\frac{A}{1+\tau p}\times\frac{1}{p}$$

3. يعطى تابع لاستجابة لنظام الحلقة المغلقة بالعلاقة التالية:

$$H(p)=\frac{F(p)}{1+F(p)B(p)}=\frac{\frac{A}{p(1+\tau p)}}{1+\frac{A}{p(1+\tau p)}k}$$

$$H(p)=\frac{A}{p(1+\tau p)+Ak}=\left(\frac{1}{k}\right)\frac{Ak/\tau}{p^2+p/\tau+Ak/\tau}$$

وهو مرشح من درجة الثانية من الشكل

$$H(p)=\left(\frac{1}{k}\right)\frac{\Omega_0^2}{p^2+2\xi\Omega_0 p+\Omega_0^2}$$

حيث

$$\Omega_0=\sqrt{\frac{Ak}{\tau}}=\sqrt{\frac{5\pi\times 10/\pi}{0.01}}=\sqrt{5000}=50\sqrt{2}\ \mathrm{rad/s}$$

$$\xi=\frac{1}{2\tau\Omega_0}=\frac{1}{2\times 0.01\times 50\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$$

وهنا نلاحظ أن التردد الخاص بالنظام هو:

$$f_0=\frac{\Omega_0}{2\pi}=\frac{50\sqrt{2}}{2\pi}=11.25\ Hz$$

في هذه الحالة نحصل على قطبين عقديين مترافقين بسيطين، وهما:

$$p_{1,2}=\Omega_0\left(-\xi\mp j\sqrt{1-\xi^2}\right)=50\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\mp j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=50(-1\mp j)$$

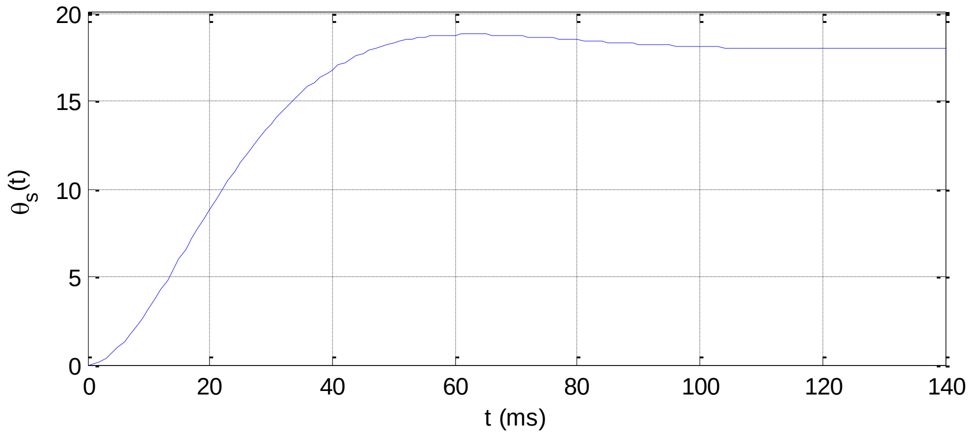
بما أن المرشح سببي لأنه محقق فيزيائياً، يكون حيز تقارب تحويل لابلاس للنظام هو نصف المستوي الذي يمتد من القطب ذو الفاصلة (القسم الحقيقي) الأكبر وحتى اللانهاية. بما أن للقطبين نفس القسم الحقيقي، يكون حيز التقارب هو: $S=]-50,+\infty[$ وهو يحوي المحور التخيلي، وبالتالي النظام مستقر.

4. بنفس الطريقة المشروحة في الفصل بالنسبة لنظام من الدرجة لثانية نجد الاستجابة الخطوية هي:

$$\theta_s(t) = \frac{1}{k}\left[1 - \frac{e^{-\xi\Omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\Omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t + \theta)\right]u(t)$$

$$\theta_s(t) = \frac{\pi}{10}\left[1 - \frac{e^{-50t}}{\sqrt{2}}\sin(50t + \frac{\pi}{4})\right]u(t)$$

يبين الشكل التالي الاستجابة الخطوية حيث تم رسمها بوحدة الدرجة، حيث نلاحظ أن تغير بمقدار فولط واحد لإشارة التحكم سيؤدي إلى تغير موقع المحرك بالطريقة المبينة على الشكل ليستقر بعد 100 ميلي ثانية تقريباً عند موقع زاوي مقداره 18 درجة.



التقطيع

الكلمات المفتاحية:

التقطيع، معيار شانون في التقطيع، التداخل الطيفي، استعادة الإشارة المستمرة من عينات التقطيع.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعريف بعملية التقطيع، والتي تُعدُّ صلة الوصل بين دراسة الإشارات والنظم المستمرة ودراسة الإشارات والنظم المتقطعة. ندرس في هذا الفصل النمذجة الرياضية لعملية التقطيع المثالي والشروط اللازمة لضمان أن الإشارة المقطعة تعد تمثيلاً للإشارة المستمرة من دون تشويه أو فقد للمعلومات الموجودة في الإشارة المستمرة. يتم ذلك من خلال دراسة نظرية التقطيع ومعيار شانون في التقطيع. وأخيراً نستعرض كيفية استرجاع الإشارة المستمرة انطلاقاً من عينات التقطيع.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- نمذجة عملية تقطيع الإشارة المستمرة.
- نظرية التقطيع وشرط شانون لكي تكون الإشارة المقطعة تمثيلاً للإشارة المستمرة.
- أثر التداخل الطيفي في التقطيع عند عدم احترام شرط شانون في التقطيع.
- كيفية استعادة الإشارة المستمرة انطلاقاً من الإشارة المتقطعة والمشاكل العملية المتعلقة بهذه العملية.

يهدف هذا الفصل إلى التعريف بعملية التقطيع، والتي تُعدُّ صلة الوصل بين دراسة الإشارات والنظم المستمرة ودراسة الإشارات والنظم المتقطعة. ندرس في هذا الفصل النمذجة الرياضية لعملية التقطيع المثالي والشروط اللازمة لضمان أن الإشارة المقطعة تعد تمثيلاً للإشارة المستمرة من دون تشويه أو فقد للمعلومات الموجودة في الإشارة المستمرة. يتم ذلك من خلال دراسة نظرية التقطيع ومعيار شانون في التقطيع. وأخيراً نستعرض كيفية استرجاع الإشارة المستمرة انطلاقاً من عينات التقطيع.

1. مقدمة (introduction)

جرى التعامل في الفصول السابقة مع الإشارات والنظم المستمرة (ذات الزمن المستمر)، وقبل الانتقال إلى دراسة الإشارات والنظم المتقطّعة (ذات الزمن المتقطع)، سنتناول بالشرح في هذا الفصل عملية الانتقال من إشارة مستمرة إلى إشارة متقطّعة، والشروط الواجب تحقيقها في عملية التقطيع لكي تكون الإشارة المتقطّعة الناتجة عن تقطيع إشارة مستمرة هي تمثيل لهذه الإشارة.

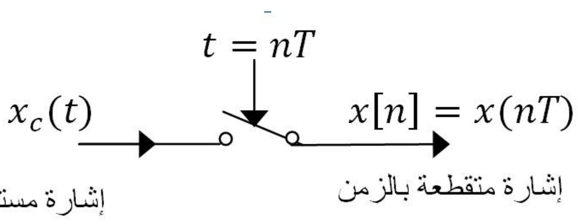
تُعرّف الإشارة المتقطّعة بأنها متتالية أو تتابع من القيم تتعلق بالمتحول الزمني المستقل n، حيث n عدد صحيح تتراوح قيمه $-\infty < n < +\infty$. يمكن التمييز بين نوعين من الإشارات المتقطعة: إشارة بزمن متقطع (discrete time signal) حيث يجري التقطيع هنا على الزمن، وإشارة بقيم متقطّعة حيث يجري التقطيع على قيم الإشارة وتسمى هذه العملية بالتكمية أو التكميم (Quantization).

يمكن أن تكون الإشارات المتقطّعة ناتجة عن تقطيع إشارة مستمرة، أو يمكن أن تكون متقطعة بطبيعتها، فمن الممكن اعتبار قياس درجة حرارة مكان مّا جرى أخذ قراءة لها كل ساعة أنها إشارة متقطعة في الزمن ناتجة عن تقطيع إشارة مستمرة بدور تقطيع $T_s = 1\ hour$. كما يمكن اعتبار قيمة مؤشر إغلاق البورصة على أنها إشارة متقطعة بطبيعتها وليست ناجمة عن تقطيع إشارة مستمرة.

2. التقطيع (Sampling)

التقطيع هو العملية التي يتمّ فيها تحويل الإشارات المستمرة بالزمن (كالجهد أو إشارة مدلول مستوى سائل) إلى إشارات متقطعة زمنياً. حيث يتم أخذ عينات من الإشارة المستمرة خلال فواصل زمنية متقطعة ثم يجري بعدها تحويل هذه العينات إلى قيم رقمية باستخدام المبدل التماثلي الرقمي.

بفرض لدينا الإشارة المستمرة $x(t)$ (بزمن مستمر)، وكانت $\{t_n\}$ مجموعة متقطعة من اللحظات الزمنية قابلة للعد، نسمي مجموعة العينات $\{x(t_n)\}$ تقطيعاً (sampling) للإشارة المستمرة $x(t)$.



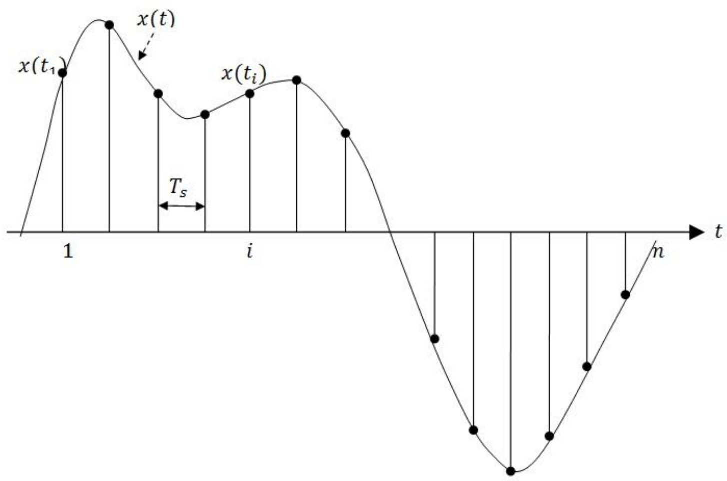
الشكل 1-Error! No text of specified style in document.: تحويل الإشارة المستمرة إلى إشارة متقطعة بالزمن.

عادةً يتم أخذ أزمنة التقطيع عند لحظات مفصولة عن بعضها بفواصل زمنية منتظمة أي: $t_n = nT_s + \theta$ حيث T_s هو زمن ثابت يسمى دور التقطيع (sampling period)، و θ إزاحة زمنية وهي مقدار ثابت، و n عدد صحيح تتراوح قيمه $-\infty < n < +\infty$. كما نسمي مقلوب دور التقطيع بتردد التقطيع $F_s = \frac{1}{T_s}$. وهذا ما يدعى بالتقطيع المنتظم للإشارة وهو ما سوف نعتبره في دراستنا في هذا الفصل.

نرمز للإشارة المتقطعة بالرمز $x[n]$، ترتبط الإشارة المتقطعة $x[n]$ بالإشارة المستمرة $x(t)$ بالعلاقة التالية:

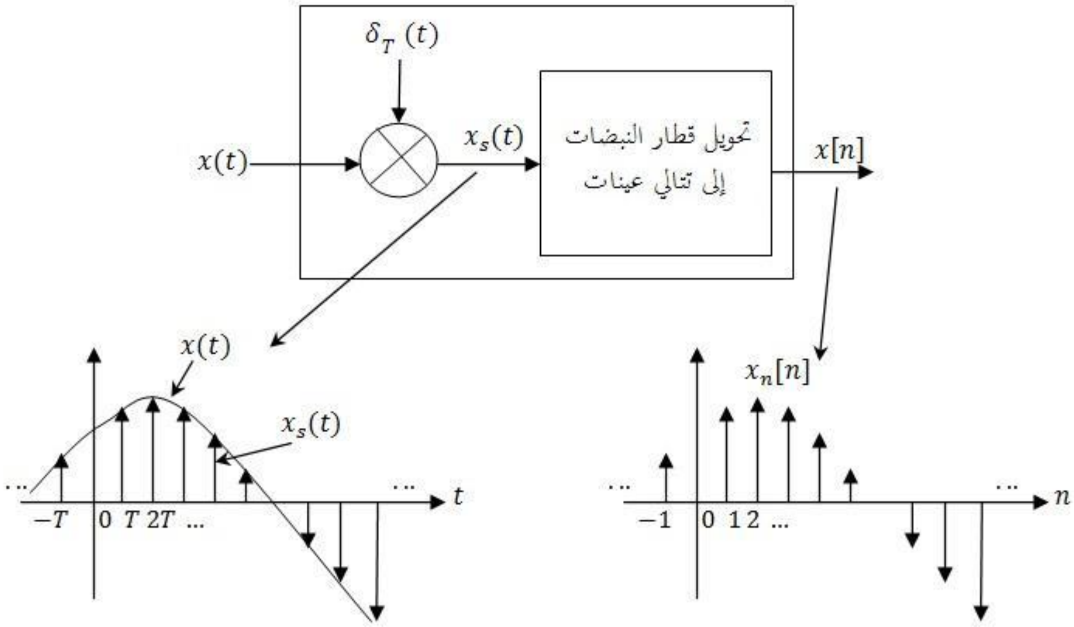
$$x[n] = x(t)|_{t=nT} = x(nT), \qquad n = \cdots - 1,0,1,2, \ldots$$

يبين الشكل التالي (الشكل 2) هذه العلاقة بشكل بياني.



الشكل 2-Error! No text of specified style in document.: تقطيع الإشارة المستمرة.

يتم تحويل الإشارة المستمرة $x(t)$ إلى الإشارة المتقطعة $x[n]$ باستخدام مبدّل من زمن مستمر إلى زمن متقطع(continuous–time to discrete–time converter). ويوضح الشكل التالي مخططاً صندوقياً لهذا المبدّل.



الشكل .**Error! No text of specified style in document.**-3: المخطط الصندوقي لمبدل من زمن مستمر إلى زمن متقطع.

السؤال الهام الذي يُطرح هنا: هل يمكن استعادة الإشارة $x(t)$ من العينات $x[n]$؟ إن الإجابة على هذا السؤال يقودنا إلى نظرية التقطيع.

3. نظرية التقطيع (Sampling theorem)

تدرس نظرية التقطيع إمكانية أن تكون مجموعة العينات القابلة للعد $\{x(t_n)\}$ تمثيلاً للإشارة المستمرة $x(t)$. أي إمكانية العودة من مجموعة قيم الإشارة $\{x(t_n)\}$ إلى الإشارة المستمرة $x(t)$ في كل لحظة زمنية t. تكمن أهمية نظرية التقطيع في كونها صلة الوصل بين الإشارات المستمرة (ذات الزمن المستمر) والإشارات المتقطعة (ذات الزمن المتقطع). فهي تحدد الشروط الواجب تحققها كي تكون الإشارة المتقطعة من إشارة مستمرة تمثيلاً لها، كما تعطي العلاقة بين الإشارتين.

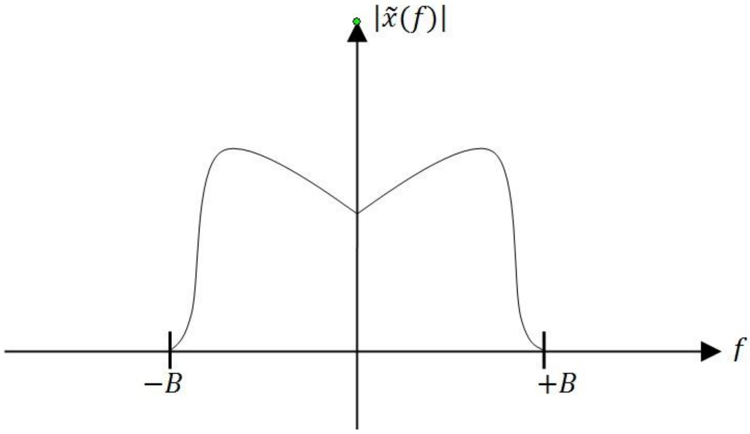
تنص نظرية التقطيع على مايلي:

إذا كانت الإشارة المستمرة $\boldsymbol{x(t)}$ ذات عرض حزمة ترددية محدود $\boldsymbol{2B}$ فإنه يمكن استرجاعها من مجموعة العينات $\{\boldsymbol{x(t_n)}\}$ إذا كان تردد تقطيع الإشارة مساوياً على الأقل لضعف أعلى مركبة ترددية موجودة في طيف الإشارة المستمرة $\boldsymbol{x(t)}$.

فإذا كانت الإشارة المستمرة $x(t)$ والتي عرض حزمتها الترددية $2B$ محدود ، أي طيفها معدوماً خارج المجال الترددي $[-B, +B]$:

$$\tilde{x}(f) = 0 \qquad for\ |f| > B$$

فإن التقطيع $\{x(t_n)\}$ عند النقاط $\left\{t_n = \frac{n}{2B}\right\}$ حيث n عدد صحيح $-\infty < n < +\infty$ يكون تمثيلاً للإشارة المستمرة $x(t)$. أي أن تحويل فورييه $\tilde{x}(f)$ لها يكون تابعاً قابلاً للنشر بسلسلة فورييه حيث يتقارب النشر داخل المجال الترددي $]-B, +B[$ إلى قيمة التابع $\tilde{x}(f)$ بينما يتقارب خارج هذا المجال إلى التكرار الدوري للتابع $\tilde{x}(f)$.



الشكل 4-Error! No text of specified style in document.: شكل اعتباري لطيف إشارة ذات امتداد ترددي محدود.

ويمكن كتابة $\tilde{x}(f)$ باستخدام النشر بسلسلة فورييه بالشكل التالي:

$$\tilde{x}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \beta_n\, e^{-2\pi j \frac{n}{2B} f} \quad \text{أو} \quad \tilde{x}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n\, e^{+2\pi j \frac{n}{2B} f}$$

حيث:

$$\alpha_n = \beta_{-n} \quad \text{و} \quad \beta_n = \frac{1}{2B} \int_{-B}^{+B} \tilde{x}(f)\, e^{2\pi j \frac{n}{2B} f}\, df$$

وبما أنّ الإشارة $x(t)$ ذات امتداد ترددي محدود $]-B, +B[$ فإن التكامل السابق الذي يعطي قيم β_n يمكن أن يمدد على طول المحور الترددي أي:

$$\beta_n = \frac{1}{2B} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}(f)\, e^{-2\pi j \frac{n}{2B} f}\, df = \frac{x(\frac{n}{2B})}{2B}$$

أي أن معرفة قيم الإشارة $x(t)$ في اللحظات $\left\{t_n = \frac{n}{2B}\right\}$ أو $\left\{x(t_n) = x(\frac{n}{2B})\right\}$ يكفي لمعرفة الإشارة في أية لحظة t، وذلك لأن معرفة هذه المجموعة من القيم تؤدي إلى معرفة قيم β_n وهذا يعني معرفة التابع $\tilde{x}(f)$ من خلال علاقة النشر، وهذا يؤدي إلى معرفة الإشارة $x(t)$ بإجراء تحويل فورييه المعاكس.

4. معيار شانون (Shannon criterion)

يعتبر معيار شانون أحد أهم نتائج نظرية التقطيع، حيث وجدنا أن تقطيع الإشارة $x(t)$ ذات الامتداد الترددي المحدود على المجال $]-B,+B[$ بتردد تقطيع $F_s = 2B$ هو تمثيل للإشارة. ويمكن أن نتوقع بشكل حدسي أن الإشارة المقطعة بتردد تقطيع $F_s > 2B$ يجب أن يكون أيضاً تمثيلاً للإشارة فزيادة تردد التقطيع تسمح بأخذ عدد أكبر من النقاط في مجال زمني ما، أي تقريب المسافة الزمنية بين العينات. لأن الإشارة المحدودة ترددياً على المجال $]-B,+B[$ هي أيضاً محدودة ترددياً على المجال $]-\acute{B},+\acute{B}[$ بحيث $\acute{B} > B$.

فإذا كانت الإشارة حقيقية فإن طيفها متناظر وإذا كانت ذات امتداد ترددي محدود على المجال $]-B,+B[$ فإن التردد الأعظمي فيها $f_{max} = B$ أي لاتحوي أي مركبات ترددية عند ترددات أعلى من B. وهذا يعني أنه حتى يكون تقطيع الإشارة تمثيلاً لها يجب أن يكون تردد التقطيع F_s أكبر من ضعفي التردد الأعظمي فيها. وهذا مايسمى بمعيار شانون.

ينصّ معيار شانون على مايلي:

"يجب أن يكون تردد تقطيع إشارة ما على الأقل أعلى من ضعفي قيمة أعلى مركبة ترددية موجودة في الإشارة"

ويُعبّر عنه بصيغة رياضية بالعلاقة التالية:

$$f_s \geq 2f_{max}$$

حيث f_s تردد التقطيع وf_{max} قيمة أعلى مركبة ترددية في الإشارة.

بفرض أن $f_N = 2f_{max}$ فيمكن أن نعبر عن معيار شانون بالعلاقة $f_s \geq f_N$ ويسمى f_N بتردد تقطيع نايكوست (Nyquist sampling frequency) وهو القيمة الاسمية الدنيا المطلوبة لتردد التقطيع دون حدوث تداخل (aliasing) كما سنرى لاحقاً.

5. استرجاع الإشارة المستمرة من عينات التقطيع (reconstruction Signal)

مرّ معنا في الفقرات السابقة أنه يمكن الحصول على الإشارة $x(t)$ انطلاقاً من مجموعة عينات التقطيع أي: $\left\{x(t_n) = x\left(\frac{n}{2B}\right)\right\}$. عند التعويض في نشر فورييه للتابع $\tilde{x}(f)$ بقيم الثوابت $\beta_n = \frac{x(t_n)}{2B}$ نحصل على:

$$\tilde{x}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x(t_n)}{2B} e^{-\frac{2\pi jn}{2B}f}$$

بأخذ تحويل فورييه العكسي للطرفين والأخذ بعين الاعتبار أن $\tilde{x}(f)$ معدوم خارج المجال $]-B,+B[$ نحصل على:

$$x(t) = IFT[\tilde{x}(f)] = \int_{-B}^{+B} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x(t_n)}{2B} e^{-\frac{2\pi jn}{2B}f} e^{2\pi jft}\, df$$

أي أن:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x(t_n)}{2B} \int_{-B}^{+B} e^{2\pi jf\left(t-\frac{n}{2B}\right)} df$$

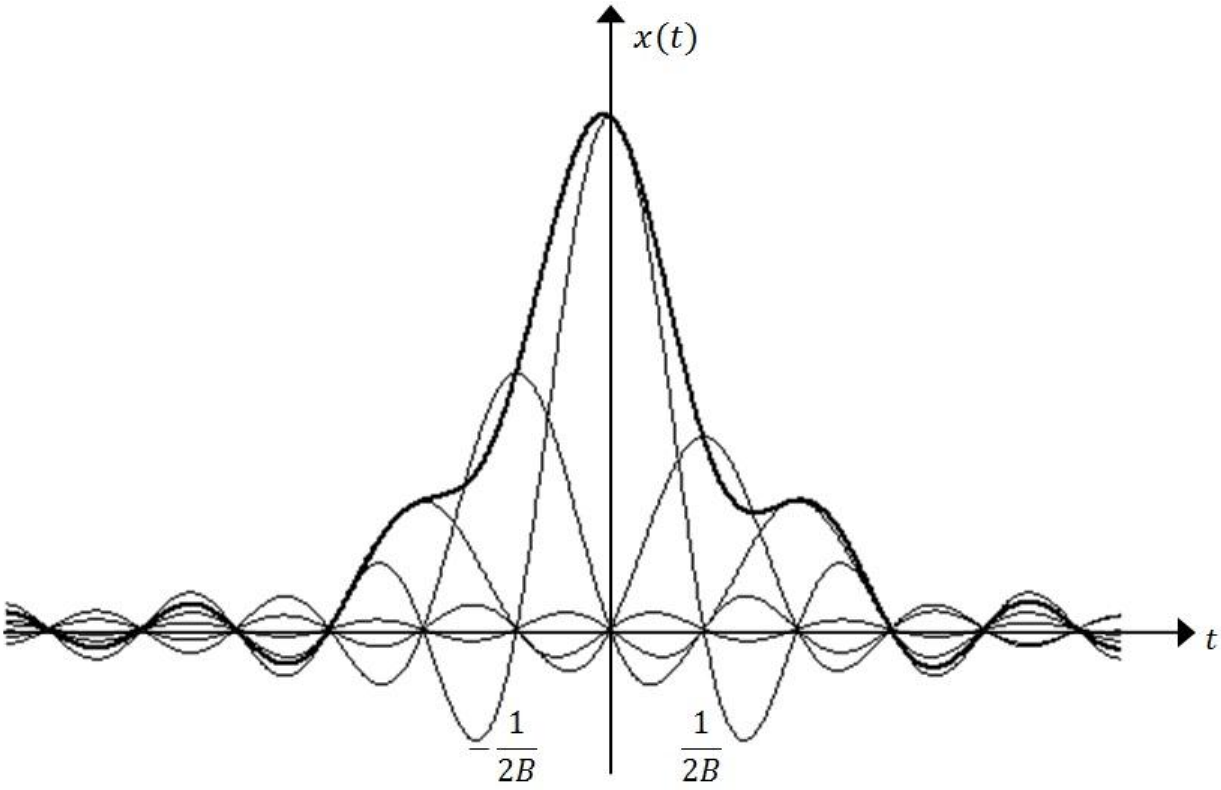
ومنه نجد:

العلاقة التي تمثل الإشارة المستمرة انطلاقاً من عينات التقطيع أو مايسمى بـ علاقة التقطيع:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t_n).sinc\big(2B(t-t_n)\big)$$

حيث $sinc(u) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}$.

وهكذا نرى أن الإشارة $x(t)$ ذات الامتداد الترددي المحدود على المجال $]-B,+B[$ يمكن استرجاعها انطلاقاً من عينات التقطيع حيث أنها تُمثل كمجموع إشارات $sinc(2Bt)$ مزاحة إلى اللحظات t_n ومثقلة بقيم الإشارة $\{x(t_n)\}$ عند لحظات التقطيع كما هو موضح في الشكل التالي.



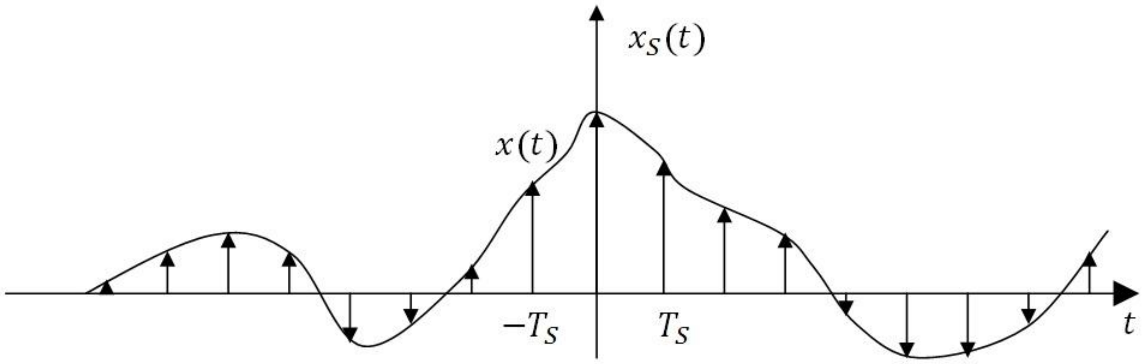
الشكل 5-**Error! No text of specified style in document.** : استرجاع الإشارة $\boldsymbol{x(t)}$ انطلاقاً من عينات التقطيع

6. إعادة بناء الإشارة عملياً (Practical signal reconstruction)

إن عملية التقطيع هي عملية الحصول على مجموعة قيم إشارة مستمرة في لحظات التقطيع. فإذا كانت $x_c(t)$ إشارة مستمرة فإنه ينتج عن تقطيعها الإشارة المتقطعة الممثلة بمجموعة القيم $\{x_d(n) = x_c(nT_s)\}$. ومن الممكن تمثيل الإشارة المتقطعة بإشارة "مستمرة" تنتج عن التقطيع المثالي ونقول إنه تمثيل مستمر للإشارة المتقطعة.

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT_s)\delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_d(n)\delta(t - nT_s)$$

في الحقيقة، إن الإشارة $x_s(t)$ هي تمثيل مستمر للإشارة المتقطعة وتنتج عن ضرب الإشارة $x(t)$ بمشط ديراك $\delta_{T_s} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_n)$ كما في الشكل التالي:



الشكل **.Error! No text of specified style in document** -6: التقطيع المثالي للإشارة $\boldsymbol{x(t)}$ بنبضات ديراك

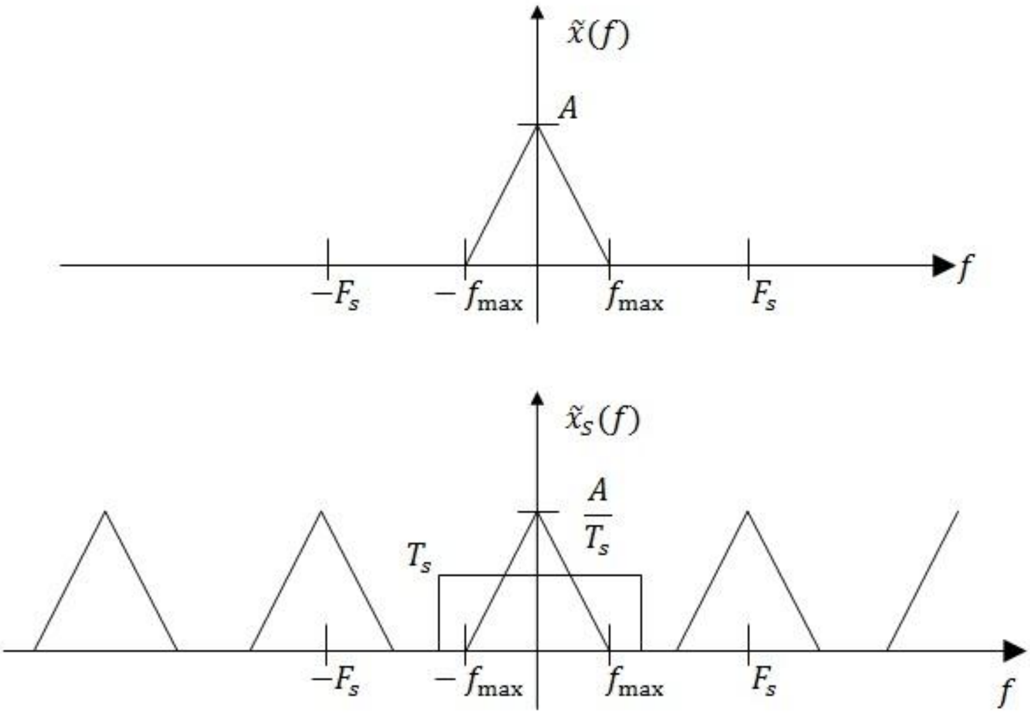
إن طيف الإشارة $x_S(t)$ سينتج عن تكرار طيف الإشارة $x(t)$ دورياً بدور F_S=$\frac{1}{T_S}$ في المجال الترددي مع الضرب بالثابت $\frac{1}{T_S}$ لأن:

$$\tilde{x}_S(f) = \tilde{x}(f) * \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{x}\left(f - \frac{n}{T_S}\right)$$

ومنه:

$$\tilde{x}_S(f) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{x}\left(f - \frac{n}{T_S}\right)$$

نلاحظ أن التقطيع في المجال الزمني يقابله دورية في المجال الترددي. كما تكرار إشارة دورياً في المجال الزمني يقابله تقطيع في الطيف.



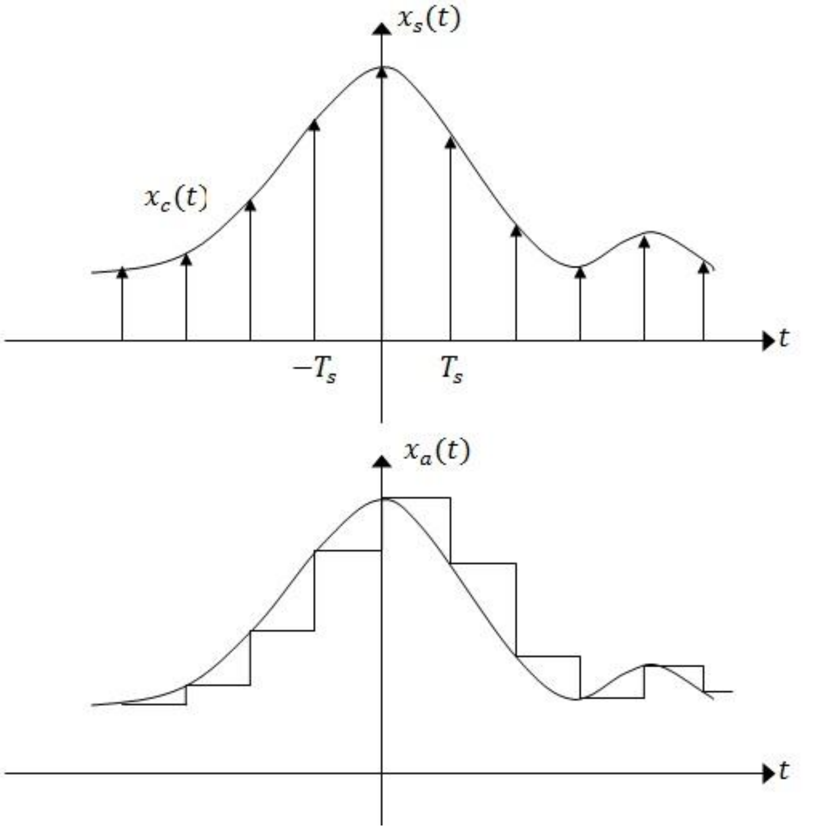
الشكل **.7-Error! No text of specified style in document**: طيف الإشارة $x_s(t)$ ومرشح التمرير المنخفض المثالي

يوضح الشكل السابق طيف الإشارة $x(t)$ وطيف الإشارة $x_S(t)$ حيث نلاحظ عدم وجود تداخل بين المركبات الترددية الناتجة عن الانزياحات في طيف الإشارة $x(t)$ إلى الترددات $nF_S = \frac{n}{T_S}$ أي أنه يمكن استخلاص المركبة الأساسية حول التردد 0 من طيف الإشارة $x_S(t)$ بمرشح تمرير منخفض مثالي (ideal low pass filter) بتردد قطع $F_C = \frac{F_S}{2}$ وبربح T_S كما هو موضح في الشكل السابق.

في العملية المعاكسة للتقطيع، نحصل نظرياً على الإشارة المستمرة $x_c(t)$، بتمرير الإشارة المتقطعة $x_S(t)$ على مرشح تمرير منخفض مثالي بتردد قطع يساوي نصف تردد التقطيع (بشرط أن يكون التقطيع محققاً لشرط شانون). إلا أن المرشح المثالي غير سببي لذلك فهو غير قابل للتحقيق فيزيائياً، كما أن التمثيل المثالي للإشارة المتقطعة في الزمن المستمر هو تمثيل رياضي، ولا يمكن الحصول على نبضات ديراك مثالية.

يستعاض في التطبيقات العملية عن نبضة ديراك بنبضة مربعة بعرض زمني صغير بالنسبة لدور التقطيع. وبطريقة أخرى، يمكن إعادة الحصول على إشارة مستمرة من إشارة متقطعة قريبة من الإشارة المستمرة الأساسية. باستخدام مبدل رقمي/ تماثلي (Digital to Analog Converter DAC) حيث يقوم الماسك بتثبيت القيمة التماثلية خلال دور تقطيع، من لحظة التقطيع وحتى بداية الدور التالي للتقطيع. ويجري الاحتفاظ بالقيمة الرقمية للعينة خلال دور تقطيع في دارة ماسك (latch) ثم يقوم المبدل الرقمي/التماثلي بتحويلها إلى مقدار تماثلي. يمكن نمذجة عملية التحويل من إشارة متقطعة إلى إشارة مستمرة، والتي يجري فيها تثبيت قيمة الإشارة المتقطعة

$x_d(n)$ منذ اللحظة nT_s وحتى بداية الدور التالي، وكأننا طبقنا الإشارة المتقطعة بتقطيع مثالي $x_s(t)$ على دخل نظام نسميه ماسك من الدرجة صفر، ليعطي على خرجه الإشارة المستمرة $x_a(t)$ كما في الشكل التالي:

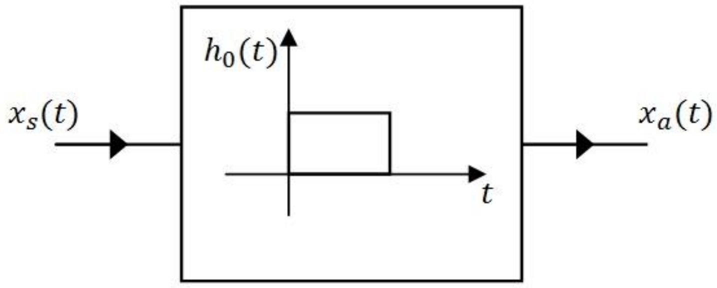


الشكل **Error! No text of specified style in document.** -8: إشارة خرج ماسك من الدرجة صفر عند تطبيق إشارة تقطيع مثالي على دخله

وتعطى الاستجابة النبضية للماسك من الدرجة صفر بالعلاقة التالية:

$$h_0(t) = \begin{cases} 1 & for\ \ 0 \le t \le T_s \\ 0 & elsewhere \end{cases}$$

نلاحظ أن نبضة ديراك عند اللحظة nT_s والموزنة بقيمة الإشارة عند هذه اللحظة تعطي على الخرج إشارة ثابتة على هذه القيمة حتى اللحظة $(n+1)T_s$، أي أن تطبيق نبضة ديراك على دخل الماسك من الدرجة صفر يعطي إشارة مربعة مطالها 1 وهي الاستجابة النبضية لهذا النظام.

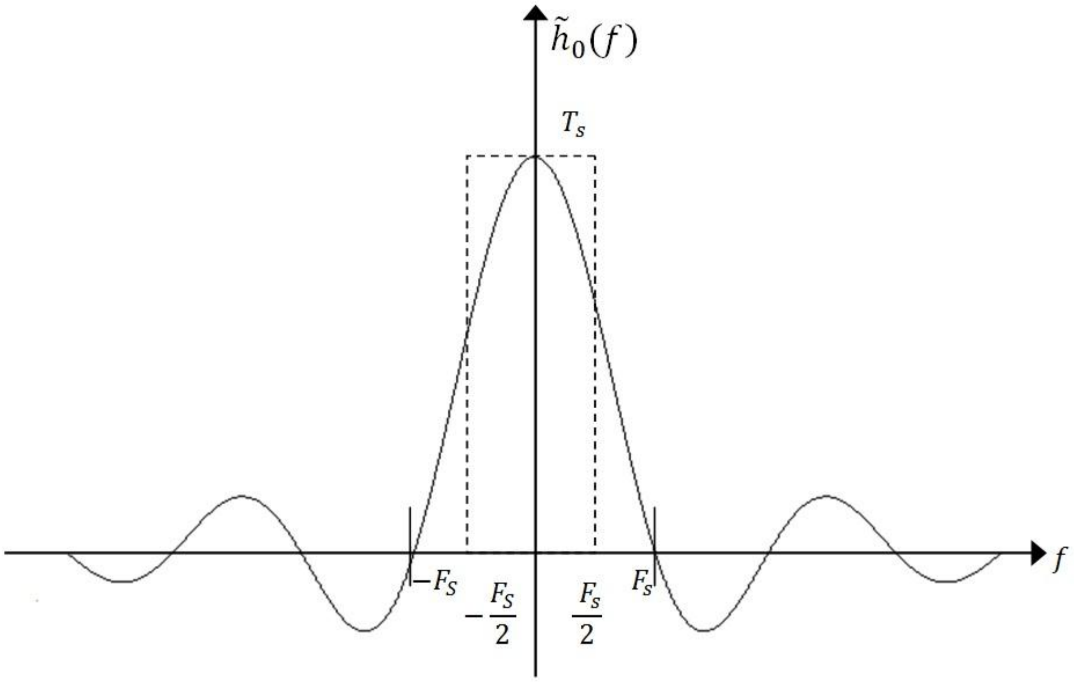


الشكل **Error! No text of specified style in document.** -9: ماسك من الدرجة 0

تعطى الاستجابة الترددية لنظام ماسك من الدرجة صفر، والتي هي تحويل فوريه للاستجابة النبضية له $h_0(t)$ بالعلاقة:

$$\tilde{h}_0(f) = e^{-\frac{2\pi jfT_s}{2}} T_s sinc(fT_s)$$

ونكتبها على الشكل $\tilde{h}_0(f) = e^{-\frac{2\pi jfT_s}{2}} H_{0r}(f)$، حيث $H_{0r}(f) = T_s sinc(fT_s)$ تابع حقيقي يمكن تمثيله بالشكل التالي:



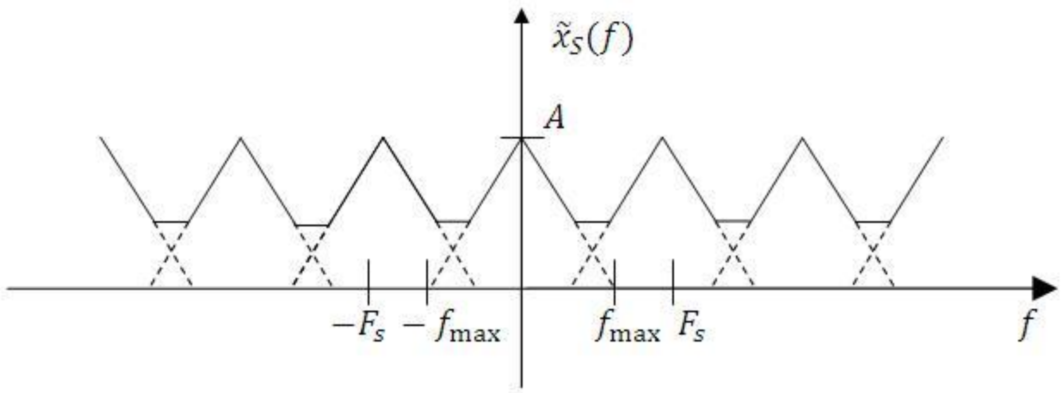
الشكل **Error! No text of specified style in document.**- 10: الاستجابة الترددية لنظام ماسك من الدرجة 0

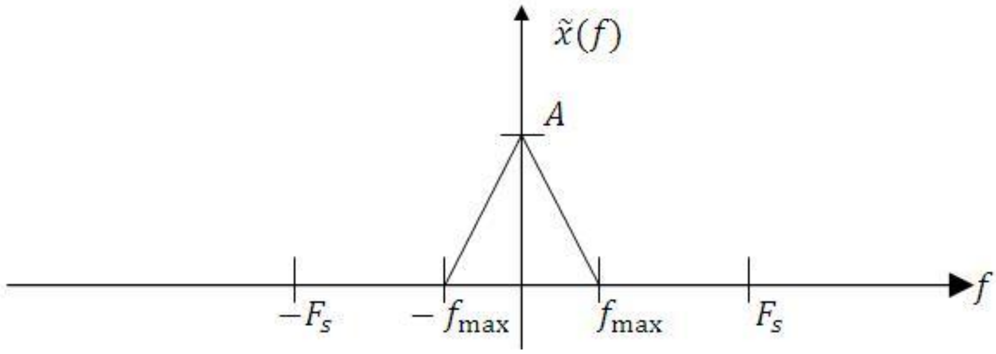
نلاحظ أن الماسك من الدرجة صفر عبارة عن مرشح تمرير منخفض غير مثالي يمرر يتغير ربحه في المجال الترددي $\left[-\frac{F_s}{2}, +\frac{F_s}{2}\right]$. فإذا طبقنا بعد المبدل الرقمي التماثلي مرشح تمرير منخفض مثالي بتردد قطع $f_c = \frac{F_s}{2}$، فالإشارة الناتجة ستكون مختلفة قليلاً عن الإشارة المستمرة الأساسية. إلا أنه يمكن تصميم مرشح التمرير المنخفض هذا بحيث يزيد الربح قليلاً عند أطراف المجال $\left[-\frac{F_s}{2}, +\frac{F_s}{2}\right]$ مقارنة مع الربح عند التردد 0، ليعاكس أثر انخفاض الربح في الاستجابة الترددية للماسك من الدرجة صفر، وبحيث ينخفض الربح بشكل كبير خارج المجال المعتبر وهذا ما يدعى بالمرشح العكسي (Inverse sinc filter).

كما تجدر أيضاً ملاحظة أثر الصفحة، الذي يبدو في التأخير الزمني بمقدار $\frac{T_s}{2}$، فبالإضافة إلى شكلها الدرجي، تبدو الإشارة $x_n(t)$ متأخرة عن الإشارة $x_c(t)$ بمقدار نصف دور التقطيع.

7. التراكب الطيفي أو التداخل الطيفي (Aliasing)

بالعودة إلى طيف الإشارة المقطعة بشكل مثالي $x_S(t)$، فإن عدم تراكب المركبات الترددية المختلفة ناجم عن أن الإشارة $x(t)$ ذات امتداد ترددي محدود كما أن تردد تقطيعها يحقق شرط شانون في التقطيع. أما في حال تقطيع الإشارة بتردد لايحقق شرط شانون (أي أن تردد التقطيع أصغر من ضعفي التردد الأعظمي في الإشارة f_{max}) فسيكون طيف الإشارة $x_S(t)$ كما هو موضح في الشكل التالي:





الشكل **Error! No text of specified style in document.**-11 : حالة تداخل الطيف الناتجة عن التقطيع بتردد لا يحقق شرط شانون

نلاحظ أنه لا يمكن استرجاع الإشارة الأصلية، بسبب تراكب المركبات الجانبية مع المركبة الأساسية المتوضعة حول التردد 0. أي أن التقطيع في هذه الحالة ليس تمثيلاً للإشارة المستمرة.

فعلى سبيل المثال لو أخذنا الإشارة $x(t) = e^{2\pi j f_0 t}$، فإن طيفها هو عبارة عن نبضة ديراك عند التردد f_0، أي أن $\tilde{x}(f) = \delta(f - f_0)$. فإذا قمنا بتقطيع هذه الإشارة بتردد تقطيع أقل من تردد نيكويست $(F_s < 2f_0)$ فسيكون طيف الإشارة المقطعة هو تكرار لطيف الإشارة $x(t)$ بدور F_s. رقمياً، إذا كان $f_0 = 4\ kHz$ و $F_s = 5\ kHz$، فإن طيف الإشارة المقطعة سيحوي نبضات ديراك عند الترددات $f = 4 + k \times 5\ kHz$ من أجل k عدد صحيح. فلو قمنا باستعادة الإشارة المستمرة باستخدام مرشح تمرير منخفض مثالي ذو تردد قطع $f_c = \frac{F_S}{2} = 2.5\ kHz$ فإن الإشارة الناتجة ستكون ذات مركبة ترددية وحيدة عند التردد $f = -1\ kHz$ لأنه

التردد الوحيد الذي يقع في المجال $[-\frac{F_S}{2},\frac{F_S}{2}]=[-2.5,+2.5]kHz$. وبالتالي فإن الإشارة المستعادة تختلف عن الإشارة الأصلية. تسمى هذه الحالة بحالة التراكب الطيفي او التداخل (aliasing).

يعتبر مثال دولاب "واغون" (Wagon) من أشهر الأمثلة التي تبين ظاهرة التداخل بشكل محسوس. وهو أحد الظواهر الشهيرة الناتجة عن التداخل عند عرض الأفلام التي تحتوي على حركة عجلات سيارة. فقد يبدو للمشاهدً أن الدواب يسير بسرعة أبطأ من السرعة الفعلية أو حتى أحياناً بالاتجاه المعاكس. يمكن تفسير ذلك نتيجة أثر التداخل الذي يحصل نتيجة التقطيع في صور الفيديو. حيث يجري عرض الصور المتحركة في الفيلم بمعدّل تقطيع مساوٍ لـ 24 إطاراً في الثانية ($24\ frames/sec$) وحسب شرط شانون فإن التداخل سيحصل إذا وُجدت في أي نقطة من الصورة مركبات ترددية أسرع من نصف تردد التقطيع $\frac{F_S}{2}$ (والذي هو في حالتنا $12\ frames/sec$).

أسئلة وتمارين الفصل السادس
التقطيع

أسئلة عامة

1− ما هو نص نظرية التقطيع؟
تغذية راجعة: راجع فقرة "نظرية التقطيع".

2− ما هو معيار شانون في التقطيع؟
تغذية راجعة: راجع فقرة "معيار شانون".

3− متى يحدث التداخل الترددي عند إجراء عملية تقطيع الإشارة المستمرة؟

4− كيف يمكن تجنب حصول التداخل الترددي عند تقطيع إشارة مستمرة من أجل تردد تقطيع Fs معطى؟
تغذية راجعة: راجع فقرة "معيار شانون".

أسئلة خيارات متعددة

1. من أجل إشارة محدودة الامتداد الترددي بمقدار B=1 kHz، بين ما هو تردد التقطيع المناسب الذي يضمن إمكانية استعادة الإشارة الأصلية من الإشارة المتقطعة:

أ− Fs=1kHz
ب− Fs=1.5kHz
ج− Fs=2kHz
د− Fs=3 kHz

تغذية راجعة: راجع فقرة "معيار شانون في التقطيع".

2. يمكن استعادة الإشارة المستمرة من الإشارة المقطعة بشكل مثالي عن طريق:

أ− استخدام مبدل رقمي تماثلي.
ب− استخدام مرشح ماسك من الدرجة صفر.
ج− استخدام مرشح تمرير منخفض بتردد قطع $f_c = \frac{F_s}{2}$.
د− استخدام مرشح تمرير منخفض بتردد قطع $f_c = F_s$.

تغذية راجعة: راجع فقرة "استرجاع الإشارة المستمرة من عينات التقطيع".

3. يكون طيف الإشارة المقطعة تقطيعاً مثالياً

أ- نفس طيف الإشارة المستمرة.

ب- تكرار لطيف الإشارة المستمرة بدور F_s بمطال مضروب بـ F_s.

ج- الإشارة المستمرة مقسوماً على T_s.

د- طيف الإشارة المستمرة مزاحاً حول تردد التقطيع التردد F_s.

تغذية راجعة: راجع فقرة "استرجاع الإشارة المستمرة من عينات التقطيع".

4. يعتبر الماسك من الدرجة صفر على انه

أ- تمثيل لاستجابة مبدل رقمي تماثلي.

ب- مرشح تمرير منخفض مثالي لاستعادة الإشارة المستمرة من عينات الإشارة المتقطعة.

ج- طريقة لتقطيع الإشارة المستمرة بشكل غير مثالي.

د- نظام يساعد في التخلص من التراكب الطيفي في الإشارة المتقطعة.

تغذية راجعة: راجع فقرة "إعادة بناء الإشارة عملياً".

تمارين

1. حدد تردد تقطيع نيكويست لكل من الإشارات التالية:

أ- $x(t) = 1 + cos(2000\pi t) + sin(4000\pi t)$

ب- $x(t) = \sin(4000\pi t)$

ج- $x(t) = \sin^2(4000\pi t)$

د- $x(t) = sin(4000\pi t)cos(2000\pi t)$

تغذية راجعة: احسب طيف الإشارة وحدد أكبر تردد في الإشارة ثم راجع فقرة "معيار شانون في التقطيع".

2. لتكن لدينا الإشارة المستمرة $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$، يتم تقطيع هذه الإشارة بشكل مثالي بتردد تقطيع $F_s = 8\ kHz$ للحصول على الإشارة $x_s(t)$. والمطلوب:

أ- احسب طيف الإشارة $x(t)$ وطيف الإشارة $x_s(t)$ ومثله كل منهما بيانياً في الحالتين التاليتين:

$$f_0 = 2\ kHz$$
$$f_0 = 5\ kHz$$

ب- نطبق مرشح تمرير منخفض مثالي بتردد قطع $f_c = 4\ kHz$. ما هي الإشارة المستمرة التي نحصل عليها في كل من الحالتين الواردتين في الطلب السابق. علق على النتيجة.

3. لتكن الإشارة $x(t)$ ذات امتداد ترددي محدود $(\tilde{x}(f) = 0\ for\ |f| > B)$ ولتكن لدينا الإشارتان المتقطعتان:

$$x_1(t) = x(t)\delta_T(t)$$
$$x_2(t) = x(t)\delta_{2T}(t)$$

حيث $T < \frac{1}{4B}$.

أ- تحقق من أن عملية التقطيع تحترم معيار شانون في التقطيع لكلا لإشارتين.

ب- ارسم شكلاً اعتبارياً لطيف الإشارة $x(t)$ ثم مثل انطلاقاً منه طيفي الإشارتين $x_1(t)$ و $x_2(t)$.

تغذية راجعة: حدد قيمة تردد التقطيع في الحالتين ثم راجع فقرة " معيار شانون" وراجع فقرة " إعادة بناء الإشارة عملياً ".

إجابات – حلول الأسئلة العامة السابقة

السؤال الأول:

الحل: إذا كانت الإشارة المستمرة $x(t)$ ذات عرض حزمة ترددية محدود $2B$ فإنه يمكن استرجاعها من مجموعة العينات $\{x(t_n)\}$ إذا كان تردد تقطيع الإشارة مساوياً على الأقل لضعف أعلى مركبة ترددية موجودة في طيف الإشارة المستمرة $x(t)$.

السؤال الثاني:

الحل: يجب أن يكون تردد تقطيع إشارة ما على الأقل أعلى من ضعفي قيمة أعلى مركبة ترددية موجودة في الإشارة

السؤال الثالث:

الحل: يحدث التداخل الترددي عندما لا يحترم تردد التقطيع شرط شانون في التقطيع. تغذية راجعة: راجع فقرة "التراكب الطيفي أو التداخل الطيفي".

السؤال الرابع:

الحل: يمكن ذلك من خلال تطبيق مرشح تمرير منخفض على الإشارة قبل التقطيع بتردد قطع Fs/2 وذلك لإزالة المركبات الترددية في الإشارة التي تكون أكبر من نصف تردد التقطيع لكي يتحقق شرط شانون في التقطيع.

إجابات – حلول أسئلة الخيارات المتعددة السابقة

أسئلة خيارات متعددة	الإجابة الصحيحة
1	د
2	ج
3	ج
4	أ

إجابات – حلول التمارين السابقة

السؤال الأول:

أ- نحسب طيف الإشارة:

$$\tilde{x}(f) = \delta(f) + \frac{1}{2}[\delta(f-1000) + \delta(f+1000)] + \frac{1}{2j}[\delta(f-2000) - \delta(f+2000)]$$

وأكبر تردد في لإشارة هو $f_{max} = 2000$ وبالتالي يكون تردد نيكويست هو:

$$f_N = 2f_{max} = 4000$$

ب- بنفس الطريقة نجد:

$$\tilde{x}(f) = \frac{1}{2j}[\delta(f-2000) - \delta(f+2000)]$$

وأكبر تردد في لإشارة هو $f_{max} = 2000$ وبالتالي يكون تردد نيكويست هو:

$$f_N = 2f_{max} = 4000$$

ج- نعلم أن:

$$x(t) = \sin^2(4000\pi t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(8000\pi t))$$

ومنه

$$\tilde{x}(f) = \frac{1}{2}\delta(f) - \frac{1}{2}[\delta(f-4000) - \delta(f+4000)]$$

وأكبر تردد في لإشارة هو $f_{max} = 4000$ وبالتالي يكون تردد نيكويست هو:

$$f_N = 2f_{max} = 8000$$

د- نعلم أن:

$$x(t) = sin(4000\pi t)cos(2000\pi t) = \frac{1}{2}(\sin(6000\pi t) + \sin(2000\pi t))$$

وأكبر تردد في لإشارة هو $f_{max} = 6000$ وبالتالي يكون تردد نيكويست هو:

$$f_N = 2f_{max} = 12000$$

السؤال الثاني:

أ- لنحسب طيف الإشارة $x(t)$:

$$\tilde{x}(f) = \frac{1}{2}\left(\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right)$$

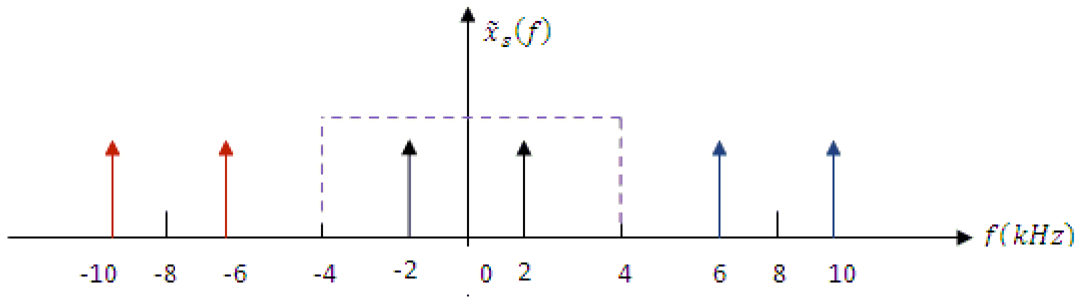
أما بالنسبة للإشارة المتقطعة

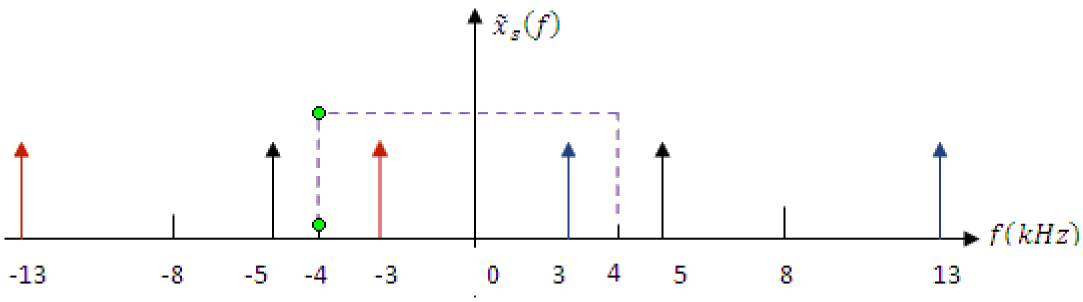
$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t)$$

$$\tilde{x}_s(f) = \tilde{x}(f) * \frac{1}{T_s}\delta_{\frac{1}{T_s}}(f) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\tilde{x}\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$$

$$\tilde{x}_s(f) = \frac{1}{2T_s}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\left(\delta\left(f - f_0 - \frac{n}{T_s}\right) + \delta\left(f + f_0 - \frac{n}{T_s}\right)\right)$$

وهو مكون من تكرار لطيف الإشارة الأصلية بدور F_s.





ب- عند تطبيق مرشح تمرير منخفض مثالي بتردد قطع $f_c = 4\ kHz$ كما هو موضح على الشكل فإننا نحصل على مايلي:

في الحالة الأولى: نحصل على نفس الإشارة الأصلية بتردد 2kHz.

في الحالة الثانية: نحصل على إشارة مختلفة في التردد بتردد قدره 3kHZ بدل من 5kHz وذلك بسبب أثر التداخل لأن تردد التقطيع لا يحقق معيار شانون في التقطيع لهذه الإشارة لأنه أقل من ضعفي أكبر تردد في الإشارة أي أن تردد نيكويست لهذه الإشارة هو 10kHz.

تغذية راجعة: احسب طيف الإشارة المتقطعة وارسمه بيانياً في الحالتين، ثم انظر على الترددات التي تبقى بعد تطبيق مرشح التمرير المنخفض المثالي. راجع فقرة" إعادة بناء الإشارة عملياً" وتبين أن معيار شانون غير محقق من أجل الإشارة الثانية مما يسبب أثر التداخل المشروح في الفقرة "التراكيب الطيفي أو التداخل الطيفي".

السؤال الثالث:

أ- إن دور التقطيع للإشارة الأولى $x_1(t)$ هو T ويكون تردد التقطيع $F_1 = \frac{1}{T}$.

$$F_1 = \frac{1}{T} > 4B > 2B$$

وبالتالي فإن معيار شانون محقق لهذه الإشارة.

إن دور التقطيع للإشارة الثانية $x_2(t)$ هو $2T$ ويكون تردد التقطيع $F_2 = \frac{1}{2T}$.

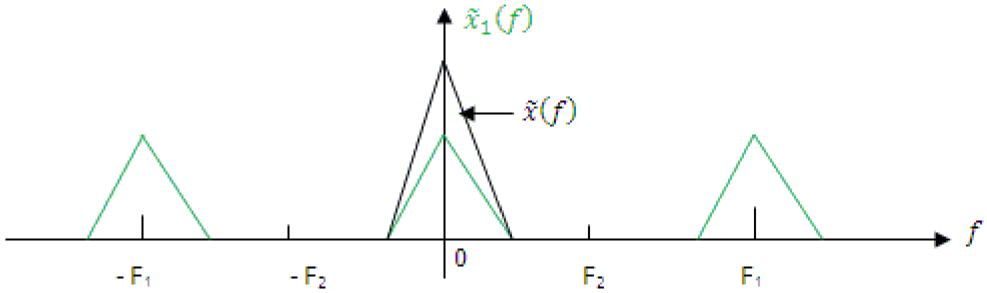
$$F_2 = \frac{1}{2T} = \frac{F_1}{2} > \frac{4B}{2} = 2B$$

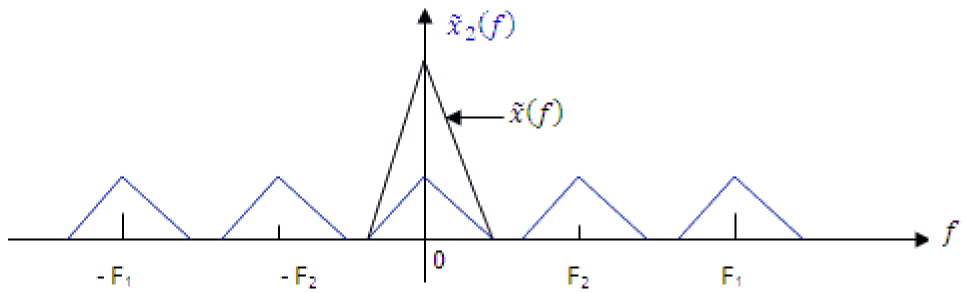
وبالتالي فإن معيار شانون محقق لهذه الإشارة أيضاً.

ب- نحسب تحويل فورييه للإشارتين

$$\tilde{x}_1(f) = \tilde{x}(f) * F_1\delta_{F_1}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_1\tilde{x}(f - nF_1)$$

$$\tilde{x}_2(f) = \tilde{x}(f) * F_2\delta_{F_2}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_2\tilde{x}(f - nF_2)$$





الإشارات والنظم المتقطعة

الكلمات المفتاحية:

الإشارات المتقطعة، النظم المتقطعة، جداء التلاف المتقطع، معادلة الفروق.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على الإشارات المتقطعة من خلال دراسة بعض الإشارات المتقطعة الشهيرة والتعرف على مفاهيم طاقة الإشارة والاستطاعة المتوسطة للإشارات المتقطعة. كما سندرس في هذا الفصل النظم المتقطعة الخطية الغير متغيرة مع الزمن وعلاقة الخرج بالدخل ومفهوم الاستجابة النبضية. نهتم بشكل خاص بالنظم المعطاة بمعادلة فروق وكيفية تحقيق هذه النظم بما فيها المرشحات الخطية ذات الاستجابة المنتهية (FIR) والمرشحات ذات الاستجابة الغير منتهية (IIR). كما سنبين كيف تنعكس خواص السببية والاستقرار في مجال النظم المتقطعة.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- الإشارات المتقطعة وخواصها الأساسية.
- النظم المتقطعة الخطية الغير متغيرة مع الزمن وعلاقة الخرج بالدخل من خلال جداء التلاف المتقطع ومفهوم الاستجابة النبضية.
- خواص النظم المتقطعة الخطية الغير متغيرة مع الزمن: الاستقرار والسببية.
- المرشحات المتقطعة ذات الاستجابة المنتهية (FIR) والمرشحات الخطية ذات الاستجابة الغير منتهية (IIR).

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على الإشارات المتقطعة من خلال دراسة بعض الإشارات المتقطعة الشهيرة والتعرف على مفاهيم طاقة الإشارة والاستطاعة المتوسطة للإشارات المتقطعة. كما سندرس في هذا الفصل النظم المتقطعة الخطية الغير متغيرة مع الزمن وعلاقة الخرج بالدخل ومفهوم الاستجابة النبضية. نهتم بشكل خاص بالنظم المعطاة بمعادلة فروق وكيفية تحقيق هذه النظم بما فيها المرشحات الخطية ذات الاستجابة المنتهية (FIR) والمرشحات ذات الاستجابة الغير منتهية (IIR). كما سنبين كيف تنعكس خواص السببية والاستقرار في مجال النظم المتقطعة.

1. مقدمة (Introduction)

رأينا في الفصل السابق عملية التقطيع التي تمكننا من تحويل الإشارات المستمرة في الزمن إلى إشارات متقطعة في الزمن مكونة من سلسلة من القيم التي تمثل الإشارة بشكل كامل إذا ما تحقق معيار شانون في التقطيع. وهذا يعني أن الإشارات المتقطعة تمثل إشارات مستمرة محدودة الامتداد الترددي، وهذه هي حال معظم الإشارات العملية التي نتعامل معها في النظم العملية في العديد من مجالات معالجة الإشارة.

إن الهدف من تقطيع الإشارات المستمرة هو إمكانية معالجة هذه الإشارات بشكل رقمي عن طريق استخدام النظم الرقمية والمعالجات الصغرية وذلك لما توفره المعالجة الرقمية من مزايا عديدة لا تتوفر في النظم المستمرة مثل إمكانية تخزين الإشارة وسهولة تنفيذ مختلف خوارزميات معالجة الإشارة مثل الترشيح والترابط والتحليل الترددي وغيرها. ولكن السؤال الذي يطرح نفسه هنا هو: كيف يمكننا دراسة وتحقيق النظم المتقطعة بشكل رقمي انطلاقاً من عينات التقطيع؟. هذا ما سوف نجيب عنه في هذا الفصل من خلال دراسة الإشارات والنظم المتقطعة وكيف تنعكس المفاهيم التي تعرفنا عليها سابقاً في الإشارات والنظم المستمرة في المجال المتقطع للزمن مثل طاقة الإشارة والاستطاعة الوسطية وعلاقة الخرج بالدخل في النظم الخطية الغير متغيرة مع الزمن. ومن ثم كيفية تحقيق هذه النظم المتقطعة باستخدام تقنيات معالجة الإشارة الرقمية.

2. الإشارات المتقطعة (Discrete signals)

سنتعرف في البداية على بعض الإشارات المتقطعة الشهيرة ومن ثم سوف نذكر ببعض خوص هذه الإشارات التي سبق وأن رأيناها في الفصل الأول.

1.2. بعض الإشارات المتقطعة الشهيرة.(Some discrete signals)

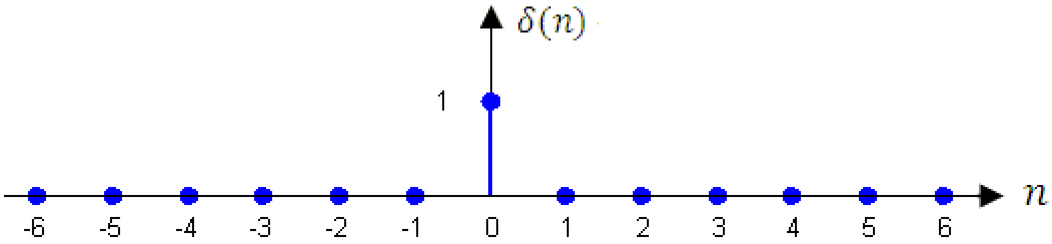
تعرف الإشارة المتقطعة $x[n]$ بمعرفة قيمتها في كل لحظة n حيث n هو عدد صحيح يمثل دليل العينة المتقطعة ويعبر عن الزمن المتقطع بوحدة زمن دور التقطيع. سوف نتعرف في البداية على بعض الإشارات الشهيرة الكثيرة الاستخدام في مجال النظم المتقطعة.

1.1.2. النبضة الواحدية المتقطعة (Discrete unit impulse)

نعرف إشارة النبضة الواحدية المتقطعة بالعلاقة التالية:

$$\delta[n]=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

وهي إشارة جميع قيمها معدومة فيما عدا العينة عند اللحظة صفر وهي ممثلة بيانياً بالشكل التالي:

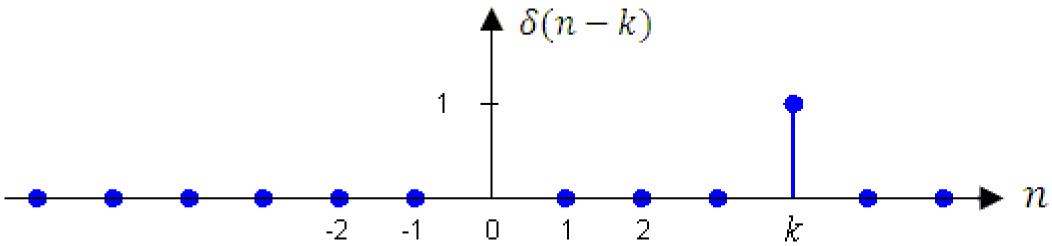


الشكل Error! No text of specified style in document.- 1: إشارة النبضة الواحدية المتقطعة.

تؤدي إشارة النبضة المتقطعة في النظم المتقطعة دوراً مشابهاً دور نبضة ديراك في النظم المستمرة ولهذا استخدمنا نفس رمز نبضة ديراك المستمرة للتعبير عن النبضة الواحدية المتقطعة.

كما يمكن تعريف النبضة الواحدية المزاحة بالزمن بمقدار عدد صحيح k بالعلاقة التالية:

$$\delta[n-k]=\begin{cases}1 & n=k\\ 0 & n\neq k\end{cases}$$



الشكل Error! No text of specified style in document.- 2: إشارة النبضة الواحدية المتقطعة المزاحة.

ويمكن اعتبار أي إشارة متقطعة $x[n]$ على أنها مجموعة من النبضات $\delta[n-k]$ مثقلة بقيم الإشارة $x[k]$ من أجل جميع اللحظات k، أي أن:

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\delta[n-k]$$

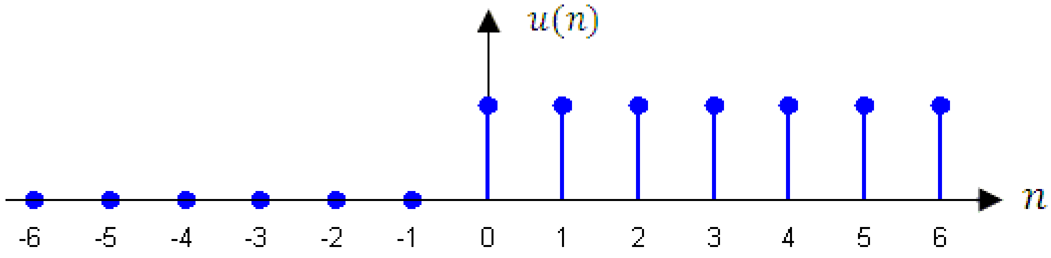
أي أن الإشارة $x[n]$ هي قطار من النبضات بمطال مساوٍ لقيمة الإشارة عند كل لحظة n.

2.1.2. إشارة الخطوة المتقطعة أو العتبة الواحدية (Discrete unit step) signal

بشكل مماثل لتعريف إشارة الخطوة في الزمن المستمر، نعرف إشارة الخطوة المتقطعة بالعلاقة التالية:

$$u[n] = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

وهي إشارة معدومة في اللحظات السالبة، وثابتة في اللحظات الموجبة بمطال واحدي. يوضح الشكل التالي التمثيل البياني لهذه الإشارة:



الشكل Error! No text of specified style in document.- 3: إشارة الخطوة الواحدية المتقطعة.

وتلعب هذه الإشارة نفس دور إشارة الخطوة الواحدية في الزمن المستمر.

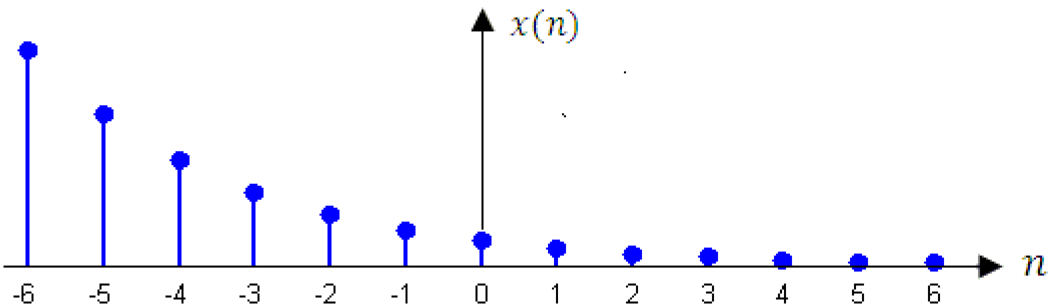
3.1.2. الإشارة الأسية المتقطعة (Discrete exponential signal)

نعرف الإشارة الأسية المتقطعة بالعلاقة التالية:

$$x[n] = a^n$$

حيث أن a هو عدد عقدي بشكل عام وقد يكون حقيقاً.

يمثل الشكل التالي التمثيل البياني لهذه الإشارة في حالة a عدد حقيقي موجب أقل من الواحد.



الشكل Error! No text of specified style in document.- 4: الإشارة الأسية المتقطعة.

وتعتبر الإشارات الأسية إشارات ذات أهمية خاصة في النظم المتقطعة كما سنرى في هذا الفصل حيث تشكل هذه الإشارات التوابع الذاتية للنظم المتقطعة الخطية.

4.1.2. الإشارة الجيبية العقدية (signal Discrete complex sinusoidal)

نعرف الإشارة الجيبية (أو الأسية) العقدية بالعلاقة التالية:

$$x[n] = Ae^{j(2\pi\nu_0 n+\varphi_0)}$$

حيث A هو عدد حقيقي موجب يسمى مطال لإشارة، و ν_0 هو التردد المقيس لهذه الإشارة بالنسبة لتردد التقطيع و φ_0 هو الطور البدائي لهذه الإشارة. لا ننسى أن التردد ν_0 هو مقدار حقيقي يأخذ قيمه في المجال $]-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}[$. كما نعرف نبض الإشارة أو ترددها الزاوي بالمقدار $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ ويأخذ قيمه في المجال $]-\pi,+\pi[$.

تلعب هذه الإشارة دوراً هاماً في التطبيقات العملية ولا سيما في التحليل الترددي لمحتوى الإشارات المتقطعة عن طريق تحويل فورييه للإشارات المتقطعة الذي سنتعرض له في الفصل القادم.

2.2. خواص الإشارات المتقطعة (Properties of discrete signals)

سنتعرض في هذه الفقرة لتعريف بعض المقادير الهامة التي نستخدمها أحياناً لتوصيف الإشارات المتقطعة مثل طاقة الإشارة والاستطاعة المتوسطة لها بشكل مماثل لما قمنا به للإشارات المستمرة. لقد سبق وقد عرضنا في الفصل الأول هذه المفاهيم ولكننا نعود ونذكر هنا بهذه المفاهيم مرة أخرى.

1.2.2. طاقة الإشارة المتقطعة (Energy of discrete signal)

نعرف طاقة الإشارة بالعلاقة:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

إذا كان هذا المجموع موجوداً أي أن $E_x < \infty$ فإننا نقول بأن الإشارة $x[n]$ ذات طاقة محدودة أو أنها "إشارة طاقة".

2.2.2. الاستطاعة الوسطية للإشارة المتقطعة (discrete signal Average power of)

نعرف الاستطاعة المتوسطة لإشارة متقطعة بأنه نهاية الاستطاعة المتوسطة على مجال زمني بطول $[-N,+N]$ عندما يسعى طول هذا المجال ليشمل كامل محور الأعداد الصحيحة. أي:

$$P_x = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{+N}|x[n]|^2\right]$$

إذا كانت هذه النهاية موجودة، أي $P_x < \infty$، فإننا نقول عن هذه الإشارة بأنها إشارة ذات استطاعة متوسطة محدودة أو أنها "إشارة استطاعة".

3.2.2. الإشارة الدورية المتقطعة (Discrete periodic signals)

نقول عن إشارة متقطعة $x[n]$ بنها دورية إذا وجد عدد صحيح موجب N بحيث يكون $x[n+N]=x[n]$ من أجل جميع قيم n. أي أن الإشارة تكرر نفسها كل N عينة. ونسمي أصغر عدد موجب N_0 بالدور الأساسي للإشارة.

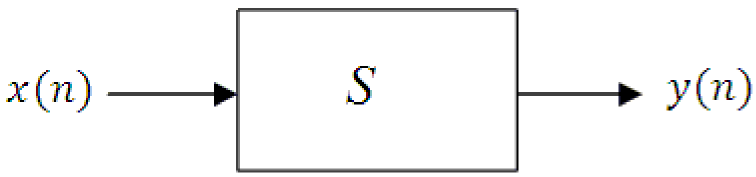
من المعروف بأن طاقة ي إشارة دورية هي طاقة غير محدودة، كما أن استطاعتها الوسطية محدودة ويمكن حسابها على دور واحد فقط من الإشارة، أي باستخدام العلاقة التالية:

$$P_x=\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}|x[n]|^2$$

وذلك لأن الاستطاعة الوسطية ستكون نفسها في جميع أدوار الإشارة.

3. النظم المتقطعة (Discrete systems)

النظام المتقطع S كما هو مبين في الشكل التالي هو نظام يكون دخله إشارة متقطعة $x[n]$ وخرجه إشارة متقطعة $y[n]$.



الشكل **Error! No text of specified style in document.**- 5: نظام متقطع.

ونقول عن النظام المتقطع بأنه خطي إذا كان من أجل أي تركيب خطي من الإشارات على دخله يعطي التركيب الخطي نفسه من إشارات اخرج الموافقة، أي إذا كان النظام يعطي إشارة الخرج $y_1[n]$ من أجل إشارة الدخل $x_1[n]$ وإشارة الخرج $y_2[n]$ من أجل إشارة الدخل $x_2[n]$ فإن:

$$a_1x_1[n]+a_2x_2[n]\xrightarrow{S}a_1y_1[n]+a_2y_2[n]$$

كما نقول بأن النظام المتقطع بأنه غير متغير مع الزمن إذا كان أي انزياح زمني على إشارة الدخل $x[n]$ يعطي نفس الانزياح الزمني على إشارة الخرج $y[n]$، أي إذا كان $y[n]$ هو خرج النظام من أجل إشارة الدخل $x[n]$، فإن:

$$x[n-k]\xrightarrow{S}y[n-k]$$

1.3. النظم المتقطعة الخطية الغير متغيرة مع الزمن (systems Discrete LTI)

من أجل النظم المتقطعة التي تتمتع بخاصية الخطية بالإضافة إلى خاصية عدم التغير مع الزمن يمكن تبيان بأن إشارة الخرج $y[n]$ يمكن أن تكتب كتركيب خطي من عينات إشارة الدخل بالشكل التالي:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = h[n] * x[n]$$

حيث $h[k]$ هي أوزان التركيب الخطي والتي تدعى الاستجابة النبضية. وهي علاقة شبيهة بعلاقة الخرج بالدخل في النظم المستمرة إلا أننا نستخدم هنا علاقة المجموع في الزمن المتقطع عوضاً عن التكامل في الزمن المستمر. وتسمى هذه العلاقة بعلاقة جداء التلاف المتقطع بين الاستجابة النبضية $h[n]$ وإشارة الدخل $x[n]$.
وبالتالي فإن معرفة التابع المتقطع $h[n]$ يكفي لتعريف النظام بشكل كامل.
كما ويمكن إثبات أن جداء التلاف المتقطع هو عملية تبديلية، أي يمكننا أن نعرف علاقة الخرج بالدخل بالشكل التالي:

$$y[n] = h[n] * x[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

وانطلاقاً من تابع الاستجابة النبضية المتقطع $h[n]$ يمكننا أن نبين خواص النظام من حيث السببية والاستقرار.

1.1.3. السببية

يكون النظام المتقطع المعطى بتابع الاستجابة النبضية $h[n]$ سببياً إذا كان $h[n]$ معدوماً من أجل جميع اللحظات السالبة، أي

$$S \text{ is causal } \Leftrightarrow h[n] = 0, for\ n < 0$$

2.1.3. الاستقرار

يكون النظام المتقطع المعطى بتابع الاستجابة النبضية $h[n]$ مستقراً إذا كان $h[n]$ قابلاً للجمع بالمطال (أو القيمة المطلقة بالنسبة للنظم الحقيقية)، أي

$$S \text{ is stable } \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$$

2.3. أمثلة عن المرشحات الخطية (Examples on linear filters)

لكي نوضح المفاهيم السابقة، سوف نأخذ بعض الأمثلة عن المرشحات الخطية غير المتغيرة مع الزمن (LTI).

1.2.3. المرشح الحيادي (Identity filter)

إذا أخذنا المرشح المعرف بتابع الاستجابة النبضية $h[n] = \delta[n]$، فإن إشارة الخرج من أجل إشارة دخل ما $x[n]$ تعطى بالعلاقة:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[k]x[n-k] = x[n]$$

وهذا يعني أن إشارة الخرج عي نفسها إشارة الدخل، ولذلك يسمى هذا المرشح بالمرشح الحيادي. وهو مرشح سببي ومستقر في نفس الوقت.

2.2.3. المرشح المراكم (Accumulator filter)

إذا أخذنا المرشح المعرف بتابع الاستجابة النبضية $h[n] = u[n]$، فإن إشارة الخرج من أجل إشارة دخل ما $x[n]$ تعطى بالعلاقة:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

وهذا يعني أن إشارة الخرج في اللحظة n هي عبارة عن مجموع جميع عينات الدخل السابقة حتى اللحظة n.
ومن الواضح أن هذا المرشح سببي ولكنه غير مستقر لأن $h[n]$ غير قابل للجمع بالإطلاق.

3.3. المرشحات التي تعطى بمعادلات فروق (difference equations Filters given by)

نهتم هنا بدراسة نوع خاص من المرشحات الخطية وذلك بسبب كثرة استخدامها لسهولة تحقيقها، وهي المرشحات التي تعطى بمعادلات فروق حيث يرتبط الخرج بالدخل بمعادلة خطية من الشكل العام التالي:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m y[n-m]$$

حيث N و M هي أعداد صحيحة محدودة و a_k و b_m هي قيم ثابتة عقدية أو حقيقية، ويكون $a_0 \neq 0$.
ويمكن إعادة كتابة هذه العلاقة لإظهار الخرج في اللحظة الحالية $y[n]$ بدلالة بقية الحدود لتصبح كالتالي:

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k y[n-k] + \sum_{m=0}^{M} \beta_m x[n-m]$$

حيث $\alpha_k = -a_k/a_0$ و $\beta_m = b_m/a_0$.

تدل هذه العلاقة على أن الخرج في اللحظة الحالية يتعلق بقيم الدخل في اللحظة الحالية و M قيمة من اللحظات السابقة حتى $x[n-M]$ وأيضاً يتعلق بالخرج في اللحظات السابقة حتى $y[n-N]$. وهذا يعني أن هذه المرشحات سببية. لحساب الخرج في كل لحظة، يجب تخزين M عينة دخل سابقة و N عينة خرج سابقة.

1.3.3. مرشح ذو استجابة نبضية منتهية (Response–FIR Finite Impulse)

نقول عن مرشح خطي أنه ذو استجابة نبضية منتهية (Response–FIR Finite Impulse) عندما تكون استجابته النبضية $h[n]$ تحتوي على عدد محدود من القيم الغير معدومة. ويتحقق ذلك في المرشحات المعطاة بمعادلات فروق عندما تنعدم جميع الثوابت β_k، وعندها يكتب الخرج بالشكل التالي:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M} \beta_m x[n-m]$$

وبالمقارنة مع علاقة جداء التلاف المتقطع $y[n] = \sum_{m=0}^{M} h[m]x[n-m]$، نجد أن الاستجابة النبضية لهذا المرشح هي:

$$h[m] = \begin{cases} \beta_m & 0 \leq m \leq M \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

وهي تحتوي على $M+1$ قيمة غير معدومة، ونقول عن هذا المرشح بأنه من الدرجة M لأنه يحتاج إلى M وحدة تأخير زمني لعينات إشارة الدخل لحساب قيمة الخرج.

مثال: لنأخذ المرشح الذي يعطى بمعادلة الفروق التالية:

$$y[n] = \frac{1}{M+1} \sum_{m=0}^{M} x[n-m] = \sum_{m=0}^{M} \frac{1}{M+1} x[n-m]$$

وهو مرشح يقوم يعطي على خرجه في كل لحظة القيمة المتوسطة لعدد $M+1$ من عينات الدخل وتكون استجابته النبضية:

$$h[m] = \begin{cases} \dfrac{1}{M+1} & 0 \leq m \leq M \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

وبالتالي هو مرشح ذو استجابة نبضية منتهية (FIR) من الدرجة M بمعاملات متساوية.

ومن الجدير بالذكر أن المرشحات ذات الاستجابة النبضية المحدودة تكون دائماً مستقرة لأن تابع الاستجابة النبضية قابل للجمع بالقيمة المطلقة.

2.3.3. مرشح ذو استجابة نبضية غير منتهية(Infinite Impulse) Response–IIR

نقول عن مرشح خطي أنه ذو استجابة نبضية غير منتهية (Response–IIR Infinite Impulse) عندما تكون استجابته النبضية $h[n]$ تحتوي على عدد غير محدود من القيم الغير معدومة. ويتحقق ذلك في المرشحات المعطاة بمعادلات فروق عندما يكون أحد الثوابت على الأقل α_k غير معدوم. ولكي نوضح كيف تكون الاستجابة النبضية غير منتهية في هذه الحالة نأخذ المثال التالي.

مثال: لنأخذ المرشح الذي يعطى بمعادلة الفروق التالية:

$$y[n] = y[n-1] + x[n]$$

وبالمطابقة مع في العلاقة (19) نجد أن $M = 0$ و $N = 1$ ويكون $\beta_0 = 1$ و $\alpha_1 = 1$.

بتعويض قيمة $y[n-1]$ بشكل رجعي في المعادلة السابقة نجد:

$$y[n] = y[n-2] + x[n-1] + x[n]$$

وأيضاً نقوم بتعويض قيمة $y[n-2]$ بشكل رجعي في المعادلة السابقة نجد:

$$y[n] = y[n-3] + x[n-2] + x[n-1] + x[n]$$

وهكذا بشكل متكرر حتى نحصل على الشكل العام التالي:

$$y[n] = y[n-\infty] + \sum_{m=0}^{\infty} x[n-m]$$

فإذا فرضنا أن قيمة خرج المرشح في البداية كانت معدومة، أي $y[n-\infty] = y[-\infty] = 0$ وبالمطابقة مع علاقة جداء التلاف المتقطع نجد أن الاستجابة النبضية لهذا المرشح هي:

$$h[m] = \begin{cases} 1 & 0 \le m \le \infty \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

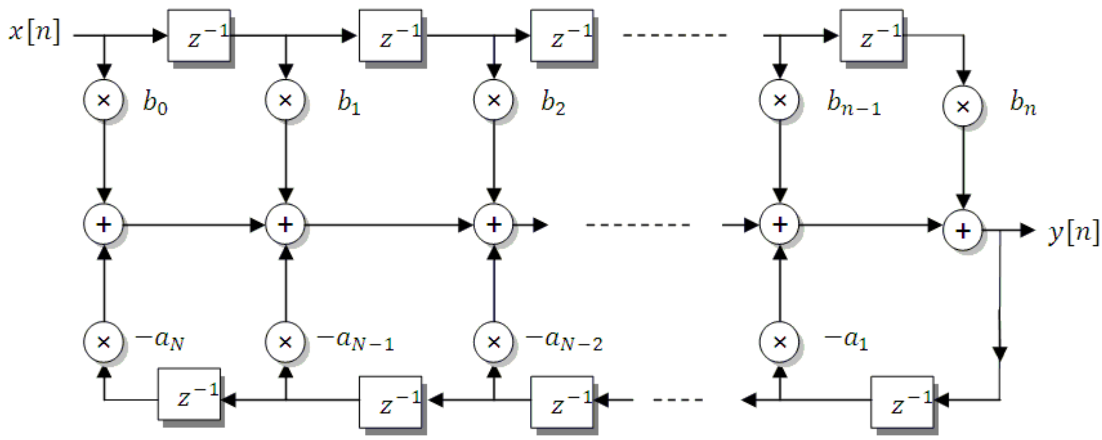
وهي تحتوي على عدد غير محدود من المعاملات الغير معدومة. ونقول عن هذ المرشح بأنه مرشح ذو استجابة نبضية غير منتهية (IIR) وهو من الدرجة الأولى. تكون درجة المرشح من نوع IIR هي قيمة N في العلاقة (19).

من الجدير بالذكر بأن تحقيق هذا النوع من المرشحات يتم بشكل عملي انطلاقاً من معادلة الفروق وليس من علاقة جداء التلاف لأن عدد الحدود في هذه العلاقة غير محدود. وبالمقارنة مع المرشحات ذات الاستجابة النبضية المنتهية فإن هذا النوع من المرشحات قد يعاني من مشكلة عدم الاستقرار، لذلك يجب دراسة استقرار هذا النوع من المرشحات قبل استخدامها.

4.3. تحقيق المرشحات المتقطعة (Realization of discrete filters)

سبق وأن قلنا بأن تحقيق المرشحات التي تعطى بمعادلة فروق يتم بسهولة باستخدام التقنيات الرقمية من عمليات جمع وضرب وتأخير زمني. حيث يمكن تحقيق عملية التأخير الزمني باستخدام قلابات رقمية (سجلات إزاحة) أو وحدت تخزين في الذاكرة لتخزين القيم السابقة كل من الدخل والخرج. بالعودة إلى العلاقة (19) التي تعطي قيمة الخرج في كل لحظة، فإننا نحتاج إلى وحدات تأخير زمنية وضوارب للضرب بثوابت (معاملات) المرشح وعمليات جمع لتحقيق المجموع. نرمز للوحدة التي تقوم بتأخير زمني بمقدار عينة واحدة بالرمز z^{-1} وسنرى في لبحث لقادم عن تحويل Z سبب هذا الترميز.

بالاعتماد على ما سبق، يبين الشكل التالي المخطط العام لحساب قيمة الخرج في كل لحظة.



الشكل .Error! No text of specified style in document- 6: مخطط صندوقي لتحقيق مرشح متقطع.

كما يمكن حساب الخرج باستخدام المعالجات الرقمية على شكل خوارزمية تحتوي على حلقة ضرب ومراكمة مع تخزين معاملات المرشح بشكل مسبق في الذاكرة وكذلك تخزين قيم الدخل والخرج اللازمة ضمن أشعة تخزين.

أسئلة وتمارين الفصل السابع
الإشارات والنظم المتقطعة

أسئلة عامة

1. ما هي علاقة الخرج بالدخل في النظم لمتقطعة الخطية الغير متغيرة مع الزمن؟

تغذية راجعة: راجع الفقرة "النظم المتقطعة الخطية الغير متغيرة مع الزمن".

2. ما هو شرط السببية على نظام متقطع ذو استجابة نبضية $h[n]$؟

تغذية راجعة: راجع الفقرة الفرعية "السببية" في فقرة "النظم المتقطعة الخطية الغير متغيرة مع الزمن".

3. ما هو شرط الاستقرار على نظام متقطع ذو استجابة نبضية $h[n]$؟

تغذية راجعة: راجع الفقرة الفرعية "الاستقرار" في فقرة " النظم المتقطعة الخطية الغير متغيرة مع الزمن".

4. علل لماذا تكون المرشحات ذات الاستجابة النبضية المحدودة (FIR) مستقرة دائماً؟

تغذية راجعة: راجع فقرة "مرشح ذو استجابة نبضية محدودة".

5. كيف نعرف انطلاقاً من معادلة الفروق لمرشح بأنه ذو استجابة نبضية منتهية أو غير منهية؟

تغذية راجعة: راجع فقرة " المرشحات التي تعطى بمعادلات فروق".

أسئلة خيارات متعددة

1- ما هو المرشح الحيادي في النظم الخطية المتقطعة؟

أ- $h[n] = u[n]$

ب- $h[n] = 1$

ج- $h[n] = \delta[n]$

د- $h[n] = x[n]$

تغذية راجعة: راجع فقرة "أمثلة عن المرشحات الخطية".

2- ما هو نوع المرشح الأفضل من حيث الاستقرار؟

أ- المرشح ذو الاستجابة النبضية المنتهية (FIR).

ب- المرشح ذو الاستجابة النبضية الغير المنتهية (IIR).

ج- المرشحات المعطاة بمعادلات فروق.

د- كل ما سبق.

تغذية راجعة: راجع فقرة "مرشح ذو استجابة نبضية غير منتهية".

3- تعبر درجة مرشح ذو استجابة نبضية منتهية عن:

أ- عدد قيم تابع الاستجابة النبضية الغير معدومة.

ب- عدد وحدات التأخير الزمني اللازمة لعينات الدخل.

ج- عدد وحدات التأخير الزمني اللازمة لعينات الدخل زائد واحد.

د- عدد وحدات التأخير الزمني اللازمة لعينات الخرج.

تغذية راجعة: راجع فقرة "مرشح ذو استجابة نبضية منتهية".

4- ما هو عمل المرشح $y[n] = y[n-1] + x[n]$ ؟

أ- مفاضل.

ب- مكامل.

ج- مراكم.

د- جامع.

تغذية راجعة: راجع فقرة "أمثلة عن المرشحات الخطية".

5- ما هو دور الإشارة $x[n] = e^{j\pi\frac{3}{2}n}$

أ- 1   **ب**- 2

ج- 3   **د**- 4

تغذية راجعة: راجع فقرة "الإشارة الدورية المتقطعة".

تمارين

1- ليكن لدينا النظام المتقطع المعطى بالعلاقة التالية:

$$h[n] = x[n+1] - x[n-1]$$

أ- ما هو نوع هذا النظام من حيث الاستجابة النبضية (منهية أو غير منتهية)؟

ب- احسب استجابته النبضية.

ج- هل هذا النظام سببي ومستقر؟ وما هي درجة هذا المرشح؟

د- احسب الاستجابة الخطوية لهذا النظام.

هـ- ارسم مخطط تحقيق هذا المرشح.

تغذية راجعة: راجع شرط الاستقرار في فقرة " النظم المتقطعة الخطية الغير متغيرة مع الزمن "وفقرة" مرشح ذو استجابة نبضية محدودة" ثم طبق علاقة جداء التلاف المتقطع لحساب خرج النظام.

2- ليكن لدينا النظام المتقطع المعطى بمعادلة الفروق التالية:

$$y[n] = ay[n-1] + bx[n]$$

حيث أن a و b هي قيم حقيقية.

- **أ-** ما هو نوع هذا النظام من حيث الاستجابة النبضية (منتهية أو غير منتهية) وما هي درجته؟
- **ب-** احسب الاستجابة النبضية لهذا النظام.
- **ج-** ادرس استقرار النظام وناقش حسب قيم الثوابت a و b.
- **د-** احسب الاستجابة الخطوية وحدد الشرط اللازم على قيم a و b ليكون الربح الساكن لهذا النظام مساوياً الواحد.
- **هـ-** ارسم مخطط تحقيق هذا المرشح.

تغذية راجعة: راجع شرط الاستقرار في فقرة "النظم المتقطعة الخطية الغير متغيرة مع الزمن "وفقرة" "مرشح ذو استجابة نبضية غير محدودة" ثم طبق علاقة جداء التلاف المتقطع لحساب خرج النظام.

الحل

إجابات – حلول الأسئلة العامة السابقة

السؤال الأول:

الحل: العلاقة هي جداء التلاف المتقطع:

$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$.

السؤال الثاني:

الحل: لكي يكون النظام سببياً يجب أن يكون

$$h[n] = 0, for\ n < 0$$

السؤال الثالث:

الحل: لكي يكون النظام سببياً يجب أن يكون:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$$

السؤال الرابع:

الحل: لأن تابع الاستجابة النبضية يكون قابل للجمع بالقيمة المطلقة.

السؤال الخامس:

الحل: انطلاقاً من معادلة الفروق يكون المرشح ذو استجابة نبضية منتهية عندما لا يتعلق الخرج بقيم الخرج في اللحظات السابقة، وإلا يكون المرشح ذو استجابة نبضية غير منتهية.

إجابات – حلول أسئلة الخيارات المتعددة السابقة

أسئلة خيارات متعددة	الإجابة الصحيحة
1	ج
2	أ
3	ب
4	ج
5	د

إجابات – حلول التمارين السابقة

السؤال الأول:

أ- هذا مرشح ذو استجابة نبضية محدودة لأنه يتعلق بعدد محدود من قيم الدخل.

ب- بالمطابقة مع علاقة جداء التلاف نجد

$$h[n]=\begin{cases}1 & n=-1\\ -1 & n=1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

ج- هذا النظام غير سببي لأن له قيماً غير معدومة في اللحظات السالبة (n=−1) وهو مستقر لأنه مرشح ذو استجابة نبضية منتهية.

يمكن تحويل هذا النظام إلى نظام سببي بتطبيق تأخير بمقدار واحد لتصبح الاستجابة النبضية بالشكل:

$$\acute{h}[n]=\begin{cases}1 & n=0\\ -1 & n=2\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

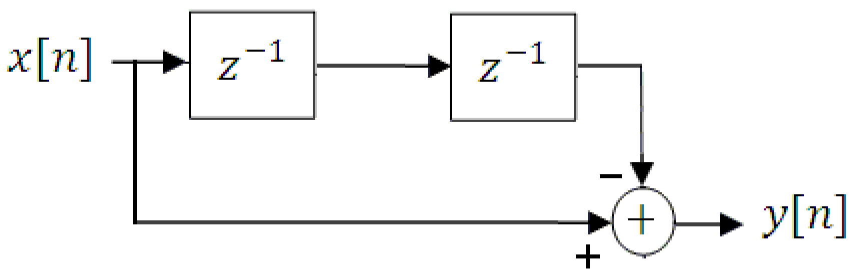
بالتالي فهو مرشح من الدرجة الثانية لأنه يحتاج لوحدتي تأخير زمني لعينات الدخل.

د- الاستجابة الخطوية:

$$s[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]u[n-k]=u[n+1]-u[n-1]=\begin{cases}1 & n=-1\\ 1 & n=0\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

هـ- مخطط تحقيق المرشح

و-



السؤال الثاني:

أ- هذا مرشح ذو استجابة نبضية غير محدودة لأن الخرج في اللحظة الحالية $y[n]$ يتعلق بأحد القيم السابقة للخرج $ay[n-1]$. وهو من الدرجة الأولى لأن الخرج يتعلق بقيمة الخرج في اللحظة السابقة فقط (أي N=1 في العلاقة (19))

ب- نحسب الخرج بشكل تراجعي

$$y[n]=ay[n-1]+bx[n]$$

$$y[n]=a(ay[n-2]+bx[n-1])+bx[n]=a^2y[n-2]+abx[n-1]+bx[n]$$

$$y[n] = a^2(ay[n-3] + bx[n-2]) + abx[n-1] + bx[n]$$
$$= a^3y[n-3]+a^2bx[n-2] + abx[n-1] + bx[n]$$

$$y[n] = a^2(ay[n-3] + bx[n-2]) + abx[n-1] + bx[n]$$
$$= a^N y[n-N] + b\sum_{k=0}^{N-1} a^k x[n-k]$$

وعندما تسعى قيمة N إلى اللانهاية و بفرض أن $y[-\infty] = 0$

$$y[n] = b\sum_{k=0}^{\infty} a^k x[n-k]$$

ومنه

$$h[n] = ba^n u[n]$$

ج– إن الشرط اللازم والكافي ليكون النظام مستقراً هو $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h^k| < \infty$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h^k| = |b|\sum_{k=0}^{\infty}|a^k| = \frac{|b|}{1-|a|}, \quad |a| < 1$$

وهو محدود بشرط أن يكون $|a| < 1$.

د– الاستجابة الخطوية:

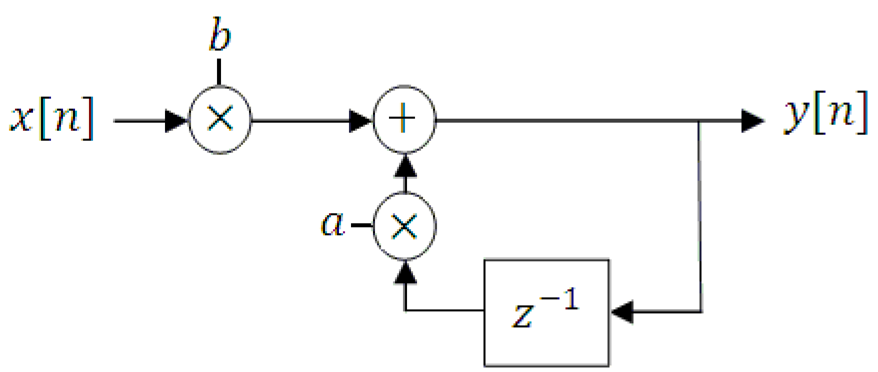
$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]u[n-k] = b\sum_{k=0}^{\infty} a^k u[n-k] = b\sum_{k=0}^{n} a^k = b\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

نحصل على الاستجابة الساكنة عندما n تسعى إلى اللانهاية، وبما أن مطال $u[n]$ واحدي في اللانهاية، يكون الربح

$$\lim_{n\to\infty} s[n] = \frac{b}{1-a}$$

ولكي يكون هذا الربح مساوياً للواحد يجب أن يكون $b = 1 - a$. وهذا يعني أنه ليكون هذا النظام مستقراً وذو ربح ساكن واحدي يجب أن تكون قيم الثوابت أقل من الواحد بالقيمة المطلقة، ومجموعهما مساوياً الواحد.

هـ – مخطط تحقيق المرشح



تحويل فوريه للإشارات المتقطعة

الكلمات المفتاحية:

تحويل فورييه للإشارات المتقطعة، التردد المقيس، نظرية بارسفال للإشارات المتقطعة.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعريف بتحويل فورييه للإشارات المتقطعة وتحويل فورييه العكسي الموافق. حيث نبين الاختلاف عن تحويل فورييه للإشارات المستمرة من حيث الطبيعة الدورية لطيف الإشارات المتقطعة ومفهوم التردد المقيس. كما سنعرض خواص ومواصفات تحويل فورييه للإشارات المتقطعة ونظرية بارسفال في انحفاظ الطاقة بين المجالين الزمني والترددي. وأخيراً نعرض بعضاً من تحويلات فورييه للإشارات المتقطعة الشهيرة.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- التعرف على تحويل فورييه للإشارات المتقطعة.
- التعرف على تحويل فورييه العكسي للإشارات المتقطعة.
- الطبيعة الدورية لطيف الإشارة المتقطعة ومفهوم التردد المقيس.
- خواص على تحويل فورييه للإشارات المتقطعة.

يهدف هذا الفصل إلى التعريف بتحويل فورييه للإشارات المتقطعة وتحويل فورييه العكسي الموافق. حيث نبين الاختلاف عن تحويل فورييه للإشارات المستمرة من حيث الطبيعة الدورية لطيف الإشارات المتقطعة ومفهوم التردد المقيس. كما سنعرض خواص ومواصفات تحويل فورييه للإشارات المتقطعة ونظرية بارسفال في انحفاظ الطاقة بين المجالين الزمني والترددي. وأخيراً نعرض بعضاً من تحويلات فورييه للإشارات المتقطعة الشهيرة.

1. مقدمة (Introduction)

رأينا سابقاً تحويل فورييه للإشارات المستمرة كوسيلة لتمثيل الإشارات وتحليل محتواها الترددي. كما رأينا في فصل التقطيع طيف الإشارة المقطعة تقطيعاً مثالياً ولاحظنا أنه ينتج عن تكرار طيف الإشارة المستمرة بشكل دوري بدور يساوي تردد التقطيع F_S. سنتعرف في هذا الفصل على تحويل فورييه للإشارات المتقطعة التي تمثل كسلسلة من القيم $x[n]$ بغض النظر عن كون هذه الإشارة ناتجة عن تقطيع إشارة مستمرة أم لا، وذلك يعني بغض النظر عن تردد التقطيع من خلال إدخال مفهوم جديد وهو التردد المقيس ν.

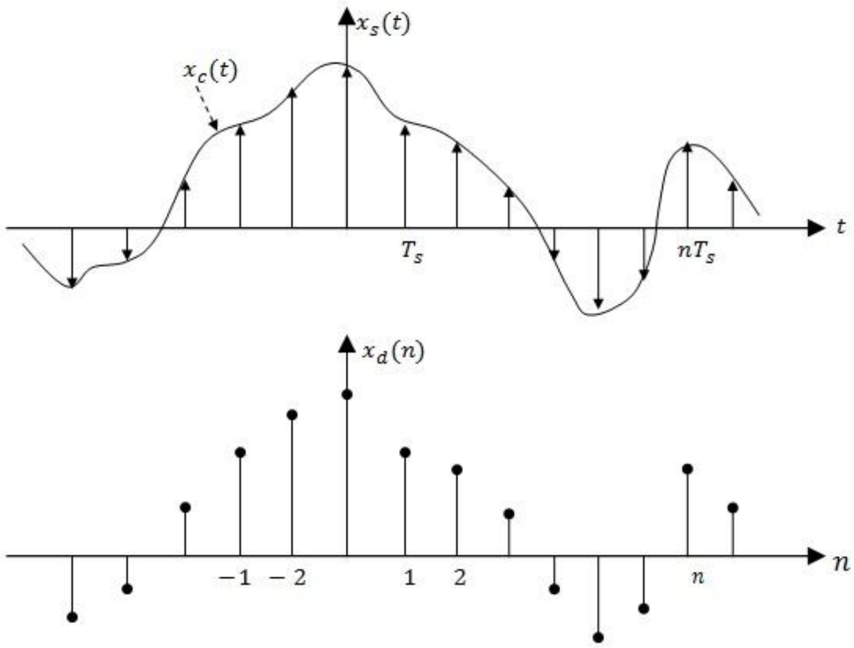
لنفرض أن $x_d[n]$ إشارة متقطعة ناتجة عن تقطيع إشارة مستمرة $x_c(t)$ بدور تقطيع T_S أي:

$$x_d[n] = x_c(nT_S)$$

من الممكن تمثيل الإشارة المقطعة $x_d[n]$ في الزمن المستمر باستخدام نبضات ديراك في التقطيع المثالي. حيث تعطى إشارة التقطيع المثالي بالعلاقة التالية:

$$x_S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT_S)\delta(t - nT_S)$$

والتي هي تمثيل في الزمن المستمر t للإشارة المتقطعة $x_d[n]$. أي أنّ هناك تقابلاً بين $x_s(t)$ و $x_d[n]$ وكذلك بين $\{n\}$ و $\{nT_S\}$، كما هو موضح في الشكل التالي:



الشكل .Error! No text of specified style in document.-1: التقابل بين $x_S(t)$ و $x_d(n)$.

لقد رينا سابقاً أن الإشارة المستمرة $x_s(t)$ الناتجة عن تقطيع الإشارة المستمرة $x_c(t)$ تقطيعاً مثالياً بدور تقطيع T_s يمكن أن تكتب كما في العلاقة (11) من الفصل السادس، بالشكل التالي:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT_s)\delta(t-nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_d[n]\delta(t-nT_s)$$

وبأخذ تحويل فورييه للطرفين نجد:

$$\tilde{X}_s(\omega) = FT[x_s(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT_s)e^{-jnT_s\omega}$$

بتغيير المتحول $\varpi = \omega T_s$ في العلاقة السابقة نحصل على تابع للمتحول ϖ سنرمز له بالرمز $\tilde{X}_d(\varpi)$ يعطى بالعلاقة التالية:

$$\tilde{X}_d(\varpi) = \tilde{X}_s(\varpi/T_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT_s)e^{-jn\varpi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_d[n]e^{-jn\varpi}$$

وهو بالتعريف تحويل فورييه للإشارة المتقطعة $x_d[n]$. ويرتبط بتحويل فورييه للإشارة المقطعة تقطيعاً مثالياً بالعلاقة التالية:

$$\tilde{X}_s(\omega) = \tilde{X}_d(\varpi)\big|_{\varpi=\omega T_s}$$

أو:

$$\tilde{X}_d(\varpi) = \tilde{X}_s(\omega)\big|_{\omega=\frac{\varpi}{T_s}}$$

يمكن كتابة العلاقتين السابقتين بدلالة الترددات f, ν بدلاً من الترددات الزاوية ϖ, ω:

$$\tilde{x}_s(f) = \tilde{x}_d(\nu)|_{\nu=fT_s}$$

أو:

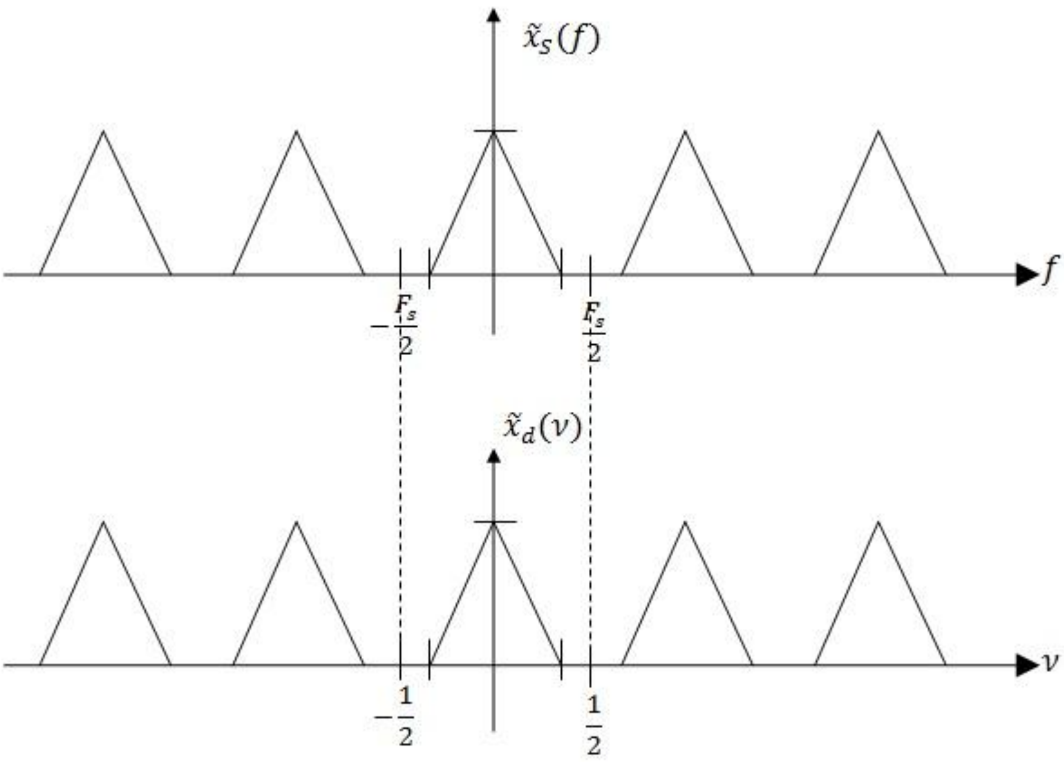
$$\tilde{x}_d(\nu) = \tilde{x}_s(f)|_{f=\frac{\nu}{T_s}}$$

علماً أن التردد الرقمي ν والتردد الزاوي الرقمي ϖ هما ترددان مقيّسان لا أبعاد لهما، كما أن ν ليس له وحدة بينما يقاس ϖ بالراديان. ينتج التردد الرقمي ν عن تقييس التردد f الذي يقاس بالهرتز، بينما ينتج التردد الزاوي الرقمي ϖ عن تقييس التردد الزاوي Ω الذي يقاس بالراديان/ثانية وترتبط هذه الترددات مع بعضها بالعلاقة التالية:

$$\nu = fT_s = \frac{f}{F_s} \qquad , \qquad \varpi = \omega T_s = \frac{\omega}{F_s}$$

وكما أن تحويل فورييه $\tilde{x}_s(f)$ للإشارة المقطعة بتقطيع مثالي $x_s(t)$ بدور تقطيع T_s هو تابع دوري بدور $\frac{1}{T_s}$، كذلك تحويل فورييه $\tilde{x}_d(\nu)$ هو تابع دوري بدور 1 وتحويل فورييه $\tilde{X}_d(\varpi)$ أيضاً تابع دوري بدور قدره 2π.

كما أنه يكفي أيضاً لتمثيل الإشارة المقطعة بدور تقطيع T_s معرفة $\tilde{x}_s(f)$ في المجال $\left[0, \frac{1}{T_s}\right]$ أو المجال $\left[-\frac{1}{2T_s}, +\frac{1}{2T_s}\right]$، وهو مايقابل معرفة $\tilde{x}_d(\nu)$ في المجال $[0,1]$ أو المجال $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$ كما هو موضح في الشكل التالي:



الشكل **2-Error! No text of specified style in document.**: تحويل فورييه لإشارة مقطعة بتقطيع مثالي $\tilde{x}_s(f)$ وللإشارة المتقطعة $\tilde{x}_d(\nu)$

2. تعريف تحويل فورييه وتحويل فورييه العكسي للإشارات المتقطعة (Definition of (signals and its inverse for discrete FT

إن تحويل فورييه للإشارة المتقطعة $x(n)$ هو تابع للمتحول ν ويعطى بالعلاقة التالية:

$$\tilde{x}(\nu) = FT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-2\pi jn\nu}$$

نسمي ν التردد الرقمي أو التردد المقيس وهو متحول لابعد له، كما مرّ سابقاً.

إن التابع $\tilde{x}(\nu)$ هو تابع مستمر (غير متقطع) ودوري للمتحول ν أي قابل للنشر بسلسلة فورييه. ويمكن النظر إلى علاقة تحويل فورييه لهذا التابع على أنها النشر بسلسلة فورييه حيث تكون أمثال النشر هي قيم الإشارة المتقطعة $x[n]$، أي أن تحويل فورييه العكسي هو العلاقة التي تعطي أمثال نشر فورييه:

$$x[n] = IFT[\tilde{x}(\nu)] = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \tilde{x}(\nu)e^{+2\pi jn\nu}\, d\nu$$

يمكن أخذ التكامل السابق على دور ترددي آخر طوله 1 مثلاً $[0,1]$.

بتعريف تحويل فورييه بدلالة التردد الزاوي ϖ نجد:

$$\tilde{X}(\varpi) = FT[x[n]] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-jn\varpi}$$

تظهر أيضاً القيم $x(n)$ كأمثال نشر التابع الدوري $X(\varpi)$ الذي دوره 2π:

$$x[n] = IFT[\tilde{X}(\varpi)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \tilde{X}(\varpi)e^{+jn\varpi}\, d\varpi$$

يمكن أيضاً أخذ التكامل السابق على دور تردد زاوي آخر طوله 2π مثلاً $[0,2\pi]$.

وتعطى العلاقة بين التردد الرقمي ν والتردد الزاوي ϖ بالعلاقة التالية:

$$\varpi = 2\pi\nu$$

3. تحويل فورييه لبعض الإشارات المتقطعة الأساسية (Fourier transform of basic discrete signals)

يكفي كما ذكرنا معرفة قيمة تحويل فورييه $\tilde{x}(\nu)$ الدوري على دور واحد وليكن المجال $\left[-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right]$. نستعرض فيما يلي تحويل فورييه لبعض من الإشارات المتقطعة الأساسية.

1.3. تحويل فورييه للنبضة المتقطعة (FT for Dirac impulse)

إذا كانت $x[n] = \delta[n]$ فإن تحويل فورييه لها هو $\tilde{x}(\nu) = 1$. وهذا يعني أن النبضة المتقطعة تحتوي على جميع الترددات بنفس المطال. ولذلك فإن لهذه الإشارة أهمية خاصة في تطبيقات تشكيل الإشارات الصوتية كما هي الحال في خوارزميات ضغط الصوت في المكالمات عبر الهاتف النقال.

2.3. تحويل فورييه للإشارة الأسية العقدية المتقطعة (FT for discrete complex exponential signal)

كما هو حال الإشارة الأسية العقدية المستمرة، فإنه ليس للإشارة الأسية العقدية المتقطعة ($x[n] = e^{2\pi j\nu_0 n}$ حيث $\nu_0 \in \left[-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right]$) تحويل فورييه بالمعنى العادي، لأن تحويل فورييه لها غير متقارب من قيمة منتهية. وكذلك هي إشارة ذات طاقة غير محدودة. نعلم أن تحويل فورييه للإشارة الأسية العقدية المستمرة هو نبضة ديراك عند التردد الموافق. وبالنظر إلى الإشارة المتقطعة كتقطيع للإشارة المستمرة، نرى أن تحويل فورييه للإشارة الأسية العقدية المتقطعة يتضمن النبضة الواحدية عند التردد الرقمي المقيس ν_0 في المجال $\left[-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right]$ وتكراراً دورياً عند الأدوار الأخرى، أي:

$$\tilde{x}(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - \nu_0 + k)$$

ملاحظة:

يكفي اعتبار أن التردد الرقمي للإشارة $x[n] = e^{2\pi j\nu_0 n}$ الذي ينتمي إلى المجال $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$ فقط ذلك أنه إذا كانت $x[n] = e^{2\pi j\nu_1 n}$ بحيث يكون ν_1 خارج المجال السابق، فإنه يوجد عدد صحيح k بحيث يكون التردد $\nu_0 = \nu_1 + k$ داخل المجال $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$، ولدينا:

$$x[n] = e^{2\pi j\nu_1 n} = e^{2\pi j\nu_0 n}$$

ويمكن من ثم إبدال التردد ν_0 بالتردد ν_1، أي إن الترددات التي يفصل بينها عدد صحيح من الأدوار الترددية تعتبر متكافئة. ويعبر ذلك عن التداخل الطيفي كما رأينا في فصل التقطيع عندما يتم تقطيع الإشارة بتردد أقل من تردد نيكويست أو بشكل مكافئ عندما يكون ν_1 خارج المجال $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$.

3.3. تحويل فورييه للإشارة الجيبية المتقطعة (sinusoidal signal FT for discrete)

إذا كانت $x[n] = A\cos(2\pi j\nu_0 n + \varphi_0)$ هي إشارة جيبية متقطعة ترددها ν_0 ومطالها A وطورها φ_0، فإنه بالاعتماد على تحويل فورييه للإشارة الأسية العقدية المتقطعة، نحصل بتحويل فورييه على مركبتين ترددتين:

$$\tilde{x}(\nu) = \frac{A}{2} e^{j\varphi_0} \delta(\nu - \nu_0) + \frac{A}{2} e^{-j\varphi_0} \delta(\nu + \nu_0)$$

ولكل مركبة مطال يساوي نصف مطال الإشارة الجيبية المتقطعة وطورين متعاكسين في الإشارة.

4. خواص تحويل فورييه للإشارات المتقطعة (Properties of FT for discrete signals)

إن غالبية خواص تحويل فورييه للإشارات المتقطعة تشبه خواص تحويل فورييه للإشارات المستمرة، كخواص الخطية وجداء التلاف وخواص التناظر وأيضاً الانزياح الزمني أو الترددي، إلا أن هناك فارقاً أساسياً يجب تأكيده، وهو دورية تحويل فورييه للإشارات المتقطعة.

1.4. دورية تحويل فورييه للإشارات المتقطعة (Periodicity of FT for discrete signals)

إن تحويل فورييه لإشارة متقطعة $\tilde{x}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n). e^{-2\pi j n\nu}$ هو تابع دوري ودوره يساوي 1 ومن ثم يكفي تعريفه على مجال من الترددات ν طوله 1 ($\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right[$ أو $[0,1[$ مثلاً).

أما إذا اعتبرنا التعريف $\tilde{X}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]. e^{-jn\omega}$ لتحويل فورييه، وقد رأينا سابقاً العلاقة بين $\tilde{x}(\nu)$ و $\tilde{X}(\omega)$، فإننا نعلم أن التابع $\tilde{X}(\omega)$ دوري ودوره 2π ويمكن لتمثيله الاكتفاء بدور واحد أي تعريفه على مجال من الترددات الزاوية ω طوله 2π ($[-\pi, +\pi[$ أو $[0,2\pi[$ مثلاً).

2.4. الخطية (Linearity)

إذا كان لدينا الإشارتين المتقطعتين $x_1[n]$ و $x_2[n]$ وكان $\tilde{x}_1(\nu)$ و $\tilde{x}_2(\nu)$ تحويلا فورييه لهما على الترتيب، أي:

$$x_1[n] \xrightarrow{FT} \tilde{x}_1(\nu)$$
$$x_2[n] \xrightarrow{FT} \tilde{x}_2(\nu)$$

وإذا كانت λ_1 و λ_2 ثوابت عقدية فإن:

$$\lambda_1 x_1[n] + \lambda_2 x_2[n] \xrightarrow{FT} \lambda_1 \tilde{x}_1(\nu) + \lambda_2 \tilde{x}_2(\nu)$$

أي أن تحويل فورييه لأي تركيب خطي من الإشارات المتقطعة يعطي نفس التركيب الخطي لتحويلات فورييه لهذه الإشارات المتقطعة.

3.4. عكس الزمن (Time inverse)

إذا قمنا بعكس الإشارة المتقطعة $[n]$ حسب المحور الزمني، أي إذا كان:

$$y[n] = x[-n]$$

فإن تحويل فورييه لها هو معكوس تحويل فورييه للإشارة الأصلية، أي أن:

$$\tilde{y}(\nu) = \tilde{x}(-\nu)$$

وبالتالي، إذا كانت الإشارة زوجية فإن تحويل فورييه لها يكون زوجياً، وإذا كانت الإشارة فردية فإن تحويل فورييه لها يكون فردياً.

4.4. المرافق العقدي (Complex conjugate)

إذا أخذنا المرافق العقدي لإشارة ما، أي:

$$y[n] = x^*[n]$$

فإن تحويل فورييه لإشارة الجديدة هو:

$$\tilde{y}(\nu) = \tilde{x}^*(-\nu)$$

ومنه نلاحظ أنه إذا كانت الإشارة المتقطعة حقيقية فإن تحويل فورييه لها يحقق خاصة التناظر الترافقي أو الهيرميتي (hermitian symmetry)، وهذا يعني أن المطال زوجي والطور فردي أو أن القسم الحقيقي لتحويل فورييه لها يكون زوجياً بينما يكون القسم التخيلي فردياً.

5.4. الانزياح الزمني والانزياح الترددي (frequency shifting Time shifting and)

إذا قمن بتطبيق إزاحة زمنية للإشارة $x[n]$ بمقدار n_0 ، أي إذا كان:

$$y[n] = x[n - n_0]$$

حيث n_0 هو مقدار الإزاحة الزمنية وهو عدد صحيح، فإن:

$$\tilde{y}(\nu) = e^{-2\pi j\nu n_0}\tilde{x}(\nu)$$

وبالمقابل إذا قمنا بضرب الإشارة بالزمن بإشارة أسية عقدية بتردد قدره ν_0، أي إذا كان:

$$y[n] = e^{2\pi j\nu_0 n}x[n]$$

حيث ν_0 مقدار الإزاحة الترددية وهو ثابت حقيقي ويكفي اختياره في المجال $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$ فإن:

$$\tilde{y}(\nu) = \tilde{x}(\nu - \nu_0)$$

وتسمى هذه الخاصة الأخيرة بخاصة التعديل (Modulation).

ومن ذلك نستنتج أن الضرب بإشارة أسية عقدية في مجال الزمني أو الترددي يقابل انزياح في المجال الآخر، والعكس صحيح.

6.4. جداء التلاف المتقطع (Discrete convolution)

إذا أخذنا جداء التلاف في المستوي الزمني لإشارتين متقطعتين $x[n] = x_1[n] * x_2[n]$، فإن تحويل فورييه للإشارة الناتجة $x[n]$ هو ناتج الجداء الداخلي بين تحويلي فورييه لكل من الإشارتين في المجال الترددي. أي إذا كان:

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k]x_2[n-k]$$

فإن:

$$\tilde{x}(\nu) = \tilde{x}_1(\nu).\tilde{x}_2(\nu)$$

وهي خاصة مفيدة جداً في تسهيل معالجة الإشارة. فبدلاً من إجراء جداء التلاف في المستوي الزمني (والتي هي عملية معقدة حسابياً) فيمكن إجراء تحويل فورييه للإشارتين للانتقال إلى المجال الترددي ومن ثم إجراء الجداء العادي وهي عملية أبسط بكثير من عملية جداء التلاف ومن ثم العودة إلى المجال الزمني باستخدام تحويل فورييه المعاكس. وبالتالي يتم انجاز عملية جداء التلاف باستخدام عمليتي تحويل فورييه وجداء عادي وتحويل فورييه العكسي وفي كثير من الأحيان يكون التعقيد الحسابي لكل هذه العمليات أقل من التعقيد الحسابي لعملية جداء التلاف.

7.4. جداء إشارتين (Product of two signals)

إن تحويل فورييه لجداء إشارتين هو جداء تلاف لتحويلي فورييه. إذا كان:

$$y[n] = x_1[n].x_2[n]$$

فإن

$$\tilde{y}(\nu) = \tilde{x}_1(\nu) * \tilde{x}_2(\nu) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \tilde{x}_1(u).\tilde{x}_2(\nu - u)du$$

ويمكن أخذ التكامل السابق على أي مجال طوله 1.

أما جداء التلاف للتوابع $\tilde{X}(\omega)$ فيكتب كما يلي:

$$\tilde{X}(\omega) = \tilde{X}_1(\omega) * \tilde{X}_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \tilde{X}_1(\theta).\tilde{X}_2(\omega - \theta)d\theta$$

ويمكن أخذ التكامل السابق على أي مجال طوله 2π. ويسمى جداء التلاف الدوري.

وبالنتيجة نلاحظ أن جداء التلاف في المجال الزمني أو الترددي يوافق الجداء العادي في المجال الآخر، والعكس صحيح.

5. نظرية بارسفال (Parseval Theorem)

كم رأينا في الإشارات المستمرة، سوف نقوم هنا بعرض نظرية بارسفال التي تبين انحفاظ الجداء الداخلي للإشارات بين المجالين الزمني والترددي، وبالأخص مبدأ انحفاظ الطاقة بين المجالين الزمني والترددي كنتيجة مباشرة لنظرية بارسفال.

إن تابع الترابط (correlation أو cross–correlation) بين إشارتين $x_1[n]$ و $x_2[n]$ من أجل انزياح زمني k يعطى بالعلاقة التالية:

$$r_{x_1x_2}[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n].x_2^*[n-k] = \langle x_1[n], x_2[n-k] \rangle$$

وهو عبارة عن جداء داخلي (سلمي) للإشارة $x_1[n]$ مع مرافق الإشارة المزاحة $x^*{}_2[n-k]$.

بالنظر إلى العلاقة التي تعرّف تابع الترابط نجد أنه يمكن أن ننظر إليه كجداء تلاف للإشارة $x_1[k]$ مع $x_2^*[-k]$، أي:

$$r_{x_1x_2}[k] = x_1[k] * x_2^*[-k]$$

ومنه نجد بأخذ تحوي فورييه للطرفين واستخدام خاصة جداء التلاف:

$$\tilde{r}_{x_1x_2}(\nu) = FT\left[r_{x_1x_2}(k)\right](\nu) = \tilde{x}_1(\nu).\tilde{x}_2^*(\nu)$$

وبالتالي يمكن إعادة كتابة تابع الترابط $r_{x_1x_2}[k]$ بأنه تحويل فورييه العكسي للتابع $\tilde{r}_{x_1x_2}(\nu)$، أي أن:

$$r_{x_1x_2}[k] = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \tilde{x}_1(\nu).\tilde{x}_2^*(\nu)e^{2\pi j\nu k}d\nu$$

وفي الحالة الخاصة من أجل انزياح معدوم $k = 0$ نجد:

$$r_{x_1x_2}[0] = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \tilde{x}_1(\nu).\tilde{x}_2^*(\nu)d\nu = \langle \tilde{x}_1(\nu), \tilde{x}_2(\nu)\rangle$$

أي:

$$r_{x_1x_2}[0] = \langle \tilde{x}_1(\nu), \tilde{x}_2(\nu)\rangle = \langle x_1[n], x_2[n]\rangle$$

أو :

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x_1[n].x_2^*[n]} = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \boldsymbol{\tilde{x}_1(\nu).\tilde{x}_2^*(\nu)d\nu}}$$

وهذا يعبر عن انحفاظ الجداء الداخلي بتحويل فورييه وهي نظرية بارسفال (Parseval)

نتيجة: مبدأ انحفاظ الطاقة

في الحالة الخاصة لنظرية بارسفال عندما يكون $x_1[n] = x_2[n] = x[n]$ نجد:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} |\tilde{x}(\nu)|^2 d\nu$$

تُظهر العلاقة الأخيرة أن طاقة الإشارة E_x والتي هي تجميع للاستطاعة اللحظية $|x[n]|^2$ في المجال الزمني، تكون نفسها لطاقة الإشارة في المجال الترددي. وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها من أجل الإشارات المستمرة.

نسمي المقدار $|\tilde{x}(\nu)|^2$ بتابع الكثافة الطيفية للطاقة (density energy spectrum) وهو يعبر عن توزع طاقة الإشارة على مختلف الترددات للإشارة المتقطعة ويستخدم بشكل واسع في التحليل الترددي للإشارات كما في أجهزة التحليل الطيفي (Spectrum Analyzer).

6. الاستجابة الترددية للمرشحات الخطية المتقطعة (Frequency response of linear filters)

رأينا أن تحوي فورييه لجداء التلاف بين إشارتين هو جداء تحويلي فورييه لكلا الإشارتين. فإذا كان لدينا مرشح متقطع معطى بتابع استجابته النبضية $h[n]$، وكانت $x[n]$ هي إشارة دخل هذا المرشح. فتكون إشارة الخرج $y[n]$ معطاة بالعلاقة:

$$y[n] = h[n] * x[n]$$

وبتحويل فورييه للطرفين نجد:

$$\tilde{y}(\nu) = \tilde{h}(\nu)\tilde{x}(\nu)$$

وتكون الاستجابة الترددية للمرشح هي:

$$\tilde{h}(\nu) = \frac{\tilde{y}(\nu)}{\tilde{x}(\nu)}$$

فعلى سبيل المثال، إذا كان دخل المرشح الإشارة $x[n] = e^{2\pi j\nu_0 n}$، فإن $\tilde{x}(\nu) = \delta(\nu - \nu_0)$ وهي تحتوي على مركبة ترددية وحيدة عند التردد ν_0. وبالتالي يكون تحويل فورييه لإشارة الخرج:

$$\tilde{y}(\nu) = \tilde{h}(\nu)\tilde{x}(\nu) = \tilde{h}(\nu)\delta(\nu - \nu_0) = \tilde{h}(\nu_0)\delta(\nu - \nu_0)$$

وبأخذ تحويل فورييه المعاكس للطرفين، نجد إشارة الخرج:

$$y[n] = \tilde{h}(\nu_0)e^{2\pi j\nu_0 n}$$

أي أننا حصلنا في الخرج على نفس إشارة الدخل مضروبة بثابت عقدي $\tilde{h}(\nu_0)$ يمثل ربح المرشح عند هذا التردد وهذا طبيعي لأن التوابع الأسية العقدية هي توبع ذاتية للمرشحات الخطية.

بشكل عام من أجل أي إشارة دخل $x[n]$، فإنها تحتوي على مركبات ترددية مختلفة حسب قيم تحويل فورييه لها $\tilde{x}(\nu)$. ويكون $\tilde{h}(\nu)$ هو ربح المرشح عند كل تردد ν. وبما أن $\tilde{h}(\nu)$ هو مقدر عقدي بشكل عام، فيكون الاستجابة الترددية المطالية هي $|\tilde{h}(\nu)|$ وهو الذي يعطي ربح المطال عند كل تردد وهو مقدار حقيقي موجب. أما الاستجابة الطورية فتعطى بالتابع $Arg[\tilde{h}(\nu)]$ وهو يعبر عن تغير طور إشارة الدخل على خرج المرشح. ويمكن تمثل الاستجابة الترددية باستخدام مخططات بود للمطال والصفحة كما رأينا في حالة المرشحات المستمرة ولكن يكون محور التردد ν ممتد في المجال المجال $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$ وليس في المجال $[-\infty, +\infty]$ كما هي الحال بالنسبة للترددات الحقيقية f وذلك لأن النظم المتقطعة تتعامل مع مجال ترددي محدود بنصف تردد التقطيع فقط.

أسئلة وتمارين الفصل الثامن
تحويل فورييه للإشارات المتقطعة

أسئلة عامة

1- ما هو تعريف تحويل فورييه $\tilde{x}(\nu)$ للإشارة المتقطعة $x[n]$ وتحويل فورييه العكسي الموافق؟

تغذية راجعة: راجع فقرة "تعريف تحويل فورييه وتحويل فورييه العكسي للإشارات المتقطعة".

2- ما هو تعريف التردد المقيس ν بدلالة التردد الحقيقي f وما هي وحدته؟

تغذية راجعة: راجع فقرة "مقدمة".

3- إذا كان $\tilde{x}(\nu)$ هو تحويل فورييه للإشارة المتقطعة $x[n]$، فما هو تحويل فورييه للإشارة $y[n] = x^*[n]$، واستنتج خاصة التناظر الترافقي لتحويل فورييه لإشارة متقطعة حقيقية.

تغذية راجعة: راجع خاصة "المرافق العقدي" في فقرة "خواص تحويل فورييه للإشارات المتقطعة".

4- ما هو مبدأ انحفاظ الطاقة بين المجالين الزمني والترددي لإشارة متقطعة $x[n]$ موضحاً ذلك بالعلاقة الرياضية الموافقة؟

تغذية راجعة: راجع فقرة "نظرية بارسفال".

5- ما هو تعريف الكثافة الطيفية للطاقة للإشارة المتقطعة $x[n]$؟

تغذية راجعة: راجع فقرة "نظرية بارسفال".

أسئلة خيارات متعددة

1- تحويل فورييه لإشارة متقطعة بالزمن $x[n]$ هو:

أ- تابع متقطع في التردد.

ب- تابع دوري في التردد.

ج- تابع زوجي في التردد.

د- تابع فردي في التردد.

تغذية راجعة: راجع فقرة "خواص تحويل فورييه للإشارات المتقطعة".

2- تحويل فورييه للإشارة المتقطعة الحقيقية $x[n]$:

أ- حقيقي.

ب- زوجي.

ج- فردي.

د- ذو تناظر ترافقي.

تغذية راجعة: راجع خاصة "المرافق العقدي" فقرة "خواص تحويل فورييه للإشارات المتقطعة".

3- ما هو تحويل فورييه للإشارة المتقطعة $y[n] = |x[n]|^2$؟

أ- $\tilde{y}(\nu) = \tilde{x}(\nu) * \tilde{x}(-\nu)$

ب- $\tilde{y}(\nu) = |\tilde{x}(\nu)|^2$

ج- $\tilde{y}(\nu) = \tilde{x}(\nu) * \tilde{x}^*(-\nu)$

د- $\tilde{y}(\nu) = \tilde{x}^2(\nu)$

تغذية راجعة: اكتب $|x[n]|^2 = x[n].x^*[n]$ ثم راجع فقرة "خواص تحويل فورييه للإشارات المتقطعة".

4- ما هو تحويل فورييه للإشارة المتقطعة $y[n] = x[-n]$؟

أ- $\tilde{y}(\nu) = \tilde{x}(-\nu)$

ب- $\tilde{y}(\nu) = \tilde{x}^*(-\nu)$

ج- $\tilde{y}(\nu) = \tilde{x}^*(\nu)$

د- $\tilde{y}(\nu) = -\tilde{x}(\nu)$

تغذية راجعة: راجع خاصة "عكس الزمن" "فقرة" خواص تحويل فورييه للإشارات المتقطعة".

5- ما هو تحويل فورييه للإشارة المتقطعة $y[n] = x[-n - n_0]$؟

أ- $\tilde{y}(\nu) = e^{+2\pi j\nu n_0}\tilde{x}(\nu)$

ب- $\tilde{y}(\nu) = e^{-2\pi j\nu n_0}\tilde{x}(\nu)$

ج- ج- $\tilde{y}(\nu) = e^{-2\pi j\nu n_0}\tilde{x}(-\nu)$

د- د- $\tilde{y}(\nu) = e^{+2\pi j\nu n_0}\tilde{x}(-\nu)$

تغذية راجعة: فقرة "خواص تحويل فورييه للإشارات المتقطعة".

6- ما هو تحويل فورييه للإشارة المتقطعة $y[n] = x[n] * x^*[-n]$؟

أ- $\tilde{y}(\nu) = \tilde{x}(\nu).\tilde{x}(-\nu)$

ب- $\tilde{y}(\nu) = |\tilde{x}(\nu)|^2$

ج- $\tilde{y}(\nu) = \tilde{x}(\nu) * \tilde{x}(-\nu)$

د- $\tilde{y}(\nu) = \tilde{x}(\nu) * \tilde{x}^*(-\nu)$

تغذية راجعة: راجع فقرة "خواص تحويل فورييه للإشارات المتقطعة".

تمارين

1- لتكن الإشارة المتقطعة بتردد تقطيع $F_s = 5\ KHz$ التالية:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

أ- احسب تحويل فورييه لهذه الإشارة.

ب- ما هي الترددات المقيسة التي يكون عندها $\tilde{x}(\nu)$ معدوماً، وما هي الترددات الحقيقية الموافقة من لأجل N=5.

تغذية راجعة: راجع فقرة "تعريف تحويل فورييه وتحويل فورييه العكسي للإشارات المتقطعة"

2- ليكن المرشح المتقطع المعطى بالاستجابة الترددية التالية:

$$\tilde{h}_1(\nu) = \begin{cases} -j & \nu > 0 \\ 0 & \nu = 0 \\ +j & \nu < 0 \end{cases}$$

حيث $|\nu| \le 1/2$.

أ- احسب الاستجابة النبضية للمرشح $h_1[n]$.

ب- احسب استجابة النظام للإشارتين التاليتين مستنتجاً عمل المرشح:

$$x_1[n] = \cos(2\pi\nu_0 n)$$

$$x_2[n] = \sin(2\pi\nu_0 n)$$

حيث ν_0 هو قيمة حقيقية موجبة أقل من $1/2$.

ليكن لدين الآن المرشح المعطى بالاستجابة الترددية التالية:

$$\tilde{h}_2(\nu) = \begin{cases} 2 & \nu > 0 \\ 1 & \nu = 0 \\ 0 & \nu < 0 \end{cases}$$

ت- ما هي العلاقة بين $\tilde{h}_2(\nu)$ و $\tilde{h}_1(\nu)$.

ث- استنتج الاستجابة النبضية للمرشح $h_2[n]$.

ج- احسب استجابة النظام للإشارتين التاليتين:

$$x_1[n] = \cos(2\pi\nu_0 n)$$

$$x_2[n] = \sin(2\pi\nu_0 n)$$

تغذية راجعة: راجع فقرة "تعريف تحويل فورييه وتحويل فورييه العكسي للإشارات المتقطعة" وفقرة "الاستجابة الترددية للمرشحات الخطية المتقطعة".

3- ليكن لدينا مرشح ترددي منخفض ذو الاستجابة الترددية التالية.

$$\tilde{h}(\nu) = \begin{cases} 1 & |\nu| \le \frac{1}{4} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

أ- ما هي استجابة النبضية لهذا المرشح؟

ب- احسب الخرج $y[n]$ الناتج عن ترشيح الإشارة:

$$x[n] = \mathrm{A}\cos\left(2\pi\frac{1}{8}n\right) + Bsin(2\pi\frac{3}{8}n)$$

تغذية راجعة: تغذية راجعة: راجع فقرة "تعريف تحويل فورييه وتحويل فورييه العكسي للإشارات المتقطعة" وفقرة "الاستجابة الترددية للمرشحات الخطية المتقطعة".

4- ليكن لدينا المرشح المتقطع المعطى بالعلاقة التالية:

$$y[n] = \frac{1}{T}(x[n] - x[n-1])$$

حيث T هو دور تقطيع إشارة الدخل.

أ- احسب استجابة الترددية لهذا المرشح.

ب- احسب الاستجابة النبضية $h[n]$ للمرشح.

ت- احسب استجابة النظام لإشارة الدخل التالية:

$$x[n] = Asin(2\pi\nu_0 n) + B$$

حيث A و B ثابتان حقيقيان و ν_0 قيمة حقيقية موجبة اقل من $1/2$.

تغذية راجعة: راجع فقرة "تعريف تحويل فورييه وتحويل فورييه العكسي للإشارات المتقطعة" وخاصة "الانزياح الزمني" من خواص تحويل فورييه.

إجابات – حلول الأسئلة العامة السابقة

السؤال الأول:

الحل: يعرف تحويل فورييه لإشارة متقطعة بالعلاقة

$$\tilde{x}(\nu) = FT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-2\pi jn\nu}$$

ويكون تحويل فورييه العكسي الموافق معرف

$$x[n] = IFT[\tilde{x}(\nu)] = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \tilde{x}(\nu)e^{+2\pi jn\nu}\,d\nu$$

السؤال الثاني:

الحل: يعرف التردد المقيس بالعلاقة:

$$\nu = fT_s = \frac{f}{F_s}$$

ويأخذ قيمه في المجال $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$ وهو بلا وحدة لأنه نسبة ترددين.

السؤال الثالث:

الحل: تحويل فورييه للإشارة $y[n]$ هو:

$$\tilde{y}(\nu) = \tilde{x}^*(-\nu)$$

وإذا كانت $x[n]$ حقيقية أي: $x[n] = x^*[n]$ بالتالي بأخذ تحويل فورييه للطرفين نجد

$$\tilde{x}(\nu) = \tilde{x}^*(-\nu)$$

وهي خاصة التناظر الترافقي (أو الهيرميتي) لطيف الإشارة الحقيقية.

السؤال الرابع:

الحل: ينص مبدأ انخفاظ الطاقة على أن طاقة الإشارة في المجال الزمني تكون مساوية لطاقة الإشارة في المجال الترددي، أي:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} |\tilde{x}(\nu)|^2 d\nu$$

السؤال الخامس:

الحل: يعرف تابع الكثافة الطيفية للطاقة للإشارة $x[n]$ بالعلاقة:

$$P(\nu) = |\tilde{x}(\nu)|^2$$

إجابات – حلول أسئلة الخيارات المتعددة السابقة

أسئلة خيارات متعددة	الإجابة الصحيحة
1	ب
2	د
3	ج
4	أ
5	ج
6	ب

إجابات – حلول التمارين السابقة

السؤال الأول:

أ– نحسب تحويل فورييه للإشارة انطلاقاً من تعريف تحويل فورييه:

$$\tilde{x}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-2\pi jn\nu} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi jn\nu} = \frac{1 - e^{-2\pi jN\nu}}{1 - e^{-2\pi j\nu}}$$

أي

$$\tilde{x}(\nu) = \frac{e^{-\pi jN\nu}}{e^{-\pi j\nu}} \frac{e^{+\pi jN\nu} - e^{-\pi jN\nu}}{e^{+\pi j\nu} - e^{-\pi j\nu}} = e^{-\pi jN\nu} \frac{\sin(\pi N\nu)}{\sin(\pi\nu)}$$

ب–يكون $\tilde{x}(\nu)$ معدوماً عندما:

$$\frac{\sin(\pi N\nu)}{\sin(\pi\nu)} = 0$$

أي عندما يكون

$$\sin(\pi N\nu) = 0$$

بشرط $\nu \neq 0$، لأن للتابع $\tilde{x}(\nu)$ نهاية غير معدومة عند الصفر. وبالتالي يكون:

$$\pi N\nu = k\pi$$

من أجل k عدد صحيح غير معدوم، مما يعطي

$$\nu = \frac{k}{N}$$

من أجل $k \in \left[-\frac{N}{2}, +\frac{N}{2}\right] \backslash \{0\}$ لكي يكون ν في المجال $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$.

وتكون الترددات الحقيقية لموافقة هي

$$f = \nu F_s = \frac{k}{N} F_s = \frac{k}{5} 5\ kHz = k\ \ kHz$$
$$f = \{-2, -1, +1, +2\}\ kHz$$

السؤال الثاني:

أ- نطبق تحويل فورييه العكسي على الاستجابة الترددية:

$$h_1[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \tilde{h}_1(\nu)e^{+2\pi jn\nu}\, d\nu = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} je^{+2\pi jn\nu}\, d\nu - \int_{0}^{+\frac{1}{2}} je^{+2\pi jn\nu}\, d\nu$$

$$h_1[n] = \left[\frac{je^{+2\pi jn\nu}}{2\pi jn}\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} - \left[\frac{je^{+2\pi jn\nu}}{2\pi jn}\right]_{0}^{+\frac{1}{2}} = \frac{1-e^{-\pi jn}}{2\pi n} - \frac{e^{\pi jn}-1}{2\pi n}$$

$$h_1[n] = \frac{1-\cos(\pi n)}{\pi n} = \frac{\sin^2(\pi n/2)}{\pi n}$$

ب-لسهولة الحساب، نحسب إشارة الخرج في المجال الترددي ومن ثم نطبق تحويل فورييه المعاكس للعودة إلى المجل الزمني.

من أجل الإشارة $x_1[n] = \cos(2\pi\nu_0 n)$، يكون

$$\tilde{x}_1(\nu) = \frac{1}{2}[\delta(\nu+\nu_0) + \delta(\nu-\nu_0)]$$

وهي تتكون من مركبتين ترددتين عند $-\nu_0$ و $+\nu_0$.

$$\tilde{y}_1(\nu) = \tilde{h}_1(\nu)\tilde{x}_1(\nu) = \frac{1}{2}\tilde{h}_1(\nu)[\delta(\nu+\nu_0) + \delta(\nu-\nu_0)]$$

$$\tilde{y}_1(\nu) = \frac{1}{2}\left[\tilde{h}_1(-\nu_0)\delta(\nu+\nu_0) + \tilde{h}_1(\nu_0)\delta(\nu-\nu_0)\right]$$

بأخذ تحويل فورييه العكسي نجد:

$$y_1[n] = \frac{1}{2}[je^{-2\pi j\nu_0 n} - je^{2\pi j\nu_0 n}] = \sin(2\pi\nu_0 n)$$

من أجل الإشارة $x_2[n] = \sin(2\pi\nu_0 n)$، يكون

$$\tilde{x}_2(\nu) = \frac{1}{2j}[-\delta(\nu+\nu_0) + \delta(\nu-\nu_0)]$$

$$\tilde{y}_1(\nu) = -\frac{1}{2}[\delta(\nu+\nu_0) + \delta(\nu-\nu_0)]$$

بأخذ تحويل فورييه العكسي نجد:

$$y_2[n] = -\frac{1}{2}[e^{-2\pi j\nu_0 n} + e^{2\pi j\nu_0 n}] = -\cos(2\pi\nu_0 n)$$

نلاحظ أن الاستجابة المطالية للمرشح ثابتة أي $|\tilde{h}_1(\nu)| = 1$ من أجل $\nu \neq 0$، أي أن المرشح لا يغير مطال المركبات الترددية. وتكون الاستجابة الطورية هي:

$$Arg[\tilde{h}_1(\nu)] = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \nu > 0 \\ +\frac{\pi}{2} & \nu < 0 \end{cases}$$

أي أن المرشح يقوم بتأخير صفحة بمقدار $\frac{\pi}{2}$ من أجل الترددات الموجبة وتقديم صفحة بنفس المقدار من الترددات السالبة. وهذا يوفق تأخير صفحة بمقدار $\frac{\pi}{2}$ من أجل الإشارات الحقيقية، ويسمى هذا المرشح بتحويل هيلبيرت (Hilbert). وهو مرشح مثالي غير قابل للتحقيق عملياً لأنه غير سببي.

ت– نلاحظ أن

$$\tilde{h}_2(\nu) = j\tilde{h}_1(\nu) + 1$$

ث– تكون الاستجابة النبضية للمرشح $\tilde{h}_2(\nu)$ باستخدام خواص تحويل فورييه

$$h_2[n] = jh_1[n] + \delta[n]$$

$$h_2[n] = j\frac{\sin^2(\pi n/2)}{\pi n} + \delta[n]$$

ج– من أجل الإشارة الأولى:

$$x_1[n] = \cos(2\pi\nu_0 n)$$

نطبق علاقة جداء التلاف لحساب إشارة الخرج بالاستفادة من نتيجة الطلبات السابقة:

$$y_1[n] = h[n] * x_1[n] = (jh_1[n] + \delta[n]) * x_1[n]$$

$$y_1[n] = x_1[n] + jh_1[n] * x_1[n] = x_1[n] + jy_1[n]$$

$$y_1[n] = \cos(2\pi\nu_0 n) + j\sin(2\pi\nu_0 n) = e^{2\pi j\nu_0 n}$$

وهو ما يسمى الغلاف العقدي للإشارة $x_1[n]$.

وكذلك بالنسبة للإشارة الثانية، بنفس الطريقة نجد:

$$y_2[n] = \sin(2\pi\nu_0 n) - j\cos(2\pi\nu_0 n)$$

ويقوم هذا المرشح بحذف المركبات الترددية السالبة لإشارة الدخل، ويطبق عادة في نظم الاتصالات لإزالة القسم السالب من الطيف قبل إرسال الإشارات الحقيقية لأنه لا يحتوي على معلومات إضافية مقارنة بالقسم الموجب بسبب تناظر طيف الإشارات الحقيقية، وبالتالي لا داعي لإرساله لتوفير المجال الترددي اللازم لإرسال الإشارة.

السؤال الثالث:

أ– بتطبيق تحويل فورييه العكسي على $\tilde{h}(\nu)$، نجد:

$$h[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \tilde{h}(\nu) e^{+2\pi jn\nu}\, d\nu = \int_{-\frac{1}{4}}^{+\frac{1}{4}} e^{+2\pi jn\nu}\, d\nu = \left[\frac{e^{+2\pi jn\nu}}{2\pi jn}\right]_{-\frac{1}{4}}^{+\frac{1}{4}}$$

ومنه نجد:

$$h[n] = \frac{e^{+\pi jn/2} - e^{-\pi jn/2}}{2\pi jn} = \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n} = \frac{1}{2}\mathrm{sinc}(n/2)$$

ب–لسهولة الحساب، نقوم بحساب خرج المرشح في المجال الترددي. نحسب أولاً تحويل فورييه لإشارة الدخل:

$$\tilde{x}(\nu) = \frac{A}{2}\left[\delta\left(\nu + \frac{1}{8}\right) + \delta\left(\nu - \frac{1}{8}\right)\right] + \frac{B}{2j}\left[-\delta\left(\nu + \frac{3}{8}\right) + \delta\left(\nu - \frac{3}{8}\right)\right]$$

وبالتالي:

$$\tilde{y}(\nu) = \frac{A}{2}\left[\tilde{h}\left(-\frac{1}{8}\right)\delta(\nu + \nu_0) + \tilde{h}\left(\frac{1}{8}\right)\delta(\nu - \nu_0)\right] + \frac{B}{2j}\left[-\tilde{h}\left(-\frac{3}{8}\right)\delta\left(\nu + \frac{3}{8}\right) + \tilde{h}\left(\frac{3}{8}\right)\delta\left(\nu - \frac{3}{8}\right)\right]$$

بما أن $\tilde{h}\left(\frac{3}{8}\right) = 0$ و $\tilde{h}\left(-\frac{3}{8}\right) = 0$ و $\tilde{h}\left(\frac{1}{8}\right) = 1$ و $\tilde{h}\left(-\frac{1}{8}\right) = 1$، بالتعويض نجد:

$$\tilde{y}(\nu) = \frac{A}{2}[\delta(\nu + \nu_0) + \delta(\nu - \nu_0)]$$

$$y[n] = \mathrm{A}\cos\left(2\pi \frac{1}{8} n\right)$$

وهذا يعني أن المرشح حذف المركبة الثانية من إشارة الدخل لوجودها خارج مجال التمرير للمرشح، وحافظ على المركبة الأولى لوجودها داخل مجال التمرير بربح واحدي.

السؤال الرابع:

أ– بأخذ تحويل فورييه لطرفي علاقة المرشح وباستخدام خواص تحويل فورييه نجد:

$$\tilde{y}(\nu) = \frac{1}{T}\left(\tilde{x}(\nu) - e^{2\pi j\nu}\tilde{x}(\nu)\right) = \frac{1}{T}(1 - e^{-2\pi j\nu})\tilde{x}(\nu)$$

ومنه تكون الاستجابة الترددية للمرشح

$$\tilde{h}(\nu) = \frac{\tilde{y}(\nu)}{\tilde{x}(\nu)} = \frac{1}{T}(1 - e^{-2\pi j\nu}) = \frac{1}{T}e^{-\pi j\nu}2j\sin(\pi\nu) = \frac{2}{T}e^{-\pi j(\nu - 1/2)}\sin(\pi\nu)$$

وتكون الاستجابة المطالية:

$$\left|\tilde{h}(\nu)\right| = \frac{2}{T}|\sin(\pi\nu)|, \qquad \nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

وهو يتغير من $\left|\tilde{h}(0)\right| = 0$ إلى $\left|\tilde{h}\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{2}{T}$ حسب تغيرات تابع الجيب.

ب–لحساب الاستجابة النبضية، نأخذ تحويل فورييه المعاكس للاستجابة الترددية التي وجدنا أنها تكتب بالشكل:

$$\tilde{h}(\nu) = \frac{1}{T}(1 - e^{-2\pi j\nu})$$

ومنه

$$h[n] = \frac{1}{T}\big(\delta(n) - \delta(n-1)\big) = \begin{cases} \frac{1}{T} & n = 0,1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

ت–يمكن حساب إشارة الخرج انطلاقاً من علاقة المرشح:

$$y[n] = \frac{1}{T}(x[n] - x[n-1]) = \frac{A}{T}([sin(2\pi\nu_0 n) + B] - [sin(2\pi\nu_0(n-1)) + B])$$

$$y[n] = \frac{A}{T}\big(sin(2\pi\nu_0 n) - sin(2\pi\nu_0(n-1))\big)$$

$$y[n] = \frac{2A}{T}\sin(\pi\nu_0)\cos\left(2\pi\nu_0(n - \frac{1}{2})\right)$$

وهو ما يوفق مشتق تابع الجيب مع ربح قدره $\frac{2A}{T}\sin(\pi\nu_0)$ وفرق صفحة $\pi\nu_0$.

تحويل Z (Z-Transform)

الكلمات المفتاحية:

تحويل Z، تحويل Z العكسي، جداء التلاف العقدي.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعريف بتحويل Z المستخدم في تمثيل الإشارات والنظم المتقطعة، والذي يقابل تحويل لابلاس المستخدم في تمثيل الإشارات المستمرة. حيث نقوم في هذا الفصل بدراسة هذا التحويل وخواصه ولا سيما خاصة جداء التلاف المتقطع، وسنرى انعكاس كل من خاصة السببية والاستقرار مع هذا التحويل. وسنختم هذا الفصل بعرض نظريتا القيمة البدائية والقيمة النهائية للإشارات السببية.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- التعرف على تحويل Z للإشارات المتقطعة.
- التعرف على تحويل فورييه Z العكسي للإشارات المتقطعة.
- خواص تحويل Z للإشارات المتقطعة.
- نظريتا القيمة البدائية و القيمة النهائية للإشارات المتقطعة.

يهدف هذا الفصل إلى التعريف بتحويل Z المستخدم في تمثيل الإشارات والنظم المتقطعة، والذي يقابل تحويل لابلاس المستخدم في تمثيل الإشارات المستمرة. حيث نقوم في هذا الفصل بدراسة هذا التحويل وخواصه ولا سيما خاصة جداء التلاف المتقطع، وسنرى انعكاس كل من خاصة السببية والاستقرار مع هذا التحويل. وسنختم هذا الفصل بعرض نظريتا القيمة البدائية والقيمة النهائية للإشارات السببية.

1. مقدمة (Introduction)

يعتبر تحويل لابلاس في النظم المستمرة ونظيره تحويل Z في النظم المتقطعة من الأدوات الرياضية الضرورية في تصميم وتحليل عمل النظم والتأكد من استقرارها. حيث يعتبر تحويل Z من الأدوات العملية الضرورية لدراسة المرشحات والنظم المتقطعة في الزمن. حيث يعتمد هذا التحويل على كون الإشارات الأسية من الشكل $x[n] = z^n$، حيث z عدد عقدي، هي توابع ذاتية للمرشحات الخطية غير المتغيرة مع الزمن، أي أنها تخرج من هذه النظم كما هي ولكن مضروبة بثابت عقدي تابع لقيمة الأساس z. يشك تحويل Z للإشارات تمثيلاً لها، أي أنه يمكننا الانتقال بالإشارة $x[n]$ من المجال الزمني ذو المتحول المستقل n إلى الإشارة في المجال العقدي $X(z)$ ذو المتحول المستقل z، وبالعكس. بكلمة أخرى يمكن تحويل Z من النظر إلى الإشارة نفسها بشكل مختلف بحيث يمكننا تحليل الإشارات والنظم المتقطعة بشكل أبسط من تحليلها مباشرةً في المجال الزمني.

سنتعرف في البداية على تعريف هذا التحويل والتحويل العكسي الموافق، ثم ننتقل إلى دراسة خواصه المختلفة والنظريات المتعلقة به مثل نظرية بارسفال ونظريتا القيمة البدائية والقيمة النهائية.

2. تعريف تحويل Z (Definition of Z–Transform)

يتمتع تحويل Z بخواص هامة تجعل منه أداة مفيدة وضرورية في دراسة الإشارات والنظم المتقطعة، حيث يلعب تحويل Z للإشارات والنظم المتقطعة زمنياً دوراً مشابهاً لدور تحويل لابلاس للإشارات والنظم المستمرة. ومن أهم هذه الخواص أنه يحول جداء التلاف لإشارتين في المجال الزمني إلى جداء لتحويلي Z لهما، الأمر الذي يجعل التعامل مع النظم الخطية المتقطعة أكثر يسراً.

نعرف تحويل Z لإشارة متقطعة ما $x[n]$ بالمجموع التالي:

$$X(z) = ZT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$$

حيث $X(z)$ هو تحويل Z للإشارة المتقطعة $x[n]$، وهو تابع للمتحول العقدي $z = \rho e^{j\theta}$ حيث ρ و θ مطال وطور المتحول z على الترتيب.

نقول إن تحويل Z ينقل الإشارة من التمثيل في المجال الزمني $x[n]$ إلى التمثيل في المستوي العقدي $X(z)$، ونقول إن هذا المستوي العقدي هو مستوي Z.

حيز التقارب (Convergence domain)

كما في حالة تحويل لابلاس، من الضروري لتعريف تحويل Z أن ندرس حيز التقارب، أي المنطقة من المستوي العقدي المكونة من النقاط z والتي يكون عندها المجموع $X(z)$ متقارباً حيث:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

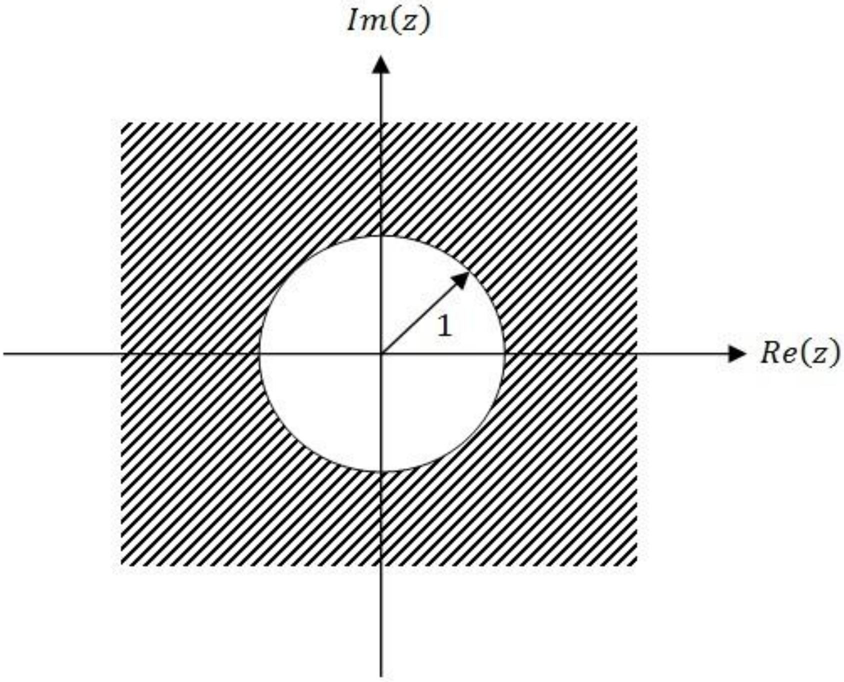
يمثل حيز التقارب جزءاً من تعريف تحويل Z، إذ لا يكتمل التعريف بدونه لأن التابع $X(z)$ نفسه قد ينتج عن تحويل Z لإشارتين مختلفتين ولكن يختلف حيز التقارب لهما. سنرى أن حيز التقارب لتحويل Z يكون قرصاً من المستوي العقدي ممركزاً حول المبدأ ومحصوراً بين دائرتين (مركزاهما في المبدأ)، أي إن هاتين الدائرتين تقابلان المحورين المعتبرين في تحويل لابلاس، وسنرى أن الدائرة الواحدية (التي نصف قطرها يساوي 1) في تحويل Z، تقابل المحور التخيلي في تحويل لابلاس، بينما يقابل داخل الدائرة الواحدية نصف المستوي على يسار المحور التخيلي، أما خارج الدائرة الواحدية فيقابل ما على يمين المحور التخيلي. كما سنرى أن مفاهيم الاستقرار والسببية تدرس في تحويل Z وبالنظر إلى حيز التقارب بكيفية مشابهة لما رأيناه في تحويل لابلاس.

مثال

لتكن الإشارة $x_1[n] = u[n]$ إشارة الخطوة الواحدية المقتطعة. بتطبيق التعريف نجد أن المجموع الذي يعرف تحويل Z لها يتقارب إلى:

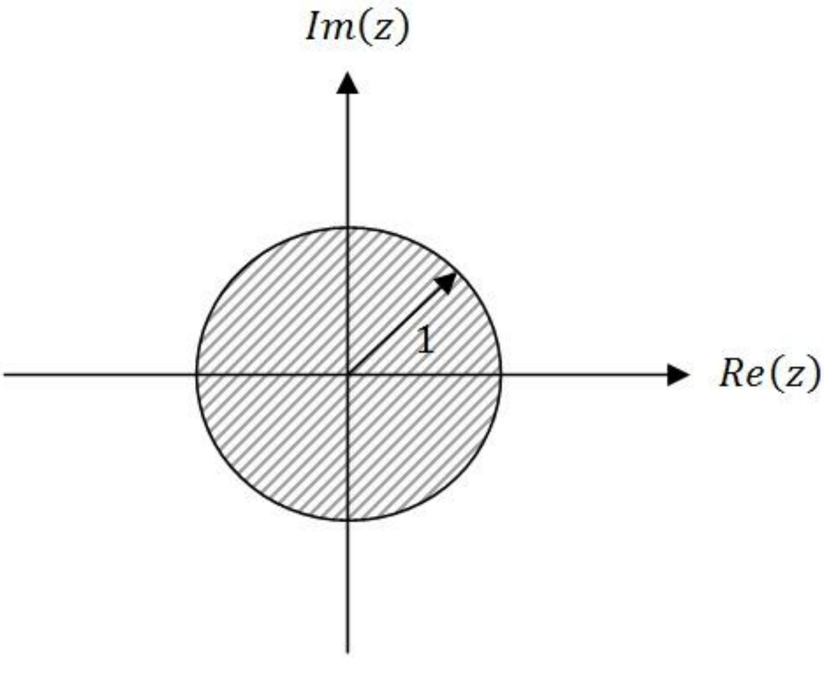
$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

ولكن حين $|z| > 1$ فقط، أي على النقاط التي تقع خارج الدائرة الواحدية كما في الشكل التالي حيث تشير المنطقة المخططة على حيز التقارب.



الشكل **Error! No text of specified style in document.**-1: تحويل Z لإشارة الخطوة الواحدية .

أما الإشارة $x_2[n] = -u(-n-1)$ فإن تحويل Z لها يتقارب إلى التابع نفسه، ولكن في حال $|z| < 1$ أي على النقاط التي تقع داخل الدائرة الواحدية كما في الشكل التالي.



الشكل **Error! No text of specified style in document.**-2: تحويل Z لإشارة الخطوة الواحدية المتأخرة.

يؤكد هذا المثال على أهمية معرفة حيز التقارب في تحويل Z كما هي الحال في تحويل لابلاس. وهكذا فإن تحويل Z يعرف بالثنائية:

$$\left[X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n}\,,D\right]$$

حيث D هو حيز التقارب للمجموع السابق.

يمكن كتابة $X(z)$ بتقسيم المجموع إلى قسمين بالشكل التالي:

$$X(z)=X_-(z)+X_+(z)$$

حيث:

$$X_+(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}x(n)z^{-n} \quad \text{و} \quad X_-(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{-n}$$

لنأخذ الجزء $X_+(z)$ الذي يقابل الجزء السببي من الإشارة $x[n]$ أي الجزء الموجود في اللحظات الموجبة. إذا كان $X_+(z)$ متقارباً في حال نقطة z من المستوي بحيث $|z|=\rho_1$ فإن $X_+(z)$ يكون متقارباً من أجل أي نقطة z خارج الدائرة التي نصف قطرها ρ_1 أي في حال $|z|\geq\rho_1$. ليكن r_1 الحد الأدنى الذي يكون $X_+(z)$ متقارباً معه في حال $|z|=r_1$، فيكون $X_+(z)$ متقارباً خارج دائرة متمركزة عند المبدأ ونصف قطرها r_1. وعندما يكون $r_1=+\infty$ فإن $X_+(z)$ غير متقارب، أما إذا كان $r_1=0$ فإن مجال تقارب $X_+(z)$ هو المستوي كله.

بمناقشة مشابهة في حالة القسم $X_-(z)$ نجد أن مجال التقارب يكون داخل دائرة نصف قطرها r_2. ومن ثم يكون مجال تقارب $X(z)$ هو تقاطع مجالي تقارب $X_+(z)$ و $X_-(z)$ أي هو قرص (أو حلقة) $D(r_1,r_2)$ محدود بدائرتين ممركزتين حول المبدأ نصفا قطريهما r_1 و r_2 إذا كانت $r_1<r_2$، أما إذا كانت $r_1>r_2$ فهذا يعني أنه لا يوجد تقاطع بين مجالي التقارب وبالتالي لا يوجد تحويل Z للإشارة.

نستنتج مما سبق: أن حيز التقارب للقسم السببي $X_+(z)$، إن كان متقارباً، يكون خارج دائرة متمركزة حول المبدأ. أما القسم عكس السببي $X_-(z)$ فيكون حيز التقارب له، إن وجد، داخل دائرة متمركزة حول المبدأ. يتضح من ذلك أن سببية الإشارة تنعكس على حيز التقارب وتكون الإشارة سببية إذا كان حيز التقارب لتحويل Z لها خارج دائرة متمركزة حول المبدأ.

أمثلة

تحويل Z للنبضة المتقطعة $\delta[n]$

إذا كانت لدينا الإشارة المتقطعة $x[n]=\delta[n]$ نجد أن تحويل Z لها هو:

$$X(z)=ZT[\delta(n)]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(n)z^{-n}=1$$

وحيز التقارب لها هو المستوي العقدي كله.

الإشارات نصف الأسية

لتكن الإشارة المتقطعة $x[n]=a^n u(n)$ حيث a عدد عقدي و $u[n]$ هي إشارة الخطوة المتقطعة. تلاحظ أن هذه الإشارة هي إشارة سببية أي معدومة في اللحظات السالبة $n<0$. لنحسب تحويل Z لها:

$$X(z)=ZT[x(n)]=\sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n}=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}$$

وذلك في حالة $|az^{-1}|<1$ أو $|z|>|a|$. حيث استخدمنا العلاقة الرياضية التي تعطي مجموع سلسلة هندسية التالية:

$$\sum_{n=a}^{b}(x)^n=\frac{x^a-x^{b+1}}{1-x}$$

أي أن حيز التقارب لهذه الإشارة هو الجزء من المستوي Z الذي يقع خارج الدائرة التي نصف قطرها $|a|$ أي $D(|a|,+\infty)$.

نلاحظ أن a هو قطب لتحويل Z للإشارة، ولما كان تحويل Z غير متقارب عند هذه النقطة فهو غير متقارب على الدائرة التي يقع عليها القطب، والمتمركزة أيضاً حول المبدأ، وهذه الدائرة هي التي تحد حيز التقارب من الداخل، ذلك أن الإشارة سببية وحيز التقارب يقع خارج دائرة ما.

في النتيجة يمكن القول: إنه إذا كانت الإشارة سببية فإن ما يحد حيز التقارب من الداخل هو الدائرة التي يقع عليها القطب ذو المطال الأكبر. أما في حالة إشارة عكس سببية، فيكون حيز التقارب هو داخل دائرة مركزها المبدأ ونصف قطرها هو مطال أصغر قطب لتحويل Z للإشارة (إن وجد أقطاب).

لتكن الإشارة $x_2[n]=-a^n u(u-1)$. نلاحظ أن هذه الإشارة عكس سببية أي أنها معدومة في اللحظات الموجبة $n\geq 0$. يعطى تحويل Z لهذه الإشارة بالعلاقة التالية:

$$X_2(z)=ZT[x_2(n)]=\sum_{n=-\infty}^{-1}-a^n z^{-n}$$

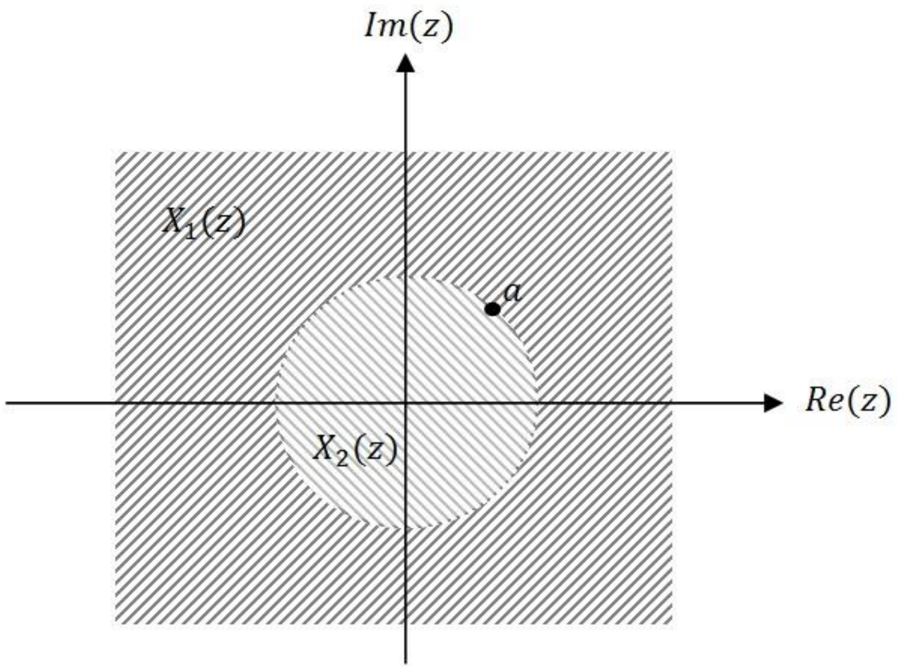
$$=-\sum_{n=1}^{+\infty}(a^{-1}z)^n=-\frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z}=\frac{z}{z-a}$$

وذلك من أجل $|z|<|a|$، أي أن حيز التقارب هو القرص $D(0,|a|)$ وهو الجزء من مستوي Z المحدود من الخارج بالدائرة التي نصف قطرها $|a|$، والتي تمر بالنقطة a وهي قطب التابع $X_2(z)$.

نلاحظ أن تحويل Z لكل من الإشارتين السابقتين يعطي التابع نفسه:

$$X_1(z)=X_2(z)=\frac{z}{z-a}$$

ولكن في حيزي تقارب مختلفين حيث يقع حيز التقارب لتحويل Z للإشارة الأولى السببية خارج الدائرة التي تمر بالقطب a، في حين أنه يقع داخل هذه الدائرة من أجل الإشارة الثانية عكس السببية، كما في الشكل التالي:



الشكل .Error! No text of specified style in document- 3: حيز تقارب تحويل Z لإشارة سببية وإشارة عكس سببية

3. تحويل Z العكسي (Inverse Z transform)

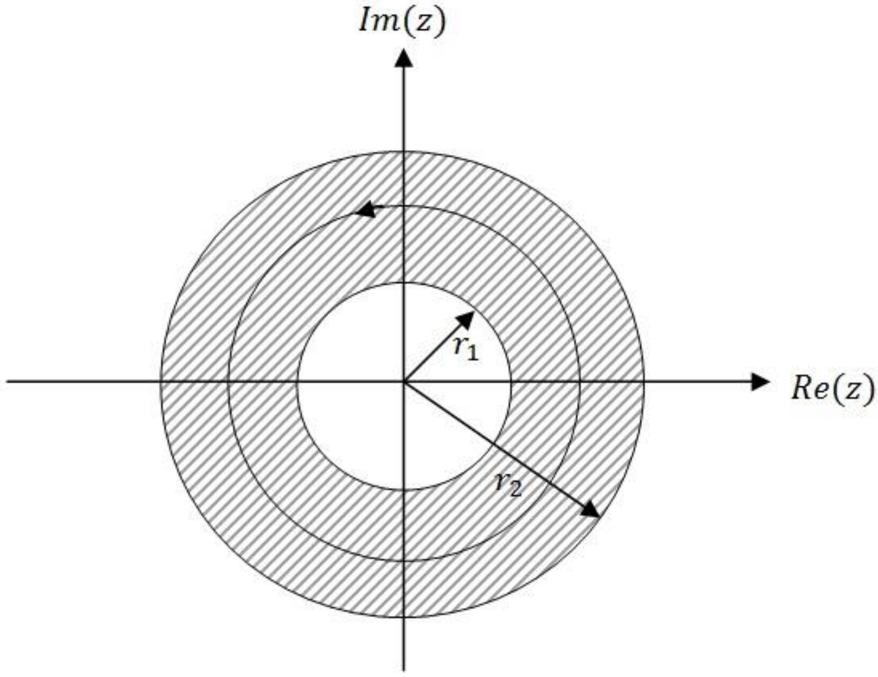
يُعرّف تحويل Z العكسي بأنه العملية المعاكسة التي تسمح بالانتقال من تحويل Z إلى الإشارة المتقطعة $x[n]$. كما يعني وجود التحويل العكسي أن تحويل Z هو تمثيل للإشارة، حيث يمكن الانتقال من المجال الزمني إلى مستوي Z وبالعكس. يمكن التعبير عن إمكانية الانتقال بالاتجاهين بالعلاقة:

$$x[n] \xleftrightarrow{ZT} \left[X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}, D\right]$$

ويعطى تحويل Z العكسي بالعلاقة التالية:

$$x[n] = ZT^{-1}(X(z), D) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C^+} X(z)z^{n-1}dz$$

يؤخذ التكامل العقدي المعتبر في العلاقة السابقة على إطار مغلق C^+ ضمن مجال التقارب، وموجه بالاتجاه الموجب (أي بعكس دوران عقارب الساعة)، كما يمكن اختيار أي منحن مغلق ضمن مجال التقارب ليكون إطاراً للتكامل، حيث يمكن أن يكون دائرة مركزها المبدأ كما في الشكل التالي:



الشكل Error! No text of specified style in document.- 4: قرص التكامل في تحويل Z العكسي

يمكن حسب هذا التكامل من أجل الإشارات السببية فقط باستخدام نظرية كوشي التي تعتمد على حساب الرواسب كما رأينا في تحويل لابلاس المعطاة بالعلاقة التالية:

$$n \geq 0, \;\; x[n] = \sum_{p_i} Res_{p_i}[X(z)z^{n-1}]$$

حيث p_i هي أقطاب التابع $X(z)$ التي تقع داخل منحني التكامل C^+ (وهي جميع أقطاب التابع $X(z)$ من أجل الإشارات السببية) و $Res_{p_i}[f(z)]$ هو راسب التابع العقدي $f(z)$ عند القطب p_i. التقارب.

أما من أجل القسم العكس سببي، أي من أجل $n < 0$، فيمكن البرهان على انها تعطى بالعلاقة التالية:

$$n < 0, \;\; x[n] = -\sum_{p_i} Res_{p_i}[X(z)z^{n-1}]$$

حيث p_i هي أقطاب التابع $X(z)$ التي تقع داخل خارج منحني التكامل C^+.

السببية والاستقرار

كما رأينا، تكون الإشارة $x[n]$ سببية عندما يكون حيز التقارب لها خارج دائرة ما، متمركزة حول المبدأ وحتى اللانهاية ضمناً.

يكون ذكر حيز التقارب بغية تعريف تحويل Z غير ضروري في حال كانت الإشارة سببية، إذ يكون خارج الدائرة التي تمر بالقطب ذي المطال الأعظم. وفي حال إعطاء التابع $X(z)$ دون تحديد حيز التقارب، فإننا سنفترض أن الإشارة سببية (يجب في هذه الحالة أن تكون الأقطاب محدودة ولا يوجد قطب في اللانهاية).

رأينا أن الإشارة $x[n]$ تكون مستقرة إذا كانت قابلة للجمع بالإطلاق أي:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty$$

وبهذا يمكن البرهان على أن الإشارة تكون مستقرة إذا كان حيز التقارب لتحويل Z لها يحوي الدائرة الواحدية. بالتالي إذا كانت الإشارة مستقرة فإنه من الممكن الحصول على قيم تحويل Z على نقاط الدائرة الواحدية من أجل $z = e^{j\omega}$. وفي هذه الحالة نحصل على قيم تحويل فورييه للإشارة عند التردد الزاوي ω، أي يمكن أن نكتب في هذه الحالة أن:

$$X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{jn\omega} = \tilde{X}(\omega)$$

وتستخدم هذه العلاقة للحصول على تحويل فورييه للإشارة المتقطعة $x[n]$ إذا كانت مستقرة فقط انطلاقاً من تحويل Z لها باستبدال المتحول Z بالقيمة $e^{j\omega}$ في تابع تحويل Z.

استقرار إشارة سببية

إذا كانت الإشارة $x[n]$ سببية فإنها تكون مستقرة عندما يكون حيز التقارب لتحويل Z لها خارج دائرة نصف قطرها أصغر من الواحد، وذلك حتى تكون الدائرة الواحدية ضمن حيز التقارب.

نتيجة: تكون الإشارة السببية مستقرة إذا كانت جميع أقطابها داخل الدائرة الواحدية تماماً، أي أن مطالات الأقطاب أصغر تماماً من الواحد.

مثال:

بفرض لدينا إشارة متقطعة بحيث يتضمن تحويل Z لها قطبين مختلفين (الأمر الذي يسمح بتعريف ثلاثة إمكانيات لحيز التقارب، بالتالي ثلاث إشارات مختلفة) ومعطى بالعلاقة التالية:

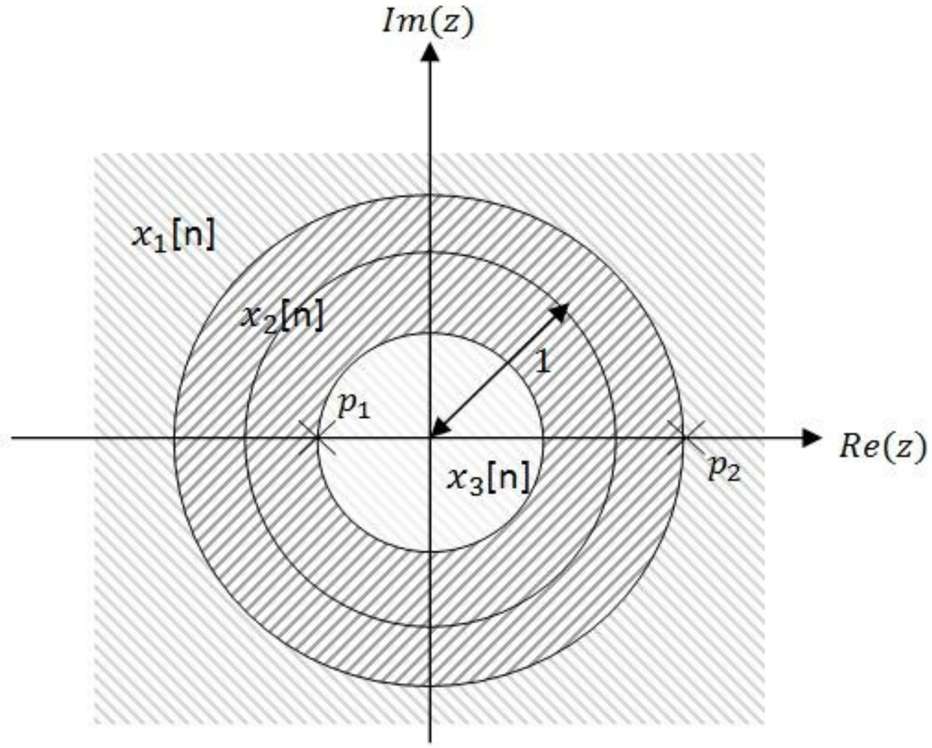
$$X(z) = \frac{z}{(z-p_1)(z-p_2)}$$

نفترض هنا أن $|p_2| > 1 > |p_1|$.

بتحليل الكسر، يمكن إعادة كتابة $X(z)$ بالشكل التالي:

$$X(z) = \frac{1}{p_1 - p_2}\left[\frac{z}{z-p_1} - \frac{z}{z-p_2}\right]$$

يوضح الشكل التالي حيز التقارب لهذا التابع:



الشكل **Error! No text of specified style in document.**- 5: حيز تقارب التابع $X(z) = \frac{1}{p_1-p_2}\left[\frac{z}{z-p_1} - \frac{z}{z-p_2}\right]$

حيث يمكن التمييز بين ثلاث حالات:

1. إذا كان حيز التقارب خارج الدائرة التي تمر بالقطب p_2 أي $D(|p_2|, +\infty)$ فإن ذلك يقابل أن الإشارة $x_1[n]$ سببية. أي أن القطبان p_1 و p_2 سببيان، لأن حيز التقارب يقع خارجهما. كما أنها إشارة غير مستقرة لأن حيز التقارب لا يحوي الدائرة الواحدية. نعبر عن الإشارة $x_1[n]$ بالعلاقة التالية:

$$x_1[n] = \frac{1}{p_1 - p_2}[p_1^n - p_2^n]u[n]$$

2. إذا كان حيز التقارب هو الحلقة التي تقع بين الدائرتين اللتين تمران بالقطبين p_1 و p_2 أي $D(|p_1|, |p_2|)$ فإن ذلك يقابل الإشارة $x_2[n]$ غير السببية (ليست سببية و ليست عكس سببية). أي أن القطب p_1 قطب سببي والقطب p_2 قطب عكس. كما أنها إشارة مستقرة لأن حيز التقارب يحوي الدائرة الواحدية. في هذه الحالة تكون الإشارة $x_2[n]$ معطاة بالعلاقة التالية:

$$x_2[n] = \frac{1}{p_1 - p_2}[p_1^n u[n] + p_2^n u[-n-1]]$$

3. إذا كان حيز التقارب هو القرص المحدود بالدائرة التي تمر بالقطب p_1 أي $D(0,|p_1|)$ فإن ذلك يقابل الإشارة $x_3[n]$ عكس السببية ونقول إن القطبين p_1 و p_2 هما قطبان عكس سببيان لأنهما يقعان خارج حيز التقارب في هذه الحالة. كما أنها إشارة غير مستقرة لأن حيز التقارب لا يحوي الدائرة الواحدية.
نعبر عن الإشارة $x_3[n]$ بالعلاقة التالية:

$$x_3[n] = -\frac{1}{p_1 - p_2}[p_1^n u[-n-1] - p_2^n u[-n-1]]$$

وهكذا نرى انه باختلاف حيز التقارب لنفس تبع التحويل، يمكن أن يعطي ثلاث إشارات مختلفة وذات خواص سببية واستقرار مختلفة أيضاً.

نستنتج من المثال السابق:

1. أنه يمكن غالباً حساب تحويل Z العكسي دون المرور بحسابات الرواسب، فإذا كان التابع $X(z)$ تابعاً كسرياً، عندها نقوم بتحليله إلى كسور بسيطة نعرف تحويل Z العكسي لها، وننظر في حيز التقارب لنحدد إذا كان كل من أقطابه سببياً أم عكس سببي، ونستنتج الإشارات الموافقة ثم نجمع هذه الإشارات بفضل خاصة الخطية التي سنراها لاحقاً ضمن خواص تحويل Z.

إن حداً من الشكل $\frac{z}{z-p_k}$ يقابل إشارة سببية من الشكل $p_k^n u(n)$ فإذا كان القطب p_k داخل حيز التقارب (أي أنه قطب سببي)، كما أن هذا الحد نفسه يقابل إشارة عكس سببية من الشكل $-p_k^n u(-n-1)$ إذا كان القطب p_k خارج حيز التقارب (قطب عكس سببي).

4. خواص تحويل Z (Properties of Z−Transform)

بما أن تحويل Z هو الحالة العامة من تحويل فورييه للإشارات المتقطعة فإن له خواص مشابهة لخواص تحويل فورييه سندرجها في ما يلي. سنعبر عن حيز التقارب بالاختصار ROC (**R**egion **O**f **C**onvergence) وسنرمز له بالرمز R_{x1} لحيز تقارب الإشارة المتقطعة $x_1[n]$.

1.4. الخطية (Linearity)

تعني خاصية الخطية أن تحويل Z لتركيب خطي من عدة إشارات يعطي التركيب الخطي نفسه من تحويلات Z لهذه الإشارات. فإذا كان $X_1(z), X_2(z)$ هما تحويلا Z للإشارتين $x_1[n], x_2[n]$ على الترتيب فإن:

$$\lambda_1 x_1[n] + \lambda_2 x_2[n] \xleftrightarrow{ZT} \lambda_1 X_1(z) + \lambda_1 X_2(z), \quad ROC\ \ R_{x1} \cap R_{x2}$$

حيث λ_1, λ_2 ثوابت عقدية، ونلاحظ أن حيز التقارب للتركيب الخطي هو تقاطع حيّزي التقارب للإشارتين $x_1[n], x_2[n]$.

فإذا كانت أقطاب $\lambda_1 X_1(z) + \lambda_1 X_2(z)$ هي جميع أقطاب $x_1[n]$ و $x_2[n]$ أي إذا لم يحصل حذف لأقطاب مع أصفار، فإن حيز التقارب للتركيب الخطي هو تقاطع حيزي التقارب. كم يمكن أن يكون حيز التقارب أكبر من التقاطع كما في المثال التالي:

مثال: لتحويلي Z للإشارتين $x_1[n] = a^2u[n]$ و $x_2[n] = a^2u[n-1]$ حيز التقارب نفسه وهو المجال خارج الدائرة التي نصف قطرها $|a|$. أما حيز التقارب لتحويل Z للفرق بين الإشارتين $a^2u[n] - a^2u[n-1] = \delta[n]$ فهو مستوي Z كله.

2.4. الانزياح الزمني (Time shifting)

تُظهر خاصية الانزياح الزمني في تحويل Z أن الإزاحة في الزمن تكافئ إزاحة طور خطية في التردد نظراً لأن المحتوى الترددي للإشارة يعتمد على شكل الإشارة فقط وهذا الشكل لا يتغير بوجود إزاحة زمنية. وينتج عن التأخير إزاحة سالبة في الطور بينما ينتج عن التسبيق إزاحة موجبة (وذلك عند الترددات الموجبة).

فإذا كان لدينا الإشارتين المتقطعة في الزمن $x[n]$ و $y[n]$ حيث: $y[n] = x[n-k]$ وحسب خاصية الانزياح الزمني لتحويل Z:

$$x[n-k] \xleftrightarrow{ZT} z^{-k}X(z) \ , \qquad ROC = R_x$$

فإن تحويل Z للإشارة $y[n]$ يعطى بالعلاقة التالية:

$$Y(z) = z^{-k}X(z)$$

ونلاحظ أن للتابعين $Y(z)$ و $X(z)$ حيز التقارب نفسه، إلا إذا جرى إدخال أقطاب عند الصفر أو عند اللانهاية (القطب عند اللانهاية يعني صفراً عند $z = 0$ وذلك حسب قيمة k موجبة أو سالبة. ويؤدي إدخال أقطاب إلى حد حيز التقارب من ناحية المبدأ أو عند اللانهاية.

3.4. عكس الزمن (Time reversing)

إذا كان لدينا الإشارة المتقطعة بالزمن $x[n]$ وكان $X(z)$ هو تحويل Z لها، وحسب خاصية عكس الزمن:

$$x[-n] \xleftrightarrow{ZT} X\left(\frac{1}{z}\right) \ , \qquad ROC = \frac{1}{R_x}$$

فإن تحويل Z للإشارة المتقطعة $y[n] = x[-n]$ يعطى بالعلاقة التالية:

$$Y(z) = X(\frac{1}{z})$$

أما حيز تقارب $Y(z)$ فهو مقلوب حيز تقارب $X(z)$، فإذا كان حيز تقارب $X(z)$ هو القرص $D(r_1, r_2)$ فإن حيز تقارب $Y(z)$ هو القرص $D\left(\frac{1}{r_2}, \frac{1}{r_1}\right)$ ، أي إذا كانت النقطة z_0 تنتمي إلى حيز تقارب $X(z)$ فإن النقطة $\frac{1}{z_0}$ تنتمي إلى حيز تقارب $Y(z)$.

4.4. المرافق العقدي (Complex conjugate)

إذا كان لدينا الإشارة المتقطعة بالزمن $x[n]$ وكان $X(z)$ هو تحويل Z لها ، وحسب خاصية المرافق العقدي لتحويل Z:

$$x^*[n] \xleftrightarrow{ZT} X^*(z^*)\ ,\qquad ROC = R_x$$

فإن تحويل Z لمرافق العقدي للإشارة $y[n] = x^*[n]$ يعطى بالعلاقة التالية:

$$Y(z) = X^*(z^*)$$

ويكون لـ $Y(z)$ و $X(z)$ حيز التقارب نفسه. فإذا كانت الإشارة $x[n]$ حقيقية فإن: $X(z) = X^*(z^*)$

5.4. الضرب بإشارة أسية (sequence Multiplication by an exponential)

إذا كان لدينا الإشارة المتقطعة بالزمن $x[n]$ وكان $X(z)$ هو تحويل Z لها ، وحسب خاصية الضرب بإشارة أسية في تحويل Z:

$$a^n x[n] \xleftrightarrow{ZT} X\left(\frac{z}{a}\right)\ ,\qquad ROC = |a|R_x$$

فإن تحويل Z للإشارة $y[n] = a^n x[n]$ يعطى بالعلاقة التالية:

$$Y(z) = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

وإذا كان حيز تقارب $X(z)$ هو القرص $D(r_1, r_2)$ فإن حيز تقارب $Y(z)$ هو القرص $D(|a|r_1, |a|r_2)$ ، أي إذا كان حيز تقارب $X(z)$ ممتداً على قيم z التي تحقق العلاقة $r_1 < |a| < r_2$ فإن حيز تقارب $Y(z)$ يكون ممتداً على قيم z التي تحقق العلاقة التالية: $|a|r_1 < |a| < |a|r_2$.

6.4. الاشتقاق في مجال Z (Differentiation in Z domain)

إذا كان لدينا الإشارة المتقطعة بالزمن $x[n]$ وكان $X(z)$ هو تحويل Z لها ، وحسب خاصية الاشتقاق في لتحويل Z:

$$nx[n] \xleftrightarrow{ZT} -z\frac{dX(z)}{dz}\ ,\qquad ROC = R_x$$

فإن تحويل Z للإشارة $y[n] = nx[n]$ يعطى بالعلاقة التالية:

$$Y(z) = -z\frac{dX(z)}{dx}$$

ويكون للتحويل $Y(z)$ حيز تقارب نفس $X(z)$ ما عدا إمكانية إدخال أقطاب عند الصفر أو عند اللانهاية.

مثال 1:

حساب تحويل Z للإشارة $y[n] = na^n u[n]$.

رأينا سابقاً أن تحويل Z للإشارة الأسية المتقطعة $a^n u[n]$ في حال $|z| > |a|$ هو:

$$a^n u[n] \overset{ZT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - az^{-1}} \qquad |z| > |a|$$

يمكن باستخدام خاصية الاشتقاق حساب $Y(z)$ في مجال Z فنجد:

$$Y(z) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} \qquad |z| > |a|$$

مثال 2:

حساب $x[n]$ بفرض لدينا تابع التحويل $X(z) = \log(1 + az^{-1})$ في حال $|z| > |a|$.

باشتقاق $X(z)$ نحصل على التابع الكسري التالي:

$$\frac{dX(z)}{dz} = -\frac{az^{-2}}{1 + az^{-1}}$$

وقد رأينا سابقاً أن تحويل Z للإشارة الأسية المتقطعة $a^n u[n]$ في حال $|z| > |a|$ هو:

$$a^n u[n] \overset{ZT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - az^{-1}} \qquad |z| > |a|$$

باستخدام خاصية الاشتقاق في مجال Z:

$$nx[n] \overset{ZT}{\longleftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}} \qquad |z| > |a|$$

وباستخدام خاصية الانزياح الزمني نجد:

$$nx[n] = a(-a)^{n-1} u[n-1]$$

ومنه نجد الإشارة المتقطعة $x[n]$ تساوي:

$$x[n] = (-1)^{n+1} \frac{a^n}{n} u[n-1] \overset{ZT}{\longleftrightarrow} \log(1 + az^{-1}) \qquad |z| > |a|$$

7.4. جداء التلاف (Convolution)

إذا كان لدينا الإشارتين المتقطعة في الزمن $x_1[n]$ و $x_2[n]$ وكان $X_1(z)$ و $X_2(z)$ هو تحويل Z لهما على الترتيب، وحسب خاصية جداء التلاف في لتحويل Z:

$$x_1[n] * x_2[n] \overset{ZT}{\longleftrightarrow} X_1(z)X_2(z), \qquad ROC \supseteq n\, R_{x1} \cap R_{x2}$$

فإذا كان:

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k]x_2[n-k]$$

فإن تحويل Z للإشارة الناتجة هو:

$$X(z) = X_1(z).X_2(z)$$

حيث يحتوي حيز تقارب $X(z)$ تقاطع حيزي التقارب للتحويلين $X_1(z)$ و $X_2(z)$.

هذه الخاصية مهمة عند التعامل مع المرشحات الخطية التي تعطى، كما نعلم بجداءات تلاف، حيث يحول تحويل Z جداء التلاف إلى جداء عادي. بالتالي فإن تحويل Z لإشارة الخرج لمرشح خطي ينتج عن ضرب تحويل Z لإشارة الدخل بتحويل Z للاستجابة النبضية وهو ما نسميه تابع التحويل للمرشح.

8.4. الترابط بين إشارتين (Correlation)

ليكن تابع الترابط $r_{x_1x_2}(k)$ بين الإشارتين المتقطعتين $x_1[n]$ و $x_2[n]$:

$$r_{x_1x_2}[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n].x_2^*[n-k]$$

يمكن كتابع العلاقة السابقة كجداء تلاف للإشارة $x_1[k]$ مع الإشارة $x_2^*[-k]$ أي:

$$r_{x_1x_2}[k] = x_1[k] * x_2^*[-k]$$

بتطبيق خاصية جداء التلاف السابقة، يمكن كتابة تحويل Z لتابع الترابط $r_{x_1x_2}(k)$ بالشكل التالي:

$$R_{x_1x_2}(z) = X_1(z).X_2^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \qquad ROC \supseteq R_{x1} \cap R_{x2}$$

حيث يحتوي حيز تقارب $R_{x_1x_2}(z)$ على تقاطع حيزي التقارب للتحويلين $X_1(z)$ و $X_2(z)$.

9.4. نظرية بارسفال (Parseval theorem)

إذا اعتبرنا قيمة تابع الترابط $r_{x_1x_2}(k)$ بين الإشارتين المتقطعتين $x_1[n]$ و $x_2[n]$ في حالة التأخير الزمني $k = 0$ سنحصل على العلاقة التالية:

$$r_{x_1x_2}[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n].x_2^*[n]$$

يمكن حساب $r_{x_1x_2}[n]$ بأخذ تحويل Z العكسي للتابع $R_{x_1x_2}(z)$:

$$r_{x_1x_2}[k] = \frac{1}{2\pi j}\int_{C^+} X_1(z).X_2^*\left(\frac{1}{z^*}\right)z^{k-1}dz$$

عندما $k = 0$، نحصل على علاقة بارسفال مكتوبة باستخدام تحويل Z:

$$r_{x_1x_2}[0] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m].x_2^*[m] = \frac{1}{2\pi j}\int_{C^+} X_1(z).X_2^*\left(\frac{1}{z^*}\right)z^{-1}dz$$

تعني علاقة بارسفال انحفاظ الجداء الداخلي بالانتقال من المجال الزمني إلى مستوي Z.

حيث يمثل المجموع المبين في العلاقة السابقة، الجداء الداخلي للإشارتين $x_1[n]$ و $x_2[n]$ في المجال الزمني، أما التكامل في المستوي العقدي فيمثل الجداء الداخلي في مستوي Z.

فإذا كان حيز تقارب $R_{x_1x_2}(z)$ يحتوي الدائرة الواحدية واخترنا هذه الدائرة لتكون إطار التكامل C^+، وبتعويض $z = e^{j\omega}$، فإن العلاقة السابقة ستصبح علاقة انحفاظ الجداء الداخلي في تحويل فورييه.

10.4. جداء شارتين (Multiplication)

إذا كانت الإشارة $x[n]$ ناتجة عن ضرب الإشارتين المتقطعتين $x_1[n]$ و $x_2[n]$:

$$x[n] = x_1[n].x_2[n]$$

فإن تحويل Z لها يعطى بالعلاقة التالية:

$$X(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C^+} X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$$

وهو ما يدعى بجداء التلاف العقدي.

فإذا كان حيز تقارب $X_1(z)$ هو القرص المعرف بالعلاقة $r_1 < |z| < R_1$، وحيز تقارب $X_2(z)$ هو القرص المعرف بالعلاقة $r_2 < |z| < R_2$، فيكون حيز تقارب $X(z)$ هو، على الأقل، القرص المعرف بالعلاقة $r_1r_2 < |z| < R_1R_2$.

وإذا كان حيز تقارب $X(z)$ يحتوي الدائرة الواحدية واخترنا هذه الدائرة لتكون إطار التكامل C^+، فإن العلاقة السابقة تصبح علاقة جداء التلاف الدوري لتحويلي فورييه:

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{X}_1(\theta).\tilde{X}_2(\omega-\theta)d\theta$$

حيث نجعل $z = e^{j\omega}$ و $v = e^{j\theta}$ في علاقة جداء التلاف العقدي.

11.4. الجمع (Summation)

نعبر عن الإشارة $y[n]$ الناتجة عن تجميع قيم الإشارة $x[n]$ من الـ $-\infty$ وحتى اللحظة الحالية n بالعلاقة التالية:

$$y[n] = \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{n} x[k]$$

نسمي النظام الذي يعطي على خرجه الإشارة $y[n]$ بدلالة إشارة الدخل $x[n]$ مجمعّاً، وهو مايقابل نظاماً مكاملاً في الحالة المستمرة.

بحساب تحويل Z لإشارة خرج المجمّع اعتماداً على الخواص المذكورة سابقاً نجد أن:

$$Y(z) = ZT\left[\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{n} x[k]\right] = \frac{1}{1-\mathrm{z}^{-1}}\mathrm{X(z)}$$

نستنتج مما سبق أن تابع التحويل لنظام المجمّع يعطى بالعلاقة التالية:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-\mathrm{z}^{-1}}$$

وهو كما رأينا سابقاً تحويل Z لإشارة الخطوة المتقطعة، أي أن الاستجابة النبضية لنظام المجمّع هي إشارة الخطوة المتقطعة $u[n]$.

كما نستنتج أنه باستخدام تحويل Z إيجاد مجموع قيم إشارة متقطعة $x[n]$، إذا كان هذا المجموع موجوداً، حيث يعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = X(z)|_{z=1}$$

5. نظريتا القيمة البدائية والقيمة النهائية (value theorems Initial and Final)

تنص نظرية القيمة البدائية لتحويل Z على أنه:

إذا كانت الإشارة المتقطعة $x[n]$ سببية (أي $x[n]=0$ في حال $n<0$) فإن القيمة الابتدائية للإشارة $x[0]$ تساوي نهاية تحويل Z لها عندما تنتهي z إلى اللانهاية أي:

$$x[0] = \lim_{z\to\infty}[X(z)]$$

مثال:

لإيجاد القيمة البدائية للإشارة المتقطعة السببية $x[n]=a^n u[n]$. نوجد أولاً تحويل Z للإشارة وحيز تقاربه باستخدام خواص التحويل الواردة سابقاً.

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a|$$

بتطبيق نظرية القيمة البدائية نوجد $x[0]$ للإشارة $x[n]$:

$$x[0] = \lim_{z\to\infty}[X(z)] = \lim_{z\to\infty}[\frac{1}{1-az^{-1}}] = a^0 = 1$$

تنص نظرية القيمة النهائية لتحويل Z على أنه:

إذا كان للإشارة المتقطعة السببية $x[n]$ نهاية محددة عندما تنتهي n إلى اللانهاية فإن قيمة هذه النهاية تعطى بالعلاقة التالية:

$$x[+\infty] = \lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z)$$

وتكون هذه النهاية موجودة فقط إذا كان حيز تقارب $(1-z^{-1})X(z)$ يحتوي الدائرة الواحدية.

مثال:

لإيجاد القيمة النهائية للإشارة المتقطعة السببية $x[n]=a^n u[n]$. نوجد أولاً تحويل Z للإشارة وحيز تقاربه باستخدام خواص التحويل الواردة سابقاً وبفرض $|a|<1$.

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a|$$

بتطبيق نظرية القيمة النهائية نوجد $x[+\infty]$ للإشارة $x[n]$:

$$x[+\infty] = \lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}[(1-z^{-1})X(z)] = \lim_{z\to 1}[(1-z^{-1})\frac{1}{1-az^{-1}}] = 0$$

6. تحويلات Z لبعض الإشارات الأساسية (ZT for basic signals)

نجد فيما يلي تحويلات Z لبعض الإشارات الأساسية ويمكن التحقق منها بسهولة اعتماداً على خواص تحويل Z التي جرى شرحها سابقاً.

حيز التقارب ROC	$\mathbf{X}[\boldsymbol{z}]$	$\mathbf{x}[\boldsymbol{n}]$
مستوي Z كله	1	$\delta[n]$
$1<\|z\|$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\mathrm{u}[n]$
$1>\|z\|$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$-\mathrm{u}[-n-1]$
$\|a\|<\|z\|$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$a^n u[n]$
$\|a\|<\|z\|$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$na^n u[n]$
$\|a\|>\|z\|$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$-na^n \mathrm{u}[-n-1]$
$\|a\|>\|z\|$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$-au[-n-1]$
$1<\|z\|$	$\dfrac{1-z^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\cos(n\omega_0).u[n]$
$1<\|z\|$	$\dfrac{z^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\sin(n\omega_0).u[n]$
$\|a\|<\|z\|$	$\dfrac{1-az^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$a^n\cos(n\omega_0).u[n]$
$\|a\|<\|z\|$	$\dfrac{az^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$a^n\sin(n\omega_0).u[n]$
$0<\|z\|$	$\dfrac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\begin{cases} a^n, 0\le n\le \mathrm{N}-1 \\ 0, \quad \text{therwise}\end{cases}$

أسئلة وتمارين الفصل التاسع
تحويل Z

أسئلة عامة

1– ما هو تعريف تحويل Z $X(z)$ للإشارة المتقطعة $x[n]$ وتحويل Z العكسي الموافق؟

تغذية راجعة: راجع فقرة "تعريف تحويل Z " وفقرة "تحويل Z العكسي".

2– ما هو شرط استقرار إشارة $x[n]$ في مجال تحويل Z؟

تغذية راجعة: راجع فقرة وفقرة "تحويل Z العكسي".

3– ما هو الشرط على أقطاب تحويل Z للإشارة $x[n]$ حتى تكون سببية ومستقرة في آن واحد؟

تغذية راجعة: راجع فقرة وفقرة "تحويل Z العكسي".

4– ما هو الفرق بين القطب السببي والقطب العكس سببي لتحويل Z؟

تغذية راجعة: راجع المثال الوارد في الفقرة "تحويل Z العكسي".

5– ما العلاقة بين تحوي فورييه وتحويل Z لإشارة متقطعة مستقرة؟

تغذية راجعة: راجع فقرة " السببية والاستقرار" ضمن فقرة "تحويل Z العكسي".

أسئلة خيارات متعددة

1- إذا كنت الإشارة السببيّة المعطاة بتابع تحويل Z لها بالشكل $X(z)=\frac{1}{1-2z^{-1}}$، فحيز تقاربها هو:

أ- كامل المستوي Z.

ب- المجال $]0,2[$.

ج- المجال $[2,+\infty[$.

د- المجال $]2,+\infty[$.

تغذية راجعة: راجع فقرة "حيز التقارب" ضمن فقرة "تعريف تحويل Z".

2- إذا كنت الإشارة المستقرة المعطاة بتابع تحويل Z لها بالشكل: $X(z)=\frac{1}{(1-0.5z^{-1})(1-2z^{-1})}$، فحيز تقاربها هو:

أ- كامل المستوي Z.

ب- المجال $]0,1[$.

ج- المجال $]1,2[$.

د- المجال $]2,+\infty[$.

تغذية راجعة: راجع فقرة "حيز التقارب" ضمن فقرة "تعريف تحويل Z".

3- ما هو تحويل Z للإشارة المتقطعة $x[n]=u[n]$؟

أ- $X(z)=1/(1-z)$

ب- $X(z)=1/(1-z^{-1})$

ج- $X(z)=1/z^{-1}$

د- $X(z)=1/(1+z^{-1})$

تغذية راجعة: راجع فقرة "الجمع" ضمن فقرة "خواص تحويل Z".

4- إذا كان $X(z)$ تحويل Z للإشارة المتقطعة $x[n]$، فما هو تحويل Z للإشارة التالية: $y[n]=x[n-1]$؟

أ- $Y[z]=z^{-1}X(z)$

ب- $Y[z]=X(z-1)$

ج- ج- $Y[z]=X(z^{-1})$

د- د- $Y[z]=zX(z^{-1})$

تغذية راجعة: راجع خاصة "الانزياح الزمني" ضمن فقرة "خواص تحويل Z".

5- إذا كان $X(z)$ تحويل Z للإشارة المتقطعة $x[n]$، فما هو تحويل Z للإشارة التالية: $y[n] = a^n x[n]$؟

أ- $Y[z] = X(z - a)$

ب- $Y[z] = X\left(\frac{z}{a}\right)$

ج- $Y[z] = -a\frac{dX(z)}{dz}$

د- $Y[z] = X(az^{-1})$

الجواب: ب. تغذية راجعة: راجع خاصة "الضرب بإشارة أسية" ضمن فقرة "خواص تحويل Z".

6- إذا كان $X(z)$ تحويل Z للإشارة المتقطعة $x[n]$، فما هو تحويل Z للإشارة التالية: $y[n] = x_1[n] * x_2^*[-n]$؟

أ- $Y[z] = X_1(z).X_2^*(z^*)$

ب- $Y[z] = X_1(z).X_2^*(z)$

ج- $Y[z] = X_1(z).X_2^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$ ج-

د- $Y[z] = X_1(z).X_2^*(-z)$ د-

تغذية راجعة: راجع فقرة "الترابط بين إشارتين الترابط بين إشارتين" ضمن فقرة "خواص تحويل Z".

تمارين

1- احسب تحويل Z للإشارة المتقطعة $x[n]$ التالية مع تحديد حيز التقارب:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

تغذية راجعة: راجع فقرة "تعريف تحويل Z".

2- احسب تحويل Z للإشارة المتقطعة $x[n]$ التالية مع تحديد حيز التقارب:

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-3]$$

تغذية راجعة: راجع فقرة "تعريف تحويل Z"

3- باستخدام خواص تحويل Z، احسب تحويل Z للإشارة المتقطعة $y[n]$ التالية مع تحديد حيز التقارب:

$$y[n] = x[n] - x[n-2]$$

من أجل $x[n] = u[n]$

تغذية راجعة: راجع خاصتي الانزياح الزمني والخطية ضمن فقرة "خوص تحويل Z"

4− باستخدام تحويل Z التالي:

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{ZT} \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad , \qquad ROC =]|a|, +\infty[$$

احسب تحويل Z العكسي للتابع

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 2z^{-1})}, \qquad |z| > 2$$

تغذية راجعة: راجع المثال الوارد ضمن فقرة "تحويل Z العكسي"

أجابات – حلول الأسئلة العامة السابقة

السؤال الأول:

الحل: يعرف تحويل فورييه لإشارة متقطعة بالعلاقة

$$X(z) = ZT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

ويكون تحويل Z العكسي الموافق

$$x[n] = ZT^{-1}(X(z), D) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C^+} X(z)z^{n-1}dz$$

السؤال الثاني:

الحل: تكون الإشارة $x[n]$ مستقرة إذا كان حيز تقارب تحويل Z لها يحوي الدائرة الواحدية.

السؤال الثالث:

الحل: تكون الإشارة $x[n]$ سببية ومستقرة معاً إذا كان جميع أقطاب $X(z)$ تقع داخل الدائرة الواحدية.

السؤال الرابع:

الحل: هو قطب يقع بين مبدأ المستوي Z والدائرة التي تحد حيز تقرب من الداخل، أما القطب العكس سببي فهو قطب يقع خارج حيز التقارب باتجاه اللانهاية.

السؤال الخامس:

الحل: عندما تكون الإشارة $x[n]$ مستقرة فإننا نحصل على تحويل فورييه لها بتعويض $z = e^{2\pi j\nu}$ أي:

$$\tilde{x}(\nu) = X(z)|_{z=e^{2\pi j\nu}}$$

إجابات – حلول أسئلة الخيارات المتعددة السابقة

أسئلة خيارات متعددة	الإجابة الصحيحة
1	د
2	ج
3	ب
4	أ
5	ب
6	ج

إجابات – حلول التمارين السابقة

السؤال الأول:

نحسب تحويل Z للإشارة انطلاقاً من تعريف تحويل Z:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}$$

ويكون هذا المجموع معرفاً من أجل جميع نقاط المستوي Z ما عدا الصفر، أي أن حيز التقارب هو $D =]0, +\infty[$ لأن $z = 0$ هو القطب الوحيد للتابع والإشارة سببية.

ملاحظة: قد يبدو للوهلة الأولى أن $z = 1$ هو قطب لتابع التحويل إلا أن تعويض $z = 1$ في علاقة التعريف تعطينا القيمة $X(1) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]$ وهي قيمة منتهية.

السؤال الثاني:

نحسب تحويل Z للإشارة انطلاقاً من تعريف تحويل Z:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \frac{z^{-3}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

من أجل $|z| > \frac{1}{2}$، أي أن حيز التقارب هو $D =]\frac{1}{2}, +\infty[$.

السؤال الثالث:

نعلم أن تحويل Z لإشارة الخطوة الواحدية:

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \qquad |z| > 1$$

باستخدام خاصية الانزياح الزمني نجد:

$$x[n-2] \xleftrightarrow{ZT} z^{-2}X(z) = \frac{z^{-2}}{1-z^{-1}} \quad , \qquad ROC = R_x =]1, +\infty[$$

$$X(z) = X(z) - z^{-2}X(z) = \frac{1-z^{-2}}{1-z^{-1}} = \frac{(1+z^{-1})(1-z^{-1})}{1-z^{-1}} = 1 + z^{-1}$$

ويكون حيز التقارب هو $D =]0, +\infty[$ لأنه تم حذف القطب $z = 1$ بالتركيب الخطي للإشارتين.

السؤال الرابع:

نحلل تابع التحويل الكسري $X(z)$ إلى مجموع كسرين بسيطين بالشكل التالي:

$$X(z) = \frac{a}{1-z^{-1}} + \frac{b}{1-2z^{-1}}$$

مع:

$$a = (1-z^{-1})X(z)|_{z=1} = \frac{1-\frac{1}{3}}{1-2} = -\frac{2}{3}$$

$$b = (1-2z^{-1})X(z)|_{z=2} = \frac{1-\frac{1}{3}\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{5}{3}$$

وبالتالي نجد بإجراء تحويل Z العكسي للكسرين البسيطين انطلاقاً من التحويل المعطى علماً أن كلا القطبان سببيان:

$$x[n] = -\frac{2}{3}u[n] + \frac{5}{3}2^n u[n] = \frac{1}{3}(5(2^n) - 2)u[n]$$

دراسة النظم المتقطعة

الكلمات المفتاحية:

تحويل z أحادي الجانب، تحويل النظم المستمرة إلى نظم متقطعة، تكافؤ الاستجابة النبضية، تقريب الاشتقاق، التحويل ثنائي الخطية.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على كيفية دراسة النظم الخطية المتقطعة باستخدام المفاهيم والأدوات التي عرضناها في الفصول السابقة بما فيها تحويل فورييه للإشارات المتقطعة وتحويل Z والعلاقة بين هذين التحويلين في حالة النظم المستقرة. ونهتم على وجه الخصوص بالنظم الخطية السببية لكونها تشكل النظم العملية المستخدمة بشكل فعلي، والتي نستخدم فيها تحويل Z أحادي الجانب وأيضاً نتعرف على طرق تحويل النظم المستمرة إلى متقطعة باستخدام تقريبات عملية مختلفة وتشمل تكافؤ الاستجابة النبضية وتقريب الاشتقاق وتحويل ثنائي الخطية.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

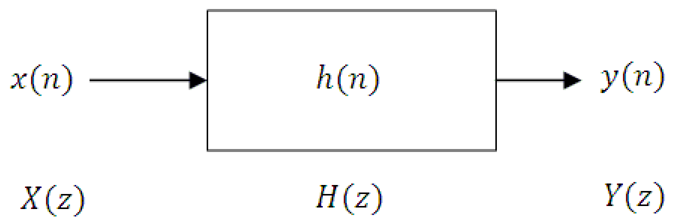
- العلاقة بين تحويل Z والاستجابة الترددية للمرشحات الخطية المتقطعة.
- تحويل Z أحادي الجانب واختلافه عن تحويل Z.
- الطرق لعملية المستخدمة للتحويل من النظم الخطية المستمرة إلى النظم الخطية المتقطعة.

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على كيفية دراسة النظم الخطية المتقطعة باستخدام المفاهيم والأدوات التي عرضناها في الفصول السابقة بما فيها تحويل فورييه للإشارات المتقطعة وتحويل Z والعلاقة بين هذين التحويلين في حالة النظم المستقرة. ونهتم على وجه الخصوص بالنظم الخطية السببية لكونها تشكل النظم العملية المستخدمة بشكل فعلي، والتي نستخدم فيها تحويل Z أحادي الجانب وأيضاً نتعرف على طرق تحويل النظم المستمرة إلى متقطعة باستخدام تقريبات عملية مختلفة وتشمل تكافؤ الاستجابة النبضية وتقريب الاشتقاق وتحويل ثنائي الخطية.

1. المرشحات الخطية المتقطعة (Discrete linear filters)

إن المرشح الخطي المتقطع هو نظام خطي غير متغير مع الزمن، يتم تعريفه بشكل كامل بمعرفة استجابته النبضية $h[n]$. وتكون إشارة الخرج $y[n]$ عبارة عن جداء تلاف متقطع بين استجابته النبضية وإشارة الدخل $x[n]$.

$$y[n] = h[n] * x[n]$$



الشكل **1-Error! No text of specified style in document.**: مرشح خطي متقطع.

وقد رينا في الفصل السابق أن بإمكاننا دراسة المرشحات الخطية في مجال تحويل Z حيث نعبر عن تحويل Z لإشارة الخرج $Y(z)$ كجداء عادي بين تحويل Z للاستجابة النبضية $H(z)$ وتحويل Z لإشارة الدخل $Z(z)$، وذلك بفضل خاصة تحويل Z لجداء التلاف المتقطع.

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

ويمكننا الانتقال بين المستوي الزمني ومستوى Z باستخدام تحويل Z وتحويل Z العكسي.

كما يمكن أيضاً دراسة سببية المرشح واستقراره في مستوى Z انطلاقاً من معرفة حيز التقارب وتوضع الأقطاب لتابع الاستجابة $H(z)$.

وقد رينا أن المرشح يكون سببياً إذا كان حيز تقارب تابع التحويل $H(z)$ هو خارج دائرة متمركزة عند الصفر. كما رأينا بأن المرشح يكون مستقراً إذا كان حيز تقارب تابع التحويل $H(z)$ يحوي الدائرة الواحدية. وفي حال كان المرشح سببياً ومستقراً في آن واحد فإن جميع أقطاب تابع التحويل تكون داخل الدائرة الواحدية.

ويتم توصيف المرشحات الرقمية السببيّة في غالب الأحيان بواسطة معادلة فروق بأمثال ثابتة تربط بين الدخل والخرج، وتكون من الشكل العام التالي:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-k]$$

حيث أن $a_0 \neq 0$.

ونستخدم معادلة الفروق لتحقيق المرشح بشكل عملي، حيث تمكننا هذه المعادلة من حساب الخرج في كل اللحظة الحالية $y[n]$ بدلالة قيمة عينة إشارة الدخل الحالية و M عينة إشارة دخل سابقة، بالإضافة إلى N عينة خرج سابقة والتي قد تم حسابها وتخزينها سابقاً باستخدام المعادلة. يتم ذلك باستخدام المعادلة التالية:

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k y[n-k] + \sum_{m=0}^{N} \beta_m x[n-k]$$

حيث $\alpha_k = -\frac{a_k}{a_0}$ و $\beta_m = \frac{b_m}{a_0}$.

وبأخذ تحويل Z لطرفي معادلة الفروق، نجد تابع التحويل للمرشح والمعطى بالتابع الكسري التالي:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}}$$

ومن خلال هذه المعادلة يمكن توصيف المرشح الخطي بإعطاء معاملات كثيري الحدود في البسط والمقام، ويتم دراسة هذا المرشح انطلاقاً من معرفة أصفار تابع الاستجابة وأقطابه. علماً أن أصفار تابع الاستجابة هي قيم z التي تعدم تابع الاستجابة، وأقطابه هي قيم z التي تجعل قيم التابع يسعى للانهاية.

2. تحويل Z أحادي الجانب (Unilateral Z−Transform)

نعرف تحويل Z أحادي الجانب والذي نرمز له بالرمز $X_+(z)$ بالعلاقة التالية:

$$X_+(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

ويختلف تحويل Z أحادي الجانب عن تحويل Z ثنائي الجانب الذي رأيناه في الفصل السابق بأن المجموع يقتصر فقط على اللحظات الموجبة فقط. ومن أجل الإشارات السببية (أي الإشارات التي تكون معدومة في اللحظات السالبة) يكون تحويل Z أحادي الجانب مساوياً لتحويل Z ثنائي الجانب. ولذلك يكون حيز تقارب تحويل Z أحادي الجانب $X_+(z)$ هو دائماً خارج دائرة متمركزة حول الصفر في المستوي العقدي. ولذلك لا يتم عادةً ذكر حيز التقارب لتحويل Z أحادي الجانب بشكل صريح.

يستخدم تحويل Z أحادي الجانب مع الإشارات والنظم السببية، وخصوصاً في دراسة النظم المتقطعة المعطاة بمعادلة فروق مع شروط ابتدائية غير معدومة. ولهذا تأخذ نظريتا القيمة البدائية والقيمة النهائية مكانهما الطبيعي مع هذا التحويل في دراسة هذه النظم.

وكذلك فإن معظم خواص تحويل Z تبقى نفسها في حالة تحويل Z أحادي الجانب، إلا أن هناك فرقاً أساسياً يظهر بين التحويلين من أجل خاصة الانزياح الزمني. وهنا نميز بين حالة التأخير الزمني أي الانزياح نحو اليمين، وحالة التسبيق الزمني أي الانزياح نحو اليسار.

حالة التأخير

يؤدي الانزياح نحو اليمين للإشارة $x[n]$ إذا لم تكن سببية إلى دخول عينات من القسم السالب للإشارة إلى القسم الموجب وبالتالي سوف تدخل في تعريف تحويل Z أحادي الجانب.

فإذا كان لدينا

$$x[n] \xrightarrow{ZT_+} X_+(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

فإنه من أجل أي قيمة موجبة للانزياح k، نجد:

$$x[n-k] \xrightarrow{ZT_+} z^{-k}\left[X_+(z) + \sum_{n=1}^{k} x[-n]z^{+n}\right]$$

أما إذا كانت الإشارة سببية فإننا نحصل على نفس خاصة تحويل Z ثنائي الجانب للانزياح الزمني، أي:

$$x[n-k] \xrightarrow{ZT_+} z^{-k}X_+(z)$$

حالة التسبيق الزمني

يؤدي الانزياح نحو اليسار للإشارة $x[n]$ (سببية أو غير سببية) إلى خروج عينات من القسم الموجب للإشارة إلى القسم السالب وبالتالي سوف تخرج من تعريف تحويل Z أحادي الجانب.

فإذا كان لدينا التحويل

$$x[n] \xrightarrow{ZT_+} X_+(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

فإنه من أجل أي قيمة موجبة للانزياح k، نجد:

$$x[n+k] \xrightarrow{ZT_+} z^{k}\left[X_+(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x[n]z^{-n}\right]$$

مثال: لنعتبر النظام المعطى بمعادلة الفروق التالية:

$$y[n] = ay[n-1] + x[n]$$

مع $|a| < 1$، وشرط ابتدائي $y[-1] = 1$. ما هي الاستجابة الخطوية لهذا المرشح؟

بأخذ تحويل Z أحادي الجانب لطرفي معادلة الفروق نجد:

$$Y_+(z) = a[z^{-1}(Y_+(z) + y[-1]z)] + X_+(z)$$

ومنه نجد:

$$Y_+(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}ay[-1] + \frac{1}{1-az^{-1}}X_+(z)$$

ويكون الخرج عبارة عن مجموع حدين: الأول ناتج عن القيمة الابتدائية للخرج ويسمى الاستجابة الحرة (Free response) للمرشح، والثاني هو نتيجة تطبيق إشارة الدخل ويسمى الاستجابة القسرية (Forced response).

ومن أجل إشارة الخطوة الواحدية يكون $X_+(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$. بالتعويض نجد:

$$Y_+(z) = \frac{a}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-az^{-1}}\frac{1}{1-z^{-1}}$$

وبتفريق الحد الثاني إلى كسرين بسيطين نجد:

$$Y_+(z) = \frac{a}{1-az^{-1}} + \frac{-a}{1-a} \times \frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-a} \times \frac{1}{1-z^{-1}}$$

وبأخذ تحويل Z العكسي للطرفين نجد

$$y[n] = a^{n+1}u[n] + \frac{-a}{1-a}a^n u[n] + \frac{1}{1-a}u[n] = \frac{1-a^{n+2}}{1-a}u[n]$$

3. الاستجابة الترددية للمرشحات الخطية المتقطعة (Frequency response of discrete linear filters)

نعلم أن الاستجابة الترددية لمرشح متقطع معطى بتابع استجابته النبضية $h[n]$، هي عبارة عن تحويل فورييه لهذه الاستجابة $\tilde{h}(\nu)$ المعطاة بالعلاقة:

$$\tilde{h}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-2\pi jn\nu}$$

كما يمكن حساب الاستجابة الترددية انطلاقاً من معادلة الفروق بأخذ تحويل فورييه لطرفي المعادلة ومن ثم استنتاج الاستجابة الترددية باستخدام العلاقة:

$$\tilde{h}(\nu) = \frac{\tilde{y}(\nu)}{\tilde{x}(\nu)}$$

وأيضاً في حال كان المرشح مستقراً، أي أن حيز تقارب تحويل Z استجابة النبضية يحوي الدائرة الواحدية، فيمكن استنتاج الاستجابة الترددية $\tilde{h}(\nu)$ انطلاقاً من تابع تحويل Z للاستجابة النبضية $H(z)$ باستخدام العلاقة التالية:

$$\tilde{h}(\nu) = H(z)|_{z=e^{2\pi j\nu}}$$

4. تحويل النظم المستمرة إلى نظم متقطعة (Converting continuous systems to discrete systems)

تأتي أهمية النظم المتقطعة من كونها قابلة للتنفيذ باستخدام تقنيات المعالجة الرقمية للإشارة والتي تتميز بالعديد من الفوائد مقارنة بالنظم التماثلية المستمرة مثل درجة المكاملة العالية وعدم تأثرها بعوامل الضجيج الحراري ومرونتها من حيث قابلية تخزين الإشارة وسهولة التطوير والتعديل وغيرها من الفوائد العملية. لذلك نرغب أحياناً بتحويل نظام مستمر إلى نظام متقطع. حيث نقوم بتحويل الإشارة المستمرة إلى إشارة متقطعة ومن ثم معالجة الإشارة المتقطعة باستخدام نظام متقطع ومن ثم تحويل الإشارة المتقطعة الناتجة إلى إشارة مستمرة.

وتأتي هن مسألة تحويل النظام المستمر إلى متقطع لكي يقوم النظام المتقطع بنفس الدور الذي كان يؤديه النظام المستمر. فإذا كان النظام المستمر معطى بتابع استجابته النبضية المستمرة $h_c(t)$، فما هي الاستجابة النبضية المتقطعة $h_d[n]$؟ وإذا كان النظام المستمر معطى عن طريق معادلة تفاضلية خطية، فما هي معادلة الفروق للنظام المتقطع المكافئ؟ في الحقيقية هناك عدة طرق لذلك، سوف نستعرضها بشكل مختصر في الفقرات القادمة.

1.4. تكافؤ الاستجابة النبضية (Impulse response invariance)

إذا كانت $h_c(t)$ الاستجابة النبضية للنظام المستمر و $h_d[n]$ الاستجابة النبضية للنظام المتقطع، فإن طريقة تكافؤ الاستجابة النبضية تربط بين الاستجابتين باعتبار أن الاستجابة النبضية للنظام المتقطع هي ببساطة تقطيع الاستجابة النبضية للنظام المستمر بنفس تردد تقطيع إشارة الدخل في النظام المتقطع. فإذا كان T_s هو دور التقطيع، يكون:

$$h_d[n] = T_s . h_c(nT_s)$$

ونقول عن النظامين أنهما متكافئين إذا كان لهما نفس الاستجابة الترددية. وكما نعلم فإن تقطيع الإشارة المستمرة في المجال الزمني يؤدي إلى دورية في طيف الإشارة في المجال الترددي بدور يساوي تردد التقطيع $F_s = 1/T_s$.

فإذا كان $h_c(t)$ ذو امتداد ترددي محدود، وكان دور التقطيع T_s يحترم معيار شانون في التقطيع أي أن تردد التقطيع F_s أكبر من ضعفي أكبر مركبة ترددية في طيف الاستجابة النبضية للنظام المستمر $\tilde{h}_c(f)$ فإننا عملية تقطيع الاستجابة النبضية المستمرة لن تعاني من مشكلة التداخل الترددي وسيكون طيف الاستجابة النبضية المتقطعة منطبقاً مع طيف الاستجابة النبضية المستمرة مع تقييس للتردد كما رأينا في فصل تحويل فورييه للإشارات المتقطعة، أي:

$$\tilde{h}_d(v) = \tilde{h}_c(f)\big|_{f=vF_s} \quad , \qquad |v| < \frac{1}{2}$$

أما إذا كانت الاستجابة النبضية للمرشح المستمر ذات امتداد ترددي غير محدود أو أن تردد التقطيع لا يحترم معيار شانون في التقطيع فلن يكون هناك تكافؤ في الاستجابة الترددية نتيجة لوجود التداخل الترددي. في الواقع فإن معظم النظم المستمرة العملية لا تكون ذات استجابة ترددية محدودة وإنما يمكن إهمال المركبات الترددية

خارج مجال محدود. ومن الجدير بالذكر بأن طريقة تكافؤ الاستجابة النبضية تحافظ على خواص السببية والاستقرار كما سنرى من خلال المثل التالي:

مثال: ليكن لدينا المرشح المستمر ذو الاستجابة النبضية التالية:

$$h_c(t) = a_1 e^{p_1 t} u(t)$$

تكون الاستجابة النبضية للمرشح المتقطع بطريقة تكافؤ الاستجابة النبضية هي:

$$h_d[n] = T_s . h_c(nT_s) = T_s a_1 e^{p_1 n T_s} u[n]$$

ويكون تحويل لابلاس للاستجابة النبضية المستمرة هي:

$$H(p) = \frac{a_1}{p - p_1}$$

أما تحويل Z للاستجابة النبضية المتقطعة للنظام المتقطع هي:

$$H(z) = T_s \frac{a_1}{1 - e^{p_1 T_s} z^{-1}}$$

وبالتالي فإن القطب p_1 في تحوي لابلاس للاستجابة المستمرة يقابله القطب $e^{p_1 T_s}$ في تحويل Z للاستجابة المتقطعة. فإذا كان النظام المستمر مستقراً وأقطاب تابع تحويل لابلاس له على يسار المحور التخيلي، فإن أقطاب تحويل Z ستكون داخل الدائرة الواحدية وسيكون النظام المتقطع مستقراً أيضاً.

ولكن من ناحية الاستجابة الترددية، فإننا نلاحظ بأن طيف النظام المستمر غير محدود، إذ أنه لا ينعدم خرج مجال محدود كما هو واضح من طيف الاستجابة المستمرة المعطى بالعلاقة التالية:

$$\tilde{h}_c(f) = \frac{a_1}{j2\pi f - p_1}$$

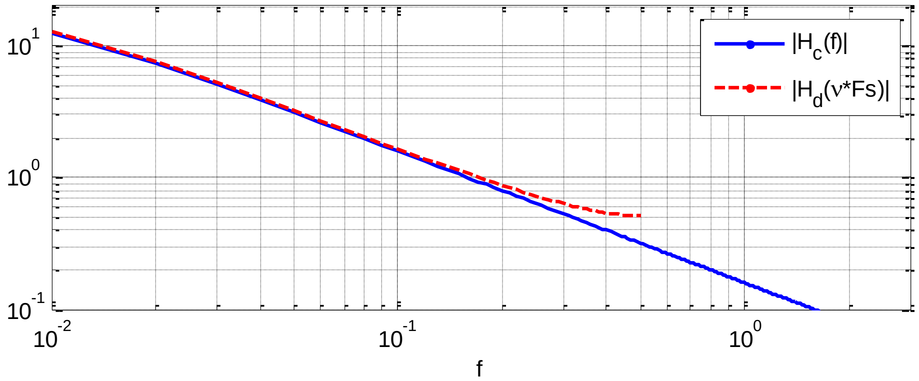
ويكون طيف الاستجابة المتقطعة معطى بالعلاقة:

$$\tilde{h}_d(v) = T_s \frac{a_1}{1 - e^{-(j2\pi v - p_1)T_s}}$$

حيث قمنا بتعويض $p = j2\pi f$ في تحويل لابلاس للنظام المستمر، و $z = e^{j2\pi f T_s}$ في تحويل Z للنظام المتقطع. أي أن التحويلين يرتبطان بالعلاقة:

$$z = e^{pT_s}$$

وبالتالي فإن نقطة تتحرك على المحور التخيلي في مستوي لابلاس تقابل نقطة تدور على الدائرة الواحدية في مستوي Z بشكل متكرر بمعدل دورة كلما تغير التردد بمقدار تردد التقطيع F_s. يوضح الشكل التالي الاستجابة الترددية للمرشح المستمر والمرشح المتقطع الناتج بطريقة تكافؤ الاستجابة النبضية من أجل $p_1 = 0.05$ و $T_s = 1$ و $a_1 = 1$.



الشكل **Error! No text of specified style in document.**-2: الاستجابة الترددية للمرشح المستمر والمرشح المتقطع من أجل $p_1 = 0.05$ و $T_s = 1$ و $a_1 = 1$

من الشكل نلاحظ تقارب في الاستجابة الترددية بين المرشحين المستمر والمتقطع بدلالة التردد الحقيقي f التباعد بين الاستجابتين من أجل الترددات القريبة من نصف تردد التقطيع نتيجة لوجود التداخل الترددي الناجم عن التقطيع.

وبالنتيجة فإن طريقة تكافؤ الاستجابة النبضية تحافظ على خواص السببية والاستقرار ولكن تعاني من مشكلة التداخل الترددي عندما لا يكون المرشح المستمر ذو استجابة ترددية محدودة.

2.4. تقريب الاشتقاق (Approximation of derivatives)

تُستخدم طريقة تقريب الاشتقاق في تحويل النظم المستمرة المعطاة بمعادلة تفاضلية خطية وذلك بتقريب عملية الاشتقاق في المجال الزمني المستمر بالفرق بين عينتين متتاليتين مقسوماً على دور التقطيع، أي:

$$\frac{dx(t)}{dt} \mapsto \frac{x(nT_s) - x((n-1)T_s)}{T_s}$$

نعلم أن الاشتقاق في المجال الزمني يقابل الضرب بالمتحول p في مستوي لابلاس. أي أن عملية الاشتقاق في المستوي الزمني تكافئ نظاماً ذو تابع استجابة $H(p) = p$.

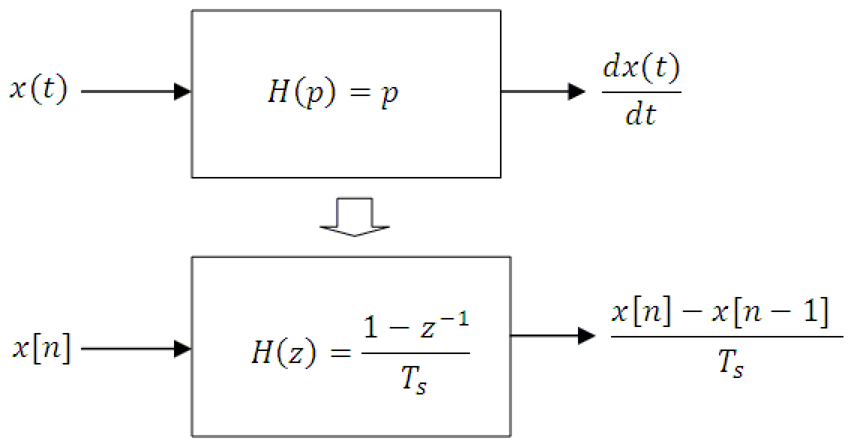
$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{\text{LT}} p$$

أما النظام المتقطع الذي يعطي على خرجه $(x[n] - x[n-1])/T_s$ فيكون تحويل Z لاستجابة هذا النظام هي $H(z) = (1 - z^{-1})/T_s$.

$$\frac{x[n] - x[n-1]}{T_s} \xrightarrow{\text{ZT}} \frac{1 - z^{-1}}{T_s}$$

أي أنه بطريقة تقريب الاشتقاق فإن المتحول p للإشارة المستمرة في مستوي لابلاس يقابل $(1 - z^{-1})/T_s$ في مستوي Z للإشارة المتقطعة.

$$p \equiv \frac{1 - z^{-1}}{T_s}$$



الشكل 3-**Error! No text of specified style in document.**: مبدأ تقريب الاشتقاق.

أي يمكننا الحصول على تحويل Z لاستجابة النظام المتقطع انطلاقاً من تحويل لابلاس لاستجابة النظام المستمر بتغيير المتحول المبين في المعادلة السابقة. ولمعرفة إذ ما كانت خواص السببية والاستقرار تبقى نفسها باستخدام هذا التحويل، نكتب المعادلة السابقة بالشكل التالي:

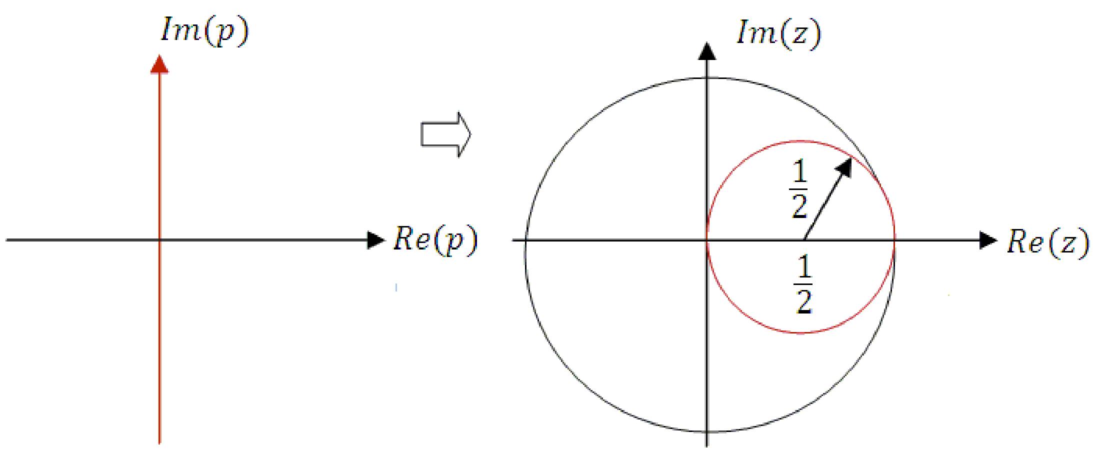
$$z = \frac{1}{1 - pT_s}$$

والتي تبين صورة نقاط مستوي لابلاس في مستوي Z باستخدام تقريب الاشتقاق.

إذا عوضنا $p = j\omega$ (وهي نمثل نقاط المحور التخيلي في مستوي لابلاس) في العلاقة السابقة، نجد:

$$z = \frac{1}{1 - j\omega T_s} = \frac{1}{1 + (\omega T_s)^2} + j\frac{\omega T_s}{1 + (\omega T_s)^2}$$

وعندما تتغير ω من $-\infty$ إلى $+\infty$، فإن النقاط في مستوي Z تدور على دائرة مركزها عند النقطة $z = \frac{1}{2}$ ونصف قطرها هو $1/2$.



الشكل 4-**Error! No text of specified style in document.** : تقابل نقاط المحورالتخيلي في مستوي لابلاس وفي مستوي Z بتقريب الاشتقاق.

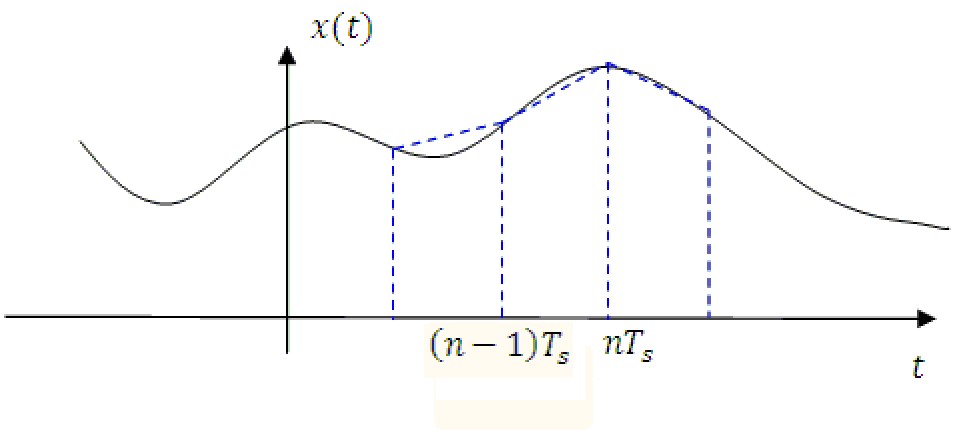
وبالتالي فإن النقاط التي تقع على يسار المحور التخيلي ستكون داخل هذه الدائرة، وبالتالي داخل الدائرة الواحدية. من ذلك نستنتج أن خاصة الاستقرار تبقى موجودة باستخدام هذا التقريب. وكذلك يمكن أن نقول نفس الشيء من أجل خاصة السببية.

ولكن تقريب الاشتقاق لا يحافظ على الاستجابة الترددية، لأن صورة المحور التخيلي في مستوي لابلاس لا يقع على الدائرة الواحدية في مستوي Z.

3.4. التحويل ثنائي الخطية (Bilinear transformation)

رأينا أن التحويلين السابقين يحافظان على خاصة الاستقرار عند تحويل نظام إلى نظام متقطع ولكنهما لا يعطيان تقابلاً بين الترددات في الحالة المستمرة f والترددات في الحالة المتقطعة ν.

في تحويل ثنائي الخطية (Bilinear transformation) نقوم بتقريب التكامل المستمر رقمياً باستخدام مجموع المساحات بين نقاط الإشارة المتقطعة المتتالية، حيث نحسب المساحة بين كل نقطتين متتاليتين بمساحة شبه المنحرف المحدد بين هاتين النقطتين كما هو موضح في الشكل التالي:



الشكل **5-Error! No text of specified style in document.** : تقريب التكامل في تحويل ثنائي الخطية.

وبشكل آخر يتم تقريب النظام المكامل المستمر التالي:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(u)du$$

بالنظام المتقطع التالي:

$$y[n]=y[n-1]+\frac{1}{2T_s}(x[n-1]+x[n])$$

ويكون تحويل لابلاس للنظام المستمر $H(p)=\frac{1}{p}$. ويكون تحويل Z للنظام المتقطع

$$H(z)=\frac{T_s}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

أي أن المتحول p في تحويل لابلاس للنظام المستمر يقابل في النظام المتقطع المقدار:

$$p \equiv \frac{2}{T_s}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

إذا عوضنا في العلاقة السابقة $z = e^{j2\pi\nu}$ فإننا نجد:

$$p = j\frac{2}{T_s}tg(\pi\nu)$$

وبالتالي فعندما تتغير ν من $-\frac{1}{2}$ إلى $+\frac{1}{2}$ لمرة واحدة فإن p تتنقل على المحور التخيلي من $-\infty$ إلى $+\infty$. أي هناك تقابلاً بين كامل المحور التخيلي في مستوي لابلاس والدائرة الواحدية في مستوي Z دون تكرار. وتكون العلاقة بين التردد الرقمي (في النظام المتقطع) والتردد المستمر (في النظام المستمر) هي:

$$f = \frac{1}{\pi T_s}tg(\pi\nu)$$

ويمكن بدون صعوبة إثبات أن النقاط التي تقع على يسار المحور التخيلي في مستوي لابلاس، تقابلها النقاط التي تقع داخل الدائرة الواحدية، مما يبين بأن هذا التحويل يحافظ أيضاً على خاصة الاستقرار مثل التحويلين السابقين.

أسئلة وتمارين الفصل العاشر

دراسة النظم المتقطعة

أسئلة عامة

1- ما هو تعريف تحويل Z أحادي الجانب وما هو مجال استخدامه الأساسي؟

تغذية راجعة: راجع فقرة " تحويل Z أحادي الجانب".

2- بين كيف تصبح خاصية الانزياح الزمني مع تحويل Z أحادي الجانب؟ أي إذا كان $X_+(z)$ هو تحويل Z أحادي الجانب للإشارة $x[n]$ فما هو تحويل Z أحادي الجانب للإشارة المزاحة $x[n-k]$ من أجل قيم k الموجبة (تأخير) و $x[n+k]$ من أجل قيم k الموجبة (تسبيق)؟

تغذية راجعة: راجع فقرة " تحويل Z أحادي الجانب".

3- إذا كان لدينا النظام المستمر ذو الاستجابة النبضية $h_c(t)$، فما هو الاستجابة النبضية للنظام المتقطع الناتج $h_d[n]$ بطريقة تكافؤ الاستجابة النبضية؟ وهل هناك تطابق في الاستجابة الترددية للنظام مستمر والنظام المتقطع؟

تغذية راجعة: راجع الفقرة "تكافؤ الاستجابة النبضية".

4- ما هي طريقة تقريب الاشتقاق في تحويل نظام مستمر إلى نظام متقطع؟ وهل يحافظ هذا التحويل على الاستجابة الترددية والاستقرار؟

تغذية راجعة: راجع فقرة "تقريب الاشتقاق".

5- ما هي فائدة النظم الرقمية مقارنة مع النظم المستمرة؟

تغذية راجعة: راجع فقرة "تحويل النظم المستمرة إلى نظم متقطعة".

أسئلة خيارات متعددة

1- تحويل Z أحادي الجانب لإشارة متقطعة بالزمن $x[n]$ هو:

أ- تمثيل للإشارة المتقطعة.

ب- تمثيل للإشارة المتقطعة السببية.

ج- تمثيل للإشارة المتقطعة المستقرة.

د- تمثيل للإشارة المتقطعة السببية والمستقرة.

تغذية راجعة: راجع فقرة "تحويل Z أحادي الجانب".

2- ما هو التحويل الذي لا يستخدم تحويل النظم المستمرة إلى نظم متقطعة:

أ- تحويل لابلاس.

ب- تحويل تكافؤ الاستجابة النبضية.

ج- تحويل تقريب الاشتقاق.

د- تحويل ثنائي الخطية.

تغذية راجعة: راجع فقرة "تحويل النظم المستمرة إلى نظم متقطعة".

3- يختلف تحويل Z أحادي الجانب عن تحويل Z ثنائي الجانب في خاصة:

أ- جداء التلاف المتقطع.

ب- المرافق العقدي.

ج- عكس الزمن.

د- الانزياح الزمني.

تغذية راجعة: راجع فقرة "تحويل Z أحادي الجانب".

4- ماذا تسمى استجابة نظام خطي مع شروط ابتدائية غير معدومة عند تطبيق إشارة معدومة على الدخل؟

أ- الاستجابة الترددية للنظام.

ب- الاستجابة النبضية للنظام.

ج- الاستجابة الحرة للنظام.

د- الاستجابة القسرية للنظام.

تغذية راجعة: راجع المثال الوارد في فقرة "تحويل Z أحادي الجانب".

5- نحصل على الاستجابة الترددية لمرشح مستقر انطلاقاً من تحويل Z بالعملية التالية:

أ- تبديل المتحول z بالقيمة $z = 2\pi j\nu$.

ب- تبديل المتحول z بالقيمة $z = \nu$.

ج- تبديل المتحول z بالقيمة $z = e^{2\pi j\nu}$.

د- تبديل المتحول z بالقيمة $z = e^{\pi j\nu}$.

تغذية راجعة: فقرة "الاستجابة الترددية للمرشحات الخطية المتقطعة".

تمارين

1- ليكن المرشح الرقمي السببي المعطى بتابع التحويل التالي:

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

أ- ما هو حيز لتقارب للتابع $H(z)$.

ب- ادرس استقرار النظام.

ت- اكتب معادلة الفروق للمرشح.

تغذية راجعة:

2- ليكن لدينا النظام المتقطع المعطى بمعادلة الفروق التالية:

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = \frac{1}{2}x[n-1],\ n>0$$

مع $x[-1] = 0$ و $y[-1] = 2$.

أ- احسب تحويل Z أحادي الجانب لإشارة الخرج $Y_+(z)$ بدلالة تحويل Z أحدي الجانب لإشارة الدخل $X_+(z)$ مع التمييز بين الاستجابة الحرة والاستجابة القسرية للنظام.

تغذية راجعة: راجع فقرة "حالة التأخير" في فقرة "تحويل Z أحادي الجانب" ولمثال الوارد فيها.

3- إذا كان لدينا النظام المستمر المعطى بالمعادلة التفاضلية التالية:

$$y(t) + \tau\frac{dy(t)}{dt} = x(t)$$

أ- فما هي معادلة الفروق للنظام المتقطع بطريقة تقريب الاشتقاق؟

ب- ما هو تحويل Z للنظام المتقطع الناتج.

ت- هل النظام المتقطع الناتج مستقر؟ علل ذلك.

ث- احسب الاستجابة الترددية للنظام المستمر من أجل $\tau = 0.1\ s$.

ج- احسب الاستجابة الترددية للنظام المتقطع من أجل $T = \frac{\tau}{4}$ وقارن مع الاستجابة الترددية للنظام المستمر.

تغذية راجعة: راجع فقرة "تقريب الاشتقاق"

إجابات – حلول الأسئلة العامة السابقة

السؤال الأول:

الحل: يعرف تحويل Z أحادي الجانب لإشارة متقطعة بالعلاقة:

$$X_+(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

يستخدم تحويل Z أحادي الجانب مع الإشارات والنظم السببية، وخصوصاً في دراسة النظم المتقطعة المعطاة بمعادلة فروق مع شروط ابتدائية غير معدومة.

السؤال الثاني:

الحل: في حالة التأخير نجد:

$$x[n-k] \xrightarrow{ZT_+} z^{-k}\left[X_+(z) + \sum_{n=1}^{k} x[-n] z^{+n}\right]$$

وفي حالة التسبيق يكون:

$$x[n+k] \xrightarrow{ZT_+} z^{k}\left[X_+(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x[n] z^{-n}\right]$$

السؤال الثالث:

الحل: تكون الاستجابة النبضية للنظام المتقطع:

$$h_d[n] = T_s . h_c(nT_s)$$

يكون هناك تطابق في الاستجابة الترددية للنظام المستمر والنظام المتقطع عندما يكون تردد التقطيع يحترم شرط شانون في التقطيع بالنسبة للامتداد الترددي للاستجابة النبضية المستمرة وإلا سوف يكون هناك تداخل طيفي وعدم تطابق كامل.

السؤال الرابع:

الحل: يتم استخدام هذه الطريقة لتحويل النظام المستمر المعطى بمعادلة تفاضلية إلى نظام متقطع معطى بمعادلة فروق بتقريب الاشتقاق بالشكل التالي:

$$\frac{dx(t)}{dt} \mapsto \frac{1}{\mathrm{T}}(x[n] - x[n-1])$$

وذلك يكافئ استبدال المتحول p في تحويل لابلاس بالشكل:

$$p \equiv \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

للحصول على تحويل Z للنظام المتقطع. ويكون النظام المتقطع الناتج مستقراً لأن هذا التحويل يحول الأقطاب التي على يسار المحور التخيلي في مستوي لابلاس إلى داخل الدائرة الواحدية في مستوي Z. ولكن لا يعكس المحور التخيلي في مستوي لابلاس إلى الدائرة الواحدية بل إلى دائرة متمركزة عند $z = 1/2$ ونصف قطرها $1/2$ لذلك لا يكون للنظامين نفس الاستجابة الترددية بالضبط ولكن بشكل تقريبي فقط.

السؤال الخامس:

الحل: تتميز بدرجة المكاملة العالية وعدم تأثرها بعوامل الضجيج الحراري ومرونتها من حيث قابلية تخزين الإشارة وسهولة التطوير والتعديل.

إجابات – حلول أسئلة الخيارات المتعددة السابقة

أسئلة خيارات متعددة	الإجابة الصحيحة
1	ب
2	أ
3	د
4	ج
5	ج

إجابات – حلول التمارين السابقة

السؤال الأول:

أ– للتابع قطبين هما $z_1 = \frac{1}{2}$ و $z_2 = -\frac{1}{4}$. وبما أن النظام سببي فإن حيز التقارب يمتد من لقطب ذو المطال الأكبر وهو z_1 وحتى اللانهاية. وبالتالي يكون حيز التقارب هو $D =]\frac{1}{2}, +\infty[$.

ب– بما أن حيز التقارب للمرشح يحتوي على الدائرة الواحدية فهو مستقر.

ت– نعلم أن:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

ومنه:

$$Y(z)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right) = X(z)(1 + z^{-1})$$

$$Y(z)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}\right) = X(z)(1 + z^{-1})$$

$$Y(z)-\frac{1}{4}z^{-1}Y(z)-\frac{1}{8}z^{-2}Y(z)=X(z)+z^{-1}X(z)$$

وبأخذ تحويل Z العكسي لطرفي المعادلة باستخدام خواص تحويل Z، نجد:

$$y[n]-\frac{1}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]+x[n-1]$$

السؤال الثاني:

أ- نأخذ تحويل Z أحادي لجانب لطرفي معادلة الفروق:

$$Y_+(z)-\frac{1}{2}z^{-1}(Y_+(z)+y[-1]z)=\frac{1}{2}z^{-1}(X_+(z)+x[-1]z)$$

نعوض قيم $x[-1]$ و $y[-1]$ في لمعدلة السابقة:

$$Y_+(z)-\frac{1}{2}z^{-1}(Y_+(z)+2z)=\frac{1}{2}z^{-1}X_+(z)$$
$$Y_+(z)-\frac{1}{2}z^{-1}Y_+(z)-1=\frac{1}{2}z^{-1}X_+(z)$$
$$(1-\frac{1}{2}z^{-1})Y_+(z)=1+\frac{1}{2}z^{-1}X_+(z)$$

ومنه نجد:

$$Y_+(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1}{2}\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}X_+(z)$$

يمثل الحد الأول الاستجابة الحرة للنظام والحد الثاني الاستجابة القسرية للنظام.

السؤال الثالث:

أ- في المعادلة التفاضلية نقوم باستبدال المشتق بالشكل التالي:

$$\frac{dy(t)}{dt}\mapsto\frac{1}{T}(y[n]-y[n-1])$$

لنجد:

$$y[n]+\tau\frac{1}{T}(y[n]-y[n-1])=x[n]$$

$$\left(1+\frac{\tau}{T}\right)y[n]-\frac{\tau}{T}y[n-1]=x[n]$$

ب-بأخذ تحويل Z لطرفي معادلة الفروق

$$\left(1+\frac{\tau}{T}\right)Y(z)-\frac{\tau}{T}z^{-1}Y(z)=X(z)$$

$$H(z)=\frac{T/(T+\tau)}{1-\frac{\tau}{T+\tau}z^{-1}}$$

ت– لتابع التحويل قطب وحيد وهو

$$z = \frac{\tau}{T+\tau} < 1$$

وهو ذو مطال أقل من الواحد، وبالتالي يقع داخل الدائرة الواحدية لذلك يكون النظام المتقطع الناتج مستقر.

ث– نعلم أن تحويل لابلاس للنظام المستمر هو:

$$H(p) = \frac{1}{1+\tau p}$$

وهو مستقر لأن قطبه الوحيد $\left(p = -\frac{1}{\tau}\right)$ يقع على يسار المحور التخيلي وهو سببي وبالتالي هو مستقر.

نحصل على استجابته الترددية بتعويض $p = j2\pi f$ فنجد:

$$\tilde{h}_c(f) = \frac{1}{1+0.1j2\pi f}$$

ج– بما أن النظام المتقطع الناتج عن التحويل هو مستقر، نحصل على الاستجابة الترددية بتعويض $z = e^{2\pi j\nu}$

$$\tilde{h}_d(\nu) = \frac{0.2}{1-0.2e^{-2\pi j\nu}}$$

مع ملاحظة أن $0.2 = \frac{1}{5} = \frac{T}{T+\tau}$.

والذي يكتب بدلالة التردد الحقيقي بتعويض $\nu = fT = 0.025f$.

$$\tilde{h}_d(f) = \frac{0.2}{1-0.2e^{-2\pi j0.025f}}$$

ومن الواضح عدم وجود تطابق في الاستجابة الترددية لأن الاستجابة لترددية للمرشح المستمر غير محدودة في التردد وبالتالي سوف يحدث تداخل ترددي مهما كان تردد التقطيع كبيراً ولكن يصبح الفرق بينهما أصغر كما زاد تردد التقطيع.

تحويل فورييه المتقطع

الكلمات المفتاحية:

تحويل فورييه المتقطع، الانزياح الزمني الحلقي، جداء التلاف الحلقي، تحويل فورييه السريع.

ملخص:

ندرس في هذا الفصل تحويل فورييه المتقطع DFT وهو تحويل فورييه المستخدم فعلياً في النظم الرقمية حيث يرتكز هذا التحويل على تقطيع طيف الإشارة حسب المحور الترددي وذلك لأنه لا يمكن عملياً تمثيل القيم المستمرة في النظم الرقمية بشكل مباشر. نقوم في هذا الفصل بعرض تحويل فورييه المتقطع والتحويل العكسي الموافق، ثم ندرس خواصه المختلفة. وأخيراً نقوم بعرض الخوارزمية السريعة لحساب تحويل فورييه المتقطع (FFT) الواسعة الاستخدام في مجال التحليل الترددي في النظم الرقمية.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- تعريف تحويل فورييه المتقطع والتحويل العكسي الموافق.
- خواص تحويل فورييه المتقطع.
- خوارزمية تحويل فورييه السريع.

ندرس في هذا الفصل تحويل فورييه المتقطع DFT وهو تحويل فورييه المستخدم فعلياً في النظم الرقمية حيث يرتكز هذا التحويل على تقطيع طيف الإشارة حسب المحور الترددي وذلك لأنه لا يمكن عملياً تمثيل القيم المستمرة في النظم الرقمية بشكل مباشر. نقوم في هذا الفصل بعرض تحويل فورييه المتقطع والتحويل العكسي الموافق، ثم ندرس خواصه المختلفة. وأخيراً نقوم بعرض الخوارزمية السريعة لحساب تحويل فورييه المتقطع (FFT) الواسعة الاستخدام في مجال التحليل الترددي في النظم الرقمية.

1. مقدمة (Introduction)

يعتبر تحويل فورييه أداة فاعلة جداً لتحديد المركبات الترددية لإشارة زمنية، وبما أنه لا يمكن أن يتعامل الحاسوب إلا مع معطيات متقطعة لذلك أوجد تحويل فورييه المتقطع (DFT) كطريقة رقمية لحساب تحويل فورييه باستخدام الحاسوب. ولتحويل فورييه المتقطع أهمية كبيرة في كثير من تطبيقات معالجة الإشارة الرقمية كالترشيح الخطي (Linear Filtering) والتحليل الطيفي (Spectrum Analysis) وحساب الترابط (Correlation). وقد أصبح لتحويل فورييه المتقطع دوراً هاماً في معالجة الإشارة الرقمية بعد ظهور خوارزميات حساب سريعة فعالة أوجدت ما يسمى بتحويل فورييه السريع (Fast Fourier Transform FFT).

2. تعريف تحويل فورييه المتقطع (Transform DFT Discrete Fourier)

يعطى تحويل فورييه المتقطع لإشارة $x[n]$ مكونة من N نقطة حيث $n = 0,1,\dots,N-1$ بالعلاقة التالية:

$$X[k] = DFT[x[n]] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-\frac{2\pi jkn}{N}}$$

حيث $k = 0,1,\dots,N-1$.

وبالمقارنة مع تعريف تحويل فورييه للإشارة المتقطعة $x[n]$ المعطى بالعلاقة:

$$\tilde{y}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-2\pi j\nu n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-2\pi j\nu n}$$

حيث $y[n] = x[n].w[n]$ و $w[n]$ هي إشارة مستطيلة معرفة كالتالي:

$$w[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

نجد أن القيم $X[k]$ تمثل تقطيعاً لطيف الإشارة المتقطعة $\tilde{y}(\nu)$ عند قيم الترددات $\nu = k/N$. أي أن الدليل k يوافق التردد الرقمي $\nu_k = k/N$ المحصور طبعاً في المجال $[0,1]$. ونعلم من خواص فورييه للإشارات المتقطعة أن تحويل فورييه لجداء إشارتين هو جداء التلاف لتحويلي فورييه للإشارتين:

$$\tilde{y}(\nu) = \tilde{x}(\nu) * \tilde{w}(\nu)$$

علماً أن (انظر التمرين الأول في الفصل الثامن):

$$\tilde{w}(\nu) = e^{-\pi jN\nu}\frac{\sin(\pi N\nu)}{\sin(\pi\nu)}$$

أي أن تحويل فورييه المتقطع للإشارة $x[n]$ على N عينة لا ينطبق مع تقطيع تحويل فورييه للإشارة $x[n]$ ولكن هو تقطيع لطيف الإشارة $y[n]$ الناتجة عن ضرب الإشارة $x[n]$ مع الإشارة المستطيلة $w[n]$ بعرض N عينة. ويقترب تحويل فورييه المتقطع للإشارة $x[n]$ على N عينة من طيف الإشارة $x[n]$ المتقطعة كلما زادت قيمة N. (انظر التمرين الأول).

هذا ويستخدم في بعض التطبيقات نوافذ (windows) أخرى غير النافذة المستطيلة $w[n]$ ذات تأثيرات مختلفة على طيف الإشارة المراد تحليلها مثل نافذة هامينغ (Hamming window) ونافذة بلاكمان (Blackman window) وغيرها الكثير من النوافذ. ولا يدخل دراسة خواص و تأثير هذه النوافذ على نتيجة حساب تحويل فورييه المتقطع في هذه المادة.

يعطى تحويل فورييه المتقطع العكسي (IDFT Inverse Discrete Fourier Transform) بالعلاقة التالية:

$$x[n] = IDFT(X[k]) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{\frac{2\pi jkn}{N}}$$

حيث $n = 0,1,\dots,N-1$.

وقد جرى اعتماد هذا التعريف بسبب اعتبار تحويل فورييه المتقطع هو تقطيع لتحويل فورييه لإشارة متقطعة (محدودة الامتداد الزمني) في المجال الترددي.

3. خواص تحويل فورييه المتقطع (Properties of DFT)

يعتبر تحويل فورييه المتقطع هو حالة خاصة من تحويل فورييه بالتالي فإن له خواص مشابهة لخواص تحويل فورييه سندرجها في ما يلي.

1.3. الخطية (Linearity)

تعني خاصية الخطية أن تحويل فورييه المتقطع لتركيب خطي من عدة إشارات يعطي التركيب الخطي نفسه من تحويلات فورييه المتقطعة لهذه الإشارات. فإذا كان $X_1[k], X_2[k]$ هما تحويلا فورييه المتقطعين لتتابعين من القيم من N نقطة $x_1[n], x_2[n]$ على الترتيب فإن:

$$\lambda_1 x_1[n] + \lambda_2 x_2[n] \xleftrightarrow{DFT} \lambda_1 X_1[k] + \lambda_1 X_2[k]$$

حيث λ_1, λ_2 ثوابت عقدية، و $n = 0,1,\dots,N-1$، $k = 0,1,\dots,N-1$.

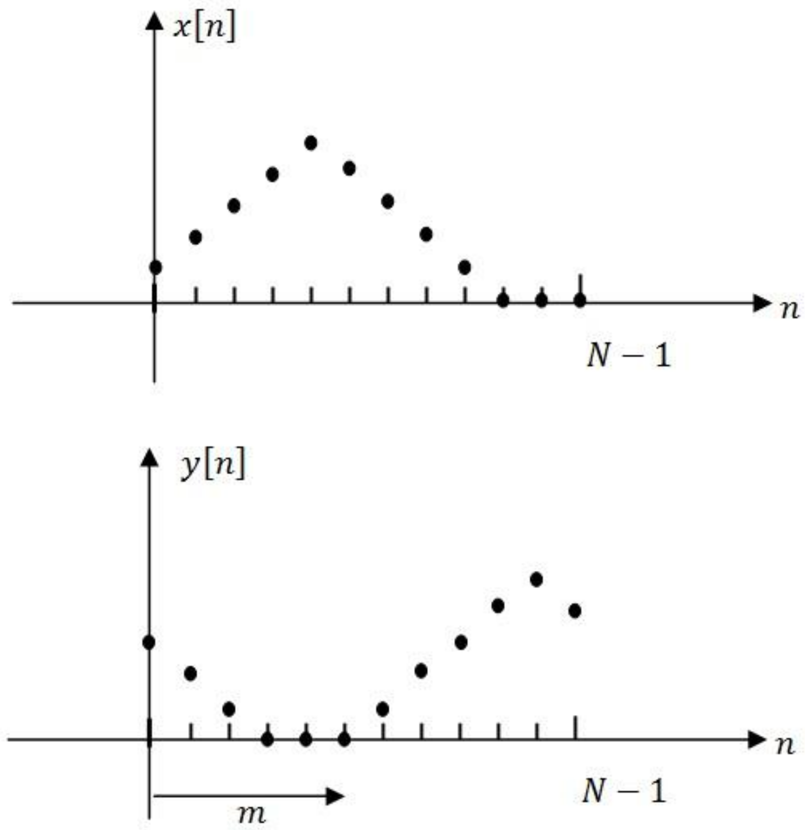
2.3. الانزياح الزمني الحلقي (Circular Time shifting)

نعرف الانزياح الزمني الحلقي لإشارة $x[n]$ مكونة من N نقطة بمقدار m نقطة بالإشارة $y[n]$ المكونة من N نقطة أيضاً والمعرفة بالعلاقة التالية:

$$y[n] = x[n-m]_N = x[(n-m)\ modulo\ N]$$

من أجل $n = 0,1,\dots,N-1$.

يبين الشكل التالي الانزياح الحلقي للإشارة $x[n]$ المكونة من 12 نقطة بمقدار $m = 6$ عينات نحو اليمين.



الشكل **Error! No text of specified style in document.**-1: الإزاحة الحلقية للإشارة $\boldsymbol{x[n]}$ بمقدار 6 عينات نحو اليمين.

فإذا تحويل فورييه المتقطع للإشارة $x[n]$ هو $X[k]$، فإن:

$$x[n-m]_N \xleftrightarrow{DFT} e^{-2\pi j\frac{k}{N}m}X[k]$$

حيث $n = 0,1,\dots,N-1$ و $k = 0,1,\dots,N-1$.

وبالتالي فإن الانزياح الزمني الحلقي بزمن m يكافئ انزياحاً في الطور بمقدار $2\pi\frac{k}{N}m$ عند التردد $\frac{k}{N}$.

3.3. الانزياح الترددي أو التعديل (Modulation Frequency shifting or)

إذا كان لدينا الإشارة المتقطعة في الزمن $x[n]$ وكان $X[\mathrm{k}]$ تحويل فورييه المتقطع لها فإنّ تعديل الإشارة $x[n]$ بمركّبة أسية عقدية $e^{2\pi j\frac{l}{N}n}$ عند التردد $\frac{l}{N}$ يكافئ انزياحاً حلقياً في المجال الترددي لتحويل فورييه المتقطع لها بمقدار $\frac{l}{N}$ أي:

$$x[n] \xleftrightarrow{DFT} X[k] \quad \Leftrightarrow \quad e^{2\pi j\frac{l}{N}n}x[n] \xleftrightarrow{DFT} X[k-l]_N$$

حيث: $n = 0,1, \dots, N-1$ و $k = 0,1, \dots, N-1$

4.3. المرافق العقدي (Complex conjugate)

إن المرافق العقدي للإشارة المتقطعة $x[n]$ في المجال الزمني يقابله المرافق العقدي للتابع الناتج عن إجراء عكس حلقي في المجال الترددي:

$$x^*[n] \xleftrightarrow{DFT} X^*[-k]_N$$

حيث $n = 0,1, \dots, N-1$ و $k = 0,1, \dots, N-1$. وهي خاصة مشابهة لما رأيناه في تحويل فورييه. كما يحدث عكس التردد هنا بطريقة حلقية أي:

$$X^*[-k]_N = X^*[N-k], \qquad k = 1, \dots, N-1 \ .$$

فإذا كانت الإشارة $x[n]$ حقيقية نجد خاصة التناظر الهرميتي (Symmetry Hermitian) أي:

$$X^*[k] = X^*[-k]_N, \qquad k = 0,1, \dots, N-1$$

5.3. عكس الزمن الحلقي وخواص التناظر (Time reversing)

إن عكس الزمن الحلقي يقابله عكس التردد الحلقي وفق مايلي:

$$x[-n]_N \xleftrightarrow{DFT} X[-k]_N$$

فإذا كانت الإشارة المتقطعة بالزمن $x[n]$ زوجية بالمعنى الحلقي أي: $x[n] = x[-n]_N$ عندما $n = 0,1, \dots, N-1$، فإن تحويل فورييه المتقطع لها يكون زوجياً أيضاً بالمعنى الحلقي أي:

$$X[k] = X[-k]_N, \qquad k = 0,1, \dots, N-1$$

وإذا كانت الإشارة المتقطعة بالزمن $x[n]$ فردية بالمعنى الحلقي أي: $x[n] = -x[-n]_N$ عندما $n = 0,1, \dots, N-1$، فإن تحويل فورييه المتقطع لها يكون فردياً أيضاً بالمعنى الحلقي أي:

$$X[k] = -X[-k]_N, \qquad k = 0,1, \dots, N-1$$

6.3. جداء التلاف الحلقي (Circular Convolution)

نعرف جداء التلاف الحلقي بين تتابعين $x_1[n]$ و$x_2[n]$ على N نقطة $n = 0,1, \dots, N-1$ بالعلاقة التالية:

$$x[n] = x_1[n] \otimes_N x_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m].x_2[n-m]_N$$

باعتبار أنّ الإزاحة تتم حلقياً، ويدل الرمز $\otimes$ على عملية جداء تلاف حلقي بين تتابعين يتكون كل منهما من N نقطة.

إن تحويل فورييه المتقطع يحول جداء التلاف الحلقي إلى جداء سلّمي:

$$X[k] = X_1[k].X_2[k]$$

7.3. جداء شارتين (Multiplication)

إذا كانت $x_1[n]$ و$x_2[n]$ إشارتين متقطعتين من N نقطة، وكانت $x[n]$ الإشارة الناتجة عن ضربهما: $x[n] = x_1[n].x_2[n]$، فإن:

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} X_1[l].X_2[k-l]_N$$

وهو جداء تلاف حلقي في المجال الترددي مضروب بالثابت $\frac{1}{N}$.

8.3. الترابط الحلقي (Circular Convolution)

يعرّف الترابط الحلقي $r_{x_1x_2}[m]$ بين تتابعين $x_1[n]$ و$x_2[n]$ على N نقطة $n = 0,1,\dots,N-1$ و$m = 0,1,\dots,N-1$ كما يلي:

$$r_{x_1x_2}[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n].x_2^*[n-m]_N$$

من الواضح أن ذلك يكافئ جداء تلاف حلقي بين $x_1[n]$ مع المرافق العقدي للإشارة الناتجة عن عكس الزمن الحلقي للإشارة $x_2[n]$، أي:

$$r_{x_1x_2}[m] = x_1[m] \otimes_N x_2^*[-m]_N$$

ومنه نجد أن تحويل فورييه المتقطع لتابع الترابط الحلقي يعطى كما يلي:

$$R_{x_1x_2}[k] = X_1[k].X_2^*[k]$$

وإذا كان $x[n] = x_1[n] = x_2[n]$، فإننا نسمي الترابط الحلقي الناتج $r_{xx}[m]$ (أو $r_x[m]$) تتابع الترابط الحلقي الذاتي للإشارة $x[n]$، ونرى هنا أن تحويل فورييه المتقطع لتابع الترابط الذاتي يعطي مربع مطال تحويل فورييه المتقطع:

$$R_{xx}[k] = |X[k]|^2$$

من أجل $k = 0,1,\dots,N-1$.

9.3. نظرية (Parseval Theorem)

إذا أخذنا تحويل فورييه المتقطع العكسي للتابع $R_{x_1x_2}[k]$ عند اللحظة 0 نجد $r_{x_1x_2}[0]$:

$$r_{x_1x_2}[0] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n].x_2^*[n] = IDFT\big[R_{x_1x_2}[k]\big]_{m=0} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_1[k].X_2^*[k]$$

أي إن الجداء الداخلي بين التتابعين $x_1[n]$ و$x_2[n]$ يساوي الجداء الداخلي بين تحويلي فورييه المتقطعين لهما:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_1[n].x_2^*[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_1[k].X_2^*[k]$$

وهي خاصة انحفاظ الجداء الداخلي بين المجالين الزمني والترددي، حيث يعطى الجداء الداخلي في المجال الزمني بين التتابعين $x_1[n]$ و$x_2[n]$ كما يلي:

$$\langle x_1[n], x_2[n] \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n].x_2^*[n]$$

ويعطى الجداء الداخلي في المجال الترددي هنا بالعلاقة التالية:

$$\langle X_1[k], X_2[k] \rangle = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_1[k].X_2^*[k]$$

وفي حال $x[n] = x_1[n] = x_2[n]$ نحصل على خاصة انحفاظ الطاقة، وهي نظرية بارسفال:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$$

4. تحويل فورييه السريع (Fast Fourier Transform FFT)

ذكرنا في التمهيد أن تحويل فورييه المتقطع DFT اكتسب أهمية كبيرة بوجود خوارزميات حساب سريع له. وتعتمد هذه الخوارزميات لحساب تحويل فورييه المتقطع خواصاً تتعلق بدورية المعاملات $W_N^{nk} = e^{-\frac{2\pi j}{N}nk}$ التي تظهر في علاقة حساب تحويل فورييه المتقطع. حيث تلجأ هذه الخوارزميات إلى تقسيم حساب تحويل فورييه المتقطع على عدد مركب من النقاط N، إلى حساب تحويلات فورييه المتقطعة على عدد أقل من النقاط من قواسم العدد N. وتسمى هذه الخوارزميات بطرق حساب تحويل فورييه السريع FFT حيث تسمح بتقليل التعقيد (عدد عمليات الضرب والجمع) في حساب تحويل فورييه المتقطع بفعالية. سنستعرض فيما يلي طريقة واحدة فقط من الطرق المستخدمة في تحويل فورييه السريع، وتستند هذه الطريقة إلى كون عدد نقاط تحويل فورييه المتقطع N هو من قوى العدد 2 أي من الشكل 2^M وتسمى هذه الطرق التي تعتمد هذا الشكل بطرق الأساس 2 (Radix−2 FFT Algorithms).

وتهدف إلى حساب تحويل فورييه المتقطع للتابع $\{x[n]\}$ من N نقطة، والذي هو التابع $\{X[k]\}$ المؤلف أيضاً من N نقطة حيث $k = 0,1, \dots, N-1$ كما هو موضح في العلاقة التالية:

$$X[k] = DFT[x[k]] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n].W_N^{nk}$$

حيث: $W_N = e^{-\frac{2\pi j}{N}}$ و $k = 0,1, \dots, N-1$.

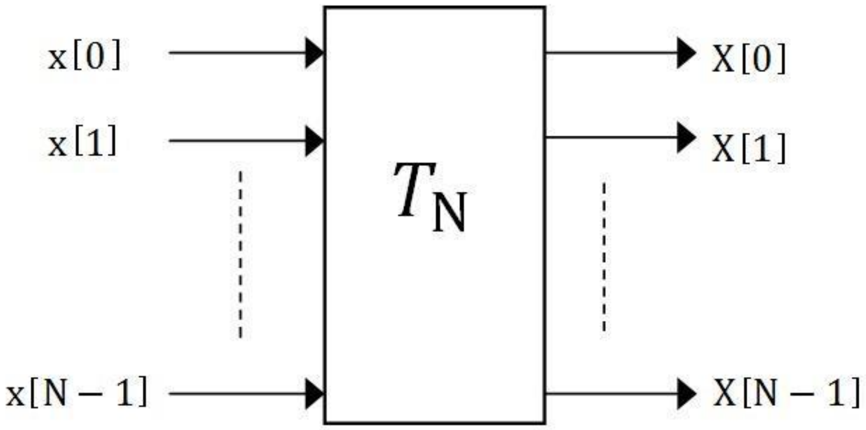
نلاحظ من علاقة تحويل فورييه المتقطع أن حساب كل نقطة من نقاط التحويل يحتاج إلى N عملية ضرب و $N-1$ عملية جمع وبالتالي سيكون تعقيد حساب تحويل فورييه كاملاً من رتبة N^2.

يمكن اعتبار تحويل فورييه المتقطع عملية خطية بالنسبة للشعاع الزمني $x[n]$ وبالتالي يمكن كتابة العلاقة السابقة بشكل مصفوفاتي كما يلي:

$$\mathrm{X} = \mathrm{T}_N \mathrm{x}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_N} \underbrace{\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}$$

أو بشكل مخطط صندوقي كما يلي:



الشكل .**Error! No text of specified style in document**-2: المخطط الصندوقي لتحويل فورييه السريع.

لنعتمد ترتيب أسطر وأعمدة المصفوفة T_N بحيث يكون الترقيم اعتباراً من الصفر حتى $N-1$، فسيكون العنصر من السطر k والعمود n والمقابل لأثر العنصر $x[n]$ من المجال الزمني في العنصر $X[k]$ من المجال الترددي، هو:

$$T_N(k,n) = W_N^{nk}$$

هناك طريقتان لحساب تحويل فورييه السريع: الأولى هي طريقة التفريق في المجال الزمني، والأخرى هي طريق التفريق في المجال الترددي. وسوف نكتفي هنا بعرض الطريقة الأولى فقط.

نفترض أن عدد نقاط تحويل فورييه المتقطع N زوجي. نقوم في هذه الطريقة بتقسيم الشعاع x في المجال الزمني إلى شعاعين من $\frac{N}{2}$ نقطة لكل منهما من العناصر الفردية والعناصر الزوجية أي:

$$\mathbf{x}_1 = \left[x[0], x[2], x[4], \dots, x[N-2]\right]^T$$

$$\mathbf{x}_2 = \left[x[1]\ , x[3], x[5] \dots, x[N-1]\right]^T$$

حيث يدل الرمز $[.]^T$ على منقول المصفوفة.

كما نقوم بتقسيم الشعاع X في المجال الترددي إلى شعاعين يمثلان النصف الأول والنصف الثاني من الشعاع X أي:

$$\mathbf{X}_1 = \left[X[0], X[1], X[2], \ldots X[\frac{N}{2}-1]\right]^T$$

$$\mathbf{X}_2 = \left[X\left[\frac{N}{2}\right], X\left[\frac{N}{2}+1\right], X\left[\frac{N}{2}+2\right], \ldots, X[N-1]\right]^T$$

لنأخذ النصف الأول من الشعاع X، ولنكتبه بدلالة شعاعي العناصر الزوجية والعناصر الفردية من الشعاع x. نلاحظ أنه يمكن كتابة الشعاع X_1 كناتج لمجموع ضرب مصفوفة أولى بقياس $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$ بشعاع القيم الزوجية، ومصفوفة أخرى من القياس نفسه بشعاع القيم الفردية.

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ \vdots \\ X\left[\frac{N}{2}-1\right] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^{2\times 1} & W_N^{2\times 2} & \cdots & W_N^{2\times\left(\frac{N}{2}-1\right)} \\ 1 & W_N^{2\times 2} & W_N^{2\times 4} & \cdots & W_N^{2\times 2\left(\frac{N}{2}-1\right)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{2\times\left(\frac{N}{2}-1\right)} & W_N^{2\times 2\left(\frac{N}{2}-1\right)} & \cdots & W_N^{2\times\left(\frac{N}{2}-1\right)\left(\frac{N}{2}-1\right)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[2] \\ x[4] \\ \vdots \\ x[N-2] \end{bmatrix}$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ W_N^1 \times 1 & W_N^1 \times W_N^{2\times 1} & W_N^1 \times W_N^{2\times 2} & \cdots & W_N^1 \times W_N^{2\times\left(\frac{N}{2}-1\right)} \\ W_N^2 \times 1 & W_N^2 \times W_N^{2\times 2} & W_N^2 \times W_N^{2\times 4} & \cdots & W_N^2 \times W_N^{2\times 2\left(\frac{N}{2}-1\right)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^{\left(\frac{N}{2}-1\right)} \times 1 & W_N^{\left(\frac{N}{2}-1\right)} \times W_N^{2\times\left(\frac{N}{2}-1\right)} & W_N^{\left(\frac{N}{2}-1\right)} \times W_N^{2\times 2\left(\frac{N}{2}-1\right)} & \cdots & W_N^{\left(\frac{N}{2}-1\right)} \times W_N^{2\times\left(\frac{N}{2}-1\right)\left(\frac{N}{2}-1\right)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T_2}} \begin{bmatrix} \vdots \\ x[\end{bmatrix}$$

إن أثر (مساهمة) العنصر الفردي $x[n+1]$ في العنصر $X[k]$ من النصف الأول، أي في حال $k = 0,1,\ldots,\frac{N}{2}-1$، (ونقصد بالأثر معامل الضرب) يساوي الأثر في العنصر $X[k]$ نفسه للعنصر الزوجي $x[n]$ مضروباً بالمعامل W_N^k وذلك لأن $W_N^{(n+1)k} = W_N^k \times W_N^{nk}$.

من ثم يمكن إعادة كتابة المصفوفة الثانية من العلاقة السابقة على شكل جداء المصفوفة الأولى بمصفوفة قطرية كما يلي:

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & W_N^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & W_N^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & W_N^{\frac{N}{2}-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^{2\times 1} & W_N^{2\times 2} & \cdots & W_N^{2\times\left(\frac{N}{2}-1\right)} \\ 1 & W_N^{2\times 2} & W_N^{2\times 4} & \cdots & W_N^{2\times 2\left(\frac{N}{2}-1\right)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{2\times\left(\frac{N}{2}-1\right)} & W_N^{2\times 2\left(\frac{N}{2}-1\right)} & \cdots & W_N^{2\times\left(\frac{N}{2}-1\right)\left(\frac{N}{2}-1\right)} \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن المصفوفة الثانية هي مصفوفة تحويل فورييه المتقطع، ولكن لعدد نقاط $\frac{N}{2}$ أي تساوي $\mathrm{T}_{\frac{N}{2}}$، ذلك لأن

$$W_N^{2nk} = e^{-\frac{2\pi j}{N}2nk} = e^{-\frac{2\pi j}{\frac{N}{2}}nk} = W_{\frac{N}{2}}^{nk}$$

وعلى هذا يمكن أن نكتب العلاقة السابقة كما يلي:

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ \vdots \\ X\left[\frac{N}{2}-1\right] \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{\frac{N}{2}} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[2] \\ x[4] \\ \vdots \\ x[N-2] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & W_N^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & W_N^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & W_N^{\frac{N}{2}-1} \end{bmatrix} \times \mathbf{T}_{\frac{N}{2}} \times \begin{bmatrix} x[1] \\ x[3] \\ x[5] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

بالنسبة للنصف الثاني من الشعاع X فيمكن بنفس الطريقة أن نكتب أثر العناصر الزوجية والفردية من الشعاع x:

$$\begin{bmatrix} X\left[\frac{N}{2}\right] \\ X\left[\frac{N}{2}+1\right] \\ X\left[\frac{N}{2}+2\right] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{\frac{N}{2}} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[2] \\ x[4] \\ \vdots \\ x[N-2] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & W_N^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & W_N^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & W_N^{\frac{N}{2}-1} \end{bmatrix} \times \mathbf{T}_{\frac{N}{2}} \times \begin{bmatrix} x[1] \\ x[3] \\ x[5] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

وهي تختلف عن العلاقة السابقة بإشارة الطرح بدلاً من الجمع، يمكن التحقق بسهولة من صحة العلاقة بملاحظة أن أثر العنصر الزوجي $x[n]$ في العنصر $X\left[k+\frac{N}{2}\right]$ من النصف الثاني يساوي أثره في العنصر $X[k]$ من النصف الأول لأن:

$$W_N^{n\left(k+\frac{N}{2}\right)} = W_N^{nk} \times W_N^{n\frac{N}{2}} = W_N^{nk}$$

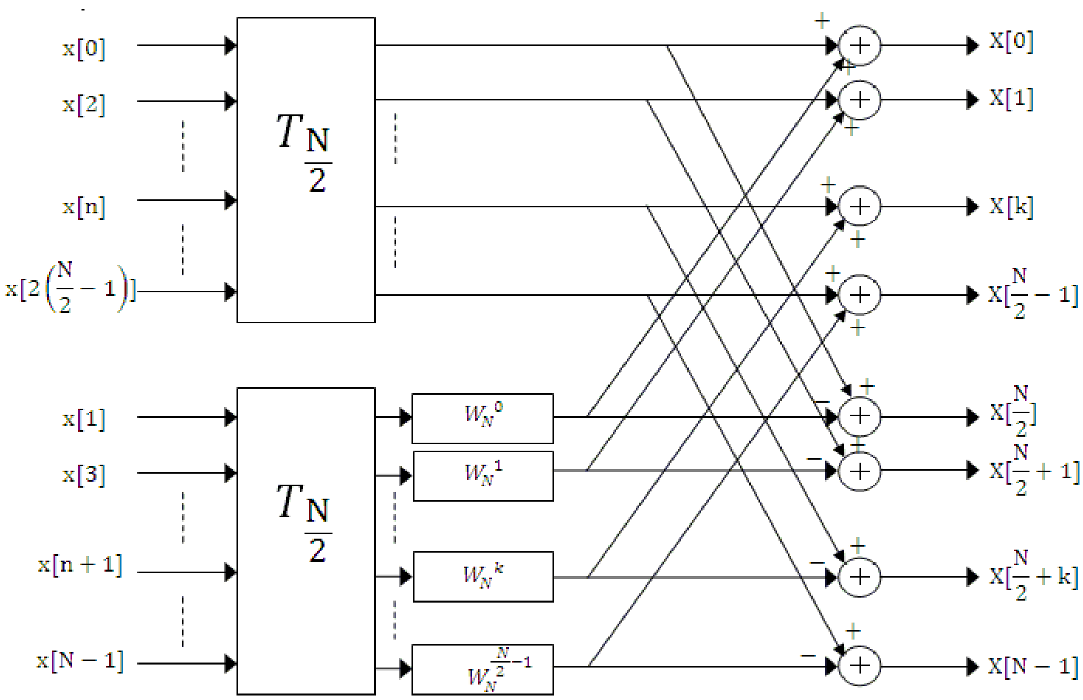
حيث اعتمدنا: $W_N^{n\frac{N}{2}} = e^{-\frac{2\pi jnN}{N\;\;2}} = 1$ لأن n زوجي.

أما أثر العنصر الفردي $x[n+1]$ في العنصر $X\left[k+\frac{N}{2}\right]$ من النصف الثاني يساوي أثره في العنصر $X[k]$ من النصف الأول مضروباً بـ -1 لأن:

$$W_N^{(n+1)\left(k+\frac{N}{2}\right)} = W_N^{(n+1)k} \times W_N^{(n+1)\frac{N}{2}} = -W_N^{(n+1)k}$$

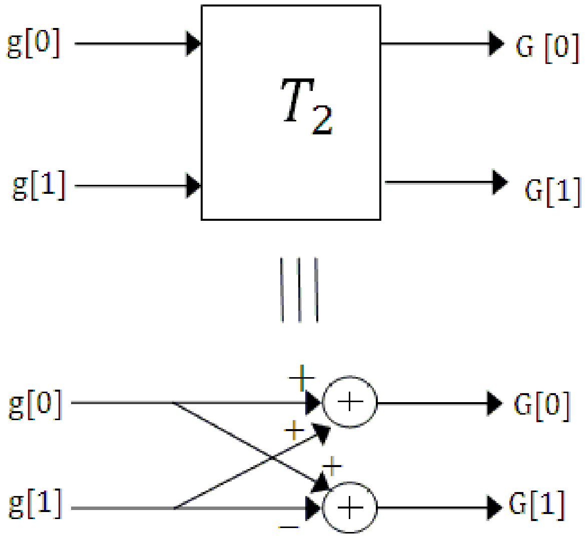
حيث اعتمدنا: $W_N^{(n+1)\frac{N}{2}} = -1$ لأن $n+1$ فردي.

بالنتيجة نجد أننا انتقلنا من تحويل فورييه المتقطع على N نقطة إلى تحويل فورييه المتقطع على $\frac{N}{2}$ نقطة. يوضح الشكل التالي مخططاً لهذه العملية.



الشكل .Error! No text of specified style in document- 3: التفريق في المجال الزمني لحساب تحويل فورييه المتقطع.

إذا كانت $\frac{N}{2}$ قابلة للقسمة على 2 فإنه يمكن إجراء نفس العملية السابقة على المصفوفة $T_{\frac{N}{2}}$، أي ننتقل من عمليتي تحويل فورييه المتقطع على $\frac{N}{2}$ نقطة إلى أربع عمليات تحويل فورييه المتقطع على $\frac{N}{4}$ نقطة ونستمر بهذه العملية (باعتبار $N = 2^M$) حتى نصل إلى تحويل فورييه المتقطع على نقطتين الذي يتضمن عمليتي جمع وطرح فقط (لا يوجد عمليات ضرب)، يبين الشكل التالي عملية T_2.



الشكل **Error! No text of specified style in document.** -4: المخطط الصندوقي لعملية T2.

وبهذه الآلية نحصل على $M = \log_2 N$ مرحلة، تتضمن كل منها ما عدا الأخيرة $\frac{N}{2}$ عملية ضرب (في غالبيتها عقدية) و N عملية جمع. أما المرحلة الأخيرة فهي تتضمن عمليتي جمع وطرح كما ذكرنا. فيكون مجموع العمليات المطلوبة لحساب تحويل فورييه المتقطع بهذه الطريقة هو:

$(M-1)$ مرحلة × $\frac{N}{2}$ عملية ضرب = $\frac{N}{2}\log_2 \frac{N}{2}$ عملية ضرب

M مرحلة × N عملية جمع = $N.\log_2 N$ عملية جمع.

وهو ما يمثل تقليصاً مهماً في عدد العمليات اللازمة لحساب تحويل فورييه المتقطع على N عينة مقارنة بالطريقة المباشرة انطلاقاً من التعريف، وخصوصاً من أجل القيم الكبيرة لعدد العينات N.

أسئلة وتمارين الفصل الحادي عشر
تحويل فورييه المتقطع

أسئلة عامة

1- ما هو تعريف تحويل فورييه المتقطع للإشارة $x[n]$ بطول N عينة، وما هو لتحويل العكسي الموافق؟
تغذية راجعة: راجع فقرة تعريف تحويل فورييه المتقطع".

2- عرف الانزياح الزمني الحلقي لإشارة $x[n]$ مكونة من N نقطة بمقدار m نقطة.
تغذية راجعة: راجع فقرة " الانزياح الزمني الحلقي".

3- ما هو تعريف جداء التلاف الحلقي بين تتابعين $x_1[n]$ و $x_2[n]$ على N نقطة ؟
تغذية راجعة: راجع الفقرة "جداء التلاف الحلقي".

4- ما هو اسم الخوارزمية التي نستخدمها عملياً لحساب تحويل فورييه المتقطع؟
تغذية راجعة: راجع فقرة "تحويل فورييه السريع".

5- ما هو رتبة عدد عمليات الضرب والجمع لحساب خوارزمية تحويل فورييه المتقطع السريع مقارنة مع الطريقة المباشرة انطلاقاً من التعريف؟
تغذية راجعة: راجع فقرة "تحويل فورييه السريع".

تمارين

1- احسب تحويل فورييه المتقطع على N قيمة من الإشارة التالية:

$$x[n] = e^{2\pi j n \nu_0}$$

كيف تصبح النتيجة عندما يكون التردد الرقمي ν_0 من الشكل $\nu_0 = \frac{m}{N}$ حيث m عدد صحيح أصغر من N.
تغذية راجعة: راجع فقرة "تحويل فورييه المتقطع".

2- ارسم المخطط الانسيابي لعملية تحويل فورييه المتقطع السريع بطريقة التفريق الزمني من أجل N=4.
تغذية راجعة: راجع فقرة "تحويل فورييه المتقطع السريع"

إجابات – حلول الأسئلة العامة السابقة

السؤال الأول:

الحل: يعطى تحويل فورييه المتقطع بالعلاقة:

$$X[k] = DFT[x[n]] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{2\pi jkn}{N}}$$

يعطى تحويل فورييه المتقطع العكسي بالعلاقة:

$$x[n] = IDFT(X[k]) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{2\pi jkn}{N}}$$

السؤال الثاني:

الحل: نعرف الانزياح الزمني الحلقي لإشارة $x[n]$ مكونة من N نقطة بمقدار m نقطة بالإشارة $y[n]$ المكونة من N نقطة أيضاً والمعرفة بالعلاقة التالية:

$$y[n] = x[n-m]_N = x[(n-m)\, modulo\ N]$$

من أجل $n = 0,1,\dots,N-1$.

السؤال الثالث:

الحل: يعرف جداء التلاف الحلقي:

$$x[n] = x_1[n] \otimes_N x_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m].x_2[n-m]_N$$

السؤال الرابع:

الحل: تسمى خوارزمية تحويل فورييه السريع (FFT).

السؤال الخامس:

الحل: نحتاج في خوارزمية إلى عدد من العمليات من رتبة $N.\log_2 N$، أما في الطريقة المباشرة فهو من رتبة N^2.

إجابات – حلول التمارين السابقة

السؤال الأول:

الحل: حسب تعريف فورييه المتقطع تكتب:

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-\frac{2\pi jkn}{N}}=\sum_{n=0}^{N-1}e^{2\pi jn\nu_0}e^{-\frac{2\pi jkn}{N}}=\sum_{n=0}^{N-1}e^{2\pi jn\left(\nu_0-\frac{k}{N}\right)}$$

$$X[k]=\frac{1-e^{2\pi jN(\nu_0-\frac{k}{N})}}{1-e^{2\pi j(\nu_0-\frac{k}{N})}}=\frac{1-e^{2\pi jN\nu_0}}{1-e^{2\pi j(\nu_0-\frac{k}{N})}}=e^{\pi j((N-1)\nu_0+\frac{k}{N})}\frac{\sin(\pi N(\frac{k}{N}-\nu_0))}{\sin(\pi(\frac{k}{N}-\nu_0))}$$

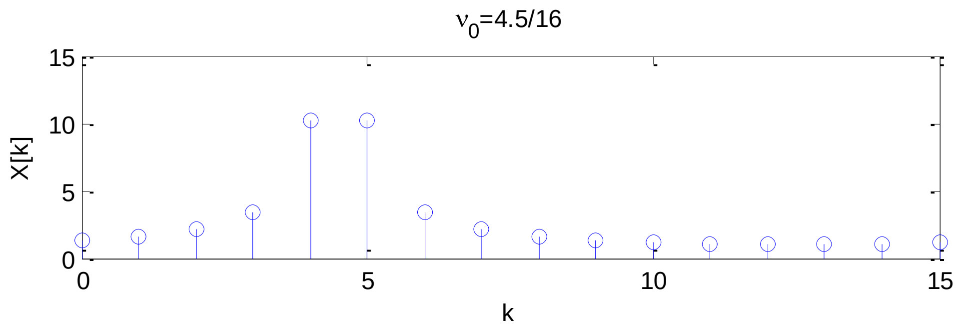
وبالتالي فإن تحويل فورييه للإشارة الجيبية العقدية على عدد N منتهي من العينات لا ينطبق مع تقطيع تحويل فورييه للإشارة الجيبية العقدية المتقطعة ذات الامتداد اللامحدود، الذي هو كما نعلم عبارة عن نبضة ديراك عند التردد ν_0 أي $\delta(\nu-\nu_0)$.

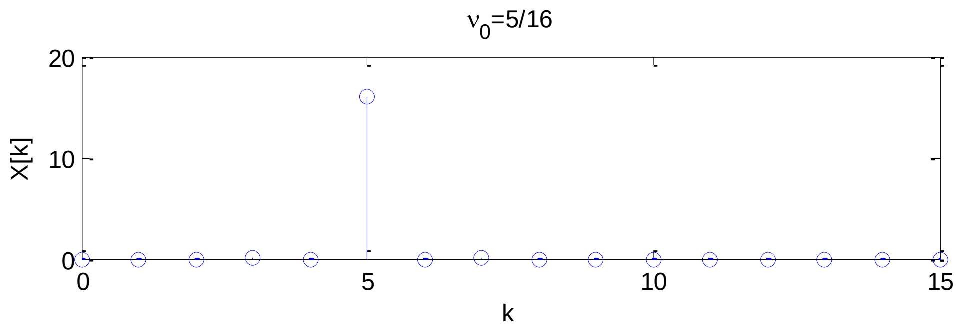
اذا كان $\nu_0=\frac{m}{N}$ فإن

$$X[k]=e^{\pi j\left((N-1)\frac{m}{N}+\frac{k}{N}\right)}\frac{\sin\left(\pi N\left(\frac{k}{N}-\frac{m}{N}\right)\right)}{\sin\left(\pi\left(\frac{k}{N}-\frac{m}{N}\right)\right)}=e^{\pi j\frac{1}{N}((N-1)m+k)}\frac{\sin(\pi(k-m))}{\sin\left(\pi\frac{1}{N}(k-m)\right)}$$

$$X[k]=\begin{cases}Ne^{\pi jk} & k=m\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}=Ne^{\pi jm}\delta[k-m]$$

في هذه الحالة فقط يتشابه تحويل فورييه المتقطع مع طيف الإشارة المتقطعة حيث نحصل على نبضة وحدية عند التردد الرقمي $\nu_0=\frac{m}{N}$.

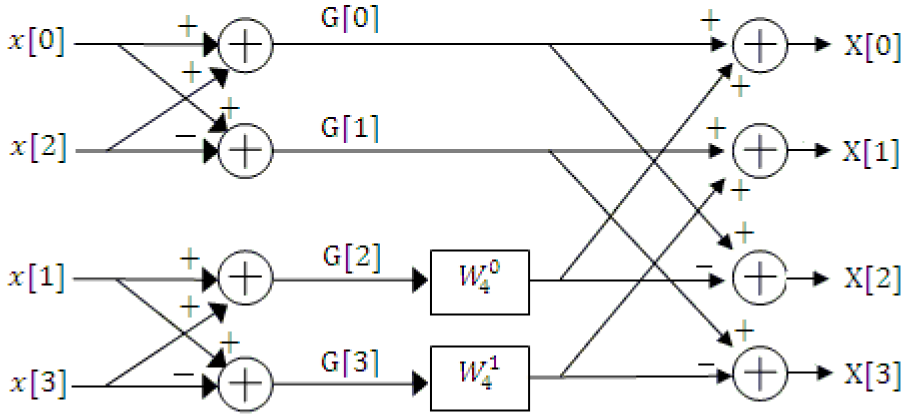




السؤال الثاني:

الحل:

المخطط الانسيابي لحساب تحويل فورييه السريع على أربع نقاط هو كالتالي:



وذلك لأنه إذا ما أعدنا عملية تحليل عملية حساب تحويل فورييه المتقطع نجد:

$$\mathrm{X} = \mathrm{T}_4\mathrm{x}$$

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ 1 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

القسم الأول:

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & W_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[2] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ W_4^1 & W_4^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[1] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & W_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[2] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W_4^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & W_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[1] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & W_2^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[2] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W_4^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & W_2^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[1] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[2] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W_4^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[1] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \end{bmatrix} = T_2 \begin{bmatrix} x[0] \\ x[2] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W_4^1 \end{bmatrix} T_2 \begin{bmatrix} x[1] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G[0] \\ G[1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W_4^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G[2] \\ G[3] \end{bmatrix}$$

حيث

$$\begin{bmatrix} G[0] \\ G[1] \end{bmatrix} = T_2 \begin{bmatrix} x[0] \\ x[2] \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} G[2] \\ G[3] \end{bmatrix} = T_2 \begin{bmatrix} x[1] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

القسم الثاني:

$$\begin{bmatrix} X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W_4^4 \\ 1 & W_4^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[2] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_4^2 & W_4^6 \\ W_4^3 & W_4^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[1] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W_4^4 \\ 1 & W_4^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[2] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W_4^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_4^2 & W_4^6 \\ W_4^2 & W_4^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[1] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W_2^2 \\ 1 & W_2^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[2] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W_4^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_2^1 & W_2^3 \\ W_2^1 & W_2^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[1] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[2] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W_4^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[1] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = T_2 \begin{bmatrix} x[0] \\ x[2] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W_4^1 \end{bmatrix} T_2 \begin{bmatrix} x[1] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G[0] \\ G[1] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W_4^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G[2] \\ G[3] \end{bmatrix}$$

المرشحات العملية

الكلمات المفتاحية:

أنواع المرشحات، المرشحات العملية، قالب المرشح، مرشح بتروورث، مرشح شيبيشسيف، تحويلات المرشحات.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على أنواع المرشحات المستمرة من حيث الاستجابة الترددية. كما سنعرض بعض المرشحات العملية وكيفية تصميمها وتوصيفها من خلال قالب المرشح. وسوف نركز بشكل خاص على مرشحات بتروورث ومرشحات تشيبيشيف ذات التمرير المنخفض، حيث سنعرض تابع الاستجابة الترددية لهذه المرشحات وعلاقات التصميم الخاصة بها. وفي النهاية سنبين طرق التحويل من مرشح ذو تردد منخفض إلى الأنواع الأخرى من المرشحات كمرشحات التمرير المرتفع ومرشحات تمرير الحزمة ومرشحات رفض الحزمة.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- أنواع المرشحات من حيث الاستجابة الترددية.
- توصيف المرشحات العملية باستخدام قالب المرشح.
- تصميم بعض المرشحات العملية مثل مرشح بتروورث ومرشح شيبيشيف.
- التحويل من مرشح تمرير منخفض إلى بقية أنواع المرشحات.

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على أنواع المرشحات المستمرة من حيث الاستجابة الترددية. كما سنعرض بعض المرشحات العملية وكيفية تصميمها وتوصيفها من خلال قالب المرشح. وسوف نركز بشكل خاص على مرشحات بتروورث ومرشحات تشيبيشيف ذات التمرير المنخفض، حيث سنعرض تابع الاستجابة الترددية لهذه المرشحات وعلاقات التصميم الخاصة بها. وفي النهاية سنبين طرق التحويل من مرشح ذو تردد منخفض إلى الأنواع الأخرى من المرشحات كمرشحات التمرير المرتفع ومرشحات تمرير الحزمة ومرشحات رفض الحزمة.

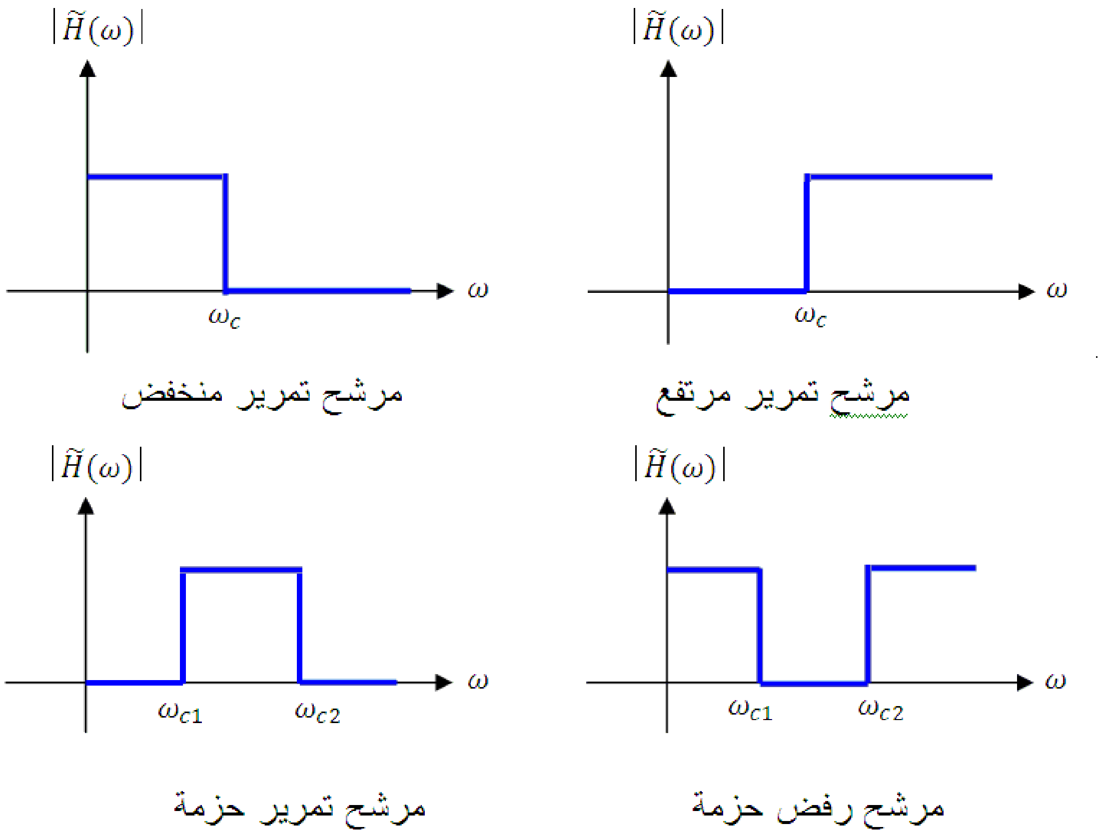
1. أنواع المرشحات المستمرة (Types of continuous filters)

غالباً ما يتم توصيف و تصميم المرشحات حسب عملها في المجال الترددي وليس في المجال الزمني. فنقول مثلاً أننا نريد مرشحاً يقوم بتمرير الترددات من الصفر وحتى قيمة تردد معين ولنقل f_c ويمنع مرور الترددات التي هي أكبر من هذا التردد. نسمي هذا المرشح بمرشح تمرير منخفض (Low–pass filter). وتبرز الحاجة العملية للمرشحات في كثير من المجالات كما هي الحال في مجال الاتصالات والتحكم وحتى في الإحصاء والاقتصاد وغيرها من المجالات. وذلك بهدف استخلاص الجزء المفيد من الإشارة وإزالة الأجزاء الغير مفيدة والتي تعيق عمل النظام أو تؤثر على جودته مثل الضجيج والإشارات الدخيلة الغير مرغوبة.

بشكل عام، يمكن أن نميز بين أربع أنواع من المرشحات المستمرة حسب عملها في المجال الترددي، وهي:

- مرشح تمرير منخفض (Low–pass filter): وهو مرشح يسمح بمرور الترددات المنخفضة من التردد الزاوي صفر إلى تردد زاوي معين ω_c، ويمنع مرور الترددات الأعلى من هذا التردد. ويسمى ω_c تردد قطع المرشح.
- مرشح تمرير عالي (High–pass filter): وهو عكس المرشح السابق، أي أنه مرشح يمنع مرور الترددات المنخفضة من التردد الزاوي صفر إلى تردد زاوي معين ω_c، ويسمح بمرور الترددات الأعلى من هذا التردد.
- مرشح تمرير حزمة (Band–pass filter): وهو مرشح يسمح بمرور حزمة ترددية من التردد الزاوي ω_{c1} إلى التردد الزاوي ω_{c2}، ويمنع مرور الترددات الأخرى خارج هذا المجال الترددي. ويسمى ω_{c1} بتردد القطع الأدنى للمرشح و ω_{c2} بتردد القطع الأعلى. وعندما يكون مجال التمرير ضيقاً جداً حيث يقترب ترددي القطع من بعضهما حتى ينطبقان على بعضهما، فإننا نسمي هذا المرشح بمرشح طنيني (Resonance filter).
- مرشح رفض حزمة (Band–stop filter): وهو عكس المرشح السابق، أي أنه مرشح يمنع مرور حزمة ترددية من التردد الزاوي ω_{c1} إلى التردد الزاوي ω_{c2}، ويسمح مرور الترددات الأخرى خارج هذا المجال الترددي. وعندما يكون مجال الرفض ضيقاً جداً حيث يقترب ترددي القطع من بعضهما حتى ينطبقان على بعضهما، فإننا نسمي هذا المرشح بمرشح حذف مركبة ترددية (Notch filter).

يبين الشكل التالي مطال الاستجابة الترددية $|\tilde{H}(\omega)|$ بدلالة التردد الزاوي لكل نوع من المرشحات السابقة:



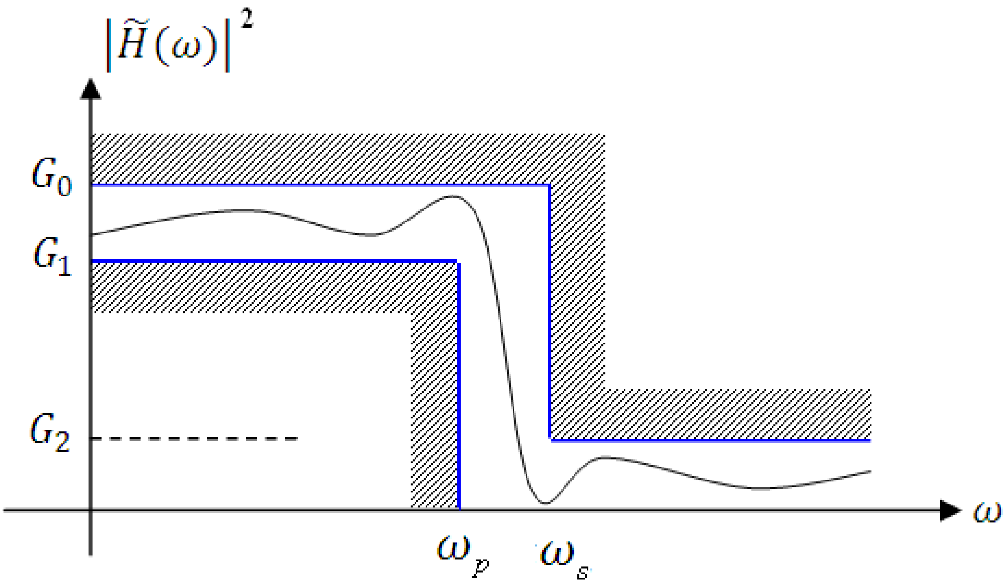
الشكل **Error! No text of specified style in document.**-1: أنواع المرشحات المثالية حسب الاستجابة الترددية.

تعتبر الاستجابة الترددية المبينة في الشكل السابق مثالية ولا يمكن تحقيقها عملياً. ولذلك سوف نرى في الفقرة القادمة كيفية توصيف المرشحات العملية.

2. المرشحات العملية (Practical filters)

من الصعب عملياً تحقيق مرشح ذو قطع حاد عند تردد معين وذلك لأن مثل هذا المرشح هو مرشح غير سببي ولا يمكن تحقيقه عملياً إلا بتقريب معين. وبالتالي فإن الاستجابة المطالية للمرشح العملي ستختلف عن الشكل المثالي.

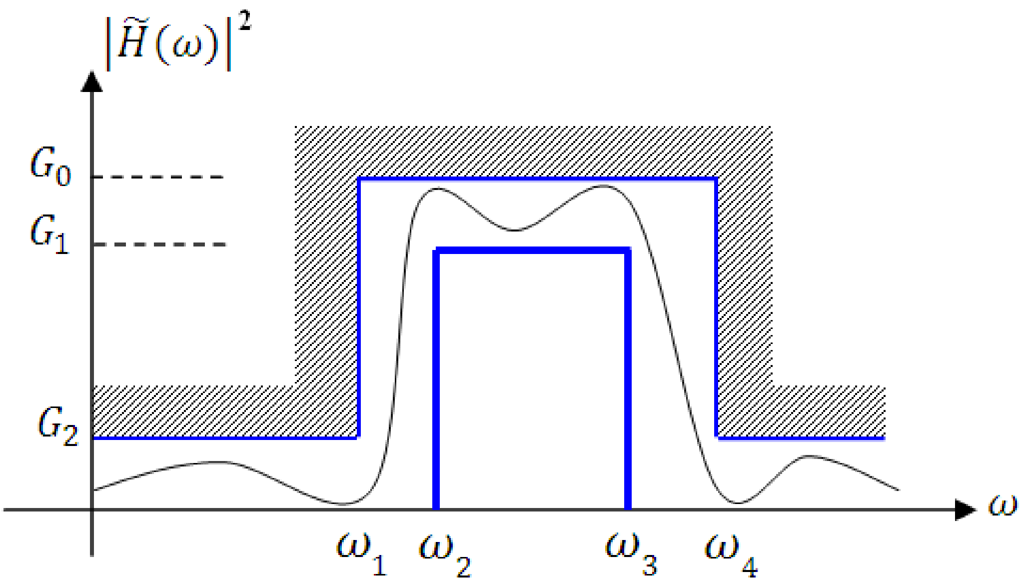
عملياً نقوم بتوصيف المرشح من خلال تحديد المجال الذي يجب أن يقع فيه منحني مربع مطال الاستجابة الترددية $|\tilde{H}(\omega)|^2$ أو ما يسمى قالب المرشح (filter mask)، كما هو موضح في الشكل التالي بالنسبة لمرشح تمرير منخفض:



الشكل **.Error! No text of specified style in document**- 2: قالب مرشح تمرير منخفض.

في الشكل نرى أن منحني استجابة المرشح في مجال التمرير يجب أن يكون محصوراً بين قيمتين هما G_0 و G_1 ويكون الربح في مجال القطع محصوراً بين الصفر و G_2. أما الانتقال بين مجالين فيجب أن يتم بين التردد الزاوي ω_p و ω_s.

ويبين الشكل التالي قالب المرشح بالنسبة لمرشح تمرير حزمة.



الشكل **.Error! No text of specified style in document**- 3: قالب مرشح تمرير حزمه.

هناك العديد من الطرق لتحقيق مرشحات عملية تقع ضمن قالب معطى من قبل المصمم والتي سنرى بعضاً منها في الفقرات التالية. ولتسهيل عملية التصميم بغض النظر عن القيم الحقيقية للربح وترددات القطع فإنه يجري عادةً التعبير عن هذه القيم بشكل مقيس. حيث يتم تقييس قيم الربح بالنسبة لقيمة الربح الأعظمي G_0. إذ نعتبر أن قيمة الربح G_0 تساوي الواحد، ويتم التعبير عن قيم الربح G_1 و G_2 بشكل نسبة من G_0. أي نعبر عن الربح G_1 بالنسبة G_1/G_0 وكذلك نعبر عن الربح G_2 بالنسبة G_2/G_0.

نعرف مقدار تغير الربح في مجال التمرير بالنسبة:

$$\frac{G_1}{G_0} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$$

غالباً، وبدل التكلم عن الربح في مجال عدم التمرير فإننا نستخدم مصطلح التخميد A المعرف كمقلوب الربح المقيس، أي:

$$A = \frac{G_0}{G_2}$$

وكذلك يتم تقييس المحور الترددي بالنسبة لتردد معين ω_0، كأن يكون بالنسبة لتردد القطع $\omega_0 = \omega_c$ ، عند – 3dB (التردد الذي ينخفض عنده مربع مطال الربح إلى النصف $G_0/2$) أو تردد مجال التمرير $\omega_0 = \omega_p$ أو أي تردد آخر وذلك بحسب طريقة التصميم. هذا ويتم التعبير عن قالب المرشح بدلالة التردد المقيس $\omega_n = \omega/\omega_0$ بدلاً من التردد الحقيقي ω.

نسمي النسبة k بين تردد التمرير وتردد القطع بنسبة الانتقال (transition ratio) المعرفة بالشكل التالي:

$$k = \frac{\omega_p}{\omega_s}$$

سنعرض فيما يلي بعض طرق تصميم المرشحات الشهيرة بالنسبة لمرشح تمرير حزمة منخفض، ثم سنعرض طرق التحويل المستخدمة للحصول على بقية أنواع المرشحات انطلاقاً من مرشح التمرير المنخفض.

يتم إعطاء تصميم المرشح من خلال تحديد مربع مطال الاستجابة الترددية:

$$F(\omega_n) = \left|\widetilde{H}(\omega_n)\right|^2$$

وذلك بدلالة التردد الزاوي المقيس. أو أيضاً بإعطاء تابع تحويل لابلاس لاستجابته النبضية $H(s)$ بدلالة المتحول المقيس s المعرف بالعلاقة:

$$s = \frac{p}{\omega_0}$$

وكم نعلم، ترتبط الاستجابة الترددية بتحويل لابلاس بالنسبة لمرشح مستقر بالعلاقة:

$$\widetilde{H}(\omega_n) = H(s)|_{s=j\omega_n} = H(j\omega_n)$$

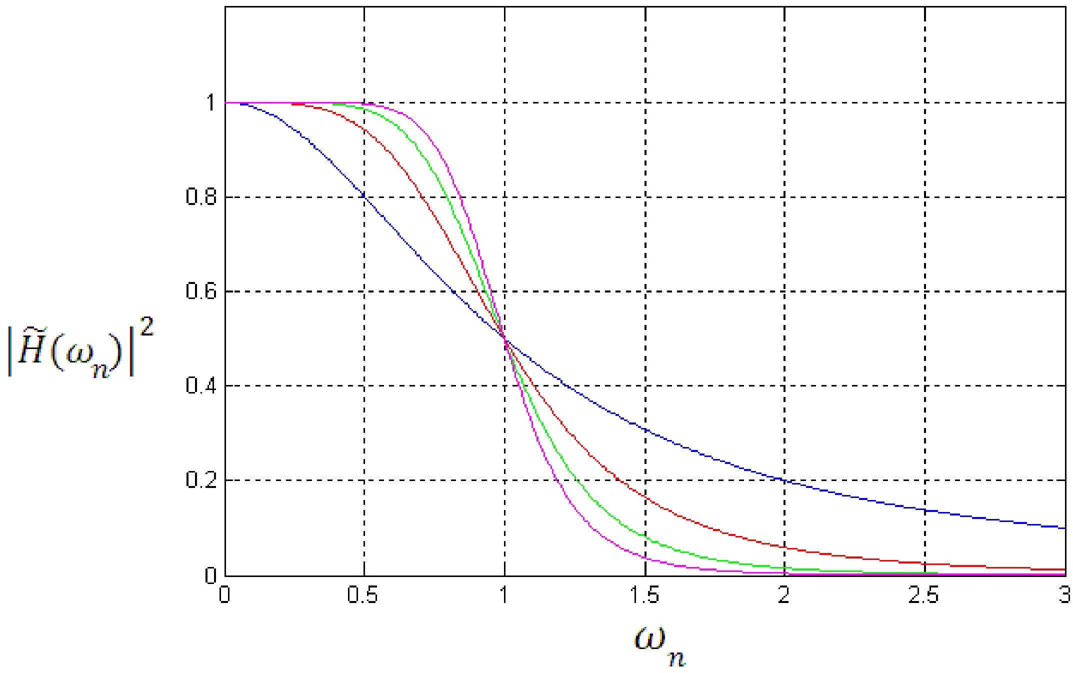
1.2. مرشح بتروورث (Butterworth filter)

يعطى مرشح بتروورث ذو التمرير المنخفض من الدرجة N بتابع مربع مطال الاستجابة الترددية التالي:

$$F(\omega_n) = \frac{1}{1+\omega_n^{2N}}$$

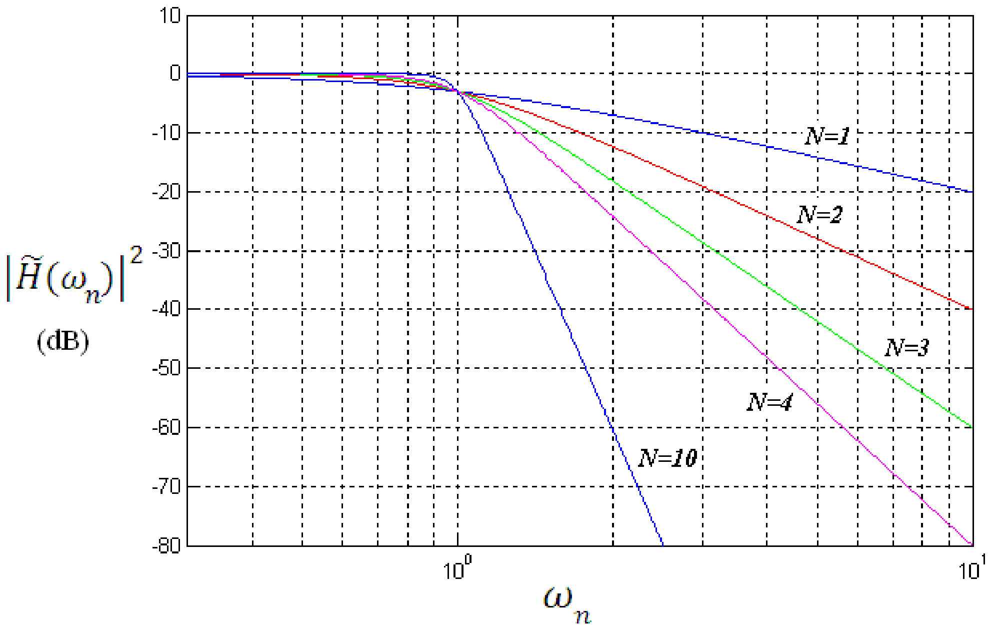
حيث $\omega_n = \frac{\omega}{\omega_c}$ هو التردد المقيس بالنسبة لتردد القطع عند $-3dB$. وهو عادةً أعلى من تردد التمرير ω_p وأقل من تردد القطع ω_s.

يبين الشكل التالي الاستجابة الترددية لهذا المرشح بالمقياس لخطي من أجل قيم مختلفة لدرجة المرشح.



الشكل **Error! No text of specified style in document.**-4: الاستجابة الترددية لمرشح بتروورث ذو التمرير المنخفض من أجل قيم مختلفة لدرجة المرشح بالمقياس الخطي.

يبين الشكل التالي الاستجابة الترددية لهذا المرشح بالديسيبل والمقياس اللوغاريتمي من أجل قيم مختلفة لدرجة المرشح.



الشكل **.Error! No text of specified style in document-** 5: الاستجابة الترددية لمرشح بتروورث ذو التمرير المنخفض من أجل قيم مختلفة لدرجة المرشح.

ويأخذ هذا التابع القيم الخاصة التالية:

$$F(0) = 1$$
$$F(1) = \frac{1}{2}$$
$$F(\infty) = 0$$

يمتاز تابع الاستجابة الترددية بتسطح أعظمي (Maximally flat) ضمن مجال التمرير، أي لا يبدي منحني الاستجابة أي تعرجات في مجال التمرير. كما يتناقص تابع الربح في مجال القطع بميل قدره $N \times 20\ dB/decade$ من أجل مرشح من الدرجة N.

يتم توصيف مرشح بتروورث بشكل كامل من خلال المقدارين: درجة المرشح N وتردد القطع عند 3dB أي ω_c.

يمكن تحديد درجة المرشح اللازمة انطلاقاً من محددات قالب المرشح A و ε و ω_p و ω_s بالعلاقة التالية:

$$N = \frac{1}{2}\frac{\log_{10}[(A^2-1)/\varepsilon^2]}{\log_{10}[\omega_s/\omega_p]}$$

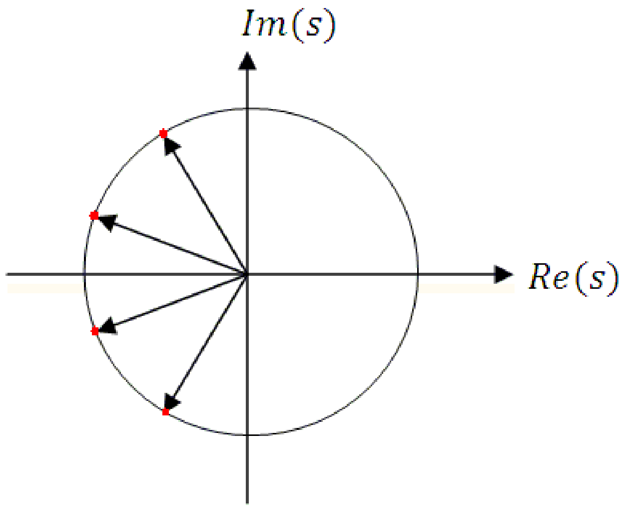
يكون تابع تحويل لابلاس $H(s)$ لهذا المرشح معرف بحيث يكون:

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1+(-1)^N s^{2N}}$$

حيث يكون لكثير الحدود $\{1+(-1)^N s^{2N}\}$ $2N$ صفراً تمثل أقطاب التابع $H(s)H(-s)$ موزعة بشكل منتظم على دائرة نصف قطرها واحد معطاة بالعلاقة:

$$s_k = e^{j\frac{\pi}{2N}} e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi k}{2N}\right)}, \quad 0 \le k \le 2N-1$$

لذلك يكون أقطاب التابع $H(s)$ هي نصف الأقطاب الواقعة على يسار المحور التخيلي لكي يكون المرشح مستقراً، وهي مترافقة مثنى مثنى لكي يكون المرشح حقيقياً (أي الاستجابة النبضية حقيقية).



الشكل **.Error! No text of specified style in document**- 6: توزع أقطاب مرشح بتروورث من أجل N=4.

2.2. مرشح شيبيشيف (Chebyshev filter)

يعطى مرشح بتروورث ذو التمرير المنخفض من الدرجة N بتابع مربع مطال الاستجابة الترددية التالي:

$$F(\omega_n) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\omega_n)}$$

حيث $\omega_n = \frac{\omega}{\omega_p}$ هو التردد المقيس بالنسبة لتردد تمرير الحزمة و ε ثابت حقيقي موجب يحدد مقدار تعرجات الربح (ripple) في مجال التمرير.

وكذلك نعرف $T_N(\omega_n) = \cos(N cos^{-1}(\omega_n))$ وهو كثير حدود شيبيشيف من الدرجة N. وهو يعطى بالعلاقة التراجعية التالية:

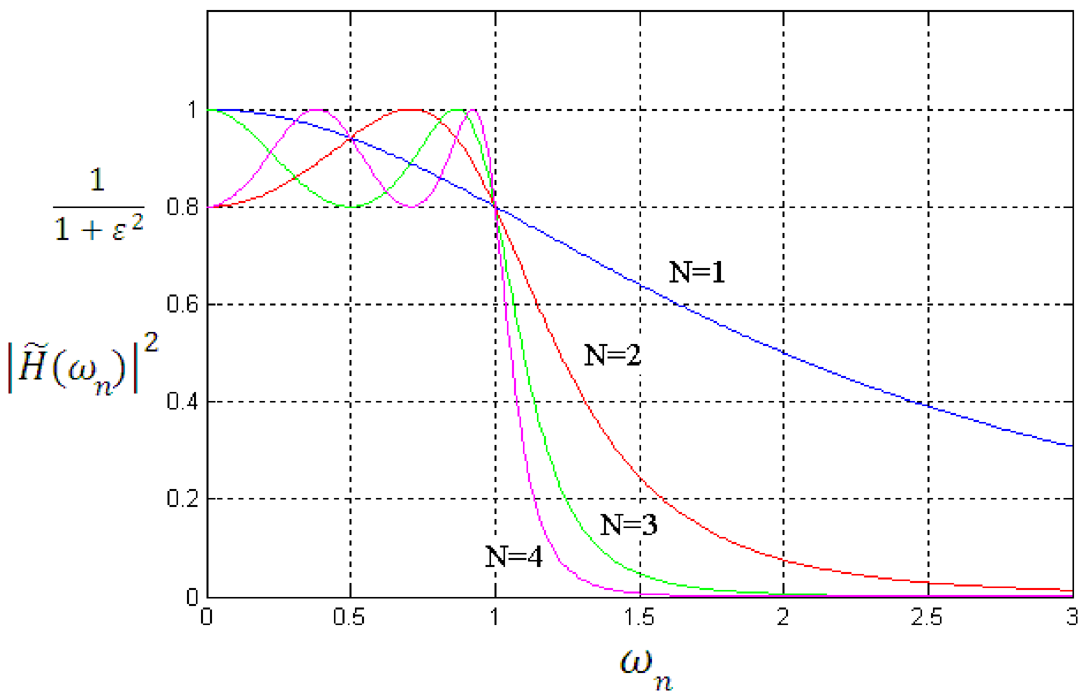
$$T_{N+1}(\omega_n) = 2\omega_n T_N(\omega_n) - T_{N-1}(\omega_n), \qquad N \geq 3$$

حيث: $T_1(\omega_n) = \omega_n$ و $T_2(\omega_n) = 2\omega_n^2 - 1$

ويأخذ هذا التابع القيم الخاصة التالية:

$$F(1) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$$
$$F(\infty) = 0$$

يبين الشكل التالي الاستجابة الترددية لهذا المرشح بالمقياس الخطي من أجل قيم مختلفة لدرجة المرشح.



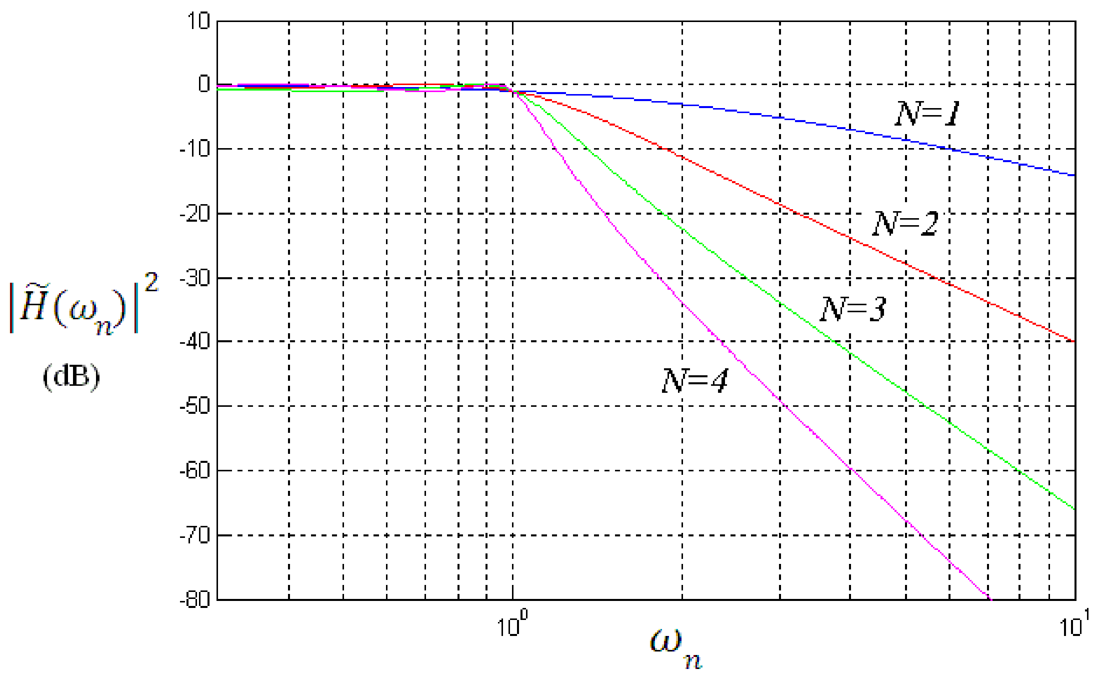
الشكل **Error! No text of specified style in document.**-7: الاستجابة الترددية لمرشح شيبيشيف ذو التمرير المنخفض من أجل قيم مختلفة لدرجة المرشح بالمقياس الخطي مع $\boldsymbol{\varepsilon = 1}$.

تكون قيمة هذا التابع ضمن مجال التمرير محصورة بين $\frac{1}{1+\varepsilon^2}$ و1. أي أن ε تحدد مطال التعرجات الأعظمي في مجال التمرير، وكلما كان ε كبيراً، كان مطال هذه التعرجات أصغر.

وكما هو الحال في مرشح بتروورث، يتناقص تابع الربح في مجال القطع بميل قدره $N \times 20\ dB/decade$ من أجل مرشح من الدرجة N. ولكن يتميز مرشح شيبيشيف بمجال انتقال أصغر (أي الفرق بين تردد التمرير ω_p وتردد القطع ω_s) من أجل نفس قيم الربح المطلوبة في قالب المرشح.

يمكن تحديد درجة المرشح اللازمة انطلاقاً من محددات قالب المرشح A و ε و ω_p و ω_s بالعلاقة التالية:

$$N = \frac{cosh^{-1}\left[\left(\sqrt{A^2-1}\right)/\varepsilon\right]}{cosh^{-1}\left[\omega_s/\omega_p\right]}$$



الشكل **Error! No text of specified style in document.**- 8: الاستجابة الترددية لمرشح شيبيشيف ذو التمرير المنخفض من أجل قيم مختلفة لدرجة المرشح بالمقياس اللوغاريتمي.

أما أقطاب تابع تحويل لابلاس لهذا المرشح فهي تعطى بالعلاقة:

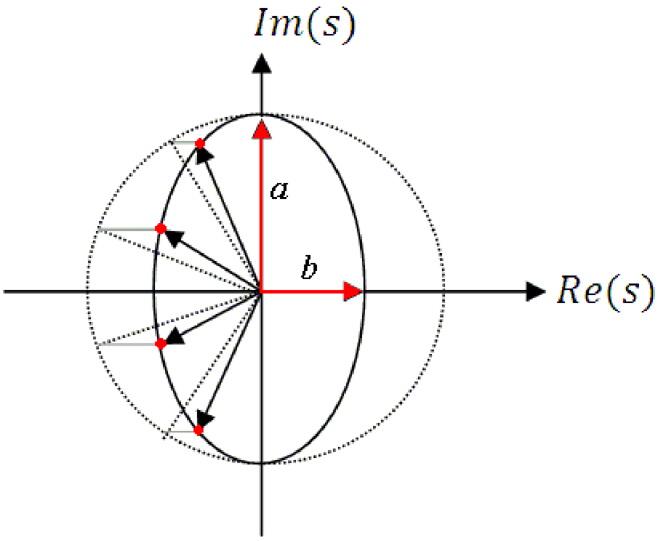
$$s_k = x_k + jy_k$$

حيث:

$$x_k = -sh\left(\frac{1}{N}sh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)sin\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right)$$

$$y_k = -ch\left(\frac{1}{N}sh^{-1}(\frac{1}{\varepsilon})\right)cos\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right)$$

وهي موزعة على قطع ناقص نصف قطره الكبير هو $a = ch^2\left(\frac{1}{N}sh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$ ونصف قطره الصغير هو $a = sh^2\left(\frac{1}{N}sh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$ بمسافات زاوية منتظمة قدرها $\frac{\pi}{N}$.



الشكل **Error! No text of specified style in document.**- 9: توزع أقطاب مرشح شسيشيف من أجل N=4.

3. التحويلات الترددية (Filter transformations)

رأينا في الفقرة السابقة نوعين من المرشحات العملية من نوع تمرير منخفض، أما من أجل الأنواع الأخرى من المرشحات فإننا نسقط معاملات تصميم المرشح على مرشح تمرير منخفض نستخدم التحويل المناسب للحصول على المرشح من النوع المرغوب به. سوف نبين ذلك على مرشح التمرير المنخفض التالي:

$$H_{lp}(p) = \frac{1}{1+\tau p} = \frac{1}{1+p/\omega_c}$$

حيث أن تردد قطعه عند (3dB) هو $\omega_c = \frac{1}{\tau}$.

1.3. التحويل من مرشح تمرير منخفض إلى مرشح تمرير منخفض (Lowpass to lowpass filter transformation)

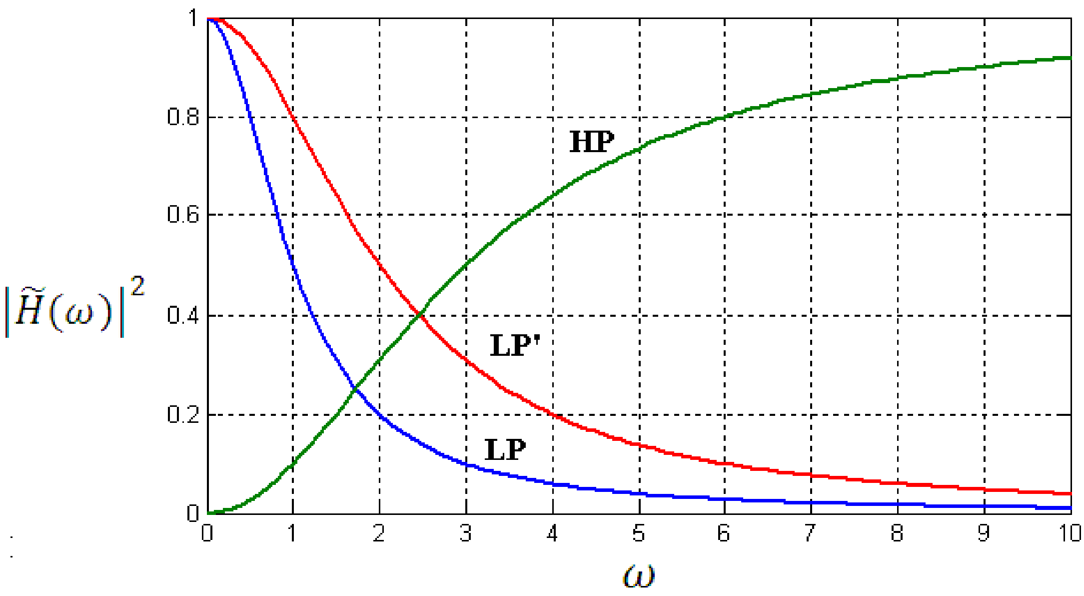
إذا كان $H_{lp}(p)$ تابع التحويل لمرشح تمرير منخفض بتردد قطع ω_c ونريد الحصول على تابع التحويل $H'_{lp}(p)$ لمرشح تمرير منخفض ولكن بتردد قطع مختلف ω'_c، فإن التحويل الذي يحقق ذلك هو:

$$H'_{lp}(p) = H_{lp}(p)\Big|_{p=\frac{\omega_c}{\omega'_c}\times p}$$

نطبق ذلك على المرشح المعطى، فنحصل على تابع لاستجابة الجديد التالي:

$$H'_{lp}(p) = \frac{1}{1+\frac{\omega_c}{\omega'_c}\times p/\omega_c} = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega'_c}}$$

وهو مرشح تمرير منخفض بتردد قطع ω'_c. يبين الشكل التالي منحني الاستجابة الترددية لمرشح التمرير المنخفض ذي تردد قطع $\omega_c = 1$ والمرشح المحول ذي تردد القطع الجديد $\omega'_c = 2$.



الشكل Error! No text of specified style in document.- 10: التحويل إلى مرشح تمرير منخفض آخر أو مرشح تمرير عالي.

2.3. التحويل من مرشح تمرير منخفض إلى مرشح تمرير مرتفع (Lowpass to lowpass filter transformation)

يتم التحويل من مرشح التمرير المنخفض إلى مرشح تمرير الحزمة ذي تابع التحويل $H_{hp}(p)$ بترددي القطع الزاوي العلوي ω_{ch} باستخدام العلاقة التالية:

$$H_{hp}(p) = H_{lp}(p)\big|_{p=\omega_{ch}\frac{\omega_c}{p}}$$

نطبق ذلك على المرشح المعطى، فنحصل على تابع لاستجابة الجديد التالي:

$$H_{hp}(p) = \frac{1}{1+\omega_{ch}\frac{\omega_c}{p}/\omega_c} = \frac{p}{p+\omega_{ch}}$$

وهو مرشح تمرير مرتفع بتردد قطع ω_{ch}. يبين الشكل السابق منحنى الاستجابة الترددية لمرشح التمرير المنخفض ذي تردد قطع $\omega_c = 1$ والمرشح المحول ذي تردد القطع الجديد $\omega_{ch} = 3$.

3.3. التحويل من مرشح تمرير منخفض إلى مرشح تمرير حزمة (Lowpass to highpass filter transformation)

يتم التحويل من مرشح التمرير المنخفض إلى مرشح تمرير الحزمة ذي تابع التحويل $H_{bp}(p)$ بترددي القطع الزاويين السفلي ω_{cl} والعلوي ω_{ch} باستخدام العلاقة التالية:

$$H_{bp}(p) = H_{lp}(p)\Big|_{p=\omega_c\frac{p^2+\omega_0}{B.p}}$$

حيث: $B = \omega_{ch} - \omega_{cl}$، و $\omega_0 = \sqrt{\omega_{cl}.\omega_{ch}}$.

نطبق ذلك على المرشح المعطى، فنحصل على تابع لاستجابة الجديد التالي:

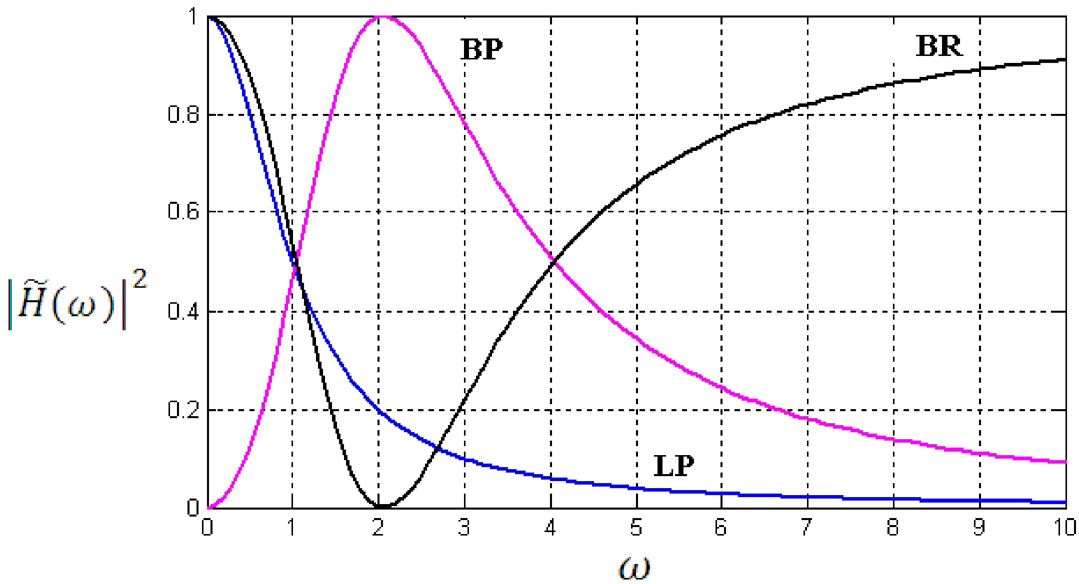
$$H_{bp}(p) = \frac{1}{1 + \omega_c\frac{p^2+\omega_0}{B.p}/\omega_c} = \frac{1}{1 + \frac{p^2+\omega_0}{B.p}}$$

$$= \frac{B.p}{p^2 + B.p + \omega_0}$$

ويمكن التأكد من أنه مرشح تمرير حزمة بترددي قطع ω_{cl} و ω_{ch}.

$$\tilde{H}_{bp}(\omega) == \frac{jB\omega}{-\omega^2 + jB\omega + \omega_0}$$

يبين الشكل التالي منحني الاستجابة الترددية لمرشح التمرير المنخفض ذي تردد قطع $\omega_c = 1$ والمرشح المحول $\omega_{cl} = 3$ و $\omega_{ch} = 6$.



الشكل Error! No text of specified style in document.-11: التحويل إلى مرشح تمرير حزمة أو رفض حزمة.

4.3. التحويل من مرشح تمرير منخفض إلى مرشح رفض حزمة (Lowpass to band reject filter transformation)

يتم التحويل من مرشح التمرير المنخفض إلى مرشح رفض الحزمة ذي تابع التحويل $H_{br}(p)$ بترددي القطع الزاويين السفلي ω_{cl} والعلوي ω_{ch} باستخدام العلاقة التالية:

$$H_{br}(p) = H_{lp}(p)\Big|_{p=\omega_c \frac{B.p}{p^2+\omega_0}}$$

حيث: $B = \omega_{ch} - \omega_{cl}$، و $\omega_0 = \sqrt{\omega_{cl}.\omega_{ch}}$.

نطبق ذلك على المرشح المعطى، فنحصل على تابع لاستجابة الجديد التالي:

$$H_{br}(p) = \frac{1}{1 + \omega_c \frac{B.p}{p^2+\omega_0} / \omega_c} = \frac{1}{1 + \frac{B.p}{p^2+\omega_0}} = \frac{p^2 + \omega_0}{p^2 + B.p + \omega_0}$$

ويمكن التأكد من أنه مرشح رفض حزمة بترددي قطع ω_{cl} و ω_{ch}.

يبين الشكل السابق منحني الاستجابة الترددية لمرشح التمرير المنخفض ذي تردد قطع $\omega_c = 1$ والمرشح المحول $\omega_{cl} = 3$ و $\omega_{ch} = 6$.

أسئلة وتمارين الفصل الثاني عشر
المرشحات العملية

أسئلة عامة

1– عدد أنواع المرشحات المستمرة حسب طبيعة التمرير الترددي لها.
تغذية راجعة: راجع فقرة "أنواع المرشحات المستمرة ".

2– ما هو قاب المرشح (filter mask)؟
تغذية راجعة: راجع فقرة "المرشحات العملية ".

3– عدد نوعين من أنواع المرشحات العملية.
تغذية راجعة: راجع فقرة "المرشحات العملية".

4– بماذا يتميز مرشح شيبيشيف عن مرشح بتروورث؟
تغذية راجعة: راجع فقرة "مرشح شيبيشيف".

5– كيف يمكن لحصول على تابع تحويل مرشح تمرير مرتفع $H_{hp}(p)$ انطلاقاً من مرشح تمرير منخفض ذو تابع تحويل $|H_{lp}(p)$؟
تغذية راجعة: راجع فقرة "التحويل من مرشح تمرير منخفض إلى مرشح تمرير مرتفع".

إجابات – حلول الأسئلة العامة السابقة

السؤال الأول:

الحل: يوجد أربع أنواع أساسية للمرشحات وهي:

مرشح تمرير منخفض (LPF)

مرشح تمرير عالي (HPF)

مرشح تمرير حزمة (BPF)

مرشح رفض حزمة (BRF)

السؤال الثاني:

الحل:

نقوم بتوصيف المرشح من خلال تحديد المجال الذي يجب أن يقع فيه منحني مربع مطال الاستجابة الترددية $\left|\tilde{H}(\omega)\right|^2$.

السؤال الثالث:

الحل:

مرشح بتروورث

مرشح شيبيشيف

السؤال الرابع:

الحل: يتميز مرشح شيبيشيف بمجال انتقال أصغر (أي الفرق بين تردد التمرير ω_p وتردد القطع ω_s) من أجل نفس قيم الربح المطلوبة في قالب المرشح.

السؤال الخامس:

الحل: يتم ذلك باستخدام التحويل التالي:

$$H_{hp}(p) = H_{lp}(p)\Big|_{p=\omega_{ch}\frac{\omega_c}{p}}$$