الجامعة الافتراضية السورية

SYRIAN VIRTUAL UNIVERSITY

الرياضيات المتقطعة

الدكتور رامز قدسية

ISSN: 2617-989X

Books & Refrences

الرياضيات المتقطعة
رامز قدسية

من منشورات الجامعة الافتراضية السورية

الجمهورية العربية السورية 2018

Discrete Mathematics
Ramez Koudsieh

Publications of the Syrian Virtual University (SVU)

Syrian Arab Republic, 2018

ISSN: 2617-989X

الفهرس

ISSN: 2617-989X

ISSN: 2617-989X

الفصل الاول:المنطق والبراهين

ISSN: 2617-989X

الكلمات المفتاحية:

المنطق الفرضي، عملية منطقية، عملية النفي، عملية الفصل، عملية الفصل الحصري، عملية الضم، قيمة منطقية، جدول الحقيقة، فرضية، فرضية مركبة، الفرضية الكلية، الفرضية المتناقضة، التكافؤ الفرضي، فرضية شرطية، فرضية شرطية ثنائية الاتجاه، النفي الإيجابي، المقلوب، المعكوس، الإسناديات، المكممات، تابع فرضيات، المكمم العام، المكمم الوجودي، البرهان، البرهان المباشر، نقض الفرض، البرهان الشامل، البرهان بالحالات، الاستقراء الرياضي، الاستقراء القوي.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على المنطق الرياضي وتحديد معنى العبارة الرياضية بكافة أنواعها البسيطة والمركبة والشرطية، وكيفية نفيها وإيجاد مكافئات منطقية لها والتعرف إلى الإسناديات والمكممات. المنطق هو الأساس الرياضي الذي نعتمد عليه في علم الحاسوب. ومن أجل فهم الرياضيات، علينا فهم ما يجعل حجة رياضية صحيحة والتي هي البرهان والذي نتطرق إليه بكافة أشكاله المباشرة وغير المباشرة، البرهان التقليدي والبرهان بالاستقراء الرياضي التقليدي والقوي.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- المنطق الرياضي والعمليات الأساسية عليه.
- الفرضيات البسيطة والمركبة والشرطية والمتكافئة.
- الإسناديات (القضايا) والمكممات العامة والوجودية وكيفية نفيها.
- الطرق المختلفة للبراهين: المباشرة وغير المباشرة، نقض الفرض، النفي الإيجابي.
- البرهان بالاستقراء الرياضي التقليدي والقوي.

1. المنطق الفرضي propositional logic

تعريف 1: الفرضية proposition هي جملة خبرية يمكن أن تكون صحيحة أو خاطئة لكن ليس الاثنان معاً.

مثال 1: جميع الجمل التالية هي فرضيات (الأولى والثالثة صحيحة، أما الثانية والرابعة فهي خاطئة).

1. واشنطن هي عاصمة الولايات المتحدة الأميركية
2. باريس هي عاصمة سورية
3. $1 + 2 = 3$.
4. $5 + 2 = 8$

مثال 2: الجمل التالية ليست فرضيات

1. كم الوقت؟
2. اقرأ بتركيز
3. $x + 1 = 2$

نستخدم الحروف للدلالة عن متحولات الفرضيات. الحروف التقليدية المستخدمة لهذه المتحولات $p, q, r, s, \ldots$.
تكون قيمة الحقيقة للفرضية صحيحة، نرمز لها بالرمز T، إذا كانت الفرضية صحيحة، وتكون قيمة الحقيقة للفرضية خاطئة، نرمز لها بالرمز F، إذا كانت الفرضية خاطئة.

نسمي مجال المنطق الذي يتعامل مع الفرضيات الحساب الفرضي propositional calculus أو منطق الفرضيات propositional logic.

1.1. العمليات المنطقية الأساسية basic logical operations

ثلاث عمليات منطقية أساسية هي الضم (و) conjunction، الفصل (أو) disjunction والنفي negation والتي يقابلها على الترتيب في اللغة الإنكليزية الكلمات "and", "or", "not".

عملية النفي negation

تعريف 2: لتكن الفرضية p، يمكن نفي الفرضية p والذي يرمز له بالرمز $\sim p$ وذلك بكتابة "إنها ليست الحالة ..." أو "من الخطأ أن يكون ..." قبل p، أو، إذا أمكن ذلك، بإدخال كلمة "ليس" (not) في p. قيم الحقيقة ل $\sim p$ هي عكس قيم الحقيقة ل p، كما يبينه جدول الحقيقة truth table التالي:

p	$\sim p$
T	F
F	T

مثال 3: أوجد نفي الفرضية التالية: "جوّال ابراهيم لديه ما لا يقل عن 32 GB من الذاكرة".

الحل: "جوّال ابراهيم ليس لديه ما لا يقل عن 32 GB من الذاكرة".

مثال 4: أوجد نفي الفرضية التالية: "حاسب كاتيا يعمل على نظام ويندوز".

الحل: "حاسب كاتيا لا يعمل على نظام ويندوز".

ISSN: 2617-989X

عملية الضم conjunction

تعريف 3: لتكن الفرضيتين p, q . ضم الفرضيتين p و q هي فرضية مركبة يرمز لها ب $p \wedge q$ وتقرأ " p و q". قيمة الحقيقة ل $p \wedge q$ تكون صحيحة عندما تكون قيمة الحقيقة لكل من p و q صحيحة، وتكون خاطئة فيما عدا ذلك كما هو مبين في جدول الحقيقة التالي:

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

مثال 5: أوجد ضم الفرضيتين التاليتين p, q حيث p "جوّال ابراهيم لديه ما لا يقل عن $32\ GB$ من الذاكرة" و q "سرعة معالج جوال ابراهيم أكبر من $1\ GHz$"

الحل: "جوّال ابراهيم لديه ما لا يقل عن $32\ GB$ من الذاكرة و سرعة معالجه أكبر من $1\ GHz$".

عملية الفصل disjunction

تعريف 4: لتكن الفرضيتين p, q . فصل الفرضيتين p و q هي فرضية مركبة يرمز لها ب $p \vee q$ وتقرأ " p أو q ". قيمة الحقيقة ل $p \vee q$ تكون خاطئة عندما تكون قيمة الحقيقة لكل من p و q خاطئة، وتكون صحيحة فيما عدا ذلك كما هو مبين في جدول الحقيقة التالي:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

مثال 6: أوجد فصل الفرضيتين التاليتين p, q حيث p "جوّال ابراهيم لديه ما لا يقل عن $32\ GB$ من الذاكرة" و q "سرعة معالج جوال ابراهيم أكبر من $1\ GHz$"

الحل: "جوّال ابراهيم لديه ما لا يقل عن 32 GB من الذاكرة أو سرعة معالجه أكبر من 1 GHz".

ISSN: 2617-989X

عملية الفصل الحصري Exclusive or (XOR)

تعريف 5: لتكن الفرضيتين p, q . فصل حصري للفرضيتين p و q هي فرضية مركبة يرمز لها ب $p \oplus q$ وتقرأ " p أو حصرياً q ". قيمة الحقيقة ل $p \oplus q$ تكون صحيحة عندما تكون واحدة فقط من p و q صحيحة، وتكون خاطئة فيما عدا ذلك كما هو مبين في جدول الحقيقة التالي:

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

2.1. الفرضيات المركبة compound propositions

تعريف 6: هي الفرضيات التي يتم تشكيلها من فرضيات موجودة باستخدام العمليات المنطقية الأساسية $(\sim, \wedge, \vee)$ وعمليات منطقية أخرى سنراها لاحقاً.

إن قيمة الحقيقة للفرضية المركبة تحددها قيم الحقيقة لمكوناتها التي تتألف منها. الطريقة البسيطة المختصرة لإيجاد قيم الحقيقة للفرضية المركبة تكون من خلال استخدام جدول الحقيقة.

كيفية تكوين جدول الحقيقة: تمثل الأعمدة الأولى للجدول المتحولات المنطقية، $p, q, \ldots$، كما أنه يوجد في الجدول عدد كاف من الصفوف لتمثيل جميع الحالات (التوافقيات) الممكنة من T و F لهذه المتحولات. في حالة متغيرين اثنين يلزم وجود 4 صفوف، وفي حالة 3 متغيرات يلزم وجود 8 صفوف (الحالة العامة n متغير يلزم وجود 2^n صف). ويوجد أيضاً عمود لكل مرحلة من مراحل تكوين الفرضية المركبة وقيمة الحقيقة عند كل خطوة تعين من الخطوات السابقة لها، وفي النهاية نحصل على قيمة الحقيقة للفرضية في العمود الأخير من الجدول.

يتم تحديد الأولويات في تطبيق العمليات المنطقية على النحو التالي: $\sim$ أولاً ثم $\wedge$ وأخيراً $\vee$.

مثال 7: أوجد الحقيقة للفرضية المركبة $(p \vee \sim q) \wedge \sim (p \wedge q)$

الحل: بما أنه لدينا متحولان p و q بالتالي لدينا 4 صفوف، كما يبينه الجدول التالي:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$(p \vee \sim q) \wedge \sim (p \wedge q)$
T	T	F	F	T	T	F	F
T	F	F	T	T	F	T	T
F	T	T	F	F	F	T	F
F	F	T	T	T	F	T	T

ISSN: 2617-989X

مثال 8: أوجد الحقيقة للفرضية المركبة $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$.

الحل: بما أنه لدينا 3 متحولات p و q و r بالتالي لدينا 8 صفوف، كما يبينه الجدول التالي:

p	q	r	$(p \wedge r)$	$(q \wedge r)$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	F
T	F	T	T	F	T
T	F	F	F	F	F
F	T	T	F	T	T
F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F
F	F	F	F	F	F

3.1.التكافؤ الفرضي propositional equivalences

الفرضية الكلية والفرضية المتناقضة tautologies and contradictions

تعريف 7: الفرضية الكلية $P\ (p, q, \ldots)$ هي فرضية مركبة قيمتها المنطقية صحيحة دائماً مهما كانت القيم المنطقية لمتحولاتها $p, q, \ldots.$

مثال 9: الفرضية $(p \vee \sim p)$ هي فرضية كلية لأن قيمتها المنطقية صحيحة دائماً كما يبينه جدول الحقيقة لها:

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
T	F	T
F	T	T

تعريف 8: الفرضية المتناقضة $P(p, q, \ldots)$ هي فرضية مركبة قيمتها المنطقية خاطئة دائماً مهما كانت القيم المنطقية لمتحولاتها $p, q, \ldots$

مثال 10: الفرضية $(p \wedge \sim p)$ هي فرضية متناقضة لأن قيمتها المنطقية خاطئة دائماً كما يبينه جدول الحقيقة لها:

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
T	F	F
F	T	F

التكافؤ المنطقي logical equivalences

تعريف 9: نقول عن فرضيتين مركبتين $P(p, q, \ldots)$ و $Q(p, q, \ldots)$ أنهما متكافئتان منطقياً إذا وفقط إذا تطابق جدولا الحقيقة لهما وذلك من أجل جميع التراكيب الممكنة للقيم المنطقية لمتحولاتهما $p, q, \ldots.$ نرمز لذلك بالرمز $P(p, q, \ldots) \equiv Q(p, q, \ldots)$

ISSN: 2617-989X

مثال 11: الفرضيتان $\sim(p \wedge q)$ و $(\sim p \vee \sim q)$ متكافئتان $(\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ قانون دومرغان).

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

يحتوي الجدول التالي على بعض التكافؤات الهامة. في هذه التكافؤات T تدل على فرضية مركبة قيمتها المنطقية صحيحة دائماً و F تدل على فرضية مركبة قيمتها المنطقية صحيحة دائماً.

التكافؤ	الاسم
$p \wedge T \equiv p$ $p \vee F \equiv p$	قوانين التطابق Identity laws
$p \vee T \equiv T$ $p \wedge F \equiv F$	قوانين الهيمنة Domination laws
$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$	قوانين التماثل Idempotent laws
$\sim(\sim p) \equiv p$	قانون النفي المزدوج Double negation laws
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	قوانين التبديل Commutative laws
$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	قوانين التجميع Associative laws
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	قوانين التوزيع Distributive laws
$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$	قوانين دومورغان De Morgan's laws
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	قوانين الامتصاص Absorption laws
$p \vee \sim p \equiv T$ $p \wedge \sim p \equiv F$ $\sim T \equiv F$ $\sim F \equiv T$	قوانين النفي Negation laws

ISSN: 2617-989X

4.1. العبارات الشرطية conditional statements

العبارات الشرطية conditional statements

تعريف 10: يوجد العديد من الفرضيات وخاصة في الرياضيات لها الشكل التالي: "إذا كان p فإن q". مثل هذه الفرضيات تسمى فرضيات شرطية أو اقتضاءات ويرمز لها بالرمز $p \to q$.

الاقتضاء $p \to q$ يقرأ عادة " p يقتضي q" أو " p فقط إذا كان q".

في الاقتضاء $p \to q$ نقول عن p أنها فرضية المقدمة، ونقول عن q أنها فرضية النتيجة.

قيمة الحقيقة للاقتضاء $p \to q$ تكون صحيحة عندما تكون قيمة الحقيقة لكل من p و q صحيحة وكذلك عندما تكون p خاطئة (بغض النظر عن قيمة الحقيقة ل q) وتكون خاطئة فيما عدا ذلك كما هو مبين في جدول الحقيقة التالي:

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

مثال 12: لتوضيح معنى الفرضية الشرطية، ليكن المثال التالي: "إذا كنت جائعاً إذاً (عندها) سآكل شيئاً ما".

المقدمة في هذه الفرضية الشرطية p هي إذا كنت جائعاً والنتيجة في هذه الفرضية الشرطية q هي سآكل شيئاً ما.

لنناقش الآن القيم المنطقية لهذه الفرضية الشرطية حسب القيم المنطقية ل p و q:

1. أنا جائع أي $p = T$ وأكلت شيئاً ما أي $q = T$، في هذه الحالة يكون الاقتضاء الشرطي صحيحاً أي $(p \to q) = T$.
2. أنا جائع أي $p = T$ ولم آكل شيئاً ما أي $q = F$، في هذه الحالة يكون الاقتضاء الشرطي خاطئاً أي $(p \to q) = F$.
3. أنا لست جائعاً أي $p = F$ وأكلت شيئاً ما أي $q = T$، في هذه الحالة وباعتبار أن الاقتضاء الشرطي يعطينا إمكانية الحكم عليه فقط إذا كانت فرضيته صحيحة، بالتالي لا نستطيع أن نجزم ما إذا كانت النتيجة الصحيحة ناتجة عن المقدمة الخاطئة أم لا، وبالتالي نستطيع أن نقول أن الاقتضاء الشرطي هو صحيح في هذه الحالة أي $(p \to q) = T$.
4. أنا لست جائعاً أي $p = F$ ولم آكل شيئاً ما أي $q = F$، بنفس طريقة التفكير السابقة نستطيع أن نقول أن الاقتضاء الشرطي هو صحيح في هذه الحالة أي $(p \to q) = T$.

يمكن البرهان على أن الفرضية الشرطية $p \to q$ تكافئ الفرضية $\sim p \vee q$ أي أن $p \to q \equiv \sim p \vee q$ من أجل ذلك لننشئ جدول الحقيقة لكل من الفرضيتين:

p	q	$\sim p$	$p \to q$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

وبملاحظة القيم المنطقية في العمودين الأخيرين، نستنتج التكافؤ المنطقي بين الفرضيتين $p \to q$ و $\sim p \vee q$.

من الفرضية الشرطية $p \to q$، يمكن تشكيل الفرضيات الشرطية الجديدة التالية:

1. الفرضية $q \to p$ والتي نسميها مقلوب converse الفرضية $p \to q$

2. الفرضية $\sim q \to \sim p$ والتي نسميها النفي الإيجابي contrapositive للفرضية $p \to q$

3. الفرضية $\sim p \to \sim q$ والتي نسميها معكوس inverse الفرضية $p \to q$

يمكن تبيان أن النفي الإيجابي $\sim q \to \sim p$ للفرضية $p \to q$ والفرضية $p \to q$ لهما نفس قيم الحقيقة، أي أنهما متكافئتان منطقياً:

$$\sim q \to \sim p \equiv q \vee \sim p \equiv \sim p \vee q \equiv p \to q$$

تأتي أهمية النفي الإيجابي للفرضية الشرطية من كونه مكافئ منطقياً للفرضية الشرطية، وفي كثير من الأحيان يكون التعامل مع النفي الإيجابي أسهل من التعامل مع الفرضية الشرطية.

ملاحظة 1: الفرضية الشرطية وعكسها غير متكافئان منطقياً. وكذلك الأمر بالنسبة الفرضية الشرطية ومقلوبها فهما غير متكافئان منطقياً أيضاً.

ملاحظة 2: عكس الفرضية الشرطية ومقلوبها متكافئان منطقياً.

مثال 13: أوجد النفي الإيجابي ومقلوب وعكس الفرضية الشرطية " يفوز الفريق المضيف كلما كانت السماء تمطر؟"

الحل: يمكن كتابة الفرضية الشرطية على النحو التالي: "إذا كانت السماء تمطر، فإن الفريق المضيف يفوز"، بالتالي:

النفي الإيجابي للفرضية الشرطية هو: "إذا لم يفز الفريق المضيف، فإن السماء لا تمطر"

مقلوب الفرضية الشرطية هو: "إذا فاز الفريق المضيف، فإن السماء تمطر"

عكس الفرضية الشرطية هو: "إذا كانت السماء لا تمطر، فإن الفريق المضيف لا يفوز"

من الواضح أن النفي الإيجابي للفرضية الشرطية هو الوحيد المكافئ للفرضية الشرطية الأصلية.

العبارات ثنائية الشرطية biconditional statements

تعريف 11: ليكن لدينا الفرضيتان p و q. نعرف الفرضية ثنائية الشرطية أو الاقتضاء ثنائي الشرطية " p إذا وفقط إذا q" (p if and only if q)، ونرمز لها الرمز $p \leftrightarrow q$.

قيمة الحقيقة للاقتضاء $p \leftrightarrow q$ تكون صحيحة عندما تكون قيم الحقيقة لكل من p و q متماثلة، وتكون خاطئة عندما تكون قيم الحقيقة لكل من p و q متعاكسة كما هو مبين في جدول الحقيقة.

من الملاحظ أن الاقتضاء $p \leftrightarrow q$ يكون صحيحاً عندما يكون كل من الاقتضاءين الشرطيين $p \to q$ و $q \to p$ صحيحاً، ويكون خاطئا فيما عدا ذلك.

كما أنه يوجد طرق أخرى للتعبير عن الاقتضاء $p \leftrightarrow q$:

ISSN: 2617-989X

" p ضروري وكاف ل q " (q is necessary and sufficient for p).

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

يمكن البرهان على أن الفرضية ثنائية الشرطية $p \leftrightarrow q$ تكافئ ما يلي:

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) \equiv (p \wedge q) \vee (\sim q \wedge \sim p)$$

من أجل برهان $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim q \wedge \sim p)$ ننشئ جدول الحقيقة لكل من الفرضيتين $p \leftrightarrow q$ و $(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge \sim p)$:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(p \wedge q)$	$(\sim p \wedge \sim q)$	$(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge \sim p)$	$p \leftrightarrow q$
T	T	F	F	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F	F	F
F	T	T	F	F	F	F	F
F	F	T	T	F	T	T	T

وبملاحظة القيم المنطقية في العمودين الأخيرين، نستنتج التكافؤ المنطقي بين الفرضيتين $(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge \sim p)$ و $p \leftrightarrow q$.

يتم تحديد الأولويات في تطبيق العمليات المنطقية بوجود الفرضيات الشرطية كما يبينه الجدول التالي:

الأولوية	العملية
1	$\sim$
2	$\wedge$
3	$\vee$
4	$\to$
5	$\leftrightarrow$

ISSN: 2617-989X

يحتوي الجدولين التاليين على بعض التكافؤات الهامة للفرضيات المركبة والتي تحوي على الفرضيات الشرطية (الجدول الأول) والفرضيات ثنائية الشرطية (الجدول الثاني).

$p \to q \equiv \sim p \vee q$
$p \to q \equiv \sim q \to \sim p$
$p \vee q \equiv \sim p \to q$
$p \wedge q \equiv \sim (p \to \sim q)$
$\sim (p \to q) \equiv p \wedge \sim q$
$(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to (q \wedge r)$
$(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \vee q) \to r$
$(p \to q) \vee (p \to r) \equiv p \to (q \vee r)$
$(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$
$p \leftrightarrow q \equiv \sim p \leftrightarrow \sim q$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim q \wedge \sim p)$
$\sim (p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \sim q$

5.1. تطبيقات المنطق الفرضي applications of propositional logic

المنطق والعمليات الأساسية logic and bit operations

يتم تمثيل المعلومات على أجهزة الكمبيوتر باستخدام البت bit. والبت هو رمز يأخذ أحد القيمتين: 0 (صفر) لتمثيل الحالة الخاطئة false و 1 (واحد) لتمثيل الحالة الصحيحة true. نسمي المتحول الذي يأخذ أحد القيمتين صحيح (صواب) true أو خطأ false بالمتحول البولياني. وبالتالي يمكن تمثيل المتحول البولياني باستخدام بت واحد.

قيمة الحقيقة	بت
T	1
F	0

ISSN: 2617-989X

باستبدال القيمة الصحيحة ب 1 والقيمة الخاطئة ب 0 في جدول الحقيقة للعمليات الأساسية $(\sim,\wedge,\vee)$ نحصل على الجدول التالي:

x	y	$\sim x$	$\sim y$	$x \vee y$	$x \wedge y$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0

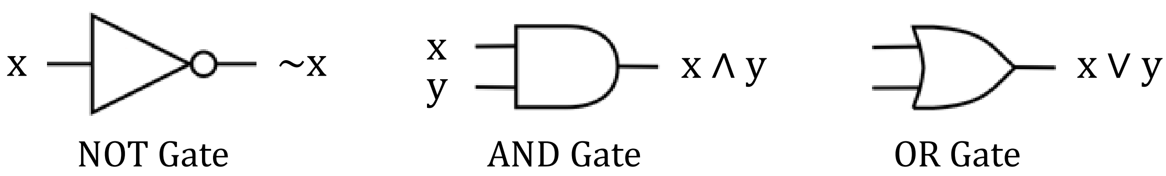
يتم استخدام الرموز NOT, AND, OR للعمليات الأساسية $(\sim,\wedge,\vee)$

الدارات المنطقية logic circuits

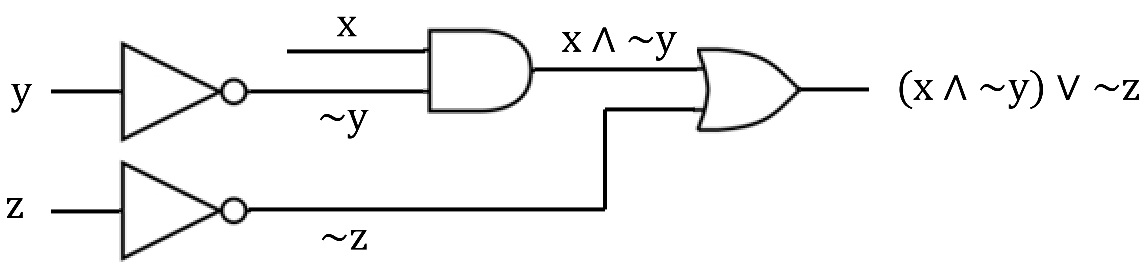
تستقبل الدارة المنطقية (الرقمية) إشارات الدخل $p1, p2, \ldots, pn$ ، وكل منها عبارة عن بت واحد (1 أو 0)، وتولد إشارات خرج $s_1, s_2, \ldots, s_n$ ، كل منها عبارة عن بت أيضاً. يتم التركيز هنا على الدارات المنطقية التي لها إشارة خرج واحدة.

يمكن بناء الدارات الرقمية المعقدة من ثلاث دارات أساسية، تدعى بوابات gates، كما هو مبين في الشكل أدناه:

1. العاكس، أو بوابة NOT، التي يكون دخلها البت x وخرجها البت $\sim x$.
2. البوابة "أو" OR والتي يكون دخلها الإشارتين x و y (كل منها بت) وخرجها الإشارة $x \vee y$.
3. البوابة "و" AND والتي يكون دخلها الإشارتين x و y (كل منها بت) وخرجها الإشارة $x \wedge y$.



مثال 14:



ISSN: 2617-989X

بناء تكافؤات منطقية جديدة constructing new logical equivalences

يمكن استخدام التكافؤات الأساسية التي وجدناها في الجداول السابقة في بناء تكافؤات منطقية جديدة، كما تبينه الأمثلة التالية، حيث نستخدم حقيقة أنه إذا كان p و q متكافئان منطقياً وكان q و r متكافئان منطقياً، عندئذ يكون p و r متكافئان منطقياً.

مثال 15: بين أن $\sim(p\vee(\sim p\wedge q))$ و $\sim p\wedge\sim q$ متكافئان منطقياً.

الحل:

$\sim(p\vee(\sim p\wedge q))$	$\equiv\sim p\wedge\sim(\sim p\wedge q))$	قانون دومورغان الثاني
	$\equiv\sim p\wedge(\sim(\sim p)\vee\sim q))$	قانون دومورغان الأول
	$\equiv\sim p\wedge(p\vee\sim q)$	قانون النفي المزدوج
	$\equiv(\sim p\wedge p)\vee(\sim p\wedge\sim q)$	قانون التوزيع الثاني
	$\equiv F\vee(\sim p\wedge\sim q)$	$\sim p \wedge p \equiv F$
	$\equiv(\sim p\wedge\sim q)\vee F$	تبديلية
	$\equiv\sim p\wedge\sim q$	قانون التطابق

وبالتالي فإن $\sim(p\vee(\sim p\wedge q))$ و $\sim p\wedge\sim q$ متكافئان منطقياً.

مثال 16: بين أن $(p\wedge q)\to(p\vee q)$ هي الفرضية الكلية

الحل:

$(p\wedge q)\to(p\vee q)$	$\equiv\sim(p\wedge q)\vee(p\vee q)$	التكافؤ الشرطي
	$\equiv(\sim p\vee\sim q)\vee(p\vee q)$	قانون دومورغان الأول
	$\equiv(\sim p\vee p)\vee(\sim q\vee q)$	قانون التجميعي والتبديلي الأول
	$\equiv T\vee T$	
	$\equiv T$	قانون الهيمنة

6.1. الإسناديات (القضايا) والمكممات predicates and quantifiers

الإسناديات predicates

على الرغم من أن منطق الفرضيات (المنطق الكلاسيكي) يمكننا من دراسة القضايا المنطقية بشكل جيد ومعرفة صحتها من خطئها إلا أنه لا يوفر لغة غنية تمكننا من توصيف عدد لا بأس به من المواضيع. على سبيل المثال:

- العبارات التي تتضمن متحولات، أمثلة: $"x > 3"$, $"x = y + 3"$, $"x + y = z$
- "الكمبيوتر x يتعرض للهجوم من قبل متطفّل".
- "الكمبيوتر x يعمل بشكل صحيح".

هذه العبارات ليست صحيحة ولا خاطئة إذا لم يتم تحديد قيم المتحولات.

تعريف 12: الإسنادية predicate في اللغة الإنكليزية: هي جزء من الجملة الذي يقوم بتوصيف الفاعل (إعطاء معلومات إضافية عنه)، أي هي عبارة عن كلمات تصف لنا علاقة ما. أما في منطق الإسناديات: الإسنادية هي عبارة

عن جملة sentence تضم عدد منتهي من المتحولات، وتصبح الإسنادية فرضية (أو عبارة statement) عندما نقوم بإسناد قيم محددة لهذه المتحولات.

والمتحولات في الإسنادية يمكن أن تأخذ قيمها في مجموعة ما ندعوها النطاق أو المجال domain ونرمز له D، ويمثل مجموعة القيم الممكنة لمتحولات الإسنادية.

العبارة السابقة " x أكبر من 3" تتألف من جزأين. الجزء الأول المتحول x، هو فاعل subject العبارة. الجزء الثاني هو الإسنادية "أكبر من 3" والتي تشير إلى خاصة يمكن لفاعل العبارة أن يملكها. هذا ويمكن أن نشير إلى العبارة " x أكبر من 3" ب $P(x)$، حيث تشير P إلى الإسنادية "أكبر من 3" و x عبارة عن المتحول. يقال عن العبارة $P(x)$ إنها قيمة تابع الفرضيات propositional function P عند x عندما نعطي قيمة ما للمتحول x، تصبح العبارة $P(x)$ فرضية ولها قيمة منطقية (صحيحة أو خاطئة).

مثال 17: لتكن $P(x)$ ترمز للعبارة "$x > 3$". ما هي قيمة الحقيقة لكل من $P(4)$ و $P(2)$؟

الحل: $P(4)$ هي العبارة $4 > 3$ والتي قيمتها المنطقية صحيحة، و $P(2)$ هي العبارة $2 > 3$ والتي قيمتها خاطئة.

مثال 18: لتكن $A(x)$ ترمز إلى العبارة "الكمبيوتر x يتعرض للهجوم من قبل متطفّل"، وبفرض أنه من بين حواسب الجامعة فقط الحاسبين $CS2$ و $MATH1$ يتعرضان حالياً للهجوم من قبل متطفّل. ما هي قيمة كل من $A(CS1)$ و $A(CS2)$ و $A(MATH1)$؟

الحل: نحصل على العبارة $A(CS1)$ بوضع $x = CS1$ في العبارة "الكمبيوتر x يتعرض للهجوم من قبل متطفّل"، وبما أن الحاسب $CS1$ لا يتعرض حالياً للهجوم من قبل متطفّل نستنتج أن القيمة المنطقية ل $A(CS1)$ هي خاطئة. بنفس الأسلوب نجد أن القيمة المنطقية لكل من $A(CS2)$ و $A(MATH1)$ صحيحة.

يمكن أن يكون لدينا عبارات تتضمن أكثر من متحول. على سبيل المثال العبارة "$x = y + 3$" والتي يمكن أن نرمز لها ب $Q(x, y)$ حيث x, y هي المتحولات و Q الإسنادية. عندما نُسند قيم إلى كل من x و y، يكون للعبارة $Q(x, y)$ قيمة منطقية.

مثال 19: لتكن $Q(x, y)$ ترمز للعبارة "$x = y + 3$" ما هي قيمة الحقيقة لكل من $Q(1, 2)$ و $Q(3, 0)$؟

الحل: $Q(1, 2)$ هي العبارة $1 = 2 + 3$ والتي قيمتها المنطقية خاطئة، و $Q(3, 0)$ هي العبارة $3 = 0 + 3$ والتي قيمتها المنطقية صحيحة.

بشكل عام، العبارة التي تحوي n متحول $x_1, x_2, \ldots, x_n$ يرمز لها ب $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

مثال 20: لتكن العبارة $if\ x > 0\ then\ x := x + 1$.

عند مصادفة هذه العبارة في برنامج حاسوبي، فإن قيمة المتحول x في هذه المرحلة من التنفيذ تعوض في تابع الفرضيات $P(x)$ والتي هي "$x > 0$" . فإذا كانت قيمة $P(x)$ صحيحة من أجل القيمة x المذكورة، عندها يتم تنفيذ العبارة "$x := x + 1$"، بالتالي فإن قيمة المتحول x تزداد بمقدار واحد. أما إذا كانت قيمة $P(x)$ خاطئة من أجل القيمة x المذكورة، عندها لا يتم تنفيذ العبارة "$x := x + 1$"، أي قيمة x لا تتغير.

المكممات (المحددات) quantifiers

عندما نعطي قيم للمتحولات في تابع الفرضيات، تصبح العبارة الناتجة فرضية ولها قيمة منطقية ما. على أية حال يوجد طريقة أخرى تدعى التكميم quantification لإنشاء فرضية من تابع الفرضيات. يعبر التكميم عن المجال الذي تكون فيه الإسنادية صحيحة على كمية من العناصر.

في اللغة الإنكليزية يتم استخدام الكلمات التالية في التكميم: all (كل)، some (بعض)، many (كثير)، none (لا أحد)، few (قليل).

سنسلط الضوء على نوعين من التكميم: التكميم العام (الشامل) universal quantification والتكميم الوجودي existential quantification.

المكمم العام universal quantifier

تعريف 13: التكميم العام لـ $P(x)$ هي العبارة: "for every (all) x , $P(x)$ is true" "من أجل كل قيم لـ x فإن $P(x)$ صحيحة". يتم استخدام الرمز $\forall x\ P(x)$ هنا نسمي الرمز $\forall$ بالمكمم العام. عنصر واحد من أجله $P(x)$ تكون خاطئة ندعوه مثال عكسي counterexample لـ $\forall x\ P(x)$.

مثال 21: لتكن $P(x)$ هي العبارة "$x+1>x$". ما هي قيمة الحقيقة للتكميم $\forall x\ P(x)$، حيث المجال هو الأعداد الحقيقية؟

الحل: بما أن $P(x)$ صحيحة على كل عدد حقيقي x، بالتالي التكميم $\forall x\ P(x)$ يكون صحيح.

مثال 22: لتكن $Q(x)$ هي العبارة "$x<2$". ما هي قيمة الحقيقة للتكميم $\forall x\ Q(x)$، حيث المجال هو الأعداد الحقيقية؟

الحل: $Q(x)$ ليست صحيحة على كل عدد حقيقي x، على سبيل المثال $Q(3)$ خاطئة. هكذا $x=3$ عبارة عن مثال عكسي للعبارة $\forall x\ Q(x)$ بالتالي التكميم $\forall x\ Q(x)$ يكون خاطئ.

ملاحظة 3: عندما يمكن سرد كافة عناصر المجال D ولتكن $x_1, x_2, \ldots, x_n$، فإن قيمة الحقيقة للتكميم $\forall x\ P(x)$ هي نفسها قيمة عبارة الضم $P(x_1)\wedge P(x_2)\wedge\ldots\wedge P(x_n)$، لأن الضم صحيح إذا وفقط إذا كانت قيم جميع العبارات $P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)$ صحيحة.

مثال 23: لتكن $P(x)$ هي العبارة "$x2<10$" ما هي قيمة الحقيقة للتكميم $\forall x\ P(x)$، حيث المجال هو الأعداد الصحيحة الموجبة التي لا تتجاوز العدد 4؟

الحل: العبارة $\forall x\ P(x)$ تكافئ علاقة الضم $P(1)\wedge P(2)\wedge P(3)\wedge P(4)$ لأن المجال يتضمن الأعداد الصحيحة 1, 2, 3, 4. بما أن $P(4)$، والتي هي العبارة "$42<10$" هي خاطئة، بالتالي $\forall x\ P(x)$ هي خاطئة.

مثال 24: ما هي قيمة الحقيقة للتكميم $\forall x\ (x^2\ge x)$، حيث المجال هو الأعداد الحقيقية؟ وما هي قيمة الحقيقة للعبارة المذكورة إذا كان المجال هو الأعداد الصحيح؟

الحل: $x^2\ge x$ إذا وفقط إذا كان $x^2-x=x(x-1)\ge 0$. بالتالي $x^2\ge x$ إذا وفقط إذا كان $x\le 0$ أو $x\ge 1$ ينتج من ذلك أن قيمة التكميم العام $\forall x\ (x^2\ge x)$ هي خاطئة عندما يكون المجال هو الأعداد الحقيقية (لأن المتراجحة خاطئة من أجل كافة الأعداد الحقيقية x حيث $0<x<1$). بينما إذا كان المجال هو الأعداد الصحيحة، فإن قيمة التكميم العام $\forall x\ (x^2\ge x)$ هي صحيحة (لأنه لا يوجد ولا عدد صحيح x ضمن المجال حيث $0<x<1$).

المكمم الوجودي existential quantifier

تعريف 14: التكميم الوجودي لـ $P(x)$ هي العبارة:

"there exists a value for x in the domain such that P(x) is true" "يوجد قيمة لـ x في المجال تجعل $P(x)$ صحيحة". يتم استخدام الرمز $\exists x\ P(x)$ هنا نسمي الرمز $\exists$ بالمكمم الوجودي.

مثال 25: لتكن $P(x)$ هي العبارة "$x > 3$". ما هي قيمة الحقيقة للتكميم $\exists x\ P(x)$، حيث المجال هو الأعداد الحقيقية؟

الحل: بما أن العبارة "x > 3" أحياناً صحيحة (على سبيل المثال $x = 4$)، وبالتالي فإن التكميم $\exists x\ P(x)$ يكون صحيح.

مثال 26: لتكن $Q(x)$ هي العبارة "$x = x + 1$". ما هي قيمة الحقيقة للتكميم $\exists x\ Q(x)$، حيث المجال هو الأعداد الحقيقية؟

الحل: بما أن $Q(x)$ خاطئة على كل عدد حقيقي x، بالتالي التكميم $\exists x\ Q(x)$ يكون خاطئ.

ملاحظة 4: عندما يمكن سرد كافة عناصر المجال D ولتكن $x_1, x_2, \ldots, x_n$، فإن قيمة الحقيقة للتكميم $\exists x\ P(x)$ هي نفسها قيمة عبارة الفصل $P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_n)$، لأن الفصل صحيح إذا وفقط إذا كانت قيمة واحدة على الأقل من العبارات $P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)$ تكون صحيحة.

مثال 27: لتكن $P(x)$ هي العبارة "$x^2 > 10$" ما هي قيمة الحقيقة للتكميم $\exists x\ P(x)$، حيث المجال هو الأعداد الصحيحة الموجبة التي لا تتجاوز العدد 4؟

الحل: العبارة $\exists x\ P(x)$ تكافئ علاقة الفصل $P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$ لأن المجال هو $\{1, 2, 3, 4\}$. بما أن الفرضية $P(4)$، والتي تمثل العبارة "$4^2 > 10$" هي صحيحة، بالتالي نستنتج أن الفرضية $\exists x\ P(x)$ هي صحيحة.

نفي العبارات المكمّمة negating quantified expressions

لتكن الفرضية "كل طلاب الرياضيات من الذكور" التي هي تكميم عام $\forall x\ P(x)$ حيث $P(x)$ ترمز ل " x ذكر". نفي هذه العبارة هي "ليس كل طلاب الرياضيات من الذكور" وتكافؤها "يوجد على الأقل طالب واحد رياضيات من الإناث" والتي هي تكميم وجودي $\exists x \sim P(x)$.

مما سبق نستنتج التكافؤ التالي: $\sim \forall x\ P(x) \equiv \exists x \sim P(x)$.

لتكن الفرضية "يوجد على الأقل طالب رياضيات واحد على الأقل شعره خرنوبي" التي هي تكميم وجودي $\exists x\ P(x)$ حيث $P(x)$ ترمز ل " x خرنوبي". نفي هذه العبارة هي "كل طلاب الرياضيات شعرهم غير خرنوبي" والتي هي تكميم عام $\forall x \sim P(x)$

مما سبق نستنتج التكافؤ التالي: $\sim \exists x\ P(x) \equiv \forall x \sim P(x)$.

نسمي قواعد النفي للمكممات بقوانين دومورغان التي يتم تلخيصها في الجدول التالي:

متى يكون النفي خاطئاً	متى يكون النفي صحيحاً	العبارة المكافئة	النفي
$P(x)$ صحيح من أجل أي x	يوجد x من أجلها يكون $P(x)$ خاطئاً	$\exists x \sim P(x)$	$\sim \forall x\ P(x)$
يوجد x من أجلها يكون $P(x)$ صحيحاً	من أجل أي x، $P(x)$ خاطئ.	$\forall x \sim P(x)$	$\sim \exists x\ P(x)$

ISSN: 2617-989X

مثال 28: ما هو نفي العبارة التالية: "كل الأمريكان يأكلون الهمبرغر"؟

الحل: ليكن $H(x)$ يرمز إلى " x يأكل الهمبرغر". بالتالي يُرمز للعبارة "كل الأمريكان يأكلون الهمبرغر" ب $\forall x\ H(x)$، حيث يتكون المجال من كل الأمريكان. نفي العبارة المذكورة هو $\sim\forall x\ H(x)$، والمكافئة ل $\exists x \sim H(x)$ هذا النفي يمكن التعبير عنها بطرق مختلفة، "بعض الأمريكان لا يأكلون الهمبرغر" أو "يوجد أمريكي لا يأكل الهمبرغر".

مثال 29: ما هو نفي العبارة $\forall x\left(x^2 > x\right)$ ؟ والعبارة $\exists x\ \left(x^2 = 2\right)$؟

الحل: نفي العبارة $\forall x\ \left(x^2 > x\right)$ هو العبارة $\sim\forall x\ \left(x^2 > x\right)$ والمكافئة ل $\exists x \sim\left(x^2 > x\right)$ والتي يمكن كتابتها أيضاً $\exists x\ (x^2 \le x)$.

نفي العبارة $\exists x\ \left(x^2 = 2\right)$ هو العبارة $\sim\exists x\ \left(x^2 = 2\right)$ والمكافئة ل $\forall x \sim\left(x^2 = 2\right)$ والتي يمكن كتابتها أيضاً $\forall x\ (x^2 \ne 2)$

قيم الحقيقة للعبارتين يعتمدان على المجال.

مثال 30: بين أن $\sim\forall x\ (P(x)\to Q(x))$ و $\exists x\ (P(x)\wedge\sim Q(x))$ متكافئان منطقياً.

الحل: باستخدام قانون دومورغان للمكمم العام، $\sim\forall x\ (P(x)\to Q(x))$ و $\exists x\ (\sim(P(x)\to Q(x)))$ متكافئان منطقياً. باستخدام التكافؤ $\sim(p\to q)\equiv p\wedge\sim q$ ينتج أن $\exists x\ (\sim(P(x)\to Q(x)))$ يكافئ $\exists x\ (P(x)\wedge\sim Q(x))$ أي أن $\sim\forall x\ (P(x)\to Q(x))$ يكافئ $\exists x\ (P(x)\wedge\sim Q(x))$.

2. مدخل إلى البراهين introduction to proofs

سنقوم بتوصيف بعض الطرق المستخدمة في بناء البراهين. البرهان هو خطوات تبيِّن المطلوب برهنته (عبارة رياضية) وتتم باستخدام النظريات المبرهنة سابقاً والبديهيات axioms (تعابير رياضية أساسية مسلّم بصحتها بدون برهان. مثال على ذلك مسلمات الأعداد الحقيقية ومسلمات الأعداد الصحيحة الموجبة ومسلمات هندسة المستوي) والتعاريف. طرق البرهان هذه لها أهمي كبيرة ليس فقط لبرهان النظريات الرياضية وإنما لها تطبيقات مختلفة في علوم الحاسب. تتضمن هذه التطبيقات التحقق من صحة البرمجيات وأنظمة التشغيل.

1.2. البرهان المباشر direct proof

يتم بناء البرهان المباشر لفرضية شرطية $p\to q$ بافتراض أن p صحيحة وهي الخطوة الأولى، تليها خطوات استخدام قواعد الاستدلال inference بالإضافة إلى استخدام البديهيات والتعاريف والنظريات المثبتة سابقاً، والخطوة الأخيرة تبيان أن q صحيحة (النتيجة).

تعريف 15: يكون العدد n زوجي إذا وجد عدد صحيح k بحيث $n = 2k$، ويكون العدد فردي إذا وجد عدد صحيح k بحيث $n = 2k + 1$. ونقول عن عددين صحيحين أنهما متكافئان parity إذا كانا معاً زوجيين أو كانا معاً فرديين. على سبيل المثال العدد 10 عدد زوجي $(10 = 2x5)$، والعدد 9 عدد فردي $(9 = 2x4 + 1)$

ملاحظة 5: أي عدد صحيح هو إما زوجي وإما فردي، أي أنه لا يمكن لعدد صحيح أن يكون زوجي وفردي في آن واحد.

مثال 31: أثبت أنه إذا كان n عدد فردي فإن n^2 عدد فردي.

الحل: من الواضح أن هذه النظرية تعبر عن $\forall n\ (P(x) \rightarrow Q(x))$ حيث $P(n)$ "n عدد صحيح فردي" و $Q(n)$ "n^2 عدد فردي". بداية نفرض أن فرض hypothesis العبارة الشرطية هو صحيح، أي أن n عدد فردي. وهذا يعني حسب التعريف أنه يوجد عدد صحيح k بحيث $n = 2k + 1$. نريد الآن تبيان أن n^2 فردي أيضاً. بتربيع الطرفين نحصل على:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

ومن تعريف العدد الفردي أيضاً نستنتج أن n^2 هو عدد فردي.

تعريف 16: نقول عن عدد صحيح n أنه مربع كامل perfect square إذا وجد عدد صحيح k بحيث $n = k^2$

على سبيل المثال الأعداد $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$ هي أعداد مربعات كاملة.

مثال 32: أثبت أنه إذا كان كل من m و n مربع كامل فإن mn يكون مربع كامل أيضاً.

الحل: بفرض أن كل من m و n مربع كامل. من تعريف المربع الكامل ينتج أنه يوجد عددين صحيحين s و t بحيث $m = s^2$ و $n = t^2$. المطلوب الآن برهان أن mn مربع كامل. بضرب العددين ينتج: $mn = s^2\ x\ t^2 = (st)^2$. من تعريف المربع الكامل ينتج أن mn مربع كامل.

2.2. البرهان بالنفي الإيجابي proof by contraposition

يستخدم البرهان بالنفي الإيجابي خاصة التكافؤ المنطقي بين الفرضية الشرطية $p \rightarrow q$ ونفيها الإيجابي $\sim q \rightarrow \sim p$، أي: $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$ نفترض أن $\sim q$ صحيحة وهي الخطوة الأولى، تليها خطوات استخدام قواعد الاستدلال inference بالإضافة إلى استخدام البديهيات axioms والتعاريف والنظريات المثبتة سابقاً، والخطوة الأخيرة تبيان أن $\sim p$ صحيحة (النتيجة).

مثال 33: أثبت أنه إذا كان n عدد صحيح و $3n + 2$ فردي، عندئذ n فردي.

الحل: لنحاول فيما إذا بالإمكان استخدام البرهان المباشر. بفرض أن $3n + 2$ عدد فردي، بالتالي يوجد عدد صحيح k بحيث $3n + 2 = 2k + 1$، عندئذ $3n = 2k - 1$. من الواضح أنه من هذه المعادلة لا يمكن استنتاج n فردي.

باستخدام برهان النفي الإيجابي تصبح العبارة الشرطية "إذا كان n عدد زوجي فإن $3n + 2$ زوجي أيضاً" n زوجي يعني وجود عدد k بحيث $n = 2k$، بتعويض ذلك في المعادلة $3n + 2$ ينتج:

$3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$ أي أن $3n + 2$ عدد زوجي حسب التعريف. وبما أن النفي الإيجابي صحيح بالتالي العبارة الشرطية الأصلية صحيحة لأنهما متكافئتان.

مثال 34: أثبت أنه إذا كان $n = ab$، حيث a و b عددان صحيحان موجبان، عندها $a \le \sqrt{n}$ أو $b \le \sqrt{n}$.

الحل: إن العبارة الشرطية السابقة هي من الشكل $p \rightarrow q$، حيث p هي "$n = ab$ و a, b عددان موجبان" و q هي "$(a \le \sqrt{n}) \vee (b \le \sqrt{n})$" والنفي الإيجابي لها، حيث $\sim q$ هو "$(a > \sqrt{n}) \wedge (b > \sqrt{n})$" (حسب دومورغان) و $\sim p$ هو "$ab \ne n$". الآن نفرض أن القضية $\sim q$ صحيحة أي $a > \sqrt{n}$ و $b > \sqrt{n}$. بضربهما نحصل على $ab > n$ أي $ab \ne n$، بالتالي $\sim p$ صحيحة.

$\sim q \to \sim p$ صحيحة بالتالي $p \to q$ صحيحة.

3.2. البرهان باستخدام نقض الفرض proofs by contradiction

بفرض أننا نريد إثبات صحة العبارة p. بفرض أننا استطعنا إيجاد تناقض q بحيث $\sim p \to q$ تكون صحيحة، وبما أن q خاطئة و $\sim p \to q$ صحيحة نستنتج أن $\sim p$ هي خاطئة وبالتالي p تكون صحيحة.

ملاحظة 6: بما أن البرهان باستخدام نقض الفرض لا يثبت النتيجة بشكل مباشر، بالتالي هذا النوع من البرهان يعتبر برهان غير مباشر.

مثال 35: أثبت أن العدد $\sqrt{2}$ هو عدد غير نسبي (أي لا يمكن كتابته على الشكل $\frac{a}{b}$، حيث a و b عددان صحيحان و $b \neq 0$).

الحل: لتكن الفرضية " $\sqrt{2}$ هو عدد غير نسبي". نفرض أن $\sim p$ صحيحة، أي أن $\sqrt{2}$ عدد نسبي. الآن سنبرهن أن هذا الفرض يؤدي إلى تناقض.

$\sqrt{2}$ عدد نسبي، بالتالي يوجد عددين صحيحين a و $b \neq 0$ بحيث $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ و $\frac{a}{b}$ بالشكل المختزل (لا يوجد عوامل مشتركة بين كل من a و b). بتربيع الطرفين نحصل على $2 = \frac{a^2}{b^2}$، بالتالي $2b^2 = a^2$. من تعريف العدد الزوجي ينتج أن a^2 عدد زوجي. a^2 عدد زوجي، بالتالي a عدد زوجي (مثال 31: إذا كان n عدد فردي فإن n^2 عدد فردي بالتالي نفي ذلك هو إذا كان n^2 عدد زوجي فإن n عدد زوجي) a عدد زوجي يعني وجود عدد صحيح c بحيث $a = 2c$. بالتعويض نحصل على $2b^2 = 4c^2$، بالقسمة على 2 ينتج $b^2 = 2c^2$ بالتالي b^2 عدد زوجي ومنه b عدد زوجي أيضاً.

الفرض $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ أنتج كل من a و b زوجي بالتالي 2 يقسم كل من a و b وهذا مناقض للفرض. مما سبق $\sim p$ خاطئة وبالتالي p صحيحة، أي $\sqrt{2}$ هو عدد غير نسبي.

مثال 36: أثبت باستخدام نقض الفرض أنه إذا كان n عدد صحيح و $3n + 2$ فردي، عندئذ n فردي.

الحل: لتكن p " $3n + 2$ فردي" و q " n فردي". بفرض أن p و $\sim q$ صحيحتان، أي أن $3n + 2$ فردي و n ليس فردي أي زوجي. n زوجي يعني وجود عدد صحيح k بحيث $n = 2k$ بالتعويض في $3n + 2$ نحصل على: $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$ وهذا يعني أن $3n + 2$ زوجي وهي خاطئة (يناقض الفرض)، بالتالي $3n + 2$ فردي.

برهان التكافؤ proofs of equivalence

من أجل إثبات عبارة ثنائية الشرط من الشكل $p \leftrightarrow q$، نبين أن كل من $(p \to q)$ و $(q \to p)$ صحيحة، لأنه وكما نعلم أن $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$.

مثال 37: أثبت أن "إذا كان n عدد صحيح، عندئذ n فردي إذا وفقط إذا كان n^2 فردي".

الحل: هذه النظرية هي من الشكل $p \leftrightarrow q$ حيث p "n عدد فردي" و q "n^2 عدد فردي". إذن نحن بحاجة لبرهان صحة كل من $(p \rightarrow q)$ و $(q \rightarrow p)$. برهنا في المثال 31 القضية $(p \rightarrow q)$، بالتالي بقي علينا برهان صحة الفرضية $(q \rightarrow p)$ أي "إذا كان n عدد صحيح، و n^2 عدد فردي فإن n عدد فردي".

لنبرهن ذلك باستخدام النفي الإيجابي أي برهان "n عدد زوجي بالتالي n^2 عدد زوجي" n عدد زوجي بالتالي يوجد عدد صحيح k بحيث $n = 2k$ بتربيع الطرفين نحصل على $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ وهذا يعني أن n^2 عدد زوجي.

في بعض الأحيان يكون لدينا العديد من الفرضيات المتكافئة $p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow p_n$ أي أنه من أجل كل i و j حيث $1 \le i \le n$ و $1 \le j \le n$ فإن p_i و p_j متكافئة. أحد الطرق المستخدمة في برهان ذلك هو:

$$p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow p_n \leftrightarrow (p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \ldots \wedge (p_n \rightarrow p_1)$$

مثال 38: أثبت أن العبارات التالية عن العدد الصحيح n متكافئة:

1. $p1$: n عدد زوجي
2. $p2$: $n - 1$ عدد فردي
3. $p3$: n^2 عدد زوجي

الحل: من أجل برهان أن العبارات الثلاث السابقة متكافئة علينا تبيان صحة الفرضيات الشرطية التالية: $p_1 \rightarrow p_2$ و $p_2 \rightarrow p_3$ و $p_3 \rightarrow p_1$

نستخدم البرهان المباشر لتبيان $p_1 \rightarrow p_2$. بفرض أن n عدد زوجي فإن $n = 2k$ حيث k عدد صحيح. بالتالي فإن $n - 1 = 2k - 1 = 2(k - 1) + 1$ بالتالي العدد $n - 1$ فردي.

نستخدم أيضاً البرهان المباشر لتبيان $p_2 \rightarrow p_3$ بفرض أن $n - 1$ فردي فإن $n - 1 = 2k + 1$ حيث k عدد صحيح. أي أن $n = 2k + 2$، وهكذا بتربيع الطرفين نحصل على $n^2 = (2k + 2)^2 = 4k^2 + 8k + 4 = 2(2k^2 + 4k + 2)$ بالتالي n^2 زوجي.

أمل لتبيان $p_3 \rightarrow p_1$ فإننا نستخدم برهان النفي الإيجابي. أي أنه إذا n عدد فردي فإن n^2 فردي أيضاً وكنا برهنا ذلك في المثال 31.

4.2. البرهان الشامل والبرهان بالحالات exhaustive proof and proof by cases

يعتمد هذا النوع من البرهان على قاعدة الاستدلال التالية: من أجل برهان الفرضية الشرطية والتي تأخذ الشكل $(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \rightarrow q$ وباستخدام الفرضية الكلية:

$$[(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \rightarrow q] \leftrightarrow [(p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \ldots \wedge (p_n \rightarrow q)]$$

إذن في بعض الأحيان لبرهان صحة العبارة الشرطية $p \rightarrow q$، من المناسب استخدام الفصل $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$ بدلاً من p كفرض للعبارة الشرطية، حيث p و $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$ متكافئان منطقياً.

البرهان الشامل exhaustive proof

البرهان الشامل هو برهان حالات cases، حيث يتم التحقق من كافة الحالات الممكنة (عادة عدد منتهي محدود)، حيث تتضمن كل حالة تتحقق من مثال وحيد.

ISSN: 2617-989X

مثال 39: أثبت أن $(n+1)^3 \geq 3^n$، إذا كانت n عدد صحيح موجب $n \leq 4$.

الحل: نحتاج إلى التحقق من المتراجحة $(n+1)^3 \geq 3^n$ عندما يكون $n = 1, 2, 3, 4$.

من أجل $n = 1$ لدينا $(1+1)^3 = 8 \geq 3^1 = 3$.

من أجل $n = 2$ لدينا $(2+1)^3 = 27 \geq 3^2 = 9$.

من أجل $n = 3$ لدينا $(3+1)^3 = 64 \geq 3^3 = 27$.

من أجل $n = 4$ لدينا $(4+1)^3 = 125 \geq 3^4 = 81$.

بالتالي العلاقة $(n+1)^3 \geq 3^n$ صحيحة من أجل $n \leq 4$.

البرهان بالحالات proof by cases

البرهان بالحالات يجب أن يغطي كل الحالات الممكنة التي يمكن أن تنشأ في النظرية. يجب

ملاحظة 7: في البرهان بالحالات يجب دائماً التأكد من تغطية كافة الحالات الممكنة.

مثال 40: أثبت أن $n^2 \geq n$، حيث n عدد صحيح.

الحل: يمكننا برهان صحة العلاقة من أجل 3 حالات: $n = 0$ و $n \geq 1$ (الأعداد الموجبة) و $n \leq -1$ (الأعداد السالبة).

الحالة 1: عنما تكون $n = 0$، $0^2 = 0 \geq 0$. بالتالي $n^2 \geq n$ صحيحة من أجل $n = 0$.

الحالة 2: عنما تكون $n \geq 1$، بضرب المتراجحة $n \geq 1$ بالعدد الموجب n نحصل على $n^2 \geq n$. بالتالي $n^2 \geq n$ صحيحة من أجل $n \geq 1$.

الحالة 3: عنما تكون $n \leq -1$. بما أن $n^2 \geq 0$، ينتج $n^2 \geq n$ بالتالي $n^2 \geq n$ صحيحة من أجل $n \leq -1$.

بالتالي وبما أن المتراجحة $n^2 \geq n$ صحيحة من أجل الحالات الثلاث، يمكننا الاستنتاج بأنه إذا كان n عدد صحيح، عندئذ $n^2 \geq n$.

مثال 41: أثبت أن $|xy| = |x||y|$، حيث x, y عددان حقيقيان. (تذكر أن القيمة المطلقة $|a|$ للقيمة a، تساوي a من أجل $a \geq 0$ وتساوي $-a$ من أجل $a < 0$)

الحل: نحتاج من أجل برهان ذلك إلى تمييز 4 حالات مختلفة: (1) كلا x و y غير سالبان، (2) x غير سالبة و y سالبة، (3) x سالبة و y غير سالبة، (4) كلا x و y سالبان. نرمز ب p_1, p_2, p_3, p_4 للفرضيات التي تعبر عن كل حالة من الحالات الأربع:

الحالة 1: كلا x و y غير سالبان، من الواضح أن $p_1 \to q$ لأن $xy \geq 0$ عندما $x \geq 0$ و $y \geq 0$، بالتالي $|xy| = xy = |x||y|$.

الحالة 2: x غير سالبة و y سالبة، لكي نبين أن $p_2 \to q$، نلاحظ أن $xy \leq 0$ عندما $x \geq 0$ و $y < 0$، بالتالي $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$.

الحالة 3: x سالبة و y غير سالبة، لكي نبين أن $p_3 \to q$، نلاحظ أن $xy \leq 0$ عندما $x < 0$ و $y \geq 0$، بالتالي $|xy| = -xy = (-x)y = |x||y|$.

الحالة 4: x سالبة و y سالبة، لكي نبين أن $p_4 \to q$، نلاحظ أن $xy > 0$ عندما $x < 0$ و $y < 0$، بالتالي $|xy| = -xy = (-x)(-y) = |x||y|$.

ISSN: 2617-989X

بما أن $|xy| = |x||y|$ في كل من الحالات الأربع والتي تشمل كافة الاحتمالات الممكنة ، نستطيع الاستنتاج أن $|xy| = |x||y|$ مهما تكن x و y قيمتان حقيقيتان.

مثال 42: أثبت أن لا يوجد حلول ل x و y في الأعداد الصحيحة للمعادلة $x^2 + 3y^2 = 8$.

الحل: يمكننا اختزال البرهان إلى التحقق من بعض الحالات البسيطة القليلة وذلك لأن $x^2 > 8$ عندما $|x| \geq 3$ و $3y^2 > 8$ عندما $|y| \geq 2$. وهذا يُبقي الحالات عندما x تساوي $-2, -1, 0, 1, 2$ و y تساوي $-1, 0, 1$. يمكننا ملاحظة أن القيم الممكنة ل x^2 هي $0, 1, 4$ والقيم الممكنة ل $3y^2$ هي $0, 3$، بالتالي فإن أكبر قيمة ممكنة ل $x^2 + 3y^2$ هي 7. وهذا يعني أنه من المستحيل أن يكون للمعادلة $x2^2 + 3y^2 = 8$ حلول ل x و y أعداد صحيحة.

الاستدلال التقدمي والخلفي forward and backward reasoning

جميع البراهين التي رأيناها حتى الآن تبدأ من البديهيات والتعاريف والبراهين السابقة لبناء برهان باستخدام سلسلة من الخطوات تؤدي إلى النتيجة المرجوة. وهذا النوع من البراهين يسمى بالبرهان الأمامي (التقدمي). ولكن في بعض الحالات يتم استخدام البرهان الخلفي (التراجعي)، كما يبينه المثال التالي:

مثال 43: أثبت أن المتوسط الحسابي لعددين حقيقين موجبين مختلفين x و y والمعرف ب $(x + y)/2$ أكبر من المتوسط الهندسي لهما والمعرف ب $\sqrt{xy}$.

الحل: من أجل برهان أن $(x+y)/2 > \sqrt{xy}$ من أجل عددين x و y حقيقيين موجبين مختلفين، يمكننا العمل تراجعياً.

$$(x+y)/2 > \sqrt{xy}$$
$$(x+y)^2/4 > xy$$
$$(x+y)^2 > 4xy$$
$$x^2 + 2xy + y^2 > 4xy$$
$$x^2 - 2xy + y^2 > 0$$
$$(x-y)^2 > 0$$

بما أن $(x-y)^2 > 0$ عندما $x \neq y$، بالتالي المتراجحة الأخيرة صحيحة. بما أن جميع المتراجحات صحيحة بالتالي $(x+y)/2 > \sqrt{xy}$ عندما $x \neq y$. الآن يمكننا عكس الخطوات لبناء برهان تقدمي.

بفرض أن x و y عددان حقيقيان موجبان مختلفان. بالتالي $(x-y)^2 > 0$ (مربع عددين غير معدومين هو عدد موجب)، وبما أن $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$، هذا يؤدي إلى $x^2 - 2xy + y^2 > 0$. بإضافة المقدار $4xy$ إلى الطرفين نحصل على $x^2 - 2xy + y^2 + 4xy > 4xy$ أو $x^2 + 2xy + y^2 > 4xy$، بالتالي $(x+y)^2 > 4xy$. بتقسيم الطرفين على 4 نحصل على $(x+y)^2/4 > xy$. أخيراً بجذر الطرفين نحصل على المطلوب وهو $(x+y)/2 > \sqrt{xy}$.

الأمثلة العكسية counterexamples

وجدنا سابقاً أنه لتبيان أن العبارة من الشكل $\forall x\, P(x)$ هي خاطئة، نحتاج إلى إيجاد مثال عكسي، أي إيجاد x تكون $P(x)$ من أجلها خاطئة.

مثال 44: أثبت أن العبارة التالية "كل عدد صحيح موجب يساوي مجموع مربعي عددين صحيحين) هي خاطئة.

الحل: لتبان أن العبارة المذكورة خاطئة نبحث عن مثال عكسي، أي البحث عن عدد صحيح موجب بحيث لا يساوي مجموع مربعي عددين صحيحين. العدد 3 على سبيل المثال لا يمكن كتابته كذلك. بملاحظة أن الأعداد التامة التي لا تزيد عن 3 هي $0 = 02$ و $1 = 12$. أي أنه لا يمكن كتابة العدد 3 كمجموع عددين كل منهما 0 أو 1. أي أن الفرضية "كل عدد صحيح موجب يساوي مجموع مربعي عددين صحيحين" هي خاطئة.

أخطاء في البراهين mistakes in proofs

هناك العديد من الأخطاء الشائعة التي يتم ارتكابها أثناء البرهان. من بين هذه الأخطاء الأكثر شيوعاً هي أخطاء في الحساب والجبر الأساسي. لذلك يجب الانتباه بحذر والتأكد من كل خطوه من خطوات البرهان الرياضي. تبين الأمثلة التالية بعض هذه الأخطاء:

مثال 45: ما هو الخطأ في البرهان التالي $2 = 1$؟

"البرهان": باستخدام الخطوات التالية، حيث a و b عددان صحيحان موجبان متساويان

الخطوة	السبب
1. $a = b$	معطى
2. $a^2 = ab$	ضرب طرفي (1) ب a
3. $a^2 - b^2 = ab - b^2$	طرح b^2 من طرفي (2).
4. $(a - b)(a + b) = b(a - b)$	تحليل طرفي (3)
5. $a + b = b$	تقسيم طرفي (4) على $a - b$
6. $2b = b$	تبديل a ب b في (5) لأن $a = b$
7. $2 = 1$	تقسيم طرفي (6) على b

الحل: كل خطوة من الخطوات السابقة صحيحة ما عدا الخطوة رقم 5 عندما قسمنا طرفي المعادلة على $a - b$. الخطأ هو $a - b = 0$ (تبقى المعادلة صحيحة في حال ضربنا أو قسمنا على أي عدد غير معدوم).

مثال 46: ما هو الخطأ في برهان صحة العبارة التالية: "إذا كان n^2 موجباً فإن n موجب أيضاً"

"البرهان": بفرض أن n^2 عدد موجب. بما أن العبارة الشرطية "إذا كان n موجباً فإن n^2 موجب أيضاً" صحيحة، يمكننا استنتاج أن العدد n موجب.

الحل: لتكن $P(n)$ العبارة " n عدد موجب" و $Q(n)$ العبارة " n^2 عدد موجب". عندها يكون الفرض $Q(n)$ إن العبارة "إذا كان n موجباً فإن n^2 موجب أيضاً" هي $\forall n\ (P(n) \rightarrow Q(n))$ من الفرض $Q(n)$ والعبارة $\forall n\ (P(n) \rightarrow Q(n))$ لا نستطيع استنتاج $P(n)$ لأننا لا نستخدم قاعدة صحيحة للاستدلال. بدلاً من ذلك ، هذا مثال على عدم صحة الاستنتاج. مثال عكسي $n = -1$، حيث $n^2 = 1$ عدد موجب، بينما n هو عدد سالب.

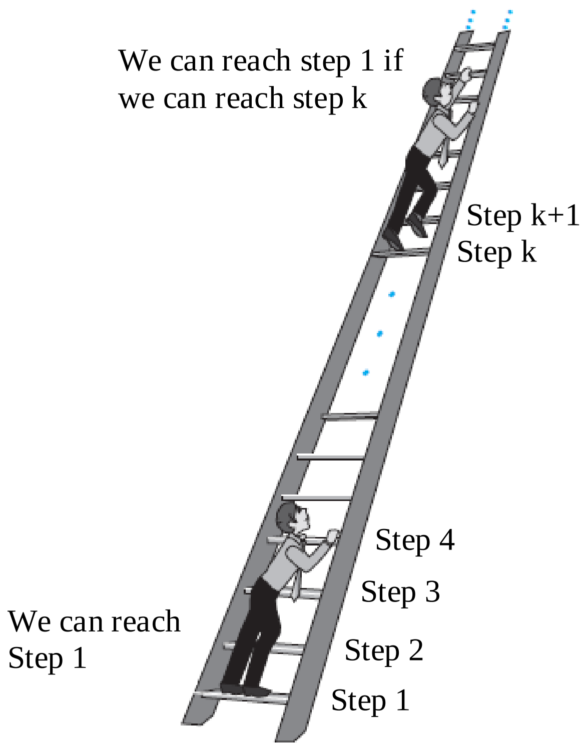
5.2. الاستقراء الرياضي mathematical induction

بفرض أنه لدينا سلّم لا نهائي ونريد معرفة ما إذا كنا نستطيع الوصول إلى كل درجة (خطوة) من درجات هذا السلّم. نعرف أمرين اثنين:

1. بمكننا الوصول إلى الدرج الأول من السلم.

2. إذا تمكنا من الوصول إلى درج ما نستطيع الوصول إلى الدرج التالي.

السؤال الذي يطرح هنا: هل يمكننا الاستنتاج بأنه يمكننا الوصول إلى أي درج من درجات السلم؟



من (1) نعلم أننا نستطيع الوصول إلى الدرج الأول من السلم. من ناحية أخرى وبما أنه يمكننا الوصول إلى الدرج الأول ومن (2) يمكننا الوصول إلى الدرج الثاني (لأن الدرج الثاني هو الذي يلي الدرج الأول). بتطبيق (2) مرة أخرى وبما أنه يمكننا الوصول إلى الدرج الثاني بالتالي يمكننا الوصول إلى الدرج الثالث (لأن الدرج الثالث هو الذي يلي الدرج الثاني). بالاستمرار بهذه الطريقة يمكننا تبيان أنه يمكننا الوصول إلى الدرج الرابع، الخامس، ... الخ. على سبيل المثال، بعد استخدام (2) 100 مرة، نعلم أنه يمكننا الوصول إلى الدرج 101 من السلم. لكن هل يمكننا الاستنتاج بأننا قادرون على الوصول أي درج من أدراج السلم اللانهائي؟ الجواب نعم، هذا الشيء يمكن التحقق منه باستخدام تقنية برهان هامة ندعوها بالاستقراء الرياضي.

الاستقراء الرياضي mathematical induction

بشكل عام، يمكن استخدام الاستقراء الرياضي لإثبات (برهان) العبارات التي تؤكد أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل الأعداد الصحيحة الموجبة n، حيث $P(n)$ هي تابع فرضيات. يتألف البرهان باستخدام الاستقراء الرياضي من جزأين (خطوتين) أساسيين:

1. خطوة الأساس basis step، حيث نبين أن $P(1)$ هي صحيحة.

2. خطوة الاستقراء inductive step، نبين أنه من أجل كل عدد صحيح موجب k، إذا كانت $P(k)$ صحيحة فإن $P(k+1)$ صحيحة أيضاً، أو بمعنى آخر الفرضية الشرطية $P(k)\to P(k+1)$ هي صحيحة من أجل كل عدد صحيح موجب k.

ملاحظة 8: لإكمال خطوة الاستقراء من البرهان بالاستقراء الرياضي، نفرض أن $P(k)$ صحيحة من أجل عدد صحيح موجب كيفي k وبين بعدها أنه في ظل هذا الافتراض، أن $P(k+1)$ يجب أن تكون صحيحة. نطلق على الافتراض، $P(k)$ صحيح، فرضية الاستقراء inductive hypothesis.

ملاحظة 9: عند الانتهاء من الخطوتين في البرهان بالاستقراء الرياضي، نكون قد بينا أن $P(n)$ هي صحيحة من أجل كل الأعداد الصحيحة الموجبة، بمعنى آخر نكون قد بيّنا أن $\forall n\ P(n)$ هي صحيحة حيث التكميم على كافة الأعداد الصحيحة الموجبة. في خطوة الاستقراء بيّنا أن $\forall k\ (P(k)\to P(k+1))$ هي صحيحة، وأيضاً المجال هو كافة الأعداد الصحيحة الموجبة. تقنية البرهان هذه يمكن نصُّها: $(P(1)\wedge\forall k\ (P(k)\to P(k+1)))\to\forall n\ P(n)$، حيث المجال هو كافة الأعداد الصحيحة الموجبة.

6.2. أمثلة من البراهين باستخدام الاستقراء الرياضي examples of proofs by mathematical induction

يوجد العديد من النظريات التي تؤكد أن $P(n)$ هي صحيحة من أجل كل الأعداد الموجبة n، حيث $P(n)$ هو تابع فرضيات. يمثل الاستقراء الرياضي أسلوب لإثبات النظريات من هذا النوع، أو بمعنى آخر يستخدم الاستقراء الرياضي لإثبات العبارات من الشكل $\forall n\ P(n)$، حيث المجال هو مجموعة الأعداد الموجبة. أي أنه يستخدم لإثبات طيف واسع جداً من النظريات.

إثبات صيغ المجموع 2proving summation formulae

مثال 47: برهن أنه إذا كان n عدد موجب، فإن: $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

الحل: لتكن $P(n)$ الفرضية "مجموع الأعداد المتتالية من 1 إلى n يساوي $\frac{n(n+1)}{2}$".

خطوة الأساس: من الواضح أن الفرضية $P(1)$ هي صحيحة لأن $1=\frac{1(1+1)}{2}$ (نعوض $n=1$ في العلاقة المطلوب برهانها).

خطوة الاستقراء: من فرضية الاستقراء (نفرض أن $P(k)$ صحيحة) ينتج أن $1+2+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$.

لنبرهن أن $P(k+1)$ صحيحة، أي:

$$1+2+...+k+(k+1)=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$1+2+...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

بالتالي $P(k+1)$ صحيحة.

ينتج من ذلك أن $P(n)$ صحيحة من أجل أي عدد صحيح موجب n.

مثال 48: برهن أنه إذا كان n عدد موجب، مجموع أول n عدداً من الأعداد الفردية يساوي n^2، أي:

$$1+3+...+(2n-1)=n^2$$

الحل: لتكن $P(n)$ الفرضية "مجموع أول n عدداً من الأعداد الفردية يساوي n^2".

خطوة الأساس: من الواضح أن $P(1)$ هي صحيحة لأن $1=1^2$ (نعوض $n=1$ في العلاقة المطلوب برهانها).

خطوة الاستقراء: من فرضية الاستقراء (نفرض أن $P(k)$ صحيحة) ينتج أن $1+3+...+(2k-1)=k^2$.

لنبرهن أن $P(k+1)$ صحيحة، أي: $1+3+...+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$

$$1+3+...+(2k-1)+(2k+1)=[1+3+...+(2k-1)]+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

وبالتالي $P(k+1)$ صحيحة.

ينتج من ذلك أن $P(n)$ صحيحة من أجل أي عدد صحيح موجب n.

ISSN: 2617-989X

مثال 49: برهن مجموع عدد منتهي من الحدود من متتالية هندسية حدها الأول a وأساسها r يعطى بالعلاقة:

$$\sum_{j=0}^{n} ar^{j} = a + ar + ar^{2} + \ldots + ar^{n} = \frac{ar^{n+1} - a}{r-1}, \quad r \neq 1$$

الحل: لتكن $P(n)$ الفرضية "مجموع أول $(n+1)$ حداً من متتالية هندسية حدها الأول a وأساسها r يعطى بالعلاقة:

$$\sum_{j=0}^{n} ar^{j} = a + ar + ar^{2} + \ldots + ar^{n} = \frac{ar^{n+1} - a}{r-1}, \quad r \neq 1$$

خطوة الأساس: $P(0)$ هي صحيحة لأن $\frac{ar^{0+1} - a}{r-1} = \frac{a(r-1)}{r-1} = a$ (الخطوة الأولى هنا توافق $n = 0$ الموافق لدليل أول حد في السلسلة الهندسة).

خطوة الاستقراء: من فرضية الاستقراء (نفرض أن $P(k)$ صحيحة) ينتج أن:

$$a + ar + ar^{2} + \ldots + ar^{k} = \frac{ar^{k+1} - a}{r-1}$$

لنبرهن أن $P(k+1)$ صحيحة، أي: $a + ar + ar^{2} + \ldots + ar^{k} + ar^{k+1} = \frac{ar^{k+2} - a}{r-1}$.

$$a + ar + ar^{2} + \ldots + ar^{k} + ar^{k+1} = \frac{ar^{k+1} - a}{r-1} + ar^{k+1}$$

بإعادة كتابة الطرف اليميني من المعادلة السابقة نحصل على ما يلي:

$$\frac{ar^{k+1} - a}{r-1} + ar^{k+1} = \frac{ar^{k+1} - a}{r-1} + \frac{ar^{k+2} - ar^{k+1}}{r-1} = \frac{ar^{k+2} - a}{r-1}$$

بالتالي $P(k+1)$ صحيحة.

ينتج من ذلك أن $P(n)$ صحيحة من أجل أي عدد صحيح موجب n.

إثبات المتراجحات proving inequalities

مثال 50: استخدم الاستقراء الرياضي لبرهان المتراجحة $n < 2^{n}$ من أجل أي عدد موجب n.

الحل: لتكن $P(n)$ الفرضية "$n < 2^{n}$".

خطوة الأساس: من الواضح أن $P(1)$ هي صحيحة لأن $1 < 2^{1} = 2$.

خطوة الاستقراء: من فرضية الاستقراء (نفرض أن $P(k)$ صحيحة) ينتج أن $k < 2^{k}$.

ولنبرهن أن $P(k+1)$ صحيحة، أي: $(k+1) < 2^{k+1}$.

بإضافة العدد 1 إلى المتراجحة $k < 2^{k}$ وبملاحظة أن $1 \leq 2^{k}$ نحصل على:

$$(k+1) < 2^{k} + 1 \leq 2^{k} + 2^{k} = 2.2^{k} = 2^{k+1}$$

بالتالي $P(k+1)$ صحيحة.

ينتج من ذلك أن $P(n)$ صحيحة من أجل أي عدد صحيح موجب n.

مثال 51: استخدم الاستقراء الرياضي لبرهان المتراجحة $2^{n} < n!$ من أجل أي عدد موجب $n \geq 4$.

ISSN: 2617-989X

$n!$ يقرأ n عاملي ويساوي $n! = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ 2.1.$ على سبيل المثال $4! = 4.3.2.1 = 24$ و $5! = 5.4.3.2.1 = 120$.

كما أن: $n! = n\ x\ (n-1)! = n\ x\ (n-1)\ x\ (n-2)! = \ldots$

الحل: لتكن $P(n)$ الفرضية "$2^n < n!$".

خطوة الأساس: $P(4)$ هي صحيحة لأن $24 < 4! = 24$.

خطوة الاستقراء: من فرضية الاستقراء نفرض أن $P(k)$ صحيحة ينتج أن $2^k < k!$، من أجل أي عدد $k \geq 4$.

ولنبرهن أن $P(k+1)$ صحيحة، أي: $2^{k+1} < (k+1)!$.

بملاحظة أن $2 < k + 1$ لدينا:

$$2^{k+1} = 2.2^k < 2.k! < (k+1)k! = (k+1)!$$

بالتالي $P(k+1)$ صحيحة.

ينتج من ذلك أن $P(n)$ صحيحة من أجل أي عدد صحيح موجب $n \geq 4$.

إثبات نتائج القسمة proving divisibility results

مثال 52: استخدم الاستقراء الرياضي لبرهان أن $n^3 - n$ قابل للقسمة على 3 من أجل أي عدد موجب n.

الحل: لتكن $P(n)$ الفرضية "$n^3 - n$ قابل للقسمة على 3"

خطوة الأساس: من الواضح أن $P(1)$ هي صحيحة لأن $1^3 - 1 = 0$ قابل للقسمة على 3.

خطوة الاستقراء: من فرضية الاستقراء (نفرض أن $P(k)$ صحيحة) ينتج أن $k^3 - k$ قابل للقسمة على 3 من أجل عدد موجب كيفي k.

ولنبرهن أن $P(k+1)$ صحيحة، أي: $(k+1)^3 - (k+1)$ قابل للقسمة على 3

$$(k+1)^3 - (k+1) = (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k+1) = (k^3 - k) + 3(k^2 + k)$$

الحد الأول $(k^3 - k)$ قابل للقسمة على 3 حسب فرضية الاستقراء، والحد الثاني $3(k^2 + k)$يقبل القسمة على 3 أي $(k+1)^3 - (k+1)$ يقبل القسمة على 3

بالتالي $P(k+1)$ صحيحة.

ينتج من ذلك أن $P(n)$ صحيحة من أجل أي عدد صحيح موجب n.

مثال 53: استخدم الاستقراء الرياضي لبرهان أن $7^{n+2} + 8^{2n+1}$ قابل للقسمة على 57 من أجل أي عدد صحيح غير سالب n.

الحل: لتكن $P(n)$ الفرضية "$7^{n+2} + 8^{2n+1}$ قابل للقسمة على 57"

خطوة الأساس: $P(0)$ هي صحيحة لأن $7^{0+2} + 8^{2.0+1} = 7^2 + 8^1 = 57$ قابل للقسمة على 57.

خطوة الاستقراء: من فرضية الاستقراء (نفرض أن $P(k)$ صحيحة) ينتج أن $7^{k+2} + 8^{2k+1}$ قابل للقسمة على 57 من أجل عدد صحيح غير سالب كيفي k.

ولنبرهن أن $P(k+1)$ صحيحة، أي: $7^{(k+1)+2} + 8^{2(k+1)+1}$ قابل للقسمة على 57

$$7^{(k+1)+2} + 8^{2(k+1)+1} = 7^{k+3} + 8^{2k+3} = 7.7^{k+2} + 8^2.8^{2k+1} = 7.7^{k+2} + 64.8^{2k+1}$$
$$= 7(7^{k+2} + 8^{2k+1}) + 57.\ 8^{2k+1}$$

الحد الأول $7\left(7^{k+2}+8^{2k+1}\right)$ قابل للقسمة على 57 حسب فرضية الاستقراء، والحد الثاني $57.\,8^{2k+1}$ يقبل القسمة على 57 أي $7^{(k+1)+2}+8^{2(k+1)+1}$ يقبل القسمة على 57.

بالتالي $P(k+1)$ صحيحة.

ينتج من ذلك أن $P(n)$ صحيحة من أجل أي عدد صحيح غير سالب n.

البراهين الخاطئة بالاستقراء الرياضي mistaken proofs by mathematical induction

وكما هو الحال مع كل طريقة برهان، يوجد العديد من الفرص لارتكاب الأخطاء عند استخدام الاستقراء الرياضي، كما تبينه الأمثلة التالية:

مثال 54: أوجد الخطأ في برهان المبرهنة التالية باستخدام الاستقراء الرياضي: من أجل كل عدد صحيح موجب n، لدينا العلاقة التالية $\sum_{i=1}^{n} i=\left(n+\frac{1}{2}\right)^{2}/2$.

خطوة الأساس: العلاقة صحيحة من أجل $n=1$.

خطوة الاستقراء: بفرض أن العلاقة صحيحة من أجل $k\geq 1$، أي أن $\sum_{i=1}^{k} i=\left(k+\frac{1}{2}\right)^{2}/2$، ولنبرهن صحتها من أجل $k+1$، أي $\sum_{i=1}^{k+1} i=\left((k+1)+\frac{1}{2}\right)^{2}/2$.

$$\sum_{i=1}^{k+1} i=\sum_{i=1}^{k} i+(k+1)=\left(k+\frac{1}{2}\right)^{2}/2+(k+1)=\left(k^{2}+k+\frac{1}{4}\right)/2+(k+1)$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i=\left(k^{2}+k+\frac{1}{4}+2k+2\right)/2=\left((k^{2}+2k+1)+(k+1)+\frac{1}{4}\right)/2$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i=\left((k+1)^{2}+2(k+1)\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right)/2=\left((k+1)+\frac{1}{2}\right)^{2}/2$$

الحل: من الواضح أن العلاقة السابقة غير صحيحة من أجل $n=1$، بالتالي خطوة الأساس خاطئة. $\sum_{i=1}^{n} i=1$، بينما $\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2}/2=\frac{9}{8}$.

مثال 55: أوجد الخطأ في برهان المبرهنة التالية باستخدام الاستقراء الرياضي: $a^{n}=1$ من أجل كافة الأعداد غير السالبة n، وحيث a عدد حقيقي غير معدوم.

خطوة الأساس: $a^{0}=1$ صحيحة.

خطوة الاستقراء: بفرض أن $a^{j}=1$ من أجل كل الأعداد الصحيحة غير السالبة j بحيث $j\leq k$ وبملاحظة أن:

$$a^{k+1}=\frac{a^{k}.a^{k}}{a^{k-1}}=\frac{1.1}{1}=1.$$

الحل: من خطوة الاستقراء نرى أنه من الضروري أن يكون $a^{k}=1$ و $a^{k-1}=1$ أيضاً. البرهان يفشل عندما نحاول حساب a^{1} (الموافقة ل $k=0$) $a^{0+1}=\dfrac{a^{0}.a^{0}}{a^{0-1}}$. في المقام هناك a^{-1} والتي لا نعرف قيمتها، إضافة إلى ذلك لا يمكن أن تكون قيمتها مساوي للواحد. أي أن $P(0)$ لا تؤدي إلى $P(1)$.

الاستقراء القوي strong induction

عادة، نستخدم الاستقراء القوي في حال تعذر البرهان على فرضية ما بالاستقراء الرياضي. خطوات البرهان للاستقراء القوي هي نفسها للاستقراء الرياضي مع اختلاف في خطوة الاستقراء (الخطوة الثانية). في الاستقراء الرياضي نبين أنه إذا كانت $P(k)$ صحيحة فإن $P(k+1)$ صحيحة أيضاً. أما في الاستقراء القوي فإننا نبين أنه إذا كانت $P(j)$ صحيحة من أجل $j=1, 2, \ldots, k$ فإن $P(k+1)$ صحيحة أيضاً.

أي لإثبات (برهان) العبارات التي تؤكد أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل الأعداد الصحيحة الموجبة n، حيث $P(n)$ هي تابع فرضيات، باستخدام الاستقراء القوي نتبع ما يلي:

1. خطوة الأساس، حيث نبين أن $P(1)$ هي صحيحة.
2. خطوة الاستقراء، نبين أن العبارة الشرطية $[P(1)\wedge P(2)\wedge\ldots\wedge P(k)\rightarrow P(k+1)]$ هي صحيحة من أجل كل عدد صحيح موجب k.

ملاحظة 10: الاستقراء الرياضي والاستقراء القوي متكافئان.

أعداد فيبوناتشي fibonacci numbers

يتم تعريف أعداد فيبوناتشي $f_0, f_1, f_2, \ldots$ بالمعادلة العودية $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$ و $f_0=0$ و $f_1=1$، أي أن أي عدد فيبوناتشي يساوي إلى مجموع العددين السابقين له. تشكل متتالية فيبوناتشي الأعداد:

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ldots$$

على سبيل المثال $5+8=13$ و $8+13=21$.

نحتاج في المثال اللاحق إلى ما يلي:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}+2}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}=\frac{6-2\sqrt{5}}{4}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{1-\sqrt{5}+2}{2}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1$$

ملاحظة 11: نسمي المقدار $\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ بالعدد الذهبي golden number.

مثال 56: باستخدام الاستقراء القوي برهن أن $f_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ من أجل أي عدد صحيح غير سالب.

الحل: لتكن $P(n)$ الفرضية بأن الصيغة المذكورة صحيحة، حيث $n\geq 0$.

خطوة الأساس: علينا تبيان أن $P(0)$ و $P(1)$ هما صحيحتان.

من أجل $n=0$، لدينا:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{0}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{0}=\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}=0=f_{0}$$

من أجل $n = 1$، لدينا:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}-\frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=1=f_{1}$$

خطوة الاستقراء: ليكن $k \geq 1$ وبفرض أن $P(j)$ صحيحة من أجل كل $0 \leq j \leq k$ بما أن $k \geq 1$، بالتالي فإن $k - 1 \geq 0$ وبشكل خاص نكون قد فرضنا أن كل $P(k)$ و $P(k-1)$ صحيحتان.

لنبرهن أن $P(k+1)$ صحيحة.

من العلاقة $f_{k} = f_{k+1} + f_{k-2}$ ينتج أن:

$$f_{k+1}=\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right]+\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right]$$

$$f_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right]$$

$$f_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right]$$

$$f_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right]$$

$$f_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right]$$

بالتالي $P(k+1)$ صحيحة.

ينتج من ذلك أن $P(n)$ صحيحة من أجل أي عدد صحيح غير سالب n.

يمكننا تعديل الاستقراء القوي بشكل طفيف وذلك كي تستطيع أن تتعامل مع طيف أكبر من المسائل. على وجه الخصوص هذا التغيير مطلوب في المسائل التي تكون فيها خطوة الاستقراء صحيحة فقط من أجل الأعداد الصحيحة التي هي أكبر من عدد صحيح ما. ليكن b عدد صحيح محدد و j عدد صحيح موجب، شكل الاستقراء القوي الذي نحتاجه يخبرنا بأن الفرضية $P(n)$ هي صحيحة من أجل كل الأعداد الصحيحة n حيث $n \geq b$.

1. خطوة الأساس، نبين أن $P(b), P(b+1), \ldots, P(b+j)$ كلها صحيحة.

2. خطوة الاستقراء، نبين أن العبارة الشرطية $[P(b) \wedge P(b+1) \wedge \ldots \wedge P(k) \rightarrow P(k+1)]$ هي صحيحة من أجل كل عدد صحيح $k \geq b+j$.

مثال 57: برهن بالاستقراء أن أي كمية من الطوابع البريدية بقيمة 12 ليرة أو أكثر يمكن تشكيلها فقط باستخدام طوابع من ذات ال 4 و 5 ليرات.

لتكن $P(n)$ الفرضية "الطوابع البريدية بقيمة n ليرة يمكن تشكيلها من طوابع بريدية بقيمة 4 و 5 ليرات"

الحل الأول: باستخدام الاستقراء الرياضي التقليدي

خطوة الأساس: $P(12)$ صحيحة لأن $12 = 3\times4$ (3 طوابع بريدية بقيمة 4ليرات).

خطوة الاستقراء: لتكن الفرضية $P(k)$ صحيحة أي أنه يمكن تشكيل أي طابع بريدي بقيمة k ليرة من طوابع بقيمة 4 و 5 ليرات. ولنبرهن أن $P(k+1)$ صحيحة أي أنه يمكن تشكيل أي طابع بريدي بقيمة k ليرة من طوابع بقيمة 4 و 5 ليرات، حيث $k \geq 12$.

يمكننا أن نميز حالتين الحالة الأولى في الطوابع البريدية التي تشكل القيمة k يوجد على الأقل طابع بقيمة 4 ليرات، والحالة الثانية لا يوجد ولا طابع بقيمة 4 ليرات.

لنأخذ الحالة الأولى يوجد على الأقل طابع بقيمة 4 ليرات تشكل الطابع ذو القيمة k ليرة. في هذه الحالة يكفي استبدال الطابع البريدي من قيمة 4 ليرات بطابع من قيمة 5 ليرات لتشكيل طابع بريدي بقيمة $k+1$ ليرة.

أما الحالة الثانية حيث لا يوجد طوابع بقيمة 5 ليرات في هذه الحالة تشكيل الطابع بقيمة k ليرة يتم باستخدام طوابع من قيمة 5 ليرات. علاوة على ذلك، بسبب كون $k \geq 12$، نحتاج على الأقل 3 طوابع بقيمة 5 ليرات لتشكيل طابع بقيمة k ليرة. وهكذا نستبدل ال 3 طوابع من قيمة 5 ليرات ب 4 طوابع من قيمة 4 ليرات وذلك لتشكيل طابع من قيمة $k+1$ ليرة.

بالتالي $P(k+1)$ صحيحة.

ينتج من ذلك أن $P(n)$ صحيحة من أجل أي عدد صحيح $n \geq 12$.

الحل الثاني: باستخدام الاستقراء القوي

خطوة الأساس: $P(12)$ صحيحة $(12 = 3\times4)$ و $P(13)$ صحيحة $(13 = 2*4+1*5)$ و $P(14)$ صحيحة $(14 = 1\times4+2\times5)$ و $P(15)$ صحيحة $(15 = 3\times5)$.

خطوة الاستقراء: بفرض أن $P(j)$ صحيحة من أجل $12 \leq j \leq k$، حيث k عدد صحيح $k \geq 15$. نفرض أنه بإمكاننا تشكيل طوابع بقيمة j ليرة، حيث $12 \leq j \leq k$. لنبرهن الآن صحة $P(k+1)$، أي أننا يمكن تشكيل طوابع بقيمة $k+1$ ليرة.

باستخدام فرضية الاستقراء، نستطيع فرض أن $P(k-3)$ صحيحة لأن $k-3 \geq 12$، بمعنى أنه يمكننا تشكيل طابع بقيمة $k-3$ ليرة باستخدام طوابع بقيمة 4 و 5 ليرات. لتشكيل طابع بقيمة $k+1$ ليرة نحتاج فقط لإضافة طابع بمقدار 4 ليرات على الطوابع التي تشكل الطابع بقيمة $k-3$ ليرة.

بالتالي $P(k+1)$ صحيحة.

ينتج من ذلك أن $P(n)$ صحيحة من أجل أي عدد صحيح $n \geq 12$.

مثال 58: أوجد الخطأ في برهان المبرهنة التالية باستخدام الاستقراء القوي: من أجل كل عدد صحيح غير سالب n، لدينا $5n = 0$

خطوة الأساس: العلاقة صحيحة من أجل $n = 0$ $(5.0 = 0)$

خطوة الاستقراء: بفرض أن العلاقة $5j = 0$ من أجل كل عدد صحيح غير سالب j، حيث $0 \le j \le k$ لنكتب $k + 1 = i + j$، حيث i و j أعداد طبيعية أقل من $k + 1$ باستخدام فرضية الاستقراء:

$$5(k + 1) = 5(i + j) = 5i + 5j = 0 + 0 = 0$$

الحل: يكمن الخطأ في الانتقال من الخطوة الأساسية $n = 0$ إلى الخطوة التالية $n = 1$، لأنه لا يمكننا كتابة 1 كمجموع عددين طبيعيين أصغر منه.

نحتاج في المثال التالي إلى معرفة أن مشتق وحيد الحد x^n هو: $(x^n)' = n.x^{n-1}$، حيث الرمز "'" يدل على المشتق.

كما نحتاج أيضاً إلى ما نسميه مشتق الجداء: $(uv)' = u'v + vu'$، حيث u و v تابعان.

مثال 59: أوجد الخطأ في برهان المبرهنة التالية باستخدام الاستقراء القوي: من أجل أي عدد صحيح $n \ge 0$، $(x^n)' = 0$.

خطوة الأساس: العلاقة صحيحة من أجل $n = 0$، $(x^0)' = (1)' = 0$ (مشتق العدد الثابت يساوي صفر).

خطوة الاستقراء: بفرض أن العلاقة صحيحة من أجل أي عدد صحيح i، حيث $0 \le i \le k$، ولنبرهن صحة العلاقة من أجل $k + 1$، أي $(x^{k+1})' = 0$.

نعلم أن $x^{k+1} = x.x^k$. باستخدام قاعدة الجداء نحصل على: $(x^{k+1})' = (x.x^k)' = x.(x^k)' + (x)'.x^k$

باستخدام فرضية الاستقراء، $(x^k)' = 0$ و $(x)' = 0$. بالتالي $(x^{k+1})' = 0$.

الحل: إن خطوة الاستقراء غير صحيحة من أجل $k = 0$ (الموافقة للقيمة $n = 0$)، لأننا في هذه الحالة نستخدم $(x)' = 0$ قبل أن نثبت برهانها.

استخدام الاستقراء القوي في الهندسة الحسابية computational geometry

يتم استخدام الاستقراء القوي في الهندسة الحسابية والتي هي جزء من الرياضيات المتقطعة التي تدرس المائل الحسابية التي تتضمن الأشكال الهندسية، كالرسومات الحاسوبية computer graphics واللعب الحاسوبية computer games والروبوتات robotics، الخ.

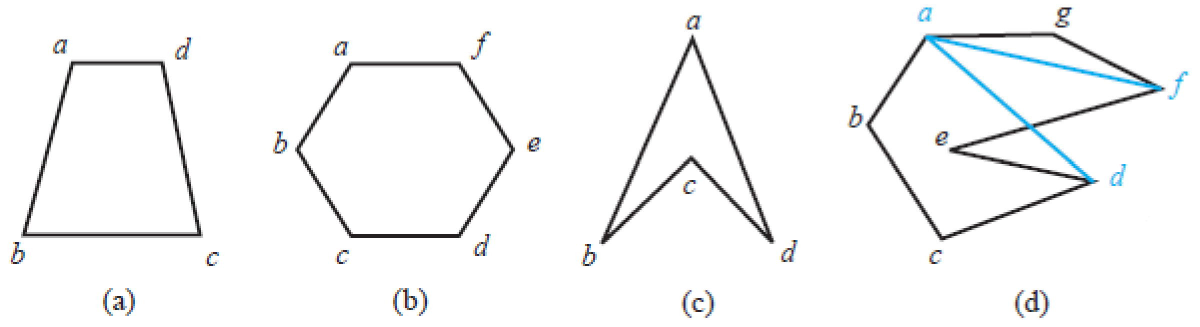
سنكتفي بذكر مثال (نظرية) من الهندسة الحسابية التي تُبرهن باستخدام الاستقراء القوي.

المضلع polygon هو شكل هندسي مغلق يتألف من متتالية من القطع المستقيمة $s_1, s_2, \ldots, s_n$، التي تسمى أضلاع sides. كل زوج من الأضلاع المتتالية، s_i و s_{i+1}، $i = 1, 2, \ldots, n-1$، وكذلك أيضاً الضلع الأخير s_n والضلع الأول s_1، من المضلع تلتقي في نقطة مشتركة تسمى رأس vertex.

نسمي مضلع بسيط simple إذا كان لا يوجد أي ضلعين غير متتاليين يتقاطعان.

كل مضلع بسيط يقسم المستوي إلى منطقتين: داخله، وتتألف من النقاط التي تقع داخل المنحني، وخارجه وتتألف من النقاط التي تقع خارج المنحني.

نسمي مضلع على أنه محدب convex إذا كانت كل قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين من داخل المضلع تقع كلياً (القطعة المستقيمة) داخل المضلع. يبين الشكل التالي العديد من المضلعات؛ المضلعان (a) و (b) محدبان بينما المضلعان (c) و (d) ليسا محدبان.



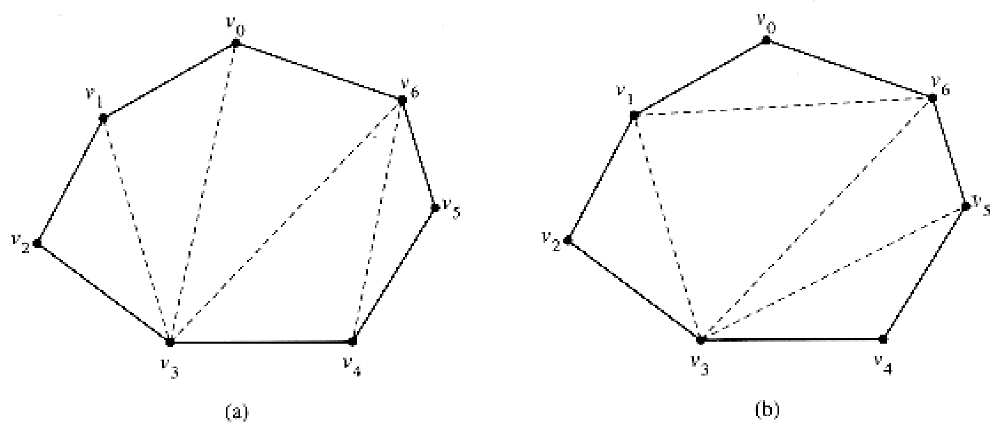
قطر diagonal مضلع بسيط هو قطعة مستقيمة تصل بين رأسين غير متتاليين من المضلع. كما يقال عن قطر أنه داخلي interior إذا كان يقع كلياً داخل المضلع (عدا نقطتي النهاية). على سبيل المثال في المضلع (d) السابق القطعة المستقيمة af التي تصل بين النقطتين a و f هي قطر داخلي، لكن القطعة المستقيمة ad التي تصل بين النقطتين a و d ليست قطر داخلي.

واحدة من أهم العمليات الأساسية في الهندسة الحسابية تتضمن تقسيم المضلع البسيط إلى مثلثات عن طريق إضافة أقطار غير متقاطعة. تسمى هذه العملية بالتثليث triangulation.

ملاحظة 12: في المضلع البسيط يوجد العديد منى عمليات التثليث المختلفة.

فرضية 1: أي مضلع بسيط ب 4 أضلاع على الأقل له قطر داخلي.

مبرهنة 1: في أي مضلع بسيط يحوي n ضلع، حيث n عدد صحيح $n \geq 3$، يمكن تحليله إلى $n-2$ من المثلثات غير المتقاطعة.



تمارين

1. أياً من الجمل التالية تمثل فرضية؟ ماهي القيمة المنطقية لتلك الفرضيات؟
   a) دمشق عاصمة سورية
   b) أجب عن السؤال التالي
   c) $x + 2 = 25$
   d) $4 + 8 = 13$

2. بين فيما إذا كانت العبارات الشرطية التالية صحيحة أو خاطئة:
   a) إذا كان $1 + 1 = 2$، فإن $2 + 2 = 5$
   b) إذا كان باستطاعة الحمير الطيران، فإن $1 + 1 = 3$
   c) إذا كان $1 + 1 = 3$، فإن الكلاب تستطيع الطيران
   d) إذا كان $1 + 1 = 2$، فإن الكلاب تستطيع الطيران

3. بين فيما إذا كانت العبارات ثنائية الشرطية التالية صحيحة أو خاطئة:
   a) إذا كان $1 + 1 = 2$، إذا وفقط إذا كان $2 + 3 = 4$
   b) إذا كان $1 + 1 = 3$، إذا وفقط إذا كانت الحمير تستطيع الطيران
   c) إذا كان $2 + 2 = 4$، إذا وفقط إذا كان $1 + 1 = 2$
   d) $1 > 0$، إذا وفقط إذا كان $2 > 1$

4. أوجد جدول الحقيقة لكل من العبارات التالية:
   a) $(p \vee q) \rightarrow (p \oplus q)$
   b) $(p \leftrightarrow q) \oplus (\sim p \leftrightarrow q)$
   c) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
   d) $(p \rightarrow q) \vee (\sim p \rightarrow r)$

5. بين أن العبارات الشرطية التالية متكافئة:
   a) $\sim (p \oplus q)$ و $p \leftrightarrow q$
   b) $\sim p \rightarrow (q \rightarrow r)$ و $q \rightarrow (p \vee r)$
   c) $[\sim p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$ و T (الكلية)
   d) $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$ و T

6. ما هي قيمة الحقيقة للعبارات التالية بفرض المجال كل الأعداد الصحيحة:
   a) $\forall n \ (n + 1 > n)$

b) $\exists n\ (n = -n)$

c) $(\forall n\ (n^2 < n)$

d) $\exists n\ (n^2 = n)$

7. أوجد مثالي عكسي، إن وجد، للمكممات العامة التالية، حيث المتحولات مجموعة الأعداد الصحيحة:

a) $\forall x\ (x^2 \geq x)$

b) $\forall x\ (x^2 \neq x)$

c) $\forall x\ (x^2 \neq 2)$

d) $\forall x\ (|x| > 0)$

8. استخدم البرهان المباشر لتبيان أن جداء عددين عاديين هو عدد عادي.

9. برهن أنه إذا كان n عدد مربع كامل فإن $n+2$ ليس بمربع كامل.

10. برهن أنه من أجل العدد الصحيح n العبارات التالية متكافئة: (i) n^2 فردي، (ii) $n-1$ زوجي، (iii) n^3 فردي، (iv) n^2+1 زوجي.

11. برهن أنه لا يوجد عدد موجب n بحيث يحقق العلاقة $n^2 + n^3 = 100$.

12. برهن أنه لا يوجد عدد موجب x بحيث يحقق العلاقة $x^4 + y^4 = 625$

13. برهن صحة العلاقات التالية باستخدام الاستقراء الرياضي:

a) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$، n عدد صحيح موجب.

b) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$، n عدد صحيح موجب.

c) $1.2.3 + 2.3.4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = n(n+1)(n+2)(n+3)/4$، n عدد صحيح موجب.

d) $3^n < n!$، n عدد صحيح موجب أكبر من 6.

e) العدد 21 يقسم $4^{n+1} + 5^{2n-1}$، n عدد صحيح موجب.

f) ليكن $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$، a و b عددان حقيقيان فإن $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$.

ISSN: 2617-989X

14. برهن صحة العلاقات التالية باستخدام الاستقراء القوي:

a) $f_n \geq \phi^{n-2}$، من أجل $n \geq 2$، حيث ϕ العدد الذهبي و f_n أعداد فيبوناتشي.

b) الطوابع البريدية بقيمة 8 ليرة أو أكثر يمكن تشكيلها فقط باستخدام طوابع من ذات ال 3 ليرات و 5 ليرات.

ISSN: 2617-989X

العلامة العظمى: 100 **علامة النجاح: 50** **المدة: ساعة ونصف**

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة **(50) درجة**

1. الفرضية "$1 + 1 = 2$" أو أي نقطتين تحدد مستقيم"
   a) صحيحة
   b) خاطئة
   c) المعلومات غير كافية
   d) ممكن أن تكون صحيحة أو خاطئة

2. مقلوب converse الفرضية $r \to z$ هو
   a) $not\ r \to not\ z$
   b) $z \to r$
   c) $r \to not\ r$
   d) $not\ z \to not\ r$

3. أي من العمليات AND, OR, NOT تربط تعبيرين مع بعضها البعض
   a) AND
   b) OR
   c) AND و OR
   d) AND و OR و NOT

4. ما هو عدد قيم x التي تجعل $x \le 5$ و $x \ge 5$ صحيحة
   a) 0
   b) 1
   c) 2
   d) 5

5. بفرض أن $p \to q$ و $p \to r$. هل يمكننا الاستنتاج أن $q \to r$
   a) نعم بالتناظر
   b) نعم بالتعدي
   c) نعم بالجمع
   d) لا

6. النفي الإيجابي contrapositive للفرضية $r \to z$ هو

a) $not\ r \to not\ z$

b) $z \to r$

c) $r \to not\ r$

d) $not\ z \to not\ r$

7. نفي المكمم العام $\forall x\ P(x)$ هو:

a) $\exists x \sim P(x)$

b) $\sim \exists x\ P(x)$

c) $\forall x \sim P(x)$

d) ولا إجابة من الإجابات السابقة صحيحة

8. نفي العبارة $\exists x\ (x^2 = 2)$ هي:

a) $\forall x\ (x^2 \neq 2)$

b) $\exists x\ (x^2 \neq 2)$

c) $\exists x\ (x^2 \neq 2)$

d) $\forall x\ (x^2 = 2)$

9. نفي العبارة التالية $(n > 10) \vee (n < m \wedge n \leq k)$ هو:

a) $(n \leq 10) \wedge (n \geq m \vee n > k)$

b) $(n \leq 10) \vee (n \geq m \vee n > k)$

c) $(n > 10) \wedge (n < m \wedge n \leq k)$

d) $(n \leq 10) \vee (n \geq m \wedge n > k)$

10. المقلوب والنفي الإيجابي للاقتضاء $n > 0 \to n \leq 10$ هما:

a) المقلوب $n \leq 10 \to n > 0$ والنفي الإيجابي $n \leq 0 \to n > 10$

b) المقلوب $n \leq 10 \to n > 0$ والنفي الإيجابي $n > 10 \to n \leq 0$

c) المقلوب $n > 0 \to n \leq 10$ والنفي الإيجابي $n > 10 \to n \leq 0$

d) المقلوب $n > 0 \to n \leq 10$ والنفي الإيجابي $n \leq 0 \to n > 10$

ISSN: 2617-989X

السؤال الثاني: أجب بصح أو خطأ (مع التعليل) **(35) درجة**

1. $x2$ عدد فردي $\Leftarrow$ x عدد فردي:

a) صح

b) خطأ

مثال عكسي: $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$ هو عدد فردي، بينما $\sqrt{7}$ ليس عدد فردي (ليس حتى عدد صحيح)

2. x^3 عدد زوجي $\Leftarrow$ x عدد زوجي:

a) صح

b) خطأ

مثال عكسي: $\left(\sqrt[3]{8}\right)^3 = 8$ هو عدد زوجي، بينما $\sqrt[3]{8}$ ليس عدد زوجي (ليس حتى عدد صحيح)

3. x, y عددان فرديان $\Leftarrow$ $x + y$ عدد زوجي:

a) صح

b) خطأ

$x = 2n + 1$ و $y = 2m + 1$ بجمعهما نحصل على
$x + y = 2n + 2m + 2 = 2(n + m + 1)$

4. x, y عددان زوجيان $\Leftarrow$ xy عدد زوجي:

a) صح

b) خطأ

$x = 2n$ و $y = 2m$ بضربهما نحصل على $xy = (2n)(2m) = 4mn = 2(2mn)$

5. مجموع 3 أعداد صحيحة متتالية يقبل القسمة على 3

a) صح

b) خطأ

لتكن الأعداد المتتالية $n, n+1, n+2$ حيث n عدد صحيح. بجمع هذه الأعداد الثلاث نحصل على
$n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1)$

ISSN: 2617-989X

السؤال الثالث: **(15) درجة**

لنعرف التابع $f(n) = n + (n+1) + \ldots + (2n-1) + (2n)$ من أجل n عدد طبيعي.

$f(1) = 1+2 = 3 \quad f(2) = 2+3+4 = 9 \quad f(3) = 3+4+5+6 = 18, \ \ldots.$

برهن بالاستقراء الرياضي أن: $2f(n) = 3n^2 + 3n$

الحل:

خطوة الأساس: من أجل $n = 1$ الفرضية صحيحة لأن $2f(1) = 2.3 = 6 = 3(1)^2 + 3(1)$

خطوة الاستقراء: بفرض أن الفرضية صحيحة من أجل $n = k$ أي أن: $2f(k) = 3k^2 + 3k$. ولنبرهن أنها صحيحة من أجل $n = k+1$ أي:

$$2f(k+1) = 3(k+1)^2 + 3(k+1) = 3\left(k^2+2k+1+k+1\right) = 3\left(k^2+3k+2\right)$$

$$\begin{aligned}
f(k+1) &= (k+1)+(k+2)+\ldots+(2k)+(2k+1)+(2k+2) \\
&= -k+k+(k+1)+(k+2)+\ldots+(2k)+(2k+1)+(2k+2) \\
&= -k+\left[k+(k+1)+(k+2)+\ldots+(2k)\right]+(2k+1)+(2k+2) \\
&= -k+f(k)+(2k+1)+(2k+2) = f(k)+3k+3
\end{aligned}$$

تغذية راجعة في حال الخطأ: الفقرة 5.2

السؤال الأول	الإجابة الصحيحة	توجيه في حال الخطأ
1	a	الفقرة 1
2	b	الفقرة 4.1
3	c	الفقرة 1
4	b	الفقرة 1
5	d	الفقرة 1
6	d	الفقرة 1
7	a	الفقرة 6.1
8	a	الفقرة 6.1
9	a	الفقرة 6.1
10	b	الفقرة 6.1

السؤال الثاني	الإجابة الصحيحة	توجيه في حال الخطأ
1	b	الفقرة 2
2	b	الفقرة 2
3	a	الفقرة 2
4	a	الفقرة 2
5	a	الفقرة 2

الفصل الثاني:الجبر البولياني

رقم الصفحة	العنوان

الكلمات المفتاحية:

الجبر البولياني، عملية ثنائية، بديهيات، مسلمات، بنية جبرية، جدول الحقيقة، التقابل، تطابق، تماثل، نفي، هيمنة، امتصاص، دومورغان، تابع بولياني، متمم، حد أصغري، حد أعظمي، مجموع حدود صغرى، جداء حدود عظمى، شكل قياسي، شكل قانوني، بوابة منطقية، دارة رقمية.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على الجبر البولياني والنظريات المتعلقة به، جبر المتحولات المنطقية والعمليات المنطقية على تلك المتحولات، كما نتعرف على جدول الحقيقة للتوابع المنطقية وكيفية كتابتها بالشكل القانوني: مجموع حدود صغرى أو جداء حدود عظمى وكيفية التحويل بينهما وكيفية تبسيطها. كما يتعرف الطالب على البوابات المنطقية الأساسية والمشتقة وكيفية استخدامها في تصميم الدارات الرقمية.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- الجبر البولياني والنظريات المتعلقة به.
- التوابع البوليانية وكيفية التعامل معها.
- تبسيط التعابير المنطقية باستخدام النظريات.
- إنشاء جدول الحقيقة واستخدامه في كتابة التوابع البوليانية بالشكل القانوني
- فهم واستخدام البوابات المنطقية وكيفية استخدامها في تحقيق التوابع البوليانية.

1. تعاريف أساسية basic definitions

يمكن تعريف الجبر البولياني Boolean algebra بمجموعة (S) من العناصر $(x, y, \ldots)$ ومجموعة من العمليات الثنائية binary operators ومجموعة من البديهيات axioms.

تُسند العملية الثنائية * على S إلى كل زوج عناصر من S عنصر من S أيضاً $(a*b=c$ حيث $a, b, c \in S)$.

معظم البديهيات المستخدمة لتشكيل البني الجبرية بشكل عام هي التالية:

1. الإغلاق closure: مجموعة S تكون مغلقة بالنسبة للعملية الثنائية، إذا كان من أجل أي عنصرين من S، تحدد العملية الثنائية قاعدة للحصول على عنصر وحيد من S. على سبيل المثال مجموعة الأعداد الطبيعية N بالنسبة للعملية الثنائية + هي مجموعة مغلقة لأنه من أجل أي عددين طبيعيين a, b يوجد عدد طبيعي c، بحيث $a + b = c$. بينما لا تشكل مجموعة الأعداد الطبيعية بالنسبة للعملية الثنائية − مجموعة مغلقة لأنه على سبيل المثال $3 - 5 = -2$، حيث $3, 5$ عددان طبيعيان بينما -2 ليس بعدد طبيعي
2. قانون تجميعي associative law: نقول عن العملية الثنائية * على المجموعة S أنها تجميعية إذا كان من أجل أي $x, y, z \in S$ لدينا $(x*y)*z = x*(y*z)$
3. قانون تبديلي commutative law: نقول عن العملية الثنائية * على المجموعة S أنها تبديلية إذا كان من أجل أي $x, y, z \in S$ لدينا $x*y = y*x$
4. العنصر الحيادي identity element: نقول عن مجموعة S أنه لديها عنصر حيادي $e \in S$ بالنسبة للعملية الثنائية * إذا كان من أجل أي عنصر $x \in S$ لدينا $x*e = e*x = x$. على سبيل المثال يمثل العنصر 0 العنصر الحيادي لمجموعة الأعداد الصحيحة Z بالنسبة للعملية الثنائية + لأن $x+0 = 0+x = x$ من أجل أي عنصر صحيح x
5. النظير inverse: نقول عن المجموعة S التي تحوي على عنصر حيادي e بالنسبة للعملية الثنائية * أنها تملك نظير إذا كان لأي عنصر x من S يوجد عنصر y من S بحيث $x*y = y*x = e$ على سبيل المثال مجموعة الأعداد الصحيحة Z بالنسبة للعملية الثنائية + والعنصر الحيادي $e = 0$، نظير أي عنصر a هو $(-a)$ لأن $a + (-a) = (-a) + a = 0$
6. قانون التوزيع distributive law: ليكن * وعمليتان ثنائيتان على المجموعة S، نقول عن * أنها توزيعية بالنسبة ل عندا يكون $x*(y \cdot z) = (x*y) \cdot (x*z)$

يمثل الحقل field مثال على بنية جبرية. الحقل هو مجموعة من العناصر معرف عليه عمليتين ثنائيتين لكل منهما الخواص من 1 إلى 5، وكلتا العمليتين مع بعض تعطيان الخاصة السادسة. مجموعة الأعداد الحقيقية مع العمليتين الثنائيتين الجمع + والضرب · تشكل حقل الأعداد الحقيقية الذي نعرفه.

ISSN: 2617-989X

2. الجبر البولياني Boolean algebra

الجبر البولياني هو بنية جبرية معرف بمجموعة (B) من العناصر $(x, y, \ldots)$ و أيضاً عمليتان ثنائيتان $+$ و، ومزود بالبديهيات التالية:

1. (a) البنية مغلقة بالنسبة للعملية الثنائية $+$

(b) البنية مغلقة بالنسبة للعملية الثنائية

2. (a) العنصر 0 هو عنصر حيادي بالنسبة للعملية الثنائية $+$؛ أي $x+0 = 0+x = x$.

(b) العنصر 1 هو عنصر حيادي بالنسبة للعملية الثنائية؛ أي $x\cdot 1 = 1\cdot x = x$.

3. (a) البنية تبديلية بالنسبة للعملية الثنائية $+$؛ أي $x+y = y+x$.

(b) البنية تبديلية بالنسبة للعملية الثنائية؛ أي $x\cdot y = y\cdot x$.

4. (a) العملية الثنائية توزيعية بالنسبة للعملية الثنائية $+$؛ أي $x\cdot(y+z) = (y\cdot x) + (x\cdot z)$.

(b) العملية الثنائية $+$ توزيعية بالنسبة للعملية الثنائية؛ أي $x+(y\cdot z) = (y+x)\cdot(x+z)$.

5. من أجل أي عنصر $x \in B$، يوجد عنصر $\overline{x} \in B$ (يسمى متمم complement العنصر x)، بحيث (a)

$x\cdot\overline{x} = 0$ و $x+\overline{x} = 1$

6. يوجد على الأقل عنصران $x, y \in B$، بحيث $x \neq y$.

الجبر البولياني بقيمتين two valued Boolean algebra

يعرف الجبر البولياني بقيمتين على مجموعة من عنصرين $B = \{0, 1\}$، حيث العمليتان الثنائيتان $+$ و$\cdot$ وكما تبينه الجداول التالية (بالإضافة إلى عملية المتمم):

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

العمليات السابقة هي نفسها العمليات المنطقية $\wedge$ (AND) و $\vee$ (OR) و $\sim$ (NOT) المعرفة في الفصل الأول.

ISSN: 2617-989X

مثال 1: برهن القانون التوزيعي $x\cdot(y+z) = (y\cdot x) + (x\cdot z)$.

يمكن برهان القانون التوزيعي $x\cdot(y+z) = (y\cdot x) + (x\cdot z)$ بإيجاد تابع الحقيقة لكافة القيم الممكنة لـ x, y, z نبين أن قيمة التركيب $x\cdot(y+z)$ تساوي قيمة التركيب $(y\cdot x) + (x\cdot z)$.

x	y	z
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

$y+z$	$x\cdot(y+z)$
0	0
1	0
1	0
1	0
0	0
1	1
1	1
1	1

$x\cdot y$	$x\cdot z$	$(x\cdot y)+(x\cdot z)$
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3. خصائص الجبر البولياني properties of Boolean algebra

الثنائية (التقابل) duality

وجدنا سابقاً أنه تم سرد بديهيات الجبر البولياني في أزواج حددت بالجزء (a) والجزء (b) يمكن الحصول على أي جزء من الجزء الآخر وذلك بالتبديل بين العمليتين الثنائيتين وكذلك التبديل بين عناصر المطابقة (تبديل + ب·، تبديل · ب +، تبديل 0 ب 1 وتبديل 1 ب 0). نسمي هذه الخاصة الهامة بمبدأ التقابل duality principle، والذي ينص على أن كل تعبير جبري مستنتج من بديهيات الجبر البولياني يبقى صحيحاً عند استبدال العمليات الثنائية واستبدال عناصر المطابقة.

النظريات الأساسية basic theorems

يبين الجدول التالي نظريات الجبر البولياني ومسلّماته postulates. يمكن حذف العملية الثنائية، عندما لا يوجد أي التباس.

التطابق	الاسم
(a) $x + 0 = x$ **(b)** $x \cdot 1 = x$	قوانين التطابق Identity laws
(a) $x + 1 = 1$ **(b)** $x \cdot 0 = 0$	قوانين الهيمنة Domination laws
(a) $x + x = x$ **(b)** $x \cdot x = x$	قوانين التماثل Idempotent laws
$\overline{\overline{x}} = x$	قانون النفي المزدوج Double complement laws
(a) $x + y = y + x$ **(b)** $xy = yx$	قوانين التبديل Commutative laws
(a) $x + (y + z) = x + (y + z)$ **(b)** $x(yz) = x(yz)$	قوانين التجميع Associative laws
(a) $x + (y + z) = (x + y)(x + z)$ **(b)** $x(y + z) = xy + xz$	قوانين التوزيع Distributive laws
(a) $\overline{(x + y)} = \overline{x}\,\overline{y}$ **(b)** $\overline{(x\,y)} = \overline{x} + \overline{y}$	قوانين دومورغان De Morgan's laws
(a) $x + xy = x$ **(b)** $x(x + y) = x$	قوانين الامتصاص Absorption laws
(a) $x + \overline{x} = 1$ **(b)** $x\,\overline{x} = 0$	قوانين النفي Negation laws

مثال 2: برهن قانون التماثل $x + x = x$.

$$x + x = (x + x) \cdot 1 = (x + x)(x + \overline{x}) = x + x\,\overline{x} = x + 0 = x$$

مثال 3: برهن قانون الهيمنة $x + 1 = 1$.

$$x + 1 = 1 \cdot (x + x) = (x + \overline{x})(x + 1) = x + \overline{x} \cdot 1 = x + \overline{x} = 1$$

أولويات العمليات operator precedence

أولويات العمليات البوليانية في إجراء التعابير هي كالتالي: الأقواس ثم المتمم NOT يليها الضرب AND وأخيراً الجمع OR.

4. التوابع البوليانية Boolean functions

الجبر البولياني هو جبر يتعامل مع المتحولات (المتغيرات) الثنائية binary variables والعمليات المنطقية. التابع البولياني هو تعبير جبري يتألف من المتحولات الثنائية والثوابت 0 و 1 وأيضاً من العمليات المنطقية. كما أنه من أجل قيمة معطاة للمتحولات الثنائية، يمكن للتابع البولياني أن يأخذ القيمة 0 أو 1.

مثال 4: $F_1 = x + \overline{y}\, z$ و $F_2 = \overline{x}\, \overline{y}\, z + \overline{x}\, y\, z + x\, \overline{y}$ هما تابعان بوليانيان.

يمكن تمثيل التابع البولياني باستخدام جدول الحقيقة: تمثل الأعمدة الأولى للجدول المتحولات البوليانية $x, y, \ldots$، حيث يوجد في الجدول عدد كاف من الصفوف لتمثيل جميع الحالات (التوافقيات) الممكنة من 0 و 1 لهذه المتحولات. في حالة متغيرين اثنين يلزم وجود 4 صفوف، وفي حالة 3 متغيرات يلزم وجود 8 صفوف (الحالة العامة n متغير يلزم وجود 2^n صف). ويوجد أيضاً عمود لكل مرحلة من مراحل تكوين الفرضية المركبة وقيمة الحقيقة عند كل خطوة تعين من الخطوات السابقة لها، وفي النهاية نحصل على قيمة الحقيقة للفرضية في العمود الأخير من الجدول.

يبين الجدول التالي جدول الحقيقة لكل من التابعين $F_1 = x + \overline{y}\, z$ و $F_2 = \overline{x}\, \overline{y}\, z + \overline{x}\, y\, z + x\, \overline{y}$.

x	y	z	F_1	F_2
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

يُمكن في بعض الأحيان تبسيط التوابع البوليانية، كما سنرى فيما بعد، وذلك بتطبيق بعض متطابقات الجبر البولياني، فعلى سبيل المثال يمكن تبسيط التابع F_2 كما يلي:

$$F_2 = \overline{x}\, \overline{y}\, z + \overline{x}\, y\, z + x\, \overline{y} = \overline{x}\, z\, (\overline{y} + y) + x\, \overline{y} = \overline{x}\, z + x\, \overline{y}$$

متمم تابع complement of a function

متمم تابع F هو $\overline{F}$ ويمكن الحصول عليه بعملية استبدال الأصفار $0's$ بالواحدات $1's$ وكذلك استبدال الواحدات $1's$ بالأصفار $0's$ في قيم التابع F. هذا ويمكن اشتقاق متمم التابع جبرياً من خلال قانون دومورغان، حيث باستطاعتنا تمديد هذا القانون لأكثر من متحولين. على سبيل المثال من أجل 3 متحولات $\overline{(A + B + C)}$ يصبح قانون دومورغان كما يلي، بفرض $B + C = x$:

$$\overline{(A + B + C)} = \overline{(A + x)} = \overline{A}\, \overline{x} = \overline{A}\, \overline{(B + C)} = \overline{A}\, (\overline{B}\, \overline{C}) = \overline{A}\, \overline{B}\, \overline{C}$$

ISSN: 2617-989X

مثال 5: أوجد متمم التابع $F = x(\overline{y}\,\overline{z} + yz)$

$$\overline{F} = \overline{[x(\overline{y}\,\overline{z} + yz)]} = \overline{x} + \overline{(\overline{y}\,\overline{z} + yz)} = \overline{x} + \overline{(\overline{y}\,\overline{z})}\;\overline{(yz)}$$
$$= \overline{x} + (y + z)(\overline{y} + \overline{z}) = \overline{x} + y\overline{z} + \overline{y}z$$

5. تمثيل التوابع البوليانية representing Boolean functions

الحدود الصغرى والحدود العظمى minterms and maxterms

يمكن للمتحول البولياني أن يظهر بالشكل العادي (x) أو بالشكل المتمم $(\overline{x})$ ويرمز لها أحياناً بالرمز (x'). ليكن لدينا على سبيل المثال متحولان x, y مركبين بعملية AND. من الواضح أنه يوجد 4 حالات مختلفة لهذا التركيب: $\overline{x}\,\overline{y}$ و $\overline{x}y$ و $x\overline{y}$ و xy. نسمي كل حد من الحدود السابقة بالحد الأصغري midterm، أو الجداء القياسي standard product. بشكل عام إذا كان لدينا n متحول نحصل على 2^n حد أصغري. يتم إعطاء رمز لكل حد أصغري بالشكل m_j، حيث يعبر الدليل j عن المكافئ العشري للعدد الثنائي للحد الأصغري.

وبشكل مشابه يمكن تركيب n متحول باستخدام العملية OR والحصول على 2^n حد ندعو كل منها بالحد الأعظمي maxterm، أو المجموع القياسي standard sum. ويتم إعطاء رمز لكل حد أعظمي بالشكل M_j، حيث يعبر الدليل j عن المكافئ العشري للعدد الثنائي للحد الأعظمي.

يبين الجدول التالي الحدود الأصغرية والحدود الأعظمية في حال لدينا 3 متحولات:

			Minterms		Maxterms	
x	**y**	**z**	**Term**	**Designation**	**Term**	**Designation**
0	0	0	$x'y'z'$	m_0	$x + y + z$	M_0
0	0	1	$x'y'z$	m_1	$x + y + z'$	M_1
0	1	0	$x'yz'$	m_2	$x + y' + z$	M_2
0	1	1	$x'yz$	m_3	$x + y' + z'$	M_3
1	0	0	$xy'z'$	m_4	$x' + y + z$	M_4
1	0	1	$xy'z$	m_5	$x' + y + z'$	M_5
1	1	0	xyz'	m_6	$x' + y' + z$	M_6
1	1	1	xyz	m_7	$x' + y' + z'$	M_7

يمكن التعبير عن التابع البولياني جبرياً من جدول الحقيقة بتشكيل حد أصغري من أجل كل تركيب للمتحولات والتي تعطي القيمة 1 للتابع ومن ثم نجمع تلك الحدود.

ISSN: 2617-989X

مثال 6: عبر عن التابعين التاليين كمجموع حدود صغرى.

x	y	z	Function f_1	Function f_2
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

الحل:

$$f_1 = \bar{x}\,\bar{y}z + x\,\bar{y}\,\bar{z} + xyz = m_1 + m_4 + m_7$$

$$f_2 = \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz = m_3 + m_5 + m_6 + m_7$$

مما سبق يمكن القول بأن أي تابع بولياني يمكن التعبير عنه بمجموع حدود أصغرية.

الآن لنأخذ متمم التابع البولياني والذي يمكن قراءته من جدول الحقيقة بتشكيل حدود أصغرية لكل تركيب للمتحولات والتي تعطي القيمة 0 للتابع ومن ثم نجمع تلك الحدود. على سبيل المثال لنأخذ التابع f_1 السابق:

$$\bar{f}_1 = \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}y\,\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z}$$

لنأخذ متمم $\bar{f}_1$ نحصل بالتالي على f_1:

$$f_1 = (x+y+z)(x+\bar{y}+z)(x+\bar{y}+\bar{z})(\bar{x}+y+\bar{z})(\bar{x}+\bar{y}+z) = M_0 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_5 \cdot M_6$$

بشكل مشابه يمكن كتابة التابع f_2:

$$f_2 = (x+y+z)(x+y+\bar{z})(x+\bar{y}+z)(\bar{x}+y+z) = M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_4$$

مما سبق أيضاً يمكن القول بأن أي تابع بولياني يمكن التعبير عنه بجداء حدود أعظمية.

تعريف 1: نقول عن التوابع البوليانية المعبر عنها كمجموع حدود صغرى أو كجداء حدود عظمى على أنها مكتوبة بالشكل القانوني canonical form.

مجموع الحدود الصغرى sum of minterms

إن الحدود الصغرى التي مجموعها يعرف التابع البولياني هي تلك التي تعطي التابع القيمة 1 في جدول الحقيقة. في بعض الأحيان يكون مفيداً التعبير عن التابع كمجموع حدود صغرى. إذا لم يكن التابع بهذا الشكل، يمكن جعله كذلك عن طريق أولاً نشر التابع كمجموع حدود AND. بعدها كل حد يجب أن يحوي كل المتحولات، فإذا غاب عنه متحول أو أكثر علينا ضربه ب $x + \bar{x}$ على سبيل المثال وذلك إذا كان المتحول x هو الغائب.

مثال 7: عبر عن التابع التالي كمجموع حدود صغرى $F = A + \overline{B}C$

الحل: للتابع 3 متحولات A, B, C. الحد الأول A يغيب عنه متحولان B و C، لذلك نضربه أولاً ب $B + \overline{B}$: $A = A(B + \overline{B}) = AB + A\overline{B}$، ويغيب عنه أيضاً المتحول C، بالتالي نضربه أيضاً ب $C + \overline{C}$:

$$A = AB(C + \overline{C}) + A\overline{B}(C + \overline{C}) = ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C}$$

أما الحد الثاني $\overline{B}C$ فيغيب عنه المتحول A، بالتالي:

$$\overline{B}C = \overline{B}C(A + \overline{A}) = A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}C$$

بتجميع كافة الحدود نحصل على:

$$F = A + \overline{B}C = ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C = m_1 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7$$

عندما يكون التابع بصيغة مجموع حدود صغرى، من المفضل أحياناً كتابته بالشكل المبسط التالي:

$$F(A, B, C) = \sum(1, 4, 5, 6, 7)$$

الإجرائية البديلة للحصول على التابع بصيغة مجموع حدود صغرى هي الحصول على جدول الحقيقة للتابع ومن ثم قراءة الحدود الصغرى من جدول الحقيقة (قيم التابع المساوية للواحد). لنأخذ المثال السابق $F = A + \overline{B}C$:

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

من جدول الحقيقة نستطيع أن نقرأ الحدود الصغرى الخمسة للتابع هي: 7 ,6 ,5 ,4 ,1.

جداء الحدود العظمى product of maxterms

للتعبير عن تابع بولياني كجداء حدود عظمى، يجب أولاً وضعه ضمن حدود OR. وهذا يمكن الحصول عليه باستخدام الخاصة التوزيعية $x + yz = (x + y)(x + z)$ وبعد ذلك أي متحول غائب في كل حد من حدود OR يتم جمعه مع $x\overline{x}$.

مثال 8: عبر عن التابع التالي كجداء حدود عظمى $F = xy + \overline{x}z$

الحل: أولاً لنحول التابع إلى حدود OR باستخدام الخاصة التوزيعية:

$$\begin{aligned} F = xy + \overline{x}z &= (xy + \overline{x})(xy + z) \\ &= (x + \overline{x})(y + \overline{x})(x + z)(y + z) \\ &= (\overline{x} + y)(x + z)(y + z) \end{aligned}$$

للتابع 3 متحولات x, y, z بالتالي كل حد OR يغيب عنه متحول واحد:

$$\bar{x}+y=\bar{x}+y+z\bar{z}=(\bar{x}+y+z)(\bar{x}+y+\bar{z})$$
$$x+z=x+z+y\bar{y}=(x+y+z)(x+\bar{y}+z)$$
$$y+z=y+z+x\bar{x}=(x+y+z)(\bar{x}+y+z)$$

بتجميع كافة الحدود نحصل على:

$$F=(x+y+z)(x+\bar{y}+z)(\bar{x}+y+z)(\bar{x}+y+\bar{z})=M_0M_2M_4M_5$$

عندما يكون التابع بصيغة جداء حدود عظمى، من المفضل أحياناً كتابته بالشكل المبسط التالي:

$$F(x,y,z)=\prod(0,2,4,5)$$

التحويل بين الحدود الصغرى العظمى conversion between minterms and maxterms

متتم تابع معبر عنه بمجموع حدود صغرى يساوي إلى الحدود الغائبة من التابع الأصلي. والسبب يعود إلى أن التابع الأصلي يعبر عنه بالحدود التي تجعل قيمة التابع مساوية للواحد منطقي، أما متمم التابع فهي الحدود التي تجعل قيمة التابع مساوية للصفر منطقي. على سبيل المثال، ليكن التابع $F(A,B,C)=\sum(1,4,5,6,7)$، فإن التابع المتمم هو $\bar{F}(A,B,C)=\sum(0,2,3)=m_0+m_2+m_3$. لنأخذ الآن متمم $\bar{F}$ باستخدام قانون دومورغان، نحصل على F بالشكل التالي:

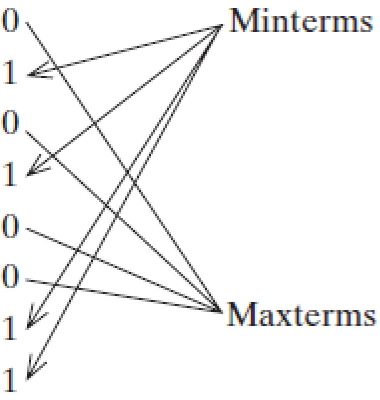
$$F=\overline{(m_0+m_2+m_3)}=\bar{m}_0\bar{m}_2\bar{m}_3=M_0M_2M_3=\prod(0,2,3)$$

من الواضح أن $\bar{m}_i=M_i$ والعكس أيضاً $\bar{M}_i=m_i$.

بالتالي فإن إجرائية التحويل لتابع معبر عنه بالحدود الصغرى إلى تابع معبر عنه بالحدود العظمى أو بالعكس من الشكل بالحدود العظمى إلى الشكل بالحدود الصغرى يتم بالتبديل بين الرمزين $\sum$ و $\prod$ ومن ثم سرد الأعداد الغائبة من التابع الأصلي (المراد تحويله).

على سبيل المثال التابع البولياني $F=xy+\bar{x}z$ والذي جدول حقيقته التالي:

x	*y*	*z*	*F*
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1



من الجدول السابق الحدود الصغرى للتابع هي الحدود التي تجعل قيمة التابع ماوية للواحد منطقي أي الحدود التي دليلها هي $1,\ 3,\ 6,\ 7$، بالتالي $F(x,y,z)=\sum(1,3,6,7)$. والحدود الغائبة في هذا التابع هي الحدود التي دليلها $0,\ 2,\ 4,\ 5$. بالتالي التابع F على شكل جداء حدود عظمى هو . ، وهي نفسها التي وجدناها في المثال 8.

الأشكال القياسية standard forms

طريقة أخرى للتعبير عن التوابع البوليانية هو الشكل القياسي. في هذا التعبير يمكن لحدود التابع أن تحوي على متحول واحد أو أكثر. كما أنه يوجد نوعان من الأشكال القياسية: مجموع الجداءات sum of products و جداء المجاميع product of sums.

مجموع الجداءات هو تعبير بولياني يحوي حدود AND، تدعى حدود مضاريب بمتحول واحد أو أكثر لكل حد. الجداء يشير إلى عملية AND بين تلك الحدود. على سبيل المثال التابع $F_1=\overline{y}+xy+\overline{x}y\overline{z}$ الذي له 3 مضاريب بمتحول واحد ومتحولين وثلاث متحولات.

جداء المجاميع هو تعبير بولياني يحوي حدود OR، تدعى حدود مجاميع بمتحول واحد أو أكثر لكل حد. المجموع يشير إلى عملية OR بين تلك الحدود. على سبيل المثال التابع $F_2=x(\overline{y}+z)(\overline{x}+y+\overline{z})$ الذي له 3 مجاميع بمتحول واحد ومتحولين وثلاث متحولات.

يمكن لتابع بولياني أن لا يكون بالشكل القياسي. على سبيل المثال التابع $F_3=AB+C(D+E)$ والذي ليس مجموع جداءات ولا جداء مجاميع. يمكننا تحويله إلى الشكل القياسي باستخدام القانون التوزيعي:

$$F_3=AB+C(D+E)=AB+CD+CE$$

والذي أصبح من الشكل مجموع مضاريب.

6. عمليات منطقية أخرى other logic operations

عندما نضع العمليتان الثنائيتان AND و OR بين متحولين x و y يتشكل لدينا تابعان بوليان $x\cdot y$ و $x+y$. ولكن في الحقيقة من أجل n متحول ثنائي يوجد 2^{2n} تابع بولياني مختلف. بالتالي من أجل متحولين بوليانيين x و y $(n=2)$ لدينا 16 تابع بولياني. أي أن التابعان AND و OR هما اثنان من أصل 16 تابع.

يبين الجدول التالي جدول الحقيقة لل 16 تابع بولياني من F_0 حتى F_{15} المشكّلة من المتحولين x و y.

x	y	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

يمكن أنه يمكن التعبير جبرياً عن ال 16 تابع بواسطة التوابع البوليانية كما يبينه العمود الأول من الجدول اللاحق. كما أنه يمكن التعبير عن كل تابع من التوابع الآنفة الذكر باستخدام العمليات AND و OR و NOT. بالإضافة إلى ذلك يلحق بتلك التوابع رمز عملية operator symbols خاص، كما يبينه العمود الثاني.

ISSN: 2617-989X

Boolean Functions	Operator Symbol	Name	Comments
$F_0 = 0$		Null	Binary constant 0
$F_1 = xy$	$x \cdot y$	AND	x and y
$F_2 = xy'$	x/y	Inhibition	x, but not y
$F_3 = x$		Transfer	x
$F_4 = x'y$	y/x	Inhibition	y, but not x
$F_5 = y$		Transfer	y
$F_6 = xy' + x'y$	$x \oplus y$	Exclusive-OR	x or y, but not both
$F_7 = x + y$	$x + y$	OR	x or y
$F_8 = (x + y)'$	$x \downarrow y$	NOR	Not-OR
$F_9 = xy + x'y'$	$(x \oplus y)'$	Equivalence	x equals y
$F_{10} = y'$	y'	Complement	Not y
$F_{11} = x + y'$	$x \subset y$	Implication	If y, then x
$F_{12} = x'$	x'	Complement	Not x
$F_{13} = x' + y$	$x \supset y$	Implication	If x, then y
$F_{14} = (xy)'$	$x \uparrow y$	NAND	Not-AND
$F_{15} = 1$		Identity	Binary constant 1

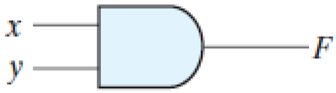
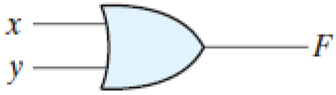
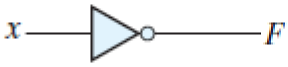
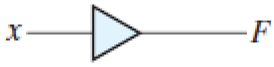
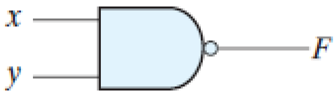
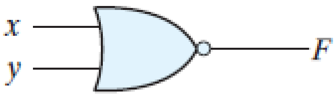
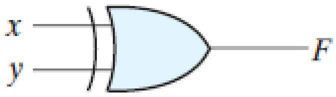
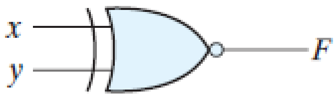
يمكن تقسيم التوابع ال 16 إلى 3 فئات:

1. تابعان ينتجان ثابت F_0 ينتج 0 و F_{15} ينتج 1.
2. 4 توابع بعمليات أحادية: المتمم والنقل transfer. F_{10} ينتج $\overline{y}$ و F_{12} ينتج $\overline{x}$، F_3 ينتج x و F_5 ينتج y. هذا وقد أعطينا اسم نقل للتابع الذي يعطي على خرجه أحد المداخل بدون تغيير.
3. 10 توابع بعمليات ثنائية: AND و OR و NAND (متمم AND) و NOR (متمم OR) و OR الحصرية (XOR) والتكافؤ والمنع inhibition والاقتضاء.

7. البوابات المنطقية الرقمية digital logic gates

يستخدم الجبر البوليناني لنمذجة دارات العناصر الإلكترونية، حيث يمكن اعتبار أي دخل أو خرج لمثل هذه العناصر ينتمي إلى المجموعة $\{0, 1\}$. يتم تصميم الدارات الرقمية باستخدام قواعد الجبر البولياني. وبما أن التوابع البوليانية يمكن التعبير عنها بدلالة العمليات AND و OR و NOT، بالتالي من السهل تحقيق التوابع البوليانية بهذا النوع من البوابات. لكن من الناحية العملية يفضل بناء بوابات أخرى (مشتقة) من أجل العمليات المنطقية الأخرى.

من بين التوابع ال 16 التي رأيناها سابقاً 10 توابع منها مهيئة لأن تكون بوابات منطقية، اثنتان منها أيضاً، المنع والاقتضاء، ليست تبديلية ولا تجميعية بالتالي عملياً لا يمكن استخدامها كبوابات منطقية. يبين الشكل التالي التوابع الثمانية المستخدمة كبوابات قياسية في تصميم الدارات الرقمية.

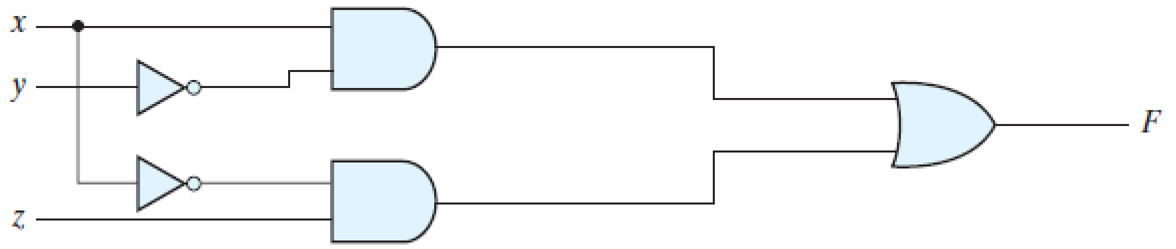
Name	Graphic symbol	Algebraic function	Truth table
AND		$F = x \cdot y$	$x\ y \mid F$ 0 0 | 0 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 1
OR		$F = x + y$	$x\ y \mid F$ 0 0 | 0 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 1
Inverter		$F = x'$	$x \mid F$ 0 | 1 1 | 0
Buffer		$F = x$	$x \mid F$ 0 | 0 1 | 1
NAND		$F = (xy)'$	$x\ y \mid F$ 0 0 | 1 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 0
NOR		$F = (x + y)'$	$x\ y \mid F$ 0 0 | 1 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 0
Exclusive-OR (XOR)		$F = xy' + x'y$ $= x \oplus y$	$x\ y \mid F$ 0 0 | 0 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 0
Exclusive-NOR or equivalence		$F = xy + x'y'$ $= (x \oplus y)'$	$x\ y \mid F$ 0 0 | 1 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 1

ISSN: 2617-989X

كل بوابة من البوابات السابقة لها مدخل ثنائي واحد binary input أو مدخلان يُشار إليهما ب x و y، ومخرج ثنائي واحد binary output يُشار إليه ب F.

مثال 9: حقق التابع التالي باستخدام البوابات الأساسية AND و OR و NOT: $F = x\overline{y} + \overline{x}z$

الحل:

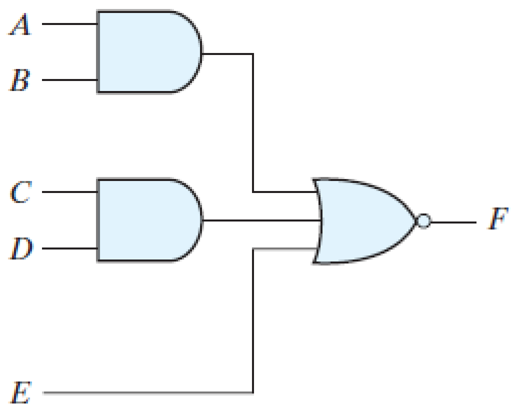


مثال 10: حقق التابع التالي $F = \overline{(AB + CD + E)}$ باستخدام:

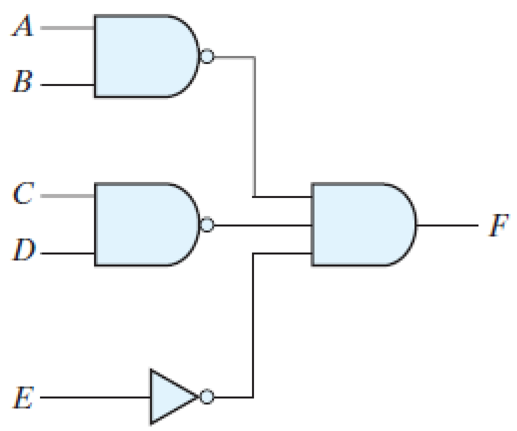
(a) البوابات AND و NOR

(b) البوابات AND و NAND و NOT

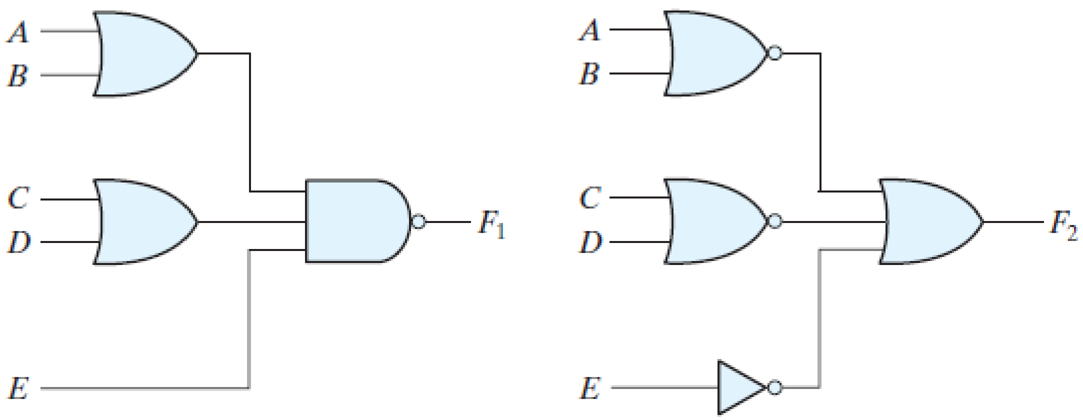
الحل: (a)



(b) باستخدام قانون دومورغان: $F = \overline{(AB + CD + E)} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{E}$



مثال 11: أوجد التابع البولياني لكل من F_1 و F_2 . هل يوجد علاقة بينهما؟



الحل:

$$F_1 = \overline{(A+B)\cdot(C+D)\cdot E}$$
$$F_2 = \overline{(A+B)} + \overline{(C+D)} + \overline{E}$$

من الواضح أن $F_1 = F_2$ حسب قانون دومورغان.

التابع أو الحصري exclusive OR function (XOR)

التابع أو الحصري (XOR)، الذي يرمز له بالرمز $\oplus$، هو عملية منطقية، حيث ينجز العملية البوليانية التالية: $x \oplus y = x\overline{y} + \overline{x}y$ يساوي الواحد عندما تكون قيمة أحد المتحولين عكس الأخرى ويساوي الصفر فيما عدا ذلك. ومتممه هو NOR، المعروف أيضاً باسم التكافؤ ينجز العملية البوليانية التالية: $\overline{(x \oplus y)} = xy + \overline{x}\,\overline{y}$ ويساوي الواحد عندما تكون قيمة أحد المتحولين مساوية للآخر ويساوي الصفر فيما عدا ذلك.

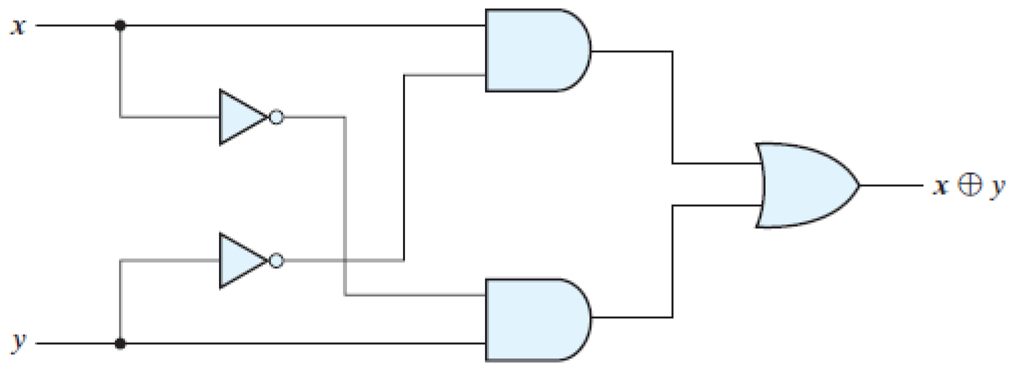
يمتاز التابع أو الحصري بالخصائص التالية:

$$x \oplus 0 = x$$
$$x \oplus 1 = \overline{x}$$
$$x \oplus x = 0$$
$$x \oplus \overline{x} = 1$$
$$x \oplus \overline{y} = \overline{x} \oplus y = \overline{(x \oplus y)}$$
$$x \oplus y = y \oplus x$$
$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) = x \oplus y \oplus z$$

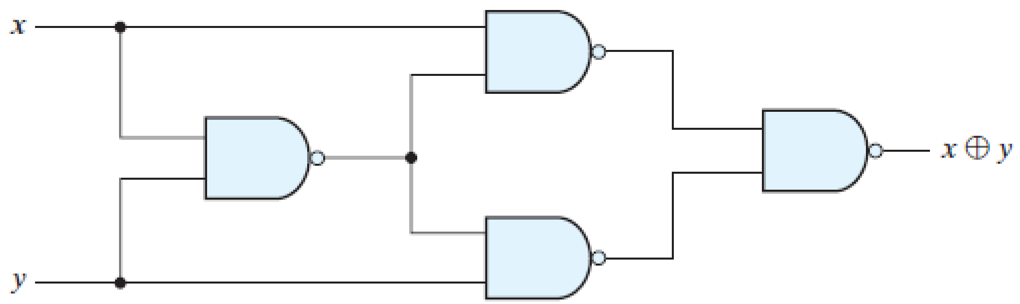
يمكن الحصول على تابع أو الحصري باستخدام البوابات الأساسية (بوابتي NOT، بوابتي AND وبابة OR). كما يمكن تحقيقه باستخدام أربع بوابات NAND، بالاستفادة من العلاقة التالية (كما هو مبين في الشكل التالي):

$$(\overline{x} + \overline{y})x + (\overline{x} + \overline{y})y = x\overline{y} + \overline{x}y = x \oplus y$$

ISSN: 2617-989X



(a) Exclusive-OR with AND–OR–NOT gates



(b) Exclusive-OR with NAND gates

يستخدم تابع أو الحصري في الكثير من العمليات الحسابية وفي كشف الأخطاء.

تمارين

1. بسط العبارات التالية أكبر ما يمكن:

a) $xy + x\bar{y}$

b) $xyz + \bar{x}y + xy\bar{z}$

c) $\overline{(A+B)}\,\overline{(\bar{A}+\bar{B})}$

d) $\bar{x}yz + xz$

2. أوجد متتم العبارات التالية:

a) $z + \bar{z}(\bar{v}w + xy)$

b) $(a+c)\,(a+\bar{b})\,(\bar{a}+b+\bar{c})$

3. أوجد جدول الحقيقة:

a) $F = xy + x\bar{y} + \bar{y}z$

b) $F = bc + \bar{a}\bar{c}$

4. حقق التابع التالي $F = xy + \bar{x}\bar{y} + \bar{y}z$ ، باستخدام:

a) بوابات AND و OR و NOT

b) بوابات OR و NOT

c) بوابات AND و NOT

d) بوابات NAND و NOT

e) بوابات NOR و NOT

5. عبر عن التابع التالي كمجوع حدود صغرى وكجداء حدود عظمى

$$F(A,B,C,D) = \bar{B}D + \bar{A}D + BD$$

6. أوجد متمم التوابع كمجوع حدود صغرى:

a) $F(A,B,C,D) = \sum(2,4,7,10,12,14)$

b) $F(x,y,z) = \prod(3,5,7)$

7. حول كل مما يلي إلى مجوع مضاريب وجداء مجاميع:

a) $(u+xw)(x+\bar{u}v)$

b) $\bar{x} + x(x+\bar{y})(y+\bar{z})$

8. حول كل مما يلي إلى الشكل القانوني الآخر:

a) $F(x,y,z)=\sum(1,3,5)$

b) $F(A,B,C,D)=\prod(3,5,8,11)$

9. اكتب التعبير البولياني التالي على شكل ضرب مجاميع:

$$\bar{a}b+\bar{a}\bar{c}+abc$$

10. اكتب المعادلات البوليانية وارسم الدارة المنطقية والتي خرجها معرّف بجدول الحقيقة التالي:

f_1	f_2	a	b	c
1	1	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	0	1	0
1	1	0	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	1	1

العلامة العظمى: 100 **علامة النجاح: 50** **المدة: ساعة واحدة**

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة **(70) درجة**

1. الثنائية (التقابل) duality للعبارة البوليانية $A + 1 = 1$ هي:

a) $A \cdot 0 = 0$
b) $A \cdot 1 = 1$
c) $A + 0 = 1$
d) $A \cdot A = A$

2. الثنائية (التقابل) duality للعبارة البوليانية $x + \bar{x}y = x + y$ هي:

a) $\bar{x}(x + \bar{y}) = \bar{x}\bar{y}$
b) $\bar{x}(x\bar{y}) = \bar{x}\bar{y}$
c) $x(\bar{x}y) = xy$
d) $x(\bar{x} + y) = xy$

3. تبسيط التابع البولياني $(A+B+C)\overline{(D+E)} + (A+B+C)(D+E)$ هو:

a) $D + E$
b) $A + B + C$
c) $\bar{D}\bar{E}$
d) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

4. تبسيط التابع البولياني $F = (XZ + Z(\bar{X} + XY)$ هو:

a) $F = Z + XYZ$
b) $F = Z$
c) $F = X + YZ$
d) $F = Z + XYZ$

5. تبسيط التابع البولياني $\overline{(A+B)}\,\overline{(C+D+E)} + \overline{(A+B)}$ هو:

a) $A + B$
b) $C + D + E$
c) $\bar{A}\bar{B}$
d) $\bar{C}\bar{D}\bar{E}$

6. تبسيط التابع البولياني $AB + ABC + ABCD + ABCD$ هو:

a) $ABCDE$
b) $A + B + C + D + E$

ISSN: 2617-989X

c) $AB + CD + F$
d) AB

7. التابع البولياني (مجموع حدود صغرى) $F(x, y, z) = \sum(2, 3, 5, 7)$ يكافئ التابع (جداء حدود عظمى):
a) $F(x, y, z) = \prod(0, 1, 4, 6)$
b) $F(x, y, z) = \sum(0, 1, 4, 6)$
c) $F(x, y, z) = \prod(2, 3, 5, 7)$
d) ولا إجابة من الإجابات السابقة صحيحة

8. العلاقة $x \oplus \overline{x}$، حيث $\oplus$ تمثل التابع XOR، تساوي:
a) x
b) $\overline{x}$
c) 1
d) 0

9. باستخدام قانون دومورغان على التابع $F = \overline{A\overline{B} + C}$ نحصل على:
a) $F = AB + C$
b) $F = \overline{AB + C}$
c) $F = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$
d) $F = (\overline{A} + B)\overline{C}$

10. التابع البولياني $F = \overline{A} + \overline{B}$ يكافئ بوابة وحيدة:
a) NAND
b) NOR
c) AND
d) OR

السؤال الثاني: (30) درجة

استخدم بوابات NAND فقط لتحقيق كل ما يلي:

a) $\bar{x}$

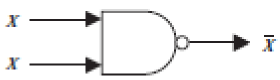
b) $x + y$

c) xy

d) $x \oplus y$

الحل:

$\bar{x}$

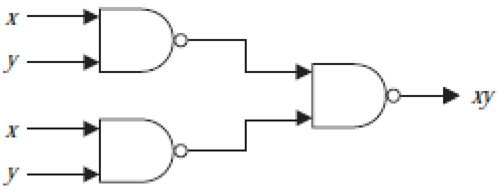


$x + y$

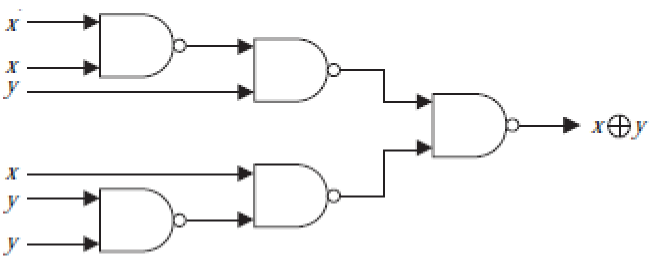
$$\overline{\bar{x}\,\bar{y}} = x + y$$

xy

$$\overline{\overline{xy}\;\overline{xy}} = xy + xy = xy$$



$x \oplus y$



$$\overline{\overline{x\bar{y}}\;\overline{\bar{x}y}} = \overline{(x+\bar{y})(\bar{x}+y)} = \overline{(x+\bar{y})} + \overline{(\bar{x}+y)} = \bar{x}y + x\bar{y}$$

توجيه في حال الخطأ: الفقرة 7

السؤال الأول	الإجابة الصحيحة	توجيه في حال الخطأ
1	a	الفقرة 3
2	d	الفقرة 3
3	b	الفقرة 4
4	b	الفقرة 4
5	c	الفقرة 4
6	d	الفقرة4
7	a	الفقرة 5
8	c	الفقرة 6
9		الفقرة 3
10	a	الفقرة 7

ISSN: 2617-989X

الفصل الثالث: حساب الأعداد الصحيحة والتشفير

رقم الصفحة	العنوان

ISSN: 2617-989X

الكلمات المفتاحية:

القسمة، القسمة الإقليدية، الموافقات، ترديد، القاسم المشترك الأعظم، خوارزمية اقليدس، أعداد أولية فيما بينها، مبرهنة بيزو، مبرهنة غوص، المضاعف المشترك الأصغر، عدد أولي، غربال إراتوستينس، المبرهنة الأساسية في الحساب، الموافقات الخطية، مبرهنة الباقي الصيني، مبرهنة فيرما، عدد شبه أولي، تابع تقطيع، عدد شبه عشوائي، اختبار الأرقام، رمز المنتج العالمي، الترقيم الدولي الموحد للكتاب، التشفير، فك التشفير، التشفير التآلفي، ثنائي، ثماني، ست عشري.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على الأعداد الصحيحة وما يسمى بالحساب التوافقي، القسمة الصحيحة، الموافقات، خوارزمية اقليدس واستخدامها في إيجاد القاسم المشترك الأعظم لعددين، الأعداد الأولية، تحليل الأعداد إلى عواملها باستخدام المبرهنة الأساسية في الحساب، توليد الأعداد شبه عشوائية، والعديد من تطبيقات التوافق وعملية التشفير التقليدي وفك التشفير وأخيراً كيفية تمثيل الأعداد الصحيحة الموجبة بالنسبة إلى قاعدة أكبر من الواحد.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- القسمة الصحيحة والحساب التوافقي.
- الأعداد الأولية والقاسم المشترك الأعظم.
- المعادلات التوافقية وحلها وتطبيقاتها.
- التشفير التقليدي.
- تمثيل الأعداد الصحيحة الموجبة.

1. قابلية القسمة في $\mathcal{Z}$ divisibility

تعريف 1: ليكن a و b عددان صحيحان و b غير معدوم. القول أن العدد b يقسم العدد a يعني وجود عدد صحيح k بحيث يكون: $a = kb$ نقول كذلك أن العدد b قاسم للعدد a أو أن a مضاعف للعدد b. نكتب $b|a$ ونقرأ b يقسم a

مثال 1:

- $48 = 8.6$ ومنه $6|48$.
- $48 = (-8)(-6)$ ومنه $(-6)|48$.
- $-39 = (-13).3$ ومنه $3|39$.
- $-39 = (-13).3$ ومنه $(-13)|39$.

ملاحظة 1: للعددين الصحيحين a و $-a$ نفس القواسم في $\mathcal{Z}$ ($a = kb$ يعني $-a = (-k)b$)

تعريف 2: نسمي العدد الذي يقبل القسمة على 2 بالزوجي، والذي لا يقبل القسمة بالفردي.

1.1. خواص القسمة في $\mathcal{Z}$ properties of divisibility

من أجل الأعداد الصحيحة a, b, c, d لدينا:

$a|a$ و $a|0$ و $1|a$

إذا كان $0|a$ فإن $a = 0$، وإذا كان $a|1$ فإن $a = \pm 1$.

إذا كان $a|b$ فإن $-a|b$.

إذا كان $a|b$ و $b \neq 0$ فإن $|a| \leq |b|$ لكل عدد صحيح عدد منته من القواسم

إذا كان $a|b$ و $b|a$ فإن $|a| = |b|$ $(a = \pm b)$

إذا كان $a|b$ و $b|c$ فإن $a|c$ (متعدية). مثال: $3|12$ و $12|36$ بالتالي $3|36$ $(36 = 12.3)$.

إذا كان $a|b$ و $a|c$ فإن $a|(\lambda b + \mu c)$ حيث λ , μ عددان صحيحان. وبشكل خاص لدينا $a|(b+c)$ و $a|(b-c)$ و $a|(c-b)$ مثال: $3|12$ و $3|18$ بالتالي $3|30$ و $3|6$ و $3|(-6)$

إذا كان $a|b$ فإن $a|bc$ مثال: $3|12$ بالتالي 3 يقسم $24 = 12.2$ و $36 = 12.3$ و $-24 = 12.(-2)$

إذا كان $a|b$ فإن $ac|bc$ مثال: $3|12$ بالتالي $3.5 = 15|60 = 12.5$

إذا كان $a|b$ و $c|d$ فإن $ac|bd$ وبشكل خاص $an|bn$ حيث n عدد طبيعي. مثال: $2|8$ و $3|9$ بالتالي $2.3 = 6|72 = 8.9$ وكذلك $23 = 8|512 = 83$

ISSN: 2617-989X

2.1. القسمة الإقليدية في $\mathcal{Z}$ Euclidean division

مبرهنة 1: من أجل كل عدد صحيح a ومن أجل كل عدد طبيعي b، توجد ثنائية وحيدة (q, r) من الأعداد الصحيحة حيث: $a = bq + r$ و $0 \le r < b$. تسمى عملية البحث عن الثنائية (q, r) بالقسمة الإقليدية للعدد a على العدد b، ويسمى q و r بهذا الترتيب حاصل وباقي القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b.

ملاحظة 2: يمكن تمديد مفهوم القسمة الإقليدية لعدد صحيح a على عدد صحيح غير معدوم b، ونحصل على $a = bq + r$ و $0 \le r < |b|$

مثال 2:

- $38 = 5.7 + 3$، العدد 7 هو حاصل قسمة 38 على 5 و 3 هو باقي القسمة.
  ونلاحظ أن $5.(7+1) > 38 \ge 7.5$ و $38 - 7.5 = 3$.
- $96 = 7.13 + 5$، العدد 13 هو حاصل قسمة 96 على 7 و 5 هو باقي القسمة.
- $120 = 15.8$، العدد 8 هو حاصل قسمة 120 على 15 و 0 هو باقي القسمة.
- $-38 = 5(-8) + 2$، العدد -8 هو حاصل قسمة -38 على 5 و 2 هو باقي القسمة.
  ونلاحظ أن $5.(-8+1) > -38 \ge -8.5$ و $-38 - (-8.5) = 2$.

مثال 3: a عدد صحيح باقي قسمته على 10 هو 7. ما هو باقي قسمة العدد a على 5 و 2 على الترتيب.

الحل: بفرض أن k هو حاصل قسمة a على 10، فيكون $a = 10k + 7$. لتعيين باقي قسمة العدد a على 5 نفكر في كتابة العدد a على الشكل $a = 5q + r$ حيث q و r عددين صحيحين مع $0 \le r < 5$ فيكون r هو المطلوب. من $a = 10k + 7$ نكتب $a = 10k + 5 + 2 = 5(2k + 1) + 2$ وبالتالي فإن باقي قسمة a على 5 هو 2.

لإيجاد باقي قسمة a على 2 نكتب $a = 10k + 7 = 10k + 6 + 1 = 2(5k + 3) + 1$ ومنه فإن باقي قسمة a على 2 هو 1.

3.1. الموافقات في $\mathcal{Z}$ congruences

تعريف 3: ليكن n عدد طبيعي، وليكن a و b عددان صحيحان. نقول عن a و b أنهما متوافقان بترديد n إذا وفقط إذا $n \mid (b - a)$ نكتب $a \equiv b \pmod{n}$ أو $a \equiv b[n]$.

هذا ويمكن تعريف التوافق كما يلي: $a \equiv b[n] \Leftrightarrow a = b + kn \ , k \in \mathcal{Z}$

مبرهنة 2: n عدد طبيعي. القول أن عددين صحيحين a و b متوافقان بترديد n إذا وفقط إذا كان للعددين a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n.

مثال 4:

- $27 \equiv 92[5]$، ذلك لأن للعددين 92 و 27 نفس باقي القسمة على 5 وهو 2
- $26 \equiv 11[5]$، لأن $26 - 11 = 15 = 3.5$
- $-32 \equiv 18[10]$، لأن $-32 - 18 = -50 = (-5).10$
- $12 \equiv 34[11]$، $24 \equiv 3[7]$، $-20 \equiv 1[7]$، $-59 \equiv -3[8]$

ISSN: 2617-989X

- ملاحظة 3: من أجل كل عدد صحيح a، $a \equiv 0[1]$.

خاصية 1: n عدد طبيعي $n \geq 2$. كل عدد صحيح a يوافق بترديد n باقي قسمته على n. أي أن $a \equiv r[n]$ حيث r باقي قسمة a على n

خواص الموافقات في $\mathcal{Z}$

من أجل كل عدد طبيعي n، ومن أجل الأعداد الصحيحة a, b, c, d لدينا:

1. $a \equiv a[n]$ (انعكاسية)

$b \equiv a[n] \Leftrightarrow a \equiv b[n]$ (تناظرية)

إذا كان $a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n]$ فإن $a \equiv c[n]$ (متعدية)

إذا كان $a \equiv b[n]$ و $m | n$ فإن $a \equiv b[m]$.

إذا كان $a \equiv b[n]$ و إذا كان $c \equiv d[n]$ فإن $a + c \equiv b + d[n]$.

إذا كان $a \equiv b[n]$ وإذا كان $c \equiv d[n]$ فإن $ac \equiv bd[n]$ وبشكل خاص إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $ak \equiv bk[n]$ حيث k عدد طبيعي.

مثال 5: لتكن الأعداد الصحيحة $a = 255$ و $b = 837$ و $c = 3691$ أولاً عين باقي قسمة كل من الأعداد a و b و c على العدد 11. ثانياً وباستعمال الموافقات عين باقي قسمة كل من $a + b$ و ac و $a + b + c$ و a2 و abc على العدد 11.

بإجراء عملية القسمة نجد أن باقي قسمة كل من الأعداد a و b و c على العدد 11 هي 2 و 1 و 6 على الترتيب.

لدينا $a \equiv 2[11]$ و $b \equiv 1[11]$، وبتطبيق خاصية الجمع نجد $a + b \equiv 3[11]$ ومنه باقي قسمة $a + b$ على 11 هو 3.

لدينا $a \equiv 2[11]$ و $c \equiv 6[11]$، وبتطبيق خاصية الضرب نجد $ac \equiv 12[11]$. وبما أن $12 \equiv 1[11]$ فإنه بالتعدي نجد $ac \equiv 1[11]$، ومنه باقي قسمة ab على 11 هو 1.

لدينا $a \equiv 2[11]$ و $b \equiv 1[11]$ و $c \equiv 6[11]$، وبتطبيق خاصية الجمع نجد $a + b + c \equiv 9[11]$ ومنه باقي قسمة $a+b + c$ على 11 هو 9.

لدينا $a \equiv 2[11]$، وبتطبيق الخاصية السادسة نجد $a^2 \equiv 2^2[11]$ أي $a^2 \equiv 4[11]$ ومنه باقي قسمة a^2 على 11 هو 4.

لدينا $a \equiv 2[11]$ و $b \equiv 1[11]$ و $c \equiv 6[11]$، وبتطبيق خاصية الضرب نجد $abc \equiv 12[11]$. وبما أن $12 \equiv 1[11]$ فإنه بالتعدي نجد $abc \equiv 1[11]$ ومنه باقي قسمة abc abc على 11 هو 1.

مثال 6: a و b عددان صحيحان حيث $a \equiv 3[5]$ و $b \equiv 4[5]$

1. بين أن العدد $2a + b$ يقبل القسمة على 5.

عين باقي قسمة العدد $2a^2 + b^2$ على 5.

تحقق أن $b \equiv -1[5]$، واستنتج باقي قسمة b^{2015} و b^{1436} على 5.

الحل:

1. لإثبات أن $2a + b$ يقبل القسمة على 5، باستعمال الموافقات، يكفي أن نثبت أن $2a + b \equiv 0[5]$. لدينا $a \equiv 3[5]$ ومنه $2a \equiv 6[5]$ أي $2a \equiv 1[5]$ (لأن $6 \equiv 1[5]$) وكذلك $b \equiv 4[5]$، بالتالي بتطبيق خاصية الجمع نجد $2a + b \equiv 5[5]$ وبما أن $5 \equiv 0[5]$ فإن $2a + b \equiv 0[5]$ حسب خاصة التعدي. أي باقي قسمة $2a + b$ على 5 هو 0، ومنه العدد $2a + b$ يقبل القسمة على 5.

لتعيين باقي قسمة العدد $2a^2 + b^2$ على 5، باستعمال الموفقات، يكفي تعيين العدد r حيث $2a^2 + b^2 \equiv r[5]$ و $0 \le r < 5$ لدينا $a \equiv 3[5]$ ومنه $2a^2 \equiv 2.9[5]$ أي $2a^2 \equiv 3[5]$ (لأن $18 \equiv 3[5]$)، وكذلك $b \equiv 4[5]$ ومنه وكذلك $b^2 \equiv 16[5]$ (لأن $16 \equiv 1[5]$). بالتالي وبتطبيق خاصية الجمع نجد: $2a^2 + b^2 \equiv 4[5]$، ومنه باقي قسمة العدد $2a^2 + b^2$ على 5 هو 4.

من الواضح أن $4 \equiv -1[5]$، ولدينا بالفرض أن $b \equiv 4[5]$ ومنه، باستعمال خاصية التعدي، نجد أن $b \equiv -1[5]$.

بتطبيق الخاصة السادسة من الموافقات نجد $b^{2015} \equiv (-1)^{2015}[5]$ أي $b^{2015} \equiv -1[5]$، نستنتج أن باقي قسمة b^{2015} على 5 هو 4. بنفس الطريقة نجد $b^{1436} \equiv (-1)^{1436}[5]$ أي $b^{1436} \equiv 1[5]$، نستنتج أن باقي قسمة b^{1436} على 5 هو 1

4.1. معايير قابلية القسمة divisibility criteria

فرضية 1 (معيار قابلية القسمة على 2): يقبل عدد صحيح القسمة على 2 إذا وفقط إذا كان رقم آحاده يقبل القسمة على 2.

مثال 7: العدد 13486 يقبل القسمة على 2 لأن آحاده الرقم 6 يقبل القسمة على 2.

فرضية 2 (معيار قابلية القسمة على 3): يقبل عدد صحيح القسمة على 3 إذا وفقط إذا كان مجموع أرقامه تقبل القسمة على 3.

مثال 8: العدد 11124 يقبل القسمة على 3 لأن $9 = 4 + 2 + 1 + 1 + 1$ يقبل القسمة على 3.

فرضية 3 (معيار قابلية القسمة على 5): يقبل عدد صحيح القسمة على 5 إذا وفقط إذا كان رقم آحاده يقبل القسمة على 5.

مثال 9: العدد 725 يقبل القسمة على 5 لأن رقم آحاده يقبل القسمة على 5.

فرضية 4 (معيار قابلية القسمة على 9): يقبل عدد صحيح القسمة على 9 إذا وفقط إذا كان مجموع أرقامه تقبل القسمة على 9.

مثال 10: العدد 3249 يقبل القسمة على 9 لأن $3+2+4+9=18$ j قبل القسمة على 9.

فرضية 5 (معيار قابلية القسمة على 11): يقبل عدد صحيح القسمة على 11 إذا وفقط إذا كان الفرق بين مجموع أرقامه الفردية (بدءاً من الآحاد) ومجموع أرقامه الزوجية يقبل القسمة على 11.

مثال 11: العدد 54967 يقبل القسمة على 11 لأن $(7+9+5)-(6+4)=11$ يقبل القسمة على 11.

2. القاسم المشترك الأعظم greatest common divisors

تعريف 4: ليكن a و b عددان صحيحان كلاهما لا يساوي الصفر. نرمز $\mathcal{D}$ (a, b) لمجموعة القواسم الموجبة المشتركة ل a و b هذه المجموعة منتهية وليست فارغة (تحوي العنصر 1) وبالتالي تحوي على عنصر أكبر يُدعى القاسم المشترك الأعظم ل a و b. ونرمز له بالرمز GCD(a, b) أو $a\wedge b$.

مثال 12: $24\wedge 36=12$ $\qquad$ $21\wedge 14=7$ $\qquad$ $21\wedge 26=1$.

1.2. خوارزمية اقليدس Euclidean algorithm

ليكن a و b عددان طبيعيان وبفرض أن $a\geq b$ بالتالي يوجد عددان طبيعيان q_1 و r_1 بحيث $a=bq_1+r_1$ و $0<r_1<b$ بالتالي $a\wedge b=b\wedge r_1$.

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين a و b يساوي القاسم المشترك الأكبر للعدد الثاني b وباقي قسمة a على b.

نكرر العملية نفسها حتى يصبح باقي القسمة مساويا الصفر، عندئذ يكون القاسم المشترك الأكبر هو آخر باقي لا يساوي الصفر.

مثال 13: احسب القاسم المشترك الأعظم للعددين 264 و 168

$$264 = 168.1 + 96$$

$$158 = 96.1 + 72$$

$$96 = 72.1 + 24$$

$$72 = 24.3 + 0$$

وبالتالي القاسم المشترك الأعظم للعددين 264 و 168 هو 24

مثال 14: احسب القاسم المشترك الأعظم للعددين 600 و 124

$$600 = 124.4 + 104$$

$$124 = 104.1 + 20$$

$$104 = 20.5 + 4$$

$$20 = 4.5 + 0$$

وبالتالي القاسم المشترك الأعظم للعددين 600 و 124 هو 4

مثال 15: احسب القاسم المشترك الأعظم للعددين 9945 و 3003

$9945 = 3003.3 + 936$

$936 = 195.4 + 156$

$195 = 156.1 + 39$

$156 = 39.4 + 0$

وبالتالي القاسم المشترك الأعظم للعددين 9945 و 3003 هو 39

2.2. خواص القاسم المشترك الأعظم GCD properties

من أجل الأعداد الصحيحة غير المعدومة a, b, k لدينا:

1. $a \wedge 1 = 1$ و $a \wedge a = a$.

$a \wedge b = b \wedge a$ (تبديلية)

$a \wedge b = a \Leftrightarrow a | b$

$ka \wedge kb = |k|(a \wedge b)$

إذا كان $k | a$ و $k | b$ عندئذ $k | (a \wedge b)$.

مثال 16:

- القاسم المشترك الأعظم للعددين 12 و 36 هو 12 (لأن 12|36)
- إذا كان $4 = 600 \wedge 124$، بالتالي: $1800 \wedge 372 = 4.3 = 12$.
- 6|12 و 6|36 وبالتالي $6 | (12 \wedge 36) = 12$.

3.2. الأعداد الأولية فيما بينها

تعريف 5: ليكن a و b عددان صحيحان غير معدومان. نقول عن a و b أنهما أوليان فيما بينهما إذا وفقط إذا المشترك الأعظم لهما الواحد: $a \wedge b = 1$.

مثال 17: $7 \wedge 11 = 1$ $a \wedge (a + 1) = 1$، $a \in \mathcal{Z}$

خواص الأعداد الأولية فيما بينها

من أجل الأعداد الصحيحة غير المعدومة a, b, c لدينا:

1. كل عدد صحيح أولي مع الواحد

إذا كان $a \wedge b = 1$ و $c | b$ عندئذ $a \wedge c = 1$. مثال: $2 \wedge 25 = 1$ و $5 | 25$ بالتالي $2 \wedge 5 = 1$.

إذا كان D عدد طبيعي غير معدوم. $D = a \wedge b$ إذا وفقط إذا وجد عددان صحيحان c و d أوليان فيما بينهما بحيث $a = cD$ و $b = dD$ مثال: $12 \wedge 18 = 6$ بالتالي $12 = 2.6$ و $18 = 3.6$ وحيث $2 \wedge 3 = 1$

$a \wedge b = 1$ و $a \wedge c =$ إذا وفقط إذا كان $a \wedge (bc) = 1$. مثال: $2 \wedge 3 = 1$ و $2 \wedge 5 = 1$ بالتالي $2 \wedge c = 15$.

العددان a و b أوليان فيما بينهما إذا وفقط إذا كان a^n و b^m أوليان فيما بينهما من أجل أي n و m عددين طبيعيان. مثال: $2 \wedge 3 = 1$ بالتالي $(2^3 = 8) \wedge (3^3 = 27) = 1$

4.2. مبرهنة بيزو Bézout's theorem

مبرهنة 3 (متطابقة بيزو): a و b عددان صحيحان غير معدومان، يوجد عددان صحيحان u و v يحققان العلاقة $au + bv = a \wedge b$.

مثال 18: $18 \wedge 24 = 6$ أوجد u و v

$$6 = 18(-1) + 24(1) \Rightarrow u = -1, v = 1$$

حساب أمثال متطابقة بيزو

يمكن حساب u و v من خوارزمية إقليدس كما في المثال التالي (نطلق عليها طريقة التراجع).

مثال 19: وجدنا سابقاً أن $600 \wedge 124 = 4$، أوجد u و v بحيث $4 = 600u + 124v$.

$$600 = 124.4 + 104 \rightarrow \quad \rightarrow L1$$
$$124 = 104.1 + 20 \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad L2$$
$$104 = 20.5 + 4 \rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad L3$$
$$20 = 4.5 + 0$$

من المعادلة $L3$ نكتب $4 = 104 - 5.20$ $(L4)$. من المعادلة $L2$ نكتب $20 = 124 - 1.104$ نعوضها في المعادلة $L4$ نحصل على:

$$4 = 104 - 5(124 - 1.104) = 124(-5) + 104.6 \ (L5)$$

من المعادلة $L1$ نكتب $104 = 600 - 4.124$، نعوضها في المعادلة L5 نحصل أخيراً على:

$$4 = 124(-5) + 6(600 - 4.124) = 600.6 + 124(-29)$$

بالتالي فإن $u = 6$ و $v = -29$: $600 \wedge 124 = 4 = 600.6 + 124(-29)$

مبرهنة 4 (مبرهنة بيزو): a و b عددان صحيحان غير معدومان أوليان فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد عددان صحيحان u و v بحيث $au + bv = 1$.

مثال 20: العددان 21 و 26 أوليان فيما بينهما لوجود 5 و -4 بحيث $1 = 5.21 + (-4).26$

مبرهنة 5 (مبرهنة غوص): a و b و c أعداد صحيحة غير معدومة بحيث $a|bc$ و $a \wedge b = 1$ بالتالي $a|c$.

مثال 21: الأعداد $a = 3$ و $b = 5$ و $c = 9$ و $3|45$ و $3 \wedge 5 = 1$ بالتالي $3|9$.

معكوس عدد في الموافقات

فرضية 6: ليكن n عدد طبيعي و a عدد صحيح غير معدوم بحيث $a \wedge n = 1$. من أجل أي عددين صحيحين x و y، لدينا: $ax \equiv ay\,[n] \Rightarrow x \equiv y\,[n]$.

مثال 22: $21 \equiv 36\,[5]$ لأن للعددين 21 و 36 نفس باقي القسمة على 5 وهو 1. كما أن $3 \wedge 5 = 1$، بالتالي: $7 \equiv 12\,[5]$ (21 و 36 لهما نفس باقي القسمة على 5 وهو 2).

تعريف 6: ليكن n عدد طبيعي و a عدد صحيح. نقول عن a أنه قابل للعكس (له معكوس) بترديد n إذا وفقط إذا وجد عدد صحيح b بحيث $ab \equiv 1[n]$.

فرضية 7: ليكن n عدد طبيعي و a عدد صحيح. نقول عن a أنه قابل للعكس (له معكوس) بترديد n إذا وفقط إذا كان $a \wedge n = 1$.

ملاحظة 4: يتم حساب معكوس عدد صحيح a عن طريق نظرية بيزو.

مثال 23: أوجد معكوس العدد $8[11]$

$11 = 8.1 + 3 \rightarrow \quad \rightarrow \quad 3 = 11 - 8.1$

$8 = 3.2 + 2 \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad 2 = 8 - 3.2$

$3 = 2.1 + 1 \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad 1 = 3 - 2.1$

$2 = 1.2 + 0$

$$1 = 3 - 2.1 = 3 - 1(8 - 3.2) = 3.3 - 8 = 3(11 - 8.1) - 8 = 11.3 + 8(-4)$$

إذن $1 = 11.3 + 8(-4)$. بالتالي $1 \equiv 8(-4)[11]$ أو $1 \equiv 8(7)[11]$ (لأن $7 \equiv -4[11]$). أي أن معكوس العدد $8[11]$ هو $7[11]$.

ملاحظة 5: من العلاقة $1 = 11.3 + 8(-4)$، نستطيع القول أيضاً أن معكوس العدد $11[8]$ هو $3[8]$.

3. المضاعف المشترك الأصغر least common multiple

تعريف 7: ليكن a و b عددان صحيحان كلاهما لا يساوي الصفر. مجموعة المضاعفات الموجبة تماماً المشتركة ل a و b هي مجموعة جزئية منتهية من $\mathcal{N}$ وليست فارغة وبالتالي تحوي على عنصر أصغر يُدعى المضاعف المشترك الأصغر ل a و b. ونرمز له بالرمز LCM(a, b) أو $a \vee b$.

مثال 24: $12 \vee 15 = 60$ $\quad\quad$ $3 \vee 5 = 15$ $\quad\quad$ $24 \vee 6 = 24$.

العلاقة بين القاسم المشترك الأعظم والمضاعف المشترك الأصغر

مبرهنة 6: ليكن a و b عددان صحيحان كلاهما لا يساوي الصفر. لدينا العلاقة التالية:

$$(a \wedge b) . (a \vee b) = |ab|$$

مثال 25: $24 \wedge 36 = 12$ و $72.12 = 864 = 24.36 \Rightarrow 72 = 24 \vee 36$

خواص المضاعف المشترك الأصغر

من أجل الأعداد الصحيحة غير المعدومة a, b, k لدينا:

1. $a \vee 1 = a$ و $a \vee a = a$.

$a \vee b = b \vee a$ (تبديلية)

$a \mid (a \vee b)$

$ka \vee kb = |k| (a \vee b)$

إذا كان $a \mid b$ عندئذ $a \vee b = b$

إذا كان $a \mid k$ و $b \mid k$ عندئذ $(a \wedge b) \mid k$

ISSN: 2617-989X

4. الأعداد الأولية prime numbers

تعريف 8: نقول عن عدد طبيعي p انه أولي إذا وفقط إذا قبل قاسمين اثنين فقط: الواحد والعدد نفسه. نرمز لمجموعة الأعداد الأولية بالرمز P.

على سبيل المثال الأعداد $2, 3, 5, 7, 11$ هي أولية.

ملاحظة 6: العدد 1 ليس عدد أولي $(1 \notin P)$.

خواص الأعداد الأولية

فرضية: ليكن $p \in P$ و a, b عددان غير معدومان

a. لدينا $p | a$ أو $p \wedge a = 1$.

b. إذا كان $p | ab$ فإن $p | a$ أو $p | b$

c. إذا كان $a \geq 2$ فإن a يقبل قاسم أولي p

d. إذا كان $a \notin P$، عندئذ، $2 \leq p \leq \sqrt{a}$ حيث p قاسم أولي للعدد a

مبرهنة 7: يوجد عدد لا نهائي من الأعداد الأولية.

مثال 26: بين أن 101 عدد أولي

بما أن الأعداد الأولية التي لا تتجاوز ال $\sqrt{101}$ هي $2, 3, 5, 7$. وبما أن العدد 101 لا يقبل القسمة على تلك الأعداد الأولية، بالتالي فهو عدد أولي.

غربال إراتوستينس the sieve of Eratosthenes

إن الأعداد المركبة التي هي أصغر من 100 يجب أن يكون لها عامل أولي لا يتجاوز $10 = \sqrt{100}$. وبما أن الأعداد الأولية التي لا تتجاوز 10 هي $2, 3, 5, 7$، بالتالي الأعداد الأولية التي هي أصغر من 100 هي ال 4 أعداد السابقة بالإضافة إلى الأعداد التي هي أكبر من الواحد وأصغر من 100 والتي لا تقبل القسمة على أي من $2, 3, 5, 7$.

يفيد غربال إراتوستينس في إيجاد الأعداد الأولية التي هي أصغر من عدد n. على سبيل المثال لإيجاد الأعداد الأولية التي هي أصغر من 100 نتبع ما يلي:

أولاً نسرد الأعداد من 1 إلى 100. الأعداد التي تقبل القسمة على 2، عدا العدد 2 (أول الأعداد الأولية)، يتم حذفها. بما أن العدد 3 هو العدد الأول الأكبر من 2 والذي لم يتم حذفه وهذا العدد هو العدد الأولي التالي. الأعداد التي تقبل القسمة على 3، عدا العدد 3 يتم حذفها. بما أن العدد 5 هو العدد الأول الأكبر من 3 والذي لم يتم حذفه وهذا العدد هو العدد الأولي التالي. الأعداد التي تقبل القسمة على 5، عدا العدد 5 يتم حذفها. بما أن العدد 7 هو العدد الأول الأكبر من 5 والذي لم يتم حذفه وهذا العدد هو العدد الأولي التالي. الأعداد التي تقبل القسمة على 7، عدا العدد 7 يتم حذفها. وبما أن الأعداد المركبة التي هي أصغر من 100 تقبل القسمة على 2 أو 3 أو 5 أو 7 بالتاي كافة الأعداد المتبقة عدا العدد 1 هي أولية، كما هو مبين في الجدول التالي:

The Sieve of Eratosthenes.

Integers divisible by 2 other than 2 receive an underline.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Integers divisible by 3 other than 3 receive an underline.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Integers divisible by 5 other than 5 receive an underline.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Integers divisible by 7 other than 7 receive an underline; integers in color are prime.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

تبين اللوحة الأولى من الجدول المرحلة الأولى حيث وضع سطر تحت الأعداد الصحيحة القابلة للقسمة على 2، عدا العدد 2، وتبين اللوحة الثانية من الجدول المرحلة الثاني حيث وضع سطر تحت الأعداد الصحيحة القابلة للقسمة على 3، عدا العدد 3، وتبين اللوحة الثالثة من الجدول المرحلة الثالثة حيث وضع سطر تحت الأعداد الصحيحة القابلة للقسمة على 5، عدا العدد 5، وتبين اللوحة الرابعة والأخيرة من الجدول المرحلة الرابعة حيث وضع سطر تحت الأعداد الصحيحة القابلة للقسمة على 7، عدا العدد 7. تمثل الأعداد المتبقية غير المسطرة الأعداد الأولية التي هي أصغر من 100، والتي هي:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

ISSN: 2617-989X

مبرهنة 8 (المبرهنة الأساسية في الحساب): ليكن n عدد صحيح أكبر أو يساوي 2. عندئذ يمكن تحليل العدد n إلى جداء أعداد (عوامل) أولية. يوجد إذن عدد منته من الأعداد الأولية $p_1, p_2, \ldots, p_k$ وعدد منته من الأعداد الطبيعية غير المعدومة $a_1, a_2, \ldots, a_k$ بحيث $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$.

مثال 27: $6936 = 2^3.3.17^2$.

يفيد تحليل عدد $n \geq 2$ في إيجاد القواسم الموجبة لهذا العدد.

مثال 28: ليكن العدد $n = 36 = 2.2.3.3 = 2^2.3^3$ قواسم العدد 36 الموجبة هي:

$2^0.3^0 = 1$

$2^0.3^1 = 3$

$2^0.3^2 = 9$

$2^1.3^0 = 2$

$2^1.3^1 = 6$

$2^1.3^2 = 18$

$2^2.3^0 = 4$

$2^2.3^1 = 12$

$2^2.3^2 = 36$

كما يفيد التحليل في لإيجاد القاسم المشترك الأعظم والمضاعف المشترك البسيط لعددين n و m. على سبيل المثال لإيجاد القاسم المشترك الأعظم نأخذ العوامل المشتركة للعددين بأصغر أس لها، ولإيجاد المضاعف المشترك للعدين نأخذ العوامل المشتركة وغير المشتركة للعددين بأكبر أس لها.

مثال 29: ليكن لدينا العددين $n = 168 = 2^3.3.7$ و $m = 60 = 2^2.3.5$. لدينا بالتالي:

$n \wedge m = 2^2.3 = 12$

$n \vee m = 2^3.3.5.7 = 840$

5. حل الموافقات solving congruences

1.5. الموافقات الخطية linear congruences

نسمي التوافق من الشكل $ax \equiv b[m]$ توافق خطي، حيث m عدد صحيح موجب و a, b عددان صحيحان و x متحول. حل هذه المعادلة يعني إيجاد كل قيم x التي تحقق معادلة التوافق $ax \equiv b[m]$

إحدى الطرق تكمن في استخدام عدد صحيح $\bar{a}$ (في حال وجوده) بحيث يكون $\bar{a}a \equiv 1[m]$. نسمي العدد $\bar{a}$ معكوس العدد a بترديد m. وجدنا سابقاً أن المعكوس موجود إذا وفقط إذا كان $a \wedge m = 1$ (a و m أوليان فيما بينهما).

حالما وجدنا $\bar{a}$ معكوس a بترديد m، نستطيع حل المعادلة $ax \equiv b[m]$ بضرب طرفي المعادلة التوافقية ب $\bar{a}$، كما يبينه المثال التالي:

مثال 30: ما هو حل التوافق الخطي $3x \equiv 4[7]$؟

الحل: بداية علينا إيجاد معكوس 3[7] عن طريق إيجاد أمثال بيزو للعددين 3 و7. بما أن $3 \wedge 7 = 1$، بالتالي معكوس العدد 3 بترديد 7 موجود. خوارزمية إقليدس لإيجاد القاسم المشترك الأعظم للعددين 3 و7:

$$7 = 2.3 + 1$$

$$-2.3 + 1.7 = 1$$

وهذا يعطي مباشرة أمثال بيزو للعددين 3 و7 وهي -2 و1. بالتالي فإن -2 هو معكوس ال 3 بترديد 7. (لاحظ أن أي عدد صحيح موافق ل -2 بترديد 7 هو أيضاً معكوس ل 3، مثل الأعداد $5, -9, 12, \ldots$).

نقوم الآن بضرب طرفي المعادلة التوافقية ب -2 نحصل على: $-2(3x) \equiv -2(4)[7]$ أو $-6x \equiv -8[7]$ وبما أن $-6 \equiv 1[7]$ و $-8 \equiv 6[7]$ ينتج أن $x \equiv -8 \equiv 6[7]$.

المعادلة $ax + by = c$

باستخدام تعريف التوافق، المعادلة من الشكل $ax \equiv b[m]$ لها حلول إذا وفقط إذا كان $ax - b$ قابل للقسمة على m. إذا وفقط إذا كان $ax - b = mk$، حيث k عدد صحيح. لنعيد ترتيب هذه المعادلة ولنفرض أن $y = -k$، ينتج لدينا $ax + my = b$.

نتيجة 1: حل التوافق الخطي من الشكل $ax \equiv b[m]$ يكافئ تماماً حل المعادلة الخطية $ax + my = b$.

لتكن الأعداد a, m, b أعداد صحيحة بحيث a, m غير معدومين. لنهتم بالمعادلة: $ax + my = b \ (E)$ ذات المجاهيل x, y (أعداد صحيحة). نفرض أن $d = a \wedge m$.

مبرهنة 9: تقبل المعادلة (E) حلاً إذا وفقط إذا كان $d | b$ (بشكل خاص إذا كان $a \wedge m = 1$).

مبرهنة 10: حلول المعادلة (E) هي من الشكل: $\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{km}{d} \\ y = y_0 - \dfrac{ka}{d} \end{cases}$، حيث $k \in \mathbb{Z}$ و (x_0, y_0) حل خاص ل (E)

ISSN: 2617-989X

مثال 31: لنبحث عن حلول المعادلة $123x + 67y = 10 \left(E \right)$

لنبحث عن القاسم المشترك الأعظم للعددين 123 و 67 باستخدام خوارزمية إقليدس:

$123 = 67.1 + 56 \rightarrow \rightarrow L1$

$67 = 56.1 + 11 \rightarrow \rightarrow L2$

$56 = 11.5 + 1 \rightarrow \rightarrow L3$

هذا يبرهن أن $123 \wedge 67 = 1$.

لنوجد الآن أمثال متطابقة بيزو، أي إيجاد u و v بحيث $123u + 67v = 1$. لدينا حسب المعادلة $L3$:

$1 = 56 - 5.11$

ومن ثم بتعويض 11 بقيمتها من المعادلة $L2$ نحصل على:

$1 = 56 - 5(67 - 56.1) = 6.56 - 5.67$

ومن ثم بتعويض 56 بقيمتها من المعادلة $L1$ نحصل على:

$1 = 6(123 - 67) - 5.67$

أخيراً نحصل على:

$6.123 + (-11).67 = 1$

بالتالي فإن حل خاص للمعادلة $\left(E \right)$ هو $(x_0, y_0) = (60, -110)$ الآن بفرض أن $\left(x, y \right)$ هو حل آخر للمعادلة $\left(E \right)$ مختلف عن (x_0, y_0)، عندئذ يكون لدينا: $123(x - 60) = 67(-y - 110)$ وهكذا فإن $67|123(x-60)$، وبما أن $123 \wedge 67 = 1$ فإنه حسب مبرهنة غوص: $67 | x - 60$. أي أنه يوجد $k \in \mathbb{Z}$ بحيث $x = 60 + 67k$، وبالتعويض نحصل على $y = -110 - 123k$.

مما سبق نستنتج أن حلول المعادلة $\left(E \right)$ هي من الشكل $\left(60 + 67k, -110 - 123k \right)$.

2.5. مبرهنة الباقي الصيني the Chinese remainder theorem

تستخدم مبرهنة الباقي الصيني لحل جملة من الموافقات الخطية.

مبرهنة 11: لتكن الأعداد الطبيعية $m_1, m_2, \ldots, m_n$ مثنى مثنى أولوية فيما بينها، أي $mi \wedge mj = 1$ من أجل $m_i \neq m_j$ والأعداد الصحيحة $a_1, a_2, \ldots, a_n$. عندئذ لجملة من الموافقات الخطية:

$x \equiv a_1 \left[m_1 \right]$

$x \equiv a_2 \left[m_2 \right]$

$x \equiv a_n \left[m_n \right]$

حل وحيد بترديد $m = m_1 m_2 \ldots m_n$. (يوجد حل x بحيث x، والحلول الأخرى هي متوافقة مع x بترديد m.

لبناء الحل نفرض أن $M_k = m / m_k$ من أجل $k = 1, 2, \ldots, n$، بمعنى أن M_k هو جداء الترديدات فيما عدا الترديد m_k. وبما أنه لا يوجد بين الترديدين m_i و m_k أية عوامل مشتركة أكبر من الواحد من أجل $mi \neq mk$، بالتالي $mk \wedge Mk = 1$. بالتالي يوجد عدد صحيح y_k معكوس M_k بترديد m_k، بحيث $M_k y_k \equiv 1 [m_k]$

يمكن البرهان على أن الحل هو من الشكل:

$$x \equiv a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 + \ldots + a_n M_n y_n \left[m \right]$$

مثال 32: ما هو حل الجملة التالية:

$x \equiv 2[3],$
$x \equiv 3[5],$
$x \equiv 2[7]?$

الحل: $m = (3)(5)(7) = 105$ و $M_1 = m/3 = 35$ و $M_2 = m/5 = 21$ و $M_3 = m/7 = 15$ العدد 2 هو معكوس $M_1 = 35$ بترديد 3 لأن $35(2) \equiv 2(2) \equiv 1[3]$ والعدد 1 هو معكوس $M_2 = 21$ بترديد 5 لأن $21(1) \equiv 1[5]$ والعدد 1 هو معكوس $M_3 = 15$ بترديد 3 لأن $15(1) \equiv 1[7]$. بالتالي الحل هو من الشكل:

$$x \equiv a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 + a_3 M_3 y_3 \equiv 2(35)(2) + 3(21)(1) + 2(15)(1) \equiv 233 \equiv 23[105]$$

3.5. مبرهنة فيرما Fermat's little theorem

من بين العديد من الاكتشافات الهامة في نظرية الأعداد للعام الفرنسي فيرما أن p يقسم $a^{p-1} - 1$ من أجل أي عدد أولي p وأي عدد صحيح a غير قابل للقسمة على p.

مبرهنة 12: ليكن $a \in \mathcal{Z}$ و $p \in P$. إذا كان $a \wedge p = 1$، عندئذ $a^{p-1} \equiv 1[p]$.

نتيجة 2: ليكن $a \in \mathcal{Z}$ و $p \in P$. إذا كان $a \wedge p = 1$، عندئذ $a^p \equiv a[p]$.

مثال 33: ليكن $a = 8$ و $p = 3$ من الواضح أن $8 \wedge 3 = 1$، بالتالي فإن $a^{p-1} = 8^2 = 64 \equiv 1[3]$. كما أن $a^p = 8^3 = 512 \equiv 2[3] \equiv 8[3]$.

مثال 34: أوجد $7^{222}[11]$

الحل: باستخدام مبرهنة فيرما نجد أن $7^{10} \equiv 1[11]$، بالتالي $(7^{10})k \equiv 1[11]$ من أجل أي عدد صحيح k. وبملاحظة أن $222 = 22.10 + 2$ ينتج:

$$7^{222} = 7^{22.10+2} = \left(7^{10}\right)^{2272} \equiv (1)^{22}.49 \equiv 5[11]$$

4.5. الأعداد شبه أولية pseudoprimes

للأعداد شبه أولية أهمية كبيرة في التشفير بالمفتاح العمومي public-key cryptography، والتي تستفيد من صعوبة تحليل الأعداد الكبيرة إلى عواملها الأولية.

تعريف 9: ليكن b عدد صحيح موجب. إذا كان n عدد موجب مركب و يحقق العلاقة التالية $b^{n-1} \equiv 1[n]$، عندئذ نسمي n عدد شبه أولي للقاعدة b.

مثال 35: العدد 341 هو عدد شبه أولي للقاعدة 2 لأنه أولاً عدد مركب $(341 = 11.31)$. ولنبرهن الآن أن $2^{340} \equiv 1[341]$.

باستخدام مبرهنة فيرما نجد أن $2^{10} \equiv 1[11]$، بالتالي فإن $2^{340} = \left(2^{10}\right)^{34} \equiv (1)^{34}[11] \equiv 1[11]$. وبما أن $32 \equiv 1[31]$، بالتالي $2^{340} = \left(2^5\right)^{68} \equiv (1)^{68}[31] \equiv 1[31]$.

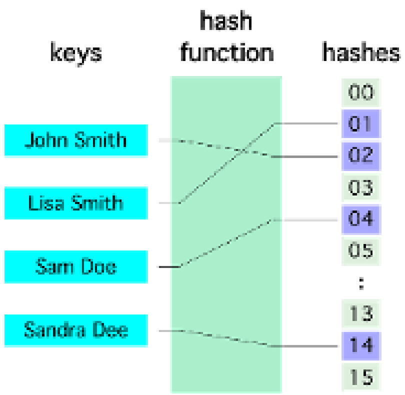
يمكن البرهان على أنه بما أن العددان 11 و 31 اوليان فيما بينهما وأن $341 = 11.31$، وبما أن $2^{340} \equiv 1[11]$ وكذلك $2^{340} \equiv 1[11]$، بالتالي $2^{340} \equiv 1[341]$.

ليكن لدينا عدد صحيح موجب n تحديد فيما إذا كان $2^{n-1} \equiv 1[n]$ هو اختبار مفيد حيث يزود بعض الأدلة بشأن ما غذا كان العدد n أولي. إذا حقق n العلاقة التوافقية، عندها يكون إما عدد أولي أو عدد شبه أولي للأساس 2. وإذا لم يحقق تلك العلاقة فهو عدد مركب.

6. تطبيقات الموافقات applications of congruences

للموافقات العديد من التطبيقات في الرياضيات المتقطعة وفي علوم الحواسيب وفي العديد من التخصصات الأخرى. سنتكلم هنا عن 3 تطبيقات توابع التقطيع وتوليد الأعداد شبه عشوائية وأخيراً اختبار الأرقام.

1.6. توابع التقطيع hashing functions



يحتفظ الحاسب المركزي لشركة تأمين بسجلات لكل زبون من زبائنها. كيف يمكن تعيين مواقع الذاكرة بحيث يمكن استرجاع سجلات الزبائن بأكبر سرعة؟ حل هذه المسألة يتم باستخدام توابع تقطيع hashing function بشكل مناسب. يتم تحديد السجلات باستخدام مفتاح key، الذي يعرف بشكل وحيد كل سجل من سجلات الزبائن.

على سبيل المثال يتم تعريف سجلات الزبائن باستخدام رقم الضمان الصحي social security للزبون كمفتاح. يعين تابع التقطيع h موقع في الذاكرة $h(k)$ إلى السجل الذي مفتاحه k.

عملياً يوجد العديد من توابع التقطيع أشهرها التابع $h(k) = k[m]$، حيث m عدد مواقع الذاكرة المتاح.

مثال 36: أوجد مواقع الذاكرة المعينة بتابع التقطيع $h(k) = k[111]$ إلى سجلات الزبائن التي رقم ضمانها الصحي 064212848 و 037149212.

الحل: يعين سجل الزبون الذي رقم ضمانه الصحي 064212848 موقع الذاكرة 14، ويعين سجل الزبون الذي رقم ضمانه الصحي 037149212 موقع الذاكرة 65

$$h(064212848) = 064212848[111] = 14$$

$$h(037149212) = 037149212[111] = 65$$

بما أن تابع التقطيع ليس تابع متباين بالتالي يمكن لسجلين مختلفين أن يعينا نفس موقع الذاكرة، في هذه الحالة نقول أنه حدث تصادم collision. إحدى الطرق المستخدمة لحل مسألة التصادم هي تعيين أول موقع ذاكرة حرّ يلي موقع الذاكرة الذي حدث فيه التصادم، كما يبينه المثال التالي:

مثال 37: بعد تعيين مواقع الذاكرة في المثال السابق، أوجد موقع الذاكرة المعينة إلى سجل الزبون التي رقم ضمانه الصحي 107405723.

الحل: $h(107405723) = 107405723[111] = 14$، أي أن سجل الزبون الذي رقم ضمانه الصحي 107405723 يعين موقع الذاكرة 14 والتي هي محجوزة من قبل الزبون الذي رقم ضمانه الصحي 064212848. بالتالي وبما أن موقع الذاكرة 15 هو أول موقع غير مشغول يلي الموقع 14 فإنه يتم يعين سجل الزبون الذي رقم ضمانه الصحي 107405723موقع الذاكرة 15.

في المثال السابق استخدمنا تابع السبر الخطي linear probing function، $h(k, i) = (h(k) + i)[m]$، للبحث عن أول موقع ذاكرة غير مشغول وحيث $i = 0, 1, \ldots, m-1$.

2.6. الأعداد شبه عشوائية pseudorandom numbers

تفيد الأعداد شبه عشوائية في عملية النمذجة الحاسوبية computer simulation. يوجد العديد من الطرق المستخدمة في توليد تلك الأعداد أشهرها طريقة الموافقات الخطية.

نختار 4 أعداد صحيحة: الترديد modulus m، الضارب multiplier a، التزايد increment c وأخيراً النواة seed x_0، حيث $2 \le a < m$ و $0 \le c < m$ و $0 \le x_0 < m$. نولد متتالية من الأعداد شبه عشوائية $\{x_n\}$، حيث $0 \le x_n < m$ من أجل كل n باستخدام العلاقة العودية $x_{n+1} = (ax_n + c)[m]$.

مثال 38: أوجد متتالية الأعداد شبه عشوائية المولدة بطريقة الموافقات الخطية بحيث $m = 9$ و $a = 7$ و $c = 4$ و $x_0 = 3$.

الحل: نحسب حدود المتتالية من العلاقة $x_{n+1} = (7x_n + 4)[9]$ والقيمة الابتدائية $x_0 = 3$

$$x_1 = 7x_0 + 4[9] = 7.3 + 4[9] = 25[9] = 7$$
$$x_1 = 7x_0 + 4[9] = 7.3 + 4[9] = 25[9] = 7$$
$$x_2 = 7x_1 + 4[9] = 7.7 + 4[9] = 53[9] = 8$$
$$x_3 = 7x_2 + 4[9] = 7.8 + 4[9] = 60[9] = 6$$
$$x_4 = 7x_3 + 4[9] = 7.6 + 4[9] = 46[9] = 1$$
$$x_5 = 7x_4 + 4[9] = 7.1 + 4[9] = 11[9] = 2$$
$$x_6 = 7x_5 + 4[9] = 7.2 + 4[9] = 18[9] = 0$$
$$x_7 = 7x_6 + 4[9] = 7.0 + 4[9] = 4[9] = 4$$
$$x_8 = 7x_7 + 4[9] = 7.4 + 4[9] = 32[9] = 5$$
$$x_9 = 7x_8 + 4[9] = 7.5 + 4[9] = 39[9] = 3$$

بما أن $x_9 = x_0$ وبما أن كل حد يعتمد على الحد الذي يسبقه، نرى أن المتتالية المولدة هي التالية:

$$3, 7, 8, 6, 1, 2, 0, 4, 5, 3, 7, 8, 6, 1, 2, 0, 4, 5, 3, \ldots$$

تحوي هذه المتتالية 9 عناصر مختلفة قبل أن تتكرر.

3.6. اختبار الأرقام Check Digits

تُستخدم الموافقات للتحقق من وجود الأخطاء في سلاسل الأرقام. يوجد تقنية لكشف الأخطاء في مثل هذه السلاسل هي إضافة رقم إضافي في نهاية السلسلة ويتم حساب هذا الرقم (رقم الاختبار) باستخدام تابع خاص. بعدئذ لتحديد ما إذا كانت سلسلة الأرقام صحيحة يتم إجراء فحص لمعرفة ما غذا كان الرقم الأخير لديه القيمة الصحيحة.

بت اختبار التكافؤ (التماثل) parity check bits

يتم تمثيل المعلومات الرقمية بسلسلة من البيتات، مقسمة إلى حزم بحجم معين. قبل أن يتم تخزينها أو إرسالها يضاف إلى كل حزمة بت إضافي في نهايتها يسمى بت اختبار التكافؤ. لتكن سلسلة البيتات $x_1\ x_2\ \dots\ x_n$، نعرف بت اختبار التكافؤ x_{n+1} ب: $x_{n+1} = x_1 + x_2 + \dots + x_n\,[2]$. هذا يعني أن قيمة x_{n+1} تساوي 0 إذا كان عدد الواحدات زوجي (ضمن حزمة ال n بت) وتساوي 1 إذا كان هذا العدد فردي.

إذا كانت قيمة بت التكافؤ خاطئة نستنتج بوجود خطأ، أما إذا كانت قيمته صحيحة من الممكن أيضاً وجود خطأ. أي أن بت التكافؤ يكشف العدد الفردي من الأخطاء ولا يكشف العدد الزوجي منها.

مثال 39: نفرض أننا استقبلنا السلسلتين 01100101 و11010110 كل واحدة منهما تنتهي ببت اختبار التكافؤ. هل علينا قبولهما على أساس صحيحتان؟

الحل: لنمتحن بت اختبار التكافؤ لكل منهما. من أجل السلسلة الأولى نجد أن قيمة هذا البت هو 1، وبما أن $0+1+1+0+0+1+0+1 \equiv 1[2]$، بالتالي بت اختبار التكافؤ لها صحيح. أما من أجل السلسلة الثانية نجد أن قيمة هذا البت هو 0، وبما أن $1+1+0+1+0+1+1+0 \equiv 1[2]$، بالتالي بت اختبار التكافؤ لها غير صحيح. نستنتج أن السلسلة الأولى ربما تم نقلها بشكل صحيح ونقبلها مع ذلك، أما السلسلة الثانية فبالتأكيد أن نقلها لم يتم بشكل صحيح وبالتالي نرفضها.

رمز المنتج العالمي Universal Product Codes (UPCs)

تتميز منتوجات البيع برمز عالمي عادة مؤلف من 12 رقم عشري: الرقم الأول يمثل صنف المنتج، ال 5 أرقام التالية تمثل الشركة المصنعة، وال 5 أرقام التالية تمثل المنتج بحد ذاته، أما الرقم الأخير فهو رقم اختبار. يتم تحديد رقم الاختبار بالمعادلة التالية:

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 + 3x_7 + x_8 + 3x_9 + x_{10} + 3x_{11} + x_{12} \equiv 0[10]$$

مثال 40: أولاً بفرض أن ال 11 رقم من UPC هي 79357343104، فما هو رقم الاختبار؟ ثانياً هل 041331021641 هو رقم UPC صحيح؟

الحل: نحسب رقم الاختبار من المعادلة السابقة:

$$3.7 + 9 + 3.3 + 5 + 3.7 + 3 + 3.4 + 3 + 3.1 + 0 + 3.4 + x_{12} \equiv 0[10]$$

$$21 + 9 + 9 + 5 + 21 + 3 + 12 + 3 + 3 + 12 + x_{12} \equiv 0[10]$$

$$98 + x_{12} \equiv 0[10]$$

$$x_{12} \equiv 2[10]$$

بالتالي رقم الاختبار هو 2.

من أجل اختبار أن 041331021641 هو رقم UPC صحيح أم لا نعوض الأرقام في المعادلة

$$3.0 + 4 + 3.1 + 3 + 3.3 + 1 + 3.0 + 2 + 3.1 + 6 + 3.4 + 1 \equiv 4[10] \neq 0[10]$$

بالتالي 041331021641 ليس رقم UPC صحيح.

التـرقيم الدولي الموحد للكتاب International Standard Book Number (ISBN−10)

جميع الكتب يتم تمييزها برقم دولي موحد مؤلف من 10 أرقام $x_1\ x_2\ \ldots\ x_{10}$ x10، يتم تعيينها من قبل الناشر (حديثاً تم استبداله ب 13 رقم ISBN−13 ليتم تمييز عدد أكبر من الكتب). يتألف ISBN−10 من مجموعة من الأجزاء لتمييزه: لغة النشر، الناشر، عدد خاص بالكتاب نفسه يعطى من قبل الشركة الناشرة وأخيراً رقم اختبار (إما رقم أو الحرف X المستخدم لتمثيل الرقم 10). يتم اختيار رقم الاختبار كما يلي: $x_{10} \equiv \sum_{i=1}^{9} i\, x_i\,[11]$، أو بشكل مكافئ، $\sum_{i=1}^{10} i\, x_i \equiv 0[11]$.

مثال 41: أولاً بفرض أن ال 9 أرقام من ISBN−10 من الاصدار السادس لكتاب هي 007288008، فما هو رقم الاختبار؟ ثانياً هل 084930149X هو رقم ISBN−10 صحيح؟

الحل: يتم تعيين رقم الاختبار بالمعادلة $\sum_{i=1}^{10} i\, x_i \equiv 0[11]$.

$$x_{10} \equiv 1.0 + 2.0 + 3.7 + 4.2 + 5.8 + 6.8 + 7.0 + 8.0 + 9.8[11]$$

$$x_{10} \equiv 189[11] \equiv 2[11]$$

بالتالي رقم الاختبار هو 2 $(x_{10} = 2)$.

لتبيان فيما إذا كان 084930149X هو رقم ISBN−10 صحيح أم لا نرى فيما إذا كان $\sum_{i=1}^{10} i\, x_i \equiv 0[11]$:

$$1.0 + 2.8 + 3.4 + 4.9 + 5.3 + 6.0 + 7.1 + 8.4 + 9.9 + 10.10 \equiv 299 \equiv 2 \neq 0[11]$$

بالتالي 084930149X ليس رقم ISBN−10 صحيح.

7. التشفير cryptography

التشفير هو العلم الذي يستخدم الرياضيات لتشفير وفك تشفير البيانات. التشفير يمكننا من تخزين المعلومات أو نقلها عبر الشبكات الغير آمنة، مثل الإنترنت، وعليه لا يمكن قراءتها من قبل أي شخص ما عدا الشخص المرسل له. وحيث أن التشفير هو العلم المستخدم لحفظ أمن وسرية المعلومات، فإن تحليل وفك التشفير هو علم لكسر وخرق الاتصالات الآمنة.

التشفير التقليدي

يعتبر تشفير قيصر واحدة من أقدم الاستخدامات المعروفة في التشفير التي ابتدعها يوليوس قيصر. صنع رسائل سرية من خلال إزاحة كل حرف في الأبجدية 3 أحرف إلى الأمام. وعليه فان ترتيب الحروف قبل الإزاحة هو:

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

وبعد الإزاحة تصبح على الشكل التالي:

D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C

للتعبير عن تشفير قيصر رياضياً، نبدل أولاً كل حرف من الأبجدية بعدد من $\mathcal{Z}/26\mathcal{Z}$، أي بعدد من 0 حتى 25، ويساوي ترتيبه (الحرف) ناقص واحد، على سبيل المثال نبدل A ب 0، B ب 1، ... و Z ب 25.

يمكن تمثيل تشفير قيصر بالتابع f الذي يُعين (يُلحق) إلى العدد الصحيح غير السالب p، $p \le 25$، العدد الصحيح $f(p)$ ضمن المجموعة $\{0, 1, 2, \dots, 25\}$، حيث $f(p) = (p + 3)[26]$.

في النسخة المشفرة من الرسالة، يتم استبدال الحرف الممثل ب p بالحرف الممثل ب $(p + 3)[26]$.

مثال 42: ما هي الرسالة السرية الناتجة من الرسالة "MEET YOU IN THE PARK" باستخدام شيفرة قيصر.

الحل: أولاً نبدل أحرف الرسالة بالأعداد، وهذا ينتج

12 4 4 19   24 14 20   8 13   19 7 415 0 17 10

الآن لنبدل كل عدد p ب $(p + 3)[26] = f(p)$، نحصل على

15 7 7 22   1 17 23   11 16 22 10 7   18 3 20 13

بالعودة إلى الأحرف نحصل على الرسالة المشفرة "PHHW BRX LQ WKH SDUN".

من أجل الحصول على الرسالة الأصلية من الرسالة السرية المشفرة بشيفرة قيصر، نستخدم التابع العكسي f^{-1} للتابع f، حيث $f^{-1}(p) = (p - 3)[26]$. العملية هذه تسمى فك التشفير.

ملاحظة 7: يمكن تعميم شيفرة قيصر باستخدام إزاحة مقدارها k بدلاً من 3، بالتالي يصبح تابع التشفير كما يلي: $f(p) = (p + k)[26]$، وتابع فك التشفير $f^{-1}(p) = (p - k)[26]$.

مثال 43: ما هي الرسالة السرية الناتجة من الرسالة "STOP GLOBAL WARMING" باستخدام شيفرة قيصر و $k = 11$.

الحل: أولاً نبدل أحرف الرسالة بالأعداد، وهذا ينتج

18 19 14 15 6 11 14 1 0 11   22 0 17 12 8 13 6

الآن لنبدل كل عدد p ب $f(p) = (p + 11)[26]$، نحصل على

3 4 25 0   17 22 25 12 11 22   7 11 2 23 19 24 17

بالعودة إلى الأحرف نحصل على الرسالة المشفرة "DEZA RWZMLW HLCXTYR".

مثال 44: فك الرسالة المشفرة التالية "LEWLYPLUJL PZ H NYLHA ALHJOLY" والمشفّرة باستخدام شيفرة قيصر و $k = 7$.

الحل: أولاً نبدل أحرف الرسالة المشفرة بالأعداد، وهذا ينتج

11 4 22 11 24 15 11 20 9 11   15 25 7   13 24 11 7 00 11 7 9 14 11 24

الآن لنبدل كل عدد p ب $f(p) = (p - 7)[26]$، نحصل على

4 23 15 4 17 8 4 13 2 4   8 18   0   6 17 4 0 19   19 4 0 2 7 4 17

بالعودة إلى الأحرف نحصل على الرسالة الأصلية "EXPERIENCE IS A GREAT TEACHER".

يمكن تعميم التشفير بالإزاحة باستخدام تابع من الشكل $f(p) = (ap + b)[26]$، حيث a و b عددان صحيحان يتم اختيارهما بحيث يكون التابع f تقابل bijection وهذا يتحقق عندما يكون $a \wedge 26 = 1$. نسمي التشفير من هذا النوع بالتشفير التآلفي affine.

ISSN: 2617-989X

مثال 45: ما هو الحرف الذي يبدل الحرف K عند استخدام التابع $f(p) = (7p + 3)[26]$ من أجل التشفير؟

الحل: بداية لنلاحظ أن 10 تمثل K. باستخدام تابع التشفير المحدد ينتج أن $f(10) = (7.10 + 3)[26] = 21$.

بما أن 21 تمثل V، إذن يستبدل الحرف K بالحرف V في الرسالة المشفرة.

لنرى الآن كيفية فك التشفير التآلفي. بفرض أن $c = (ap + b)[26]$ مع $a \wedge 26 = 1$. كي نتمكن من التشفير علينا التعبير عن p بدلالة c. من أجل ذلك نطبق التشفير التوافقي $c \equiv (ap + b)[26]$، ولنحلها من أجل p. نطرح أولاً b من كلا الطرفين نحصل على $c - b \equiv ap[26]$. وبما أن $a \wedge 26 = 1$، نعرف بأنه يوجد معكوس $\bar{a}$ ل a بترديد 26. لنضرب طرفي المعادلة الأخيرة ب $\bar{a}$ نحصل على $\bar{a}(c-b) \equiv \bar{a}ap[26]$. بما أن $\bar{a}a \equiv 1[26]$، وهذا يعطي $p \equiv \bar{a}(c-b)[26]$.

8. تمثيل الأعداد الصحيحة representations of integers

نستخدم في الحياة اليومية الرمز العشري لتمثيل الأعداد الصحيحة، على سبيل المثال يتم تمثيل العدد 625 بالنسبة للأساس 10 كما يلي: $(625)_{10} = 6.10^2 + 2.10 + 5$. يمكننا استخدام أسس مختلفة عن ال 10، الحواسب تستخدم بشكل خاص النظام الثنائي (أساس 2) والنظام الثماني (أساس 8) والنظام الست عشري (أساس 16).

مبرهنة 13: ليكن b عدد صحيح أكبر من الواحد. إذا كان n عدد صحيح موجب، عندئذ يمكن تمثيله بطريقة وحيدة بالشكل: $n = a_k b_k + a_{k-1} b_{k-1} + \ldots + a_1 b + a_0$، حيث k عدد صحيح غير سالب و $a_0, a_1, \ldots, a_k$، إعداد صحيحة غير سالبة أصغر من b و $a_k \neq 0$.

من أجل $b = 2$ نحصل على التمثيل الثنائي binary للأعداد الصحيحة. في التمثيل الثنائي كل رقم digit عبارة عن 0 أو 1 (يسمى بت bit).

مثال 46: ما هو العدد العشري الذي تمثيله الثنائي هو $(101011101)_2$

$$(101011101)_2 = 1.2^8 + 0.2^7 + 1.2^6 + 0.2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0 = 349$$

من أجل $b = 8$ نحصل على التمثيل الثماني octal للأعداد الصحيحة. في التمثيل الثماني كل رقم يمكن أن يكون عن 0 إلى 7.

مثال 47: ما هو العدد العشري الذي تمثيله الثماني هو $(7012)_8$

$$(7012)_8 = 7.8^3 + 0.8^2 + 1.8^1 + 2.8^0 = 3594$$

من أجل $b = 16$ نحصل على التمثيل الست عشري hexadecimal للأعداد الصحيحة. في التمثيل الست عشري الأرقام هي $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$ حيث الأحرف من A إلى F تمثل الأرقام من 10 إلى 15.

مثال 48: ما هو العدد العشري الذي تمثيله الست عشري هو $(2A1E0)_{16}$

$$(2A1E0)_{16} = 2.16^4 + 10.16^3 + 1.16^2 + 14.16^1 + 0.16^0 = 172512$$

ملاحظة 8: للتحويل من التمثيل الثنائي إلى التمثيل الست عشري يكفي تجميع كل 4 بتات ثنائية لتعطي رقم ست عشري (لأن $2^4 = 16$). على سبيل المثال $(0110\,1101)_2 = (6D)_{16}$، لأن $(0110)_2 = (6)_{16}$ و $(1101)_2 = (D)_{16}$.

ملاحظة 9: للتحويل من التمثيل الثنائي إلى الثماني يكفي تجميع كل 3 بتات ثنائية لتعطي رقم ثماني (لأن $2^3 = 8$).
على سبيل المثال $(175)_8 = (01\,111\,101)_2$، لأن $(5)_8 = (101)_2$ و $(7)_8 = (111)_2$ و $(1)_8 = (01)_2$

التحويل إلى التمثيل للأساس base conversion b

ليكن لدينا العدد الموجب n. نقسم n على b فنحصل على حاصل قسمة وباقي $n = bq_0 + a_0$، $0 \le a_0 < b$ الباقي a_0 يكون الرقم أقصى اليمين في تمثيل العدد n للأساس b. بعدها نقسم q_0 على b نحصل $q_0 = bq_1 + a_1$، $0 \le a_1 < b$ ويكون الباقي a_1 الرقم الثاني من اليمين في تمثيل العدد n للأساس b. نستمر في عملية القسمة إلى أن نحصل في النهاية على حاصل قسمة مساوي للصفر.

مثال 49: أوجد التمثيل الثماني للعدد $(123456)_{10}$.

$123456 = 8.15432 + 0$

$15432 = 8.1929 + 0$

$1929 = 8.241 + 1$

$241 = 8.30 + 1$

$30 = 8.3 + 6$

$3 = 8.0 + 3$

$$(123456)_{10} = (361100)_8$$

مثال 50: أوجد التمثيل الست عشري للعدد $(123456)_{10}$.

$123456 = 16.7716 + 0$

$7716 = 16.482 + 4$

$482 = 16.30 + 2$

$30 = 16.1 + 14$

$1 = 16.0 + 1$

$$(123456)_{10} = (1E\,240)_{16}$$

مثال 51: أوجد التمثيل الثنائي للعدد $(245)_{10}$.

$245 = 2.122 + 1$

$122 = 2.61 + 0$

$61 = 2.30 + 1$

$30 = 2.15 + 0$

$15 = 2.7 + 1$

$7 = 2.3 + 1$

$3 = 2.1 + 1$

$1 = 2.0 + 1$

$$(245)_{10} = (11110101)_2$$

ISSN: 2617-989X

يبين الجدول التالي التحويل بين الأسس الأساسية (العشري والثنائي والثماني والست عشري) للأعداد الصحيحة من 1 ولغاية 15.

Hexadecimal, Octal, and Binary Representation of the Integers 0 through 15.																
Decimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Hexadecimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
Octal	0	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12	13	14	15	16	17
Binary	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

مثال 52: أوجد التمثيل الثماني والست عشري للعدد $(11010011100111)_2$، وكذلك التمثيل الثنائي للعددين $(765)_8$ و $(A5E)_{16}$.

$$(11\ 010\ 011\ 100\ 111)_2 = (32347)_8$$
$$(11\ 0100\ 1110\ 0111)_2 = (34E7)_{16}$$
$$(765)_8 = (111\ 110\ 101)_2$$
$$(A5E)_{16} = (1010\ 0101\ 1110)_2$$

جمع وضرب الأعداد addition and multiplication

يتم جمع الأعداد بالنسبة لأي أساس كما هو الحال بالنسبة للجمع العشري، حيث نضع الآحاد تحت الآحاد والعشرات تحت العشرات ... بدون ان ننسى عملية الحمل carry.

مثال 53: أوجد حاصل الجمع للأعداد التالية:

$)A6B1)_{16} + (F4C5)_{16}$ و $(3607)_8 + (7432)_8$ و $(1110)_2 + (1011)_2$

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 1 \\ 1\ 1\ 1\ 0 \\ +\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ \hline 1\ 1\ 0\ 0\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\ 1\ \ 1 \\ 3\ 6\ 0\ 7 \\ +\ 7\ 4\ 3\ 2 \\ \hline 1\ 3\ 2\ 4\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\ \ 1 \\ A\ 6\ B\ 1 \\ +\ F\ 4\ C\ 5 \\ \hline 1\ 9\ B\ 7\ 6 \end{array}$$

هذا ويتم ضرب الأعداد بالنسبة لأي أساس كما هو الحال بالنسبة للضرب العشري

مثال 54: أوجد حاصل الضرب $(110)_2$ و $(101)_2$

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0 \\ \times\ \ 1\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 0 \\ 1\ 1\ 0 \\ \hline 1\ 1\ 1\ 1\ 0 \end{array}$$

ISSN: 2617-989X

تمارين

1. أوجد حاصل القسمة والباقي عندما

a) نقسم 789 على 23

b) نقسم -111 على 11

c) نقسم -1 على 23

2. x عدد صحيح باقي قسمته على 7 هو 2. عين باقي القسمة على 7 لكل من الأعداد الصحيحة التالية:
$x+5$ و $x-5$ و $9x$ و $-15x$ و x^3.

3. بين أن: $6^{2008} \equiv 1[7]$، واستنتج أن $8^{2008} - 6^{2008}$ يقبل القسمة على 7.

4. أثبت أنه من أجل أي عدد طبيعي n، يكون $3^{2n} - 2^n \equiv 0[7]$.

5.

a) ما هو باقي قسمة 1999 على 7، وما هو باقي قسمة 2007 على 7.

b) ليكن العدد الطبيعي n حيث $n \equiv 5[7]$. عين باقي قسمة n^3 على 7، بين أن $n^3 + 1 \equiv 0[7]$.

c) m عدد طبيعي حيث $m \equiv 4[7]$. بين أن $m^3 - 1 \equiv 0[7]$

d) بين من دون حساب أن $1999^3 + 2007^3$ يقبل القسمة على 7.

6. بين فيما إذا كانت الأعداد التالية أولية: 1001, 1111, 143

7. باستخدام خوارزمية اقليدس أوجد القاسم المشترك الأعظم في الحالات التالية: (144, 89)، (100001, 1001)، (356, 252).

8. أوجد معكوس a بترديد m في الحالات التالية

a) $a = 4$ و $m = 9$

b) $a = 232$ و $m = 89$

c) $a = 34$ و $m = 89$

ISSN: 2617-989X

9. حل المعادلات التوافقية التالية:

a) $34x \equiv 77[89]$

b) $144x \equiv 4[233]$

c) $200x \equiv 13[1001]$

10. استخدم نظرية فيرما لحساب $3302[5]$ و $3302[7]$ و $3302[11]$

11. باستخدام مبرهنة الباقي الصيني حل جمل الموافقات الخطية التالية:

a) $x \equiv 2[4]$ $\quad x \equiv 3[5]$ $\quad x \equiv 4[7]$

b) $x \equiv 2[5]$ $\quad x \equiv 4[7]$ $\quad x \equiv 1[9]$

12. أوجد مواقع الذاكرة المعينة بتابع التقطيع $h(k) = k\,[97]$ إلى سجلات الزبائن التي رقم ضمانها الصحي 034567981 و 183211232 و 220195744 و 987255335.

13. ماهي متتالية الأعداد شبه عشوائية المولدة بالمعادلة التوافقية الخطية $x_{n+1} = (3x_n + 2)[13]$، حيث $x_0 = 17$.

14. بفرض أنك استقبلت سلاسل من البتات حيث البت الأخير يمثل بت اختبار التكافؤ. أياً من السلاسل التالية أنت متأكد من وجود خطأ؟

a) 00000111111

b) 10101010101

c) 11111100000

d) 10111101111

15. ما هو رقم الاختبار ل UPC من أجل الأرقام التالية: 73232184434 و 63623991345. وهل الأرقام التالية هي أرقام UPC صحيحة: 036000291452 و 012345678903 و 782421843014.

16. أولاً بفرض أن ال 9 أرقام من ISBN−10 من الاصدار الخامس لكتاب هي 0−07−119881، فما هو رقم الاختبار؟ ثانياً $0-321-500Q1-8$ هو رقم ISBN−10 إصدار سادس لأحد الكتب، أوجد قيمة Q.

17. ما هي الرسالة السرية الناتجة عن الرسالة "WATCH YOUR STEP" باستخدام الشيفرة التالية: $f(p) = (17p + 22)[26]$. وماهي الرسالة الأصلية التي تشفيرها باستخدام التابع $f(p) = (p + 10)[26]$ هي "DSWO PYB PEX".

18. أوجد تمثيل العدد 4532 في النظام الثنائي والثماني والست عشري.

19. أوجد القية العشرية للأعداد التالية: $(101001110)_2$ و $(1726)_8$ و $(A1F)_{16}$.

20. أوجد التمثيل الثنائي والثماني للعدد $(2AB)_{16}$.

21. أوجد التمثيل الثنائي والست عشري للعدد $(12765)_8$

المدة: ساعة ونصف **علامة النجاح: 50** **العلامة العظمى: 100**

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة **(40) درجة**

1. باقي قسمة العدد الطبيعي $2015^{2015}+2009^{2009}$ على العدد 8 هو:

a) 0
b) 1
c) 3
d) 7

2. معكوس العدد 7 بترديد 26 هو:

a) 12
b) 14
c) 15
d) 20

3. معكوس العدد 7 بترديد 26 هو:

a) -1
b) -2
c) -3
d) -4

4. قيمة $[7]\,5^{2000}$ هي

a) 0
b) 1
c) 2
d) 4

5. باقي قسمة $m+n$ على 12 هو 8 وباقي قسمة $m-n$ على 12 هو 6. إذا كان $m>n$، عندئذ باقي قسمة mn على 6 هو

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

ISSN: 2617-989X

السؤال الثاني: أجب بصح أو خطأ (مع التعليل) **(60) درجة**

.i a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي أكبر من 2 حيث $a \equiv b[n]$

.1 $a - b \equiv 0[n]$

a) صح

b) خطأ

.2 $a + 111 \equiv b + 111[n]$

a) صح

b) خطأ

.3 $a^2 \equiv ab[n]$

a) صح

b) خطأ

.4 $a / n \equiv b / n[n]$

a) صح

b) خطأ

.5 $a = nk + b$، حيث k عدد صحيح

a) صح

b) خطأ

.ii a و b عددان صحيحان

.6 $a \equiv 4[5]$ إذن $a - 4$ مضاعف للعدد 5

a) صح

b) خطأ

.7 إذا كان $a \equiv 1[6]$ فإن a^6 يقبل القسمة على 6

a) صح

b) خطأ

.8 بما أن $42 \equiv 0[6]$ فإن $21 \equiv 0[6]$

a) صح

b) خطأ

.9 إذا كان b قاسماً للعدد a فإنه يكون قاسماً للعدد a^2

a) صح

b) خطأ

10. إذا كان r باقي القسمة الإقليدية للعدد a على b فإن r^2 هو باقي القسمة الإقليدية للعدد a^2 على b

a) صح

b) خطأ

11. العدد 103 أولي

a) صح

b) خطأ

12. العددان 27 و 8 أوليان فيما بينهما

a) صح

b) خطأ

13. العدد العشري الذي تمثيله الثنائي $(11111111)_2$ هو 255

a) صح

b) خطأ

14. التمثيل الثماني للعدد العشري 64 هو $(80)_8$

a) صح

b) خطأ

15. التمثيل الست عشري للعدد العشري 64 هو $(40)_{16}$

a) صح

b) خطأ

السؤال الأول	الإجابة الصحيحة	توجيه في حال الخطأ
1	a	الفقرة 1 3
2	c	الفقرة 2 4
3	b	الفقرة 2 4
4	d	الفقرة 5 3
5	a	الفقرة 1

السؤال الثاني	الإجابة الصحيحة	توجيه في حال الخطأ
i.	1. a	الفقرة 1 3
	2. a	الفقرة 1 3
	3. a	الفقرة 1 3
	4. b	الفقرة 1 3
	5. a	الفقرة 1
ii.	6. a	الفقرة 1 3
	7. b	الفقرة 1 3
	8. b	الفقرة 1 3
	9. a	الفقرة 1
	10. b	الفقرة 1
	11. a	الفقرة 4
	12. a	الفقرة 2 3
	13. a	الفقرة 8
	14. b	الفقرة 8
	15. a	الفقرة 8

ISSN: 2617-989X

الفصل الرابع: العلاقات

ISSN: 2617-989X

الكلمات المفتاحية:

علاقة ثنائية، انعكاسية، تناظرية، تخالفية، متعدية، تجميع العلاقات، علاقة تكافؤ، صف تكافؤ، التجزيئ، الترتيب الجزئي، الترتيب الكلي، مجموعة مرتبة جيداً، الترتيب المعجمي.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على العلاقات الثنائية وخواصها، تمثيلها باستخدام المصفوفات، تجميعها وتركيبها، علاقات التكافؤ، صفوف التكافؤ على مجموعة ما وكيفية إيجادها، التجزيئات، الترتيب الجزئي والكلي والمجموعات المرتبة جيداً بالإضافة إلى الترتيب المعجمي.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- العلاقات الثنائية خواصها وتمثيلها وتجميعها.
- علاقات التكافؤ وصفوف التكافؤ.
- علاقات الترتيب الجزئي.
- الترتيب المعجمي.

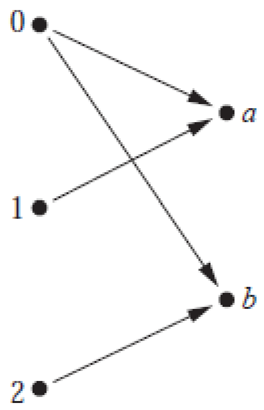
1. العلاقات وخواصها relations and their properties

تعريف 1: ليكن A و B مجموعتان. علاقة ثنائية binary relation من A إلى B هي مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي $A \times B$.

بمعنى آخر علاقة ثنائية من A إلى B هي مجموعة R من الأزواج المرتبة حيث العنصر الأول هو من A والعنصر الثاني من B نستخدم الرمز aRb للدلالة على أن $(a, b) \in R$ و $a \not R b$ للدلالة على أن $(a, b) \in R$ عندما ينتمي (a, b) إلى R، نقول عن a أنها مرتبطة إلى b عن طريق R.

مثال 1: علاقة قابلية القسمة بين الأعداد في مجموعة الأعداد الطبيعية. يكون العدد x مرتبطاً بالعلاقة R مع العنصر y، أي $x \; R \; y$، إذا كان x يقبل القسمة على y. على سبيل المثال $4 \; R \; 12$ و $3 \; R \; 15$ ولكن $5 \not R 8$

مثال 2: لتكن $A = \{0, 1, 2\}$ و $B = \{a, b\}$. بالتالي $\{(0, a), (0, b), (1, a), (2, b)\}$ هي علاقة من A إلى B. يمكن تمثيل العلاقات بيانياً أو باستخدام جدول، كما هو مبين في الشكل التالي:



R	a	b
0	×	×
1	×	
2		×

التوابع كعلاقات functions as relations

نعرف أن التابع f من المجموعة A إلى المجموعة B يعين عنصر واحد تماماً من B لكل عنصر من A. بيان التابع f هو مجموعة الأزواج المرتبة (a, b) بحيث $b = f(a)$ وبما أن بيان التابع f هو مجموعة جزئية من $A \times B$، بالتالي هو علاقة من A إلى B.

من الواضح أن المثال رقم 2 لا يمثل تابعاً لأن العنصر لأنه يعين عنصرين a, b من B للعنصر 0 من A. بالتالي يمكن القول على أن العلاقات هي تعميم للتوابع.

العلاقات على مجموعة relations on a set

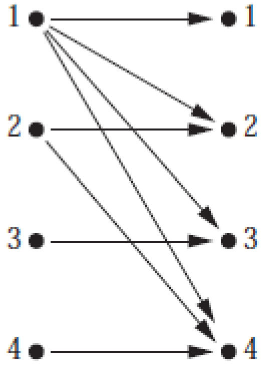
تعريف 2: نعرف العلاقة على المجموعة A على أنها علاقة من A إلى A. أي أنها مجموعة جزئية من $A \times A$.

ISSN: 2617-989X

مثال 3: لتكن $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ماهي الأزواج المرتبة التي في العلاقة $R = \{(a, b) | a \text{ divides } b\}$؟

الحل: (a, b) هي في R إذا وفقط إذا كان كل من a, b عدد موجب لا يتجاوز ال 4 وبحيث a يقسم b، أي:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$$



R	1	2	3	4
1	×	×	×	×
2		×		×
3			×	
4				×

مثال 4: لتكن العلاقات التالية على مجموعة الأعداد الصحيحة:

$R_1 = \{(a, b) | a \leq b\}$

$R_2 = \{(a, b) | a > b\}$

$R_3 = \{(a, b) | a = b \text{ or } a = -b\}$

$R_4 = \{(a, b) | a = b\}$

$R_5 = \{(a, b) | a = b + 1\}$

$R_6 = \{(a, b) | a + b \leq 3\}$

أياً من العلاقات تحوي كل من الأزواج التالية $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, -1), (2, 2)$

الحل: الزوج $(1, 1)$ موجود في العلاقات R_1 و R_3 و R_4 و R_6؛ الزوج $(1, 2)$ موجود في العلاقات R_1 و R_6؛ الزوج $(2, 1)$ موجود في العلاقات R_2 و R_5 و R_6؛ الزوج $(1, -1)$ موجود في العلاقات R_2 و R_3 و R_6؛ وأخيراً الزوج $(2, 2)$ موجود في العلاقات R_1 و R_3 و R_4.

خواص العلاقات properties of relations

العلاقة الانعكاسية reflexive relation

تعريف 3: نقول عن العلاقة R أنها انعكاسية إذا كان $a\,R\,a$ من أجل أي عنصر a من A.

مثال 5: أياً من علاقات المثال 4 السابق هي انعكاسية؟

الحل: العلاقات الانعكاسية هي: R_1 و R_3 و R_4.

مثال 6: هل علاقة "يقسم" على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة هي علاقة انعكاسية؟

الحل: بما أن $a | a$ صحيحة مهما يكن العدد الصحيح الموجب a، بالتالي العلاقة "يقسم" هي علاقة انعكاسية على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة. (العلاقة "يقسم" تصبح غير انعكاسية على مجموعة الأعداد الصحيحة، لأن 0 لا يقسم 0).

ISSN: 2617-989X

العلاقة التناظرية symmetric relation

تعريف 4: نقول عن العلاقة R أنها تناظرية على المجموعة A إذا كان $a\ R\ b$ يستلزم $b\ R\ a$ من أجل أي عنصرين a و b من A. ونقول عن العلاقة R أنها تخالفيه antisymmetric على المجموعة A إذا كان $a\ R\ b$ و $b\ R\ a$ يستلزم $a = b$ من أجل أي عنصرين a و b من A.

مثال 7: أياً من علاقات المثال 4 السابق هي تناظرية وأياً منها تخالفيه؟

الحل: من الواضح أن العلاقات التناظرية هي: R_3 و R_4 و R_6 (مثلاً R_6، إذا كان $a + b \leq 3$ فإن $b + a \leq 3$).

أما العلاقات التخالفيه فهي: R_1 و R_2 و R_4 و R_5 (مثلاً R_1، $a \leq b$ و $b \leq a$ يستلزم $a = b$).

مثال 8: هل علاقة "يقسم" على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة هي علاقة تناظرية؟ تخالفيه؟

الحل: علاقة "يقسم" ليست تناظرية لأنه على سبيل المثال 2 يقسم 1 بينما 1 لا يقسم 2. لكن العلاقة "يقسم" تخالفية لأنه إذا كان $a|b$ و $b|a$ فإن $a = b$.

العلاقة المتعدية transitive relation

تعريف 5: نقول عن العلاقة R أنها متعدية على المجموعة A إذا كان $a\ R\ b$ و $b\ R\ c$ يستلزم $a\ R\ c$ من أجل أي عنصرين a و b و c من A.

مثال 9: أياً من علاقات المثال 4 السابق هي متعدية؟

الحل: العلاقات المتعدية هي: R_1 و R_2 و R_3 و R_4 (مثلاً R_1، إذا كان $a \leq b$ و $b \leq c$ فإن $a \leq c$). العلاقة R_5 ليست متعدية لأن $(2, 1)$ و $(1, 0)$ تنتمي إلى R_5، لكن $(2, 0)$ لا تنتمي إلى R_5. R_6 ليست متعدية لأن $(2, 1)$ و $(1, 2)$ تنتمي إلى R_6، لكن $(2, 2)$ لا تنتمي إلى R_6.

مثال 10: هل علاقة "يقسم" على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة هي علاقة متعدية؟

الحل: علاقة "يقسم" هي علاقة متعدية لأنه إذا كان $a|b$ و $b|c$ فإنه يوجد عددان صحيحان موجبان k و k'، بحيث $b = ak$ و $c = bk'$، عندئذ $c = a(kk')$ أي a يقسم c.

تجميع العلاقات combining relations

بما أن العلاقات من A إلى B هي عبارة عن مجموعات جزئية من $A \times B$، بالتالي يُمكن تجميع علاقتين من A إلى B كما يبينه المثال التالي:

مثال 11: ليكن $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4\}$. العلاقتين $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ و $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ يمكن تجميعهما والحصول على:

$$R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)\}$$

$$R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$$

$$R_1 \setminus R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$$

$$R_2 \setminus R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$$

تعريف 6: لتكن العلاقة R من المجموعة A إلى المجموعة B والعلاقة S من المجموعة B إلى المجموعة C. تركيب العلاقتين R و S هي العلاقة المكونة من الأزواج المرتبة (a, c) حيث $a \in A$ و $c \in C$، والتي من أجلها يوجد عنصر $b \in B$ بحيث aRb و bSc. نرمز لتركيب R و S بالرمز $S \circ R$.

مثال 12: ما هو تركيب العلاقتين R و S، حيث R هي العلاقة من المجموعة $\{1, 2, 3\}$ إلى $\{1, 2, 3, 4\}$ مع $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$ و S هي العلاقة من المجموعة $\{1, 2, 3, 4\}$ إلى المجموعة $\{0, 1, 2\}$ مع $S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$؟

الحل: يتم بناء التركيب $S \circ R$ باستخدام كل الأزواج المرتبة في R والأزواج المرتبة في S، حيث العنصر الثاني من الزوج المرتب في R يطابق العنصر الأول من الزوج المرتب في S. على سبيل المثال تركيب الزوج المرتب $(2, 3)$ في R مع الزوج المرتب $(3, 1)$ في S يُنتج الزوج المرتب $(2, 1)$ في $S \circ R$. وبحساب كافة الأزواج المرتبة للتركيب $S \circ R$ نحصل على:

$$S \circ R = \{(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1)\}$$

تعريف 7: لتكن العلاقة R على المجموعة A. يتم تعريف القوى R^n، $n = 1, 2, \ldots$ بالطريقة العودية كما يلي: $R^1 = R$ و $R^{n+1} = R^n \circ R$.

مثال 13: لتكن $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$ أوجد القوى R^n، $n = 2, 3, \ldots$

الحل: بما أن $R^2 = R \circ R$، بالتالي $R^2 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 2)\}$. $R^3 = R \circ R^2$، بالتالي: $R^3 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$. بحساب R^4 نحصل على نفس R^3، أي $R^4 = R^3$.

يمكن البرهان على أن $R^n = R^3$ من أجل $n = 5, 6, \ldots$.

مبرهنة 1: تكون العلاقة R على المجموعة A متعدية إذا وفقط إذا كان $Rn \subseteq R$ من أجل $n = 1, 2, \ldots$

2. تمثيل العلاقات representing relations

هناك طريقتان لتمثيل العلاقات: الطريقة الأولى تستخدم المصفوفات (التي عناصرها الصفر والواحد)، أما الطريقة الأخرى فتستخدم البيانات الموجهة directed graphs. بشكل عام تمثل المصفوفات الطريقة الأنسب لتمثيل العلاقات في البرامج الحاسوبية.

تمثيل العلاقات باستخدام المصفوفات representing relations using matrices

لتكن العلاقة R من المجموعة $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ إلى المجموعة $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ عندئذ نمثل العلاقة R بالمصفوفة $M_R = [m_{ij}]$، حيث
$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \; if \; (a_i, a_j) \in R \\ 0 \; if \; (a_i, a_j) \notin R \end{cases}$$

مثال 14: بفرض $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{1, 2\}$ لتكن R العلاقة من المجموعة A إلى B تحوي (a, b) إذا كانت $a \in A$ و $b \in B$ و $a > b$. ماهي مصفوفة العلاقة R.

الحل: بما أن $R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$، بالتالي مصفوفة R هي:

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

مثال 15: لتكن $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ و $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. ماهي الأزواج المرتبة الموجودة في العلاقة R الممثلة بالمصفوفة التالية:

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

الحل: بما أن العلاقة R تتألف من الأزواج المرتبة (a_i, b_j) حيث $m_{ij} = 1$، بالتالي:

$$R = \{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_1), (a_3, b_3), (a_3, b_5)\}$$

مصفوفة علاقة على مجموعة هي مصفوفة مربعة، يمكن استخدامها لتحديد خواص العلاقة:

- العلاقة R انعكاسية إذا وفقط إذا $m_{ii} = 1$ من أجل $i = 1, 2, \ldots, n$ (عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة تساوي الواحد).
- العلاقة R تناظرية إذا وفقط إذا كان $m_{ij} = m_{ji}$ من أجل $i, j = 1, 2, \ldots, n$ (المصفوفة متناظرة، بمعنى آخر المصفوفة تساوي مصفوفة المنقول).

مثال 16: بفرض أن العلاقة R على مجموعة A ممثلة بالمصفوفة

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

هل العلاقة انعكاسية؟ هل هي تناظرية؟

الحل: بما أن عناصر القطر الرئيسي ماوية للواحد بالتالي العلاقة R هي انعكاسية. وبما أن المصفوفة M_R متناظرة بالتالي العلاقة R تناظرية.

يمكن إيجاد اجتماع وتقاطع العلاقات باستخدام مصفوفة العلاقات. بفرض أنه لدينا العلاقتين R و S على المجموعة A والممثلتين بالمصفوفتين M_R و M_S على الترتيب. المصفوفتان اللتان تمثلان الاجتماع والتقاطع ل R و S هما:

$$M_{R\cap S} = M_R \wedge M_S \text{ و } M_{R\cup S} = M_R \vee M_S$$

حيث $\vee$ تمثل "أو" المنطقية و $\wedge$ تمثل "و" المنطقية (العملية $\vee$ على مصفوفتين تعني $\vee$ على كل عنصر من عناصر المصفوفة الأولى مع مقابلها من المصفوفة الثانية، نفس الشيء بالنسبة للعملية $\wedge$).

مثال 17: بفرض أن العلاقتين R و S على المجموعة A ممثلتين بالمصفوفتين

$$M_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ و } M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

أوجد المصفوفة الممثلة لكل من $M_{R\cup S}$ و $M_{R\cap S}$

ISSN: 2617-989X

الحل:

$$M_{R\cup S} = M_R \vee M_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{R\cap S} = M_R \wedge M_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ليكن لدينا الآن العلاقة R من المجموعة A إلى B والعلاقة S من المجموعة B إلى C. وبفرض أن المصفوفات الممثلة للعلاقات $R, S, S\circ R$ هي على الترتيب $M_R = \left[r_{ij}\right], M_S = \left[s_{ij}\right], M_{S\circ R} = \left[t_{ij}\right]$ (ذوات الحجم $m\times n$ و $n\times p$ و $m\times p$ على الترتيب)، هذه المصفوفات تحقق العلاقة التالية:

$$M_{S\circ R} = M_R \odot M_S$$

حيث $\odot$ يمثل الضرب البولياني للمصفوفات، المعرف كما يلي:

$$t_{ij} = (r_{i1}\wedge s_{1j})\vee(r_{i2}\wedge s_{2j})\vee\ldots\vee(r_{in}\wedge s_{nj})$$

مثال 18: أوجد المصفوفة الممثلة للتركيب $S\circ R$ وحيث أن العلاقتين R و S ممثلتين بالمصفوفتين:

$$M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

الحل: مصفوفة التركيب $S\circ R$ هي:

$$MS\circ R = MR\odot MS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

مثال 19: أوجد المصفوفة الممثلة للعلاقة R^2، حيث المصفوفة الممثلة ل R هي:

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

الحل: المصفوفة الممثلة للعلاقة R^2 هي:

$$M_{R^2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. علاقات التكافؤ equivalence relations

تعريف 8: نقول عن العلاقة R على المجموعة A أنها علاقة تكافؤ إذا كانت انعكاسية، تناظرية ومتعدية.

تعريف 9: نقول عن عنصرين a و b مرتبطين بعلاقة تكافؤ أنهما متكافئان. نستخدم عادة الرمز $a \sim b$ للدلالة على أن العنصرين a و b متكافئين بالنسبة لعلاقة تكافؤ معينة.

مثال 20: لتكن R علاقة على مجموعة الأعداد الصحيحة بحيث aRb إذا وفقط إذا كان $a = b$ أو $a = -b$.

وجدنا سابقاً أن R هي علاقة انعكاسية، متناظرة ومتعدية، بالتالي R هي علاقة تكافؤ.

مثال 21: لتكن R علاقة على مجموعة الأعداد الحقيقية بحيث $a\,R\,b$ إذا وفقط إذا كان $a - b$ هو عدد صحيح. هل R هي علاقة تكافؤ؟

الحل: بما أن $a - a = 0$ هو عدد صحيح من أجل أي قيمة حقيقية a، بالتالي $a\,R\,a$ أي أن العلاقة R انعكاسية. الآن بفرض أن $a\,R\,b$، عندئذ $a - b$ هو عدد صحيح وبالتالي فإن $b - a$ عدد صحيح أيضاً أي $b\,R\,a$، ينتج أن R تناظرية. أخيراً بفرض أن $a\,R\,b$ و $b\,R\,c$، عندئذ $a - b$ و. هما عددان صحيحان، وبالتالي فإن $(a - b) + (b - c) = a - c$ هو عدد صحيح. وهكذا فإن $a\,R\,c$، أي أن R متعدية. مما سبق ينتج أن العلاقة R هي علاقة تكافؤ.

يعتبر التوافق بترديد m من أكثر علاقات التكافؤ استخداماً، حيث m عدد صحيح أكبر من الواحد.

مثال 22: ليكن m عدد صحيح أكبر من الواحد. بين أن العلاقة $R = \{(a, b) | a \equiv b[m]\}$ هي علاقة تكافؤ على مجموعة الأعداد الصحيحة.

الحل: نعلم سابقاً أن $a \equiv b[m]$ إذا وفقط إذا كان m يقسم $a - b$. من الواضح أن $a - a = 0$ وهو قابل للقسمة على m لأن $0 = 0.m$، أي أن $a \equiv a[m]$ بالتالي فإن علاقة التوافق بترديد m هي علاقة انعكاسية. الآن بفرض أن $a \equiv b[m]$، عندئذ $a - b$ يقبل القسمة على m وبالتالي يوجد عدد صحيح k بحيث $a - b = km$ ومنه لدينا $b - a = (-k)m$، أي أن $b \equiv a[m]$ بالتالي فإن علاقة التوافق بترديد m هي علاقة تناظرية. أخيراً بفرض أن $a \equiv b[m]$ و $b \equiv c[m]$ وبالتالي فإن m يقسم كل من $a - b$ و $b - c$ أي أنه يوجد عددين صحيحين k و k' بحيث $a - b = km$ و $b - c = k'm$ بجمع المعادلتين مع بعضهما البعض

نحصل على $a-c=(a-b)+(b-c)=km+k'm=(k+k')m$. وهكذا فإن $a\equiv c[m]$ بالتالي فإن علاقة التوافق بترديد m هي علاقة متعدية. مما سبق ينتج أن علاقة التوافق بترديد m هي علاقة تكافؤ.

مثال 23: لتكن R علاقة على مجموعة سلاسل strings من أحرف اللغة الانكليزية بحيث $a\ R\ b$ إذا وفقط إذا كان $len(a)=len(b)$ حيث $len(x)$ هي طول السلسلة x. هل R هي علاقة تكافؤ؟

الحل: $a\ R\ a$ لأن $len(a)=len(a)$ والعلاقة انعكاسية. كما أنه من البديهي أنه إذا كان $a\ R\ b$ بالتالي $b\ R\ a$، والعلاقة تناظرية. وأخيراً العلاقة متعدية لأنه إذا كان طول السلسلة a يساوي طول السلسلة b وطول السلسلة b يساوي طول السلسلة c يؤدي إلى أن طول السلسلة a يساوي طول السلسلة c. والعلاقة R هي علاقة تكافؤ.

مثال 24: بين أن علاقة "يقسم" على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ليست علاقة تكافؤ.

الحل: وجدنا سابقاً أن علاقة "يقسم" على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة انعكاسية ومتعدية، لكنها ليست متناظرة (العدد 2 يقسم العدد 4 ولكن 4 لا يقسم 2). بالتالي علاقة "يقسم" على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ليست علاقة تكافؤ.

مثال 25: لتكن العلاقة R على مجموعة الأعداد الحقيقية المعرفة بحيث $x\ R\ y$ إذا وفقط إذا كان x و y عددان حقيقيان والتي تختلف عن بعضها بمقدار أقل من الواحد، أي $|x-y|<1$. بين أن R ليست علاقة تكافؤ.

الحل: العلاقة انعكاسية $|x-x|=0<1$، كما أنها تناظرية لأنه إذا كانت $x\ R\ y$، بالتالي $|x-y|<1$، وبما أن $|x-y|=|y-x|<1$ ينتج $x\ R\ y$. ولكن R ليست متعدية: لنأخذ $x=2.8$ و $y=1.9$ و $z=1.1$، بالتالي $|x-y|=0.9<1$ و $|y-z|=0.8<1$ و $|x-z|=1.7>1$.

صفوف التكافؤ equivalence classes

تعريف 10: لتكن R علاقة تكافؤ على المجموعة A. نسمي مجموعة كافة العناصر المرتبطة بعنصر a من A بصف تكافؤ a نرمز لصف تكافؤ a بالنسبة للعلاقة R ب $[a]_R$. عندما يكون لدينا علاقة واحدة يمكننا حذف الدليل R ونكتب عندها $[a]$ للدلالة على صف التكافؤ.

بكلمات أخرى، إذا كانت R علاقة تكافؤ على مجموعة A، صف تكافؤ العنصر a هو:

$$[a]_R=\{s\,|\,(a,s)\in R\}$$

مثال 26: ما هو صف التكافؤ لعدد صحيح من أجل علاقة التكافؤ المعرفة في المثال 20.

بما أن عدد صحيح يكافئ نفسه وعكسه في علاقة التكافؤ هذه، بالتالي $[a]=\{-a,a\}$. تحوي هذه المجموعة على عنصرين مختلفين إذا كان العنصر a مختلف عن الصفر. على سبيل المثال $[7]=\{-7,7\}$ و $[5]=\{-5,5\}$ و $[0]=\{0\}$

مثال 27: ما هي صفوف التكافؤ للعدد 0 و 1 من أجل التوافق بترديد 4؟

الحل: صفوف تكافؤ العدد 0 تحوي كل العناصر الصحيحة a بحيث $a\equiv 0[4]$. الأعداد إذن في هذا الصف تقبل القسمة على 4، بالتالي: $[0]=\{\ldots,-8,-4,0,4,8,\ldots\}$.

صفوف تكافؤ العدد 1 تحوي كل العناصر الصحيحة a بحيث $a\equiv 1[4]$. الأعداد إذن في هذا الصف تحوي الأعداد الصحيحة التي باقي قسمتها على 4 تساوي الواحد، بالتالي: $[1]=\{\ldots,-7,-3,1,5,9,\ldots\}$

ISSN: 2617-989X

يمكن تعميم هذا المثال وأخذ الترديد أي عدد صحيح m بدلاً من العدد 4. نسمي عندها صفوف التكافؤ لعلاقة التوافق بترديد m بصفوف تكافؤ التوافق بترديد congruence classes modulo m m. نرمز لصف تكافؤ التوافق بترديد m للعدد الصحيح a ب $[a]_m$، بالتالي:

$$[a]_m = \{\ldots, a-2m, a-m, a, a+m, a+2m, \ldots\}$$

صفوف التكافؤ والتجزيئات equivalence classes and partitions

مبرهنة 2: لتكن R علاقة تكافؤ على مجموعة A، وليكن a و b عنصران من المجموعة A. التعابير التالية متكافئة:

a) aRb

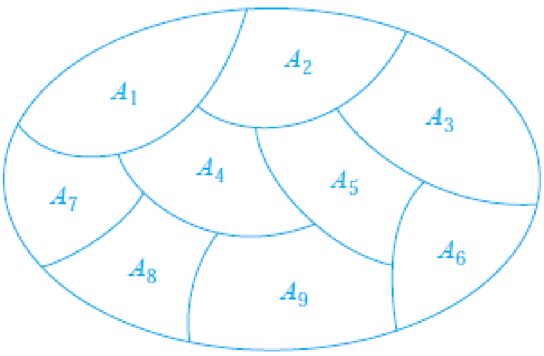
b) $[a] = [b]$

c) $[a] \cap [b] \neq \varnothing$

إن اجتماع صفوف التكافؤ لعلاقة R هي كل المجموعة A، لأن عنصر a من A موجود في صف تكافؤه، المسمى $[a]_R$. بكلمات أخرى $\bigcup_{a \in A} [a]_R = A$.

بالإضافة إلى ذلك ومن المبرهنة السابقة ينتج أن صفوف التكافؤ إما أن تكون متساوية وإما أن تكون منفصلة، أي: $[a] \cap [b] \neq \varnothing$ وذلك عندما $[a]_R \neq [b]_R$.

مما سبق يبين أن صفوف التكافؤ تشكل تجزيئ للمجموعة A، لأنها تقسمها إلى مجموعات جزئية منفصلة. وبشكل أدق تجزيئ partition مجموعة S هو تجميع مجموعات جزئية غير خالية منفصلة من المجموعة S والتي اتحادها يعطي S. بكلمات أخرى تجميع المجموعات الجزئية A_i $i \in I$ (حيث I دليل index المجموعة) تشكل تجزيئ ل S إذا وفقط إذا كان $A_i \neq \varnothing$ من أجل $i \in I$ و $A_i \cap A_j = \varnothing$ عندما $i \neq j$ و $\bigcup_{i \in I} A_i = S$، كما يبينه الشكل التالي:



مثال 28: بفرض أن $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. تجميع المجموعات $A_1 = \{1, 2, 3\}$ و $A_2 = \{4, 5\}$ و $A_3 = \{6\}$ تشكل تجزيئ ل S، لأن تلك المجموعات منفصلة واتحادها يشكل S.

مبرهنة 3: لتكن R علاقة تكافؤ على مجموعة S. عندئذ تشكل صفوف تكافؤ العلاقة R تجزيئ ل S. وبالعكس ليكن التجزيئ $\{A_i \mid i \in I\}$ على مجموعة S، يوجد علاقة تكافؤ R لها المجموعات A_i، $i \in I$، التي هي عبارة عن صفوف تكافؤ لتلك العلاقة.

مثال 29: أسرد الأزواج المرتبة في علاقة التكافؤ R الناتجة عن التجزيئ $A_1 = \{1, 2, 3\}$ و $A_2 = \{4, 5\}$ و $A_3 = \{6\}$ للمجموعة $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$، المعطاة في المثال 28.

الحل: المجموعات الجزئية للتجزيئ هي صفوف تكافؤ للعلاقة R. الزوج $(a, b) \in R$ إذا وفقط إذا كان كل من a و b في نفس المجموعة الجزئية من التجزيئ. الأزواج $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)$ تنتمي إلى R لأن $A_1 = \{1, 2, 3\}$ هي صف تكافؤ. الأزواج $(4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)$ تنتمي إلى R لأن $A_2 = \{4, 5\}$ هي صف تكافؤ. أخيراً الزوج $(6, 6)$ تنتمي إلى R لأن $A_2 = \{6\}$ هي صف تكافؤ.

إن صفوف التوافق بترديد m تقدم توضيحاً مفيداً للمبرهنة السابقة. يوجد m صف توافق بترديد m مختلف والموافقة ل m باقي قسمة عدد صحيح على m. صفوف التوافق هذه يرمز لها كما يلي: $[0]_m, [1]_m, \ldots[m-1]_m$. وهي تشكل تجزيئ لمجموعة الأعداد الصحيحة.

مثال 30: ماهي المجموعات الناتجة عن تجزئي الأعداد الصحيحة بالتوافق ترديد 4؟

الحل: يوجد 4 صفوف توافق $[0]_4, [1]_4, [2]_4, [3]_4$، وهي المجموعات:

$$[0]_4 = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\}$$
$$[1]_4 = \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots\}$$
$$[2]_4 = \{\ldots, -6, -2, 2, 6, 10, \ldots\}$$
$$[3]_4 = \{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11, \ldots\}$$

4. الترتيب الجزئي partial ordering

تعريف 11: نقول عن العلاقة R على المجموعة S أنها ترتيب جزئي إذا كانت انعكاسية، تخالفية ومتعدية. مجموعة S بالإضافة إلى علاقة ترتيب جزئي R تُسمى مجموعة مرتبة جزئياً، ويرمز لها ب (S, R). نسمي عناصر المجموعة S بعناصر مجموعة الترتيب الجزئي.

مثال 31: بين أن علاقة أكبر أو يساوي $\geq$ هي علاقة ترتيب جزئي على مجموعة الأعداد الصحيحة.

الحل: بما أن $a \geq a$ من أجل أي عدد صحيح a، بالتالي $\geq$ انعكاسية. إذا كان $a \geq b$ و $b \geq a$، يعطي $a = b$، بالتالي $\geq$ تخالفية. أخيراً إذا كان $a \geq b$ و $b \geq c$ يؤدي إلى أن $a \geq c$، بالتالي $\geq$ متعدية. مما سبق ينتج أن العلاقة $\geq$ علاقة ترتيب جزئي على مجموعة الأعداد الصحيحة $(\mathcal{Z}, \geq)$.

مثال 32: علاقة يقسم $|$ هي علاقة ترتيب جزئي على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة. وجدنا سابقاً أن علاقة يقسم هي علاقة انعكاسية وتخالفية ومتعدية $(\mathcal{Z}+, |)$.

مثال 33: بين أن علاقة الاحتواء $\subseteq$ هي علاقة ترتيب جزئي على مجموعة قدرة مجموعة S.

الحل: بما أن $A \subseteq B$ من أجل أي مجموعة جزئية من S، بالتالي $\subseteq$ انعكاسية. إذا كان $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$، يعطي $A = B$، بالتالي $\subseteq$ تخالفية. أخيراً إذا كان $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ يؤدي إلى أن $A \subseteq C$، بالتالي $\subseteq$ متعدية. مما سبق ينتج أن العلاقة $\subseteq$ علاقة ترتيب جزئي على مجموعة الأعداد الصحيحة $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$.

مثال 34: لتكن R علاقة على مجموعة الناس حيث xRy إذا كان x و y شخصين و x أكبر سنّاً من y. بين أن العلاقة R ليست علاقة ترتيب جزئي.

الحل: العلاقة R تخالفية ومتعدية، لكنها ليست تناظرية لأنه لا يوجد أي شخص أكبر سناً من نفسه. بالتالي العلاقة R ليست علاقة ترتيب جزئي.

استخدمنا رموزاً مختلفة $\geq$ و $\subseteq$ و $|$ في علاقات ترتيب جزئية مختلفة. مع ذلك، نحتاج إلى رمز يمكننا استخدامه عندما نناقش علاقة ترتيب جزئية بشكل عام. عادة نستخدم الرمز $a \preceq b$ للدلالة على $(a, b) \in R$ في مجموعة مرتبة جزئياً (S, R). استخدمنا هذا الرمز بالتحديد لأن علاقة "أصغر أو يساوي" على مجموعة الأعداد الحقيقية هو أشهر وأهم مثال على الترتيب الجزئي، كما أن الرمز $\preceq$ يشبه الرمز $\leq$.

تعريف 12: نسمي العنصران a و b من مجموعة ترتيب جزئي $(S, \preceq)$ قابلان للمقارنة comparable إذا كان إما $a \preceq b$ أو $b \preceq a$. فيما عدا ذلك نقول أنهما غير قابلان للمقارنة.

مثال 35: هل في مجموعة الترتيب الجزئي $(\mathbb{Z}^+, |)$ العنصران 3 و 9 قابلان للمقارنة؟ وهل 5 و 7 قابلان للمقارنة؟

الحل: العنصران 3 و 9 قابلان للمقارنة لأن $3 \mid 9$، أما العنصران 5 و 7 غير قابلان للمقارنة لأن $7 \nmid 5$ و $5 \nmid 7$.

تعريف 13: إذا كان في مجموعة الترتيب الجزئي $(S, \preceq)$ أي عنصرين قابلين للمقارنة، نسمي عندها S مرتبة كلياً، ونسمي عندها $\preceq$ ترتيب كلي. أحياناً نسمي مجموعة مرتبة كلياً بسلسلة chain.

مثال 36: مجموعة الترتيب الجزئي $(\mathbb{Z}, \leq)$ مرتبة كلياً، لأن $a \leq b$ أو $b \leq a$ من أجل أي عنصرين صحيحين a و b.

مثال 37: مجموعة الترتيب الجزئي $(\mathbb{Z}^+, |)$ ليست مرتبة كلياً، لأنها تحوي على عناصر غير قابلة للمقارنة مثل 5 و 7.

تعريف 14: نقول عن مجموعة الترتيب الجزئي $(S, \preccurlyeq)$ أنها مجموعة مرتبة جيداً well ordered إذا كانت $\preccurlyeq$ ترتيب كلي وكل مجموعة جزئية غير خالية من S لها عنصر أصغري least.

مثال 38: مجموعة الترتيب الجزئي $(\mathbb{Z}^+, \leq)$ مرتبة جيداً، بينما مجموعة الترتيب الجزئي $(\mathbb{Z}, \leq)$ ليست مرتبة جيداً لأن مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة والتي هي مجموعة جزئية منها ليس لها عنصر أصغري.

مثال 39: مجموعة الأزواج المرتبة من الأعداد الصحيحة الموجبة $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$، بحيث $(a_1, a_2) \preceq (b_1, b_2)$ إذا كان $a_1 < b_1$ أو إذا كان $a_1 = b_1$ و $a_2 \leq b_2$ (الترتيب المعجمي)، هي مجموعة مرتبة جيداً.

الترتيب المعجمي lexicographic order

يتم ترتيب الكلمات في معجم حسب ترتيب الأحرف الأبجدية. بداية، لنبين كيفية بناء عملية ترتيب جزئي على الجداء الديكارتي لمجموعتي ترتيب جزئيتين $(A_1, \preceq)$ و $(A_2, \preceq)$ نعرف الترتيب المعجمي $\preceq$ على المجموعة $A_1 \times A_2$ كما يلي:

تعريف 15: الزوج المرتب (a_1, a_2) أصغر من الزوج المرتب (b_1, b_2)، أي $(a_1, a_2) \prec (b_1, b_2)$، إذا كان إما $a_1 \prec b_2$ أو أن $a_1 = b_1$ و $a_2 \prec b_2$. يمكن الحصول على ترتيب جزئي $\preccurlyeq$ بإضافة المساواة إلى الترتيب $\prec$ على $A_1 \times A_2$.

مثال 40: بين فيما إذا كان $(3, 5) \prec (4, 8)$ و $(3, 8) \prec (4, 5)$ و $(4, 9) \prec (4, 11)$ في مجموعة الترتيب الجزئي $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \preccurlyeq)$، حيث $\preceq$ هي علاقة الترتيب المعجمي المبنية على العلاقة $\leq$ على $\mathbb{Z}$.

ISSN: 2617-989X

الحل: بما أن $4 > 3$، بالتالي فإن $(3,5) \prec (4,8)$ و $(3,8) \prec (4,5)$. كما أن $(4,9) \prec (4,11)$، لأن المركبة الأولى من الزوجين $(4,11)$ و $(4,9)$ متساوية وأن $9 < 11$.

مثال 41: إن $(1,2,3,5) \prec (1,2,4,3)$، لأن المركبتين الأولى والثانية من الرباعيتين متساويتين بينما المركبة الثالثة 3 من الرباعية الأولى أصغر من المركبة الثالثة 4 من الرباعية الثانية.

يمكننا الآن تعريف الترتيب المعجمي للسلاسل strings. بفرض السلسلتين $a_1a_2 \dots a_m$ و $b_1b_2 \dots b_m$ من مجموعة مرتبة جزئياً S، وبفرض أن السلسلتين غير متساويتين. بفرض أن t أصغر العددين m و n. يتم تعريف الترتيب المعجمي كما يلي:

تعريف 16: السلسلة $a_1a_2 \dots a_m$ أصغر من السلسلة $b_1b_2 \dots b_m$ إذا وفقط إذا كان:

$$(a_1, a_2, \dots, a_t) \prec (b_1, b_2, \dots, b_t), \text{ or}$$
$$(a_1, a_2, \dots, a_t) = (b_1, b_2, \dots, b_t) \text{ and } m < n$$

مثال 42:

discreet $\prec$ discrete, e < t

discreet $\prec$ discreetness,

discrete $\prec$ discretion e < i

تمارين

1. اسرد الأزواج المرتبة في العلاقة R من المجموعة $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ إلى المجموعة $B = \{0, 1, 2, 3\}$، حيث $(a, b) \in R$ في الحالات التالية:

a) $a = b$

b) $a + b = 4$

c) $a \mid b$

d) $\gcd(a, b) = 1$

2. حدد فيما إذا كانت العلاقة R على مجموعة الأعداد الصحيحة انعكاسية، تناظرية، تخالفية، متعدية، حيث $(x, y) \in R$ في الحالات التالية:

a) $x \neq y$

b) $xy \geq 1$

c) $x = y^2$

d) x من مضاعفات y

3. حدد فيما إذا كانت العلاقة R على مجموعة الأعداد الحقيقية انعكاسية، تناظرية، تخالفية، متعدية، حيث $(x, y) \in R$ في الحالات التالية:

a) $x + y = 0$

b) $xy \geq 0$

c) $x = 2y$

d) $x = 1$

4. ليكن لدينا العلاقات التالية على مجموعة الأعداد الحقيقية:

$$R_1 = \{(a, b) \in R^2 \mid a > b\}$$

$$R_2 = \{(a, b) \in R^2 \mid a \geq b\}$$

$$R_3 = \{(a, b) \in R^2 \mid a < b\}$$

$$R_4 = \{(a, b) \in R^2 \mid a \leq b\}$$

أوجد ما يلي:

a) $R_1 \cup R_3$

b) $R_2 \cap R_4$

c) $R_2 \setminus R_1$

d) $R_2 \circ R_2$

e) $R_2 \circ R_3$

f) $R_1 \circ R_4$

5. لتكن R العلاقة الممثلة بالمصفوفة $M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. أوجد المصفوفة الممثلة لكل ما يلي:

a) R^2

b) R^3

6. بين فيما إذا كانت العلاقات التالية الممثلة بالمصفوفات هي علاقات تكافؤ؟

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. بين أن العلاقة R على مجموعة سلاسل البيتات bit strings، بحيث sRt إذا وفقط إذا كان s و t تحوي نفس العدد من الواحدات، هي علاقة تكافؤ. أوجد صف التكافؤ للسلسلة 011.

8. لتكن علاقة التكافؤ R، بحيث $R = \{(x, y) \mid x - y \ is \ an \ integer\}$. ما هو صف التكافؤ 1 بالنسبة ل R؟ وما هو أيضاً صف التكافؤ $1/2$ بالنسبة ل R؟

9. أياً من المجموعات التالية تمثل مجموعة ترتيب جزئي؟

a) $(\mathcal{Z}, =)$

b) $(\mathcal{Z}, \neq)$

c) $(\mathcal{R}, =)$

d) $(\mathcal{R}, <)$

10. أياً من العلاقات التالية الممثلة بالمصفوفات هي علاقات ترتيب جزئي؟

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ISSN: 2617-989X

العلامة العظمى: 100 **علامة النجاح: 50** **المدة: ساعة واحدة**

السؤال الأول: أجب بصح أو خطأ (مع التعليل) **(60) درجة**

1. علاقة ثنائية من A إلى B هي مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي $A \times B$

a) صح

b) خطأ

2. $R = \{(a, b) \mid a > b\}$ هي علاقة انعكاسية

a) صح

b) خطأ

3. $R = \{(a, b) \mid a + b \leq 3\}$ هي علاقة تناظرية

a) صح

b) خطأ

4. $R = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$ هي علاقة تخالفية

a) صح

b) خطأ

5. $R = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$ هي علاقة متعدية

a) صح

b) خطأ

6. نقول عن العلاقة R أنها علاقة تكافؤ إذا كانت انعكاسية، تناظرية وتخالفية

a) صح

b) خطأ

7. العلاقة $R = \{(a, b) \mid a \equiv b[m]\}$ هي علاقة تكافؤ على مجموعة الأعداد الصحيحة وحيث $m > 1$

a) صح

b) خطأ

ISSN: 2617-989X

8. صفوف التكافؤ لعدد للعدد 0 و 1 من أجل التوافق بترديد 4 هي مضاعفات العدد 4

a) صح

b) خطأ

9. نقول عن العلاقة R أنها علاقة ترتيب جزئي إذا كانت انعكاسية، تخالفية ومتعدية

a) صح

b) خطأ

10. مجموعة الترتيب الجزئي $(\mathcal{Z}+, |)$ مرتبة كلياً

a) صح

b) خطأ

11. مجموعة الترتيب الجزئي $(\mathcal{Z}+, \leq)$ مرتبة جيداً

a) صح

b) خطأ

12. $(1, 2, 3, 5) \prec (1, 2, 4, 3)$

a) صح

b) خطأ

13. مجموعة الترتيب الجزئي $(\mathcal{Z}, \leq)$ مرتبة جيداً

a) صح

b) خطأ

14. discrete $\prec$ discreet

a) صح

b) خطأ

15. $[a] = [b] \Leftrightarrow aRb$

a) صح

b) خطأ

ISSN: 2617-989X

السؤال الثاني: **(30) درجة**

1. ليكن لدينا العلاقات التالية على مجموعة الأعداد الحقيقية:

$$R_1 = \{(a, b) \in R^2 \mid a > b\}$$
$$R_2 = \{(a, b) \in R^2 \mid a \geq b\}$$
$$\}R_3 = \{(a, b) \in R^2 \mid a < b\}$$
$$R_4 = \{(a, b) \in R^2 \mid a \leq b\}$$
$$R_5 = \{(a, b) \in R^2 \mid a = b\}$$
$$R_6 = \{(a, b) \in R^2 \mid a \neq b\}$$

أوجد ما يلي:

a) $R_2 \cup R_4$
b) $R_4 \cap R_6$
c) $R_3 \setminus R_6$
d) $R_2 \circ R_1$
e) $R_2 \circ R_2$
f) $R_3 \circ R_5$

الحل:

$$R_2 \cup R_4 = \mathcal{R}^2$$
$$R_4 \cap R_6 = R_3$$
$$R_3 \setminus R_6 = \varnothing$$
$$R_2 \circ R_1 = R_1$$
$$R_2 \circ R_2 = R_2$$
$$R_3 \circ R_5 = R_3$$

توجيه في حال الخطأ: الفقرة 1

السؤال الثالث: **(10) درجات**

1. أوجد المصفوفة الممثلة للعلاقة R^2، حيث المصفوفة الممثلة ل R هي:

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

الحل: المصفوفة الممثلة للعلاقة R^2 هي:

$$M_{R^2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

توجيه في حال الخطأ: الفقرة 2

السؤال الأول	الإجابة الصحيحة	توجيه في حال الخطأ
1	a	الفقرة 1
2	b	الفقرة 1
3	a	الفقرة 1
4	a	الفقرة 1
5	b	الفقرة 1
6	b	الفقرة 3
7	a	الفقرة 3
8	A	الفقرة 3
9	a	الفقرة 4
10	b	الفقرة 4
11	a	الفقرة 4
12	a	الفقرة 4
13	b	الفقرة 4
14	b	الفقرة 4
15	a	الفقرة 3

الفصل الخامس: الخوارزميات

الكلمات المفتاحية:

خوارزمية، خوارزمية بحث، خوارزمية فرز، خوارزمية تراجعية، خوارزمية عودية، فرق تسد، برمجة ديناميكية، خوارزمية طموحة، بحث تسلسلي، بحث ثنائي، الفرز بالفقاعات، الفرز بالإقحام، O الكبيرة، Ω الكبيرة، Θ الكبيرة، تعقيد خوارزمية، زمن التعقيد، التعقيد في أحسن الأحوال، التعقيد في أسوأ الأحوال، التعقيد الوسطي.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على مفهوم الخوارزمية خصائصها وأنواعها وأمثلة عليها كخوارزميات البحث وخوارزميات الفرز، التعريف على الأدوات الرياضية اللازمة لحساب تعقيد خوارزمية O الكبيرة و Ω الكبيرة و Θ الكبيرة بالإضافة إلى كيفية حساب تعقيد خوارزمية.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- الخوارزميات خصائصها وأنواعها.
- خوارزميات البحث وخوارزميات الفرز.
- تزايد التوابع O الكبيرة و Ω الكبيرة و Θ الكبيرة.
- حساب تعقيد خوارزمية.

1. الخوارزميات algorithms

يوجد العديد من أصناف عامة من المسائل التي تظهر في الرياضيات المتقطعة. على سبيل المثال: إيجاد أكبر عدد صحيح ضمن سلسلة من الأعداد الصحيحة، فرز سلسلة من الأعداد الصحيحة تصاعدياً، إيجاد أقصر مسار بين عقدتين. عند التعامل مع هذا النوع من المسائل، أول خطوة نقوم بها هي بناء نموذج يترجم المسألة ليضعها ضمن سياق رياضي.

تعريف 1: الخوارزمية هي عبارة عن مجموعة محددة من الخطوات المتسلسلة لمعالجة حاسوبية من أجل أداء مهمة أو حل مسألة ما، وتهدف إلى الحصول على نتائج محددة اعتباراً من معطيات ابتدائية. ويمكن أن تكتب باللغة العربية أو الإنجليزية أو باستخدام رسوم توضيحية تمثل الخطوات وتسلسلها.

مثال 1: خوارزمية إيجاد أكبر عدد صحيح maximum ضمن سلسلة من الأعداد الصحيحة.

تعيين أكبر عدد صحيح (مؤقت) مساوياً لأول عدد من السلسلة.

نقارن العدد الصحيح التالي من السلسلة مع العدد المؤقت، فإذا كان أكبر منه نضع أكبر عدد صحيح (مؤقت) مساوياً لهذا العدد الصحيح التالي.

نكرر الخطوة السابقة إذا كان هناك المزيد من الأعداد الصحيحة ضمن السلسلة.

نتوقف عندما لا يبقى أي عدد صحيح في السلسلة (تم مقارنة كل أعداد السلسلة مع أكبر عدد صحيح مؤقت). عندها يكون أكبر عدد صحيح المؤقت في هذه المرحلة الأخيرة هو أكبر عدد صحيح في السلسلة.

يوجد العديد من الطرق النصية والبيانية للتعبير عن الخوارزمية، كما أنه يمكن التعبير عنها باستخدام إحدى لغات البرمجة وهذا يعني التعبير عن الخوارزمية بالبرنامج (الكود). ولكن الكتابة بلغة برمجة ما يعني التقيد بلغة خاصة، في حين أن المطلوب وسيلة تعبير مستقلة عن أية لغة. إن استخدام طريقة منتظمة للتعبير عن الخوارزمية يوفر حرية التعبير عن الحل مع الاحتفاظ بسهولة نقل الحل إلى لغة برمجة يفهمها الحاسوب، يمكن أن تسمى هذه الطريقة في التعبير عن الخوارزمية تجاوزاً لغة خوارزمية pseudocode وترجمتها الحرفية «شبه الترميز» إذ تشكل حلاً وسطاً بين لغتنا الطبيعية ولغات البرمجة.

على سبيل المثال يتم التعبير عن إيجاد أكبر عدد صحيح ضمن سلسلة من الأعداد الصحيحة $a_1, a_2, \ldots, a_n$ باستخدام ال pseudocode على النحو التالي:

procedure $max\,(a1, a2, \ldots, an: integers)$

$max = a1$

for $i = 2$ to n

if $max < ai$ then $max = ai$

return max {max is the largest element}

1.1. خصائص الخوارزمية algorithm properties

يوجد العدد من الصفات التي تشترك بها الخوارزميات، من بين هذه الصفات:

1. الدخل input: لكل خوارزمية معطيات دخل من مجموعة محددة.

الخرج output: من أجل كل مجموعة معطيات دخل تُنتج الخوارزمية معطيات خرج من مجموعة محددة. معطيات الخرج هي عبارة عن حل المسألة

الوضوح definiteness: يجب أن تكون تعليمات وخطوات الخوارزمية واضحة بحيث يمكن قراءتها وفهمها.

الصحة correctness: يجب على الخوارزمية أن تُنتج قيم خرج صحيحة من أجل كل مجموعة من قيم الدخل.

المحدودية finiteness: يجب على الخوارزمية أن تُنتج قيم الخرج المرجوّة بعد عدد معين من الخطوات وذلك من أجل كل مجموعة من قيم الدخل.

الفعالية effectiveness: إمكانية تنفيذ كل خطوة من خطوات الخوارزمية بالضبط وضمن فترة زمنية محدودة.

العمومية generality: يجب على الإجرائية أن تكون قابلة للتطبيق من أجل كل المسائل من النموذج المطلوب، وليس فقط من أجل مجموعة معينة من قيم الدخل.

2.1. أنواع الخوارزميات algorithm types

يمكن تصنيف الخوارزميات بحسب الوظيفة التي تقوم بها، والمسألة الرئيسية التي تحلها، على سبيل المثال:

- خوارزميات البحث search algorithms هدفها البحث عن عنصر معطيات محدد.
- خوارزميات الفرز sort algorithms هدفها ترتيب مجموعة من عناصر المعطيات ترتيباً متتالياً اعتماداً على أحد بنود العناصر أو على اجتماع عدة بنود محددة.

كما يمكن اتباع أسلوب آخر في التصنيف يعتمد على التقنية المستخدمة في تشكيل التعليمات وتسلسلها، على سبيل المثال:

- الخوارزميات التتابعية sequential algorithms يجري تنفيذها لاحقاً وفق تتابع التعليمات وبترتيب معين.
- الخوارزميات المتوازية parallel algorithms يجري تنفيذ أكثر من جزء منها في آن واحد معاً، ويجري ذلك عادة على عدة معالجات.
- الخوارزميات التراجعية backtracking algorithms وهي خوارزميات تُستخدم لإيجاد حل ضمن مجموعة محاولات ممكنة، حيث تمثل المحاولات على شكل فروع في شجرة. يجري تجريب أحد الفروع، فإن لم نجد الحل نعود إلى الوراء لنختار مساراً آخر نجربه وهكذا، حتى نعثر على المسار المناسب. مثال على ذلك تلوين خارطة بما لا يزيد على أربعة ألوان.
- الخوارزميات العَوْديّة recursive algorithms وهي خوارزميات تستخدم ضمن تعليماتها استدعاءً للخوارزمية نفسها. مثال على ذلك خوارزمية حساب $n!$

هذا ويمكن تجميع (تصنيف) الخوارزميات التي تستخدم طرق مشابهة في حل المسائل مع بعضها البعض آخذين بعين الاعتبار بأن التصنيف ليس شمولياً وليس منفصلاً (أي يُمكن لتصنيفين ما أن يتقاطعا):

- خوارزميات فرق تسد divide and conquer algorithms: يتم في هذا النوع من الخوارزميات أولاً تقسيم المسألة المراد حلها إلى مسائل جزئية أصغر من نفس النمط ومن ثم حل تلك المسائل الجزئية بطريقة عودية. ثانياً تجميع حلول المسائل الجزئية التي تم الحصول عليها ضمن حل واحد للمسألة الأصلية. مثال على ذلك خوارزمية الفرز السريع quicksort وكذلك خوارزمية الدمج merge sort.
- خوارزميات البرمجة الديناميكية dynamic programming algorithms: عبارة عن خوارزميات تتذكر النتائج السابقة وتستخدمها لإيجاد نتائج جديدة. تُستخدم الخوارزميات الديناميكية عادة لإيجاد الحلول المثلى optimization problems. مثال على ذلك خوارزمية Dijkstra في إيجاد أقصر مسار shortest path بين عقدتين (مدينتين على سبيل المثال).
- خوارزميات الطموحة Greedy Algorithms: تُستخدم تلك الخوارزميات لإيجاد الحل الأمثلي للمسائل المطروحة، وهي تعمل على مراحل، في كل مرحلة أولاً نأخذ في لحظة معينة الحل الأمثل بدون النظر إلى النتائج المستقبلية وثانياً نأمل باختيار حل أمثلي محلي local في كل خطوة، بالحصول في النهاية على حل أمثلي عام global. مثال على ذلك عد النقود counting money: بفرض أننا نريد الحصول على مبلغ من المال بأقل قطع ورقية ونقدية bills and coins. في كل مرحلة نأخذ أكبر قطعة ورقية أو نقدية بحيث لا نتجاوز المبلغ المطلوب، على سبيل المثال نريد الحصول على مبلغ 639 ليرة سورية نأخذ:
  - 1 قطعة ورقية من فئة الـ 500 ليرة سورية
  - 1 قطعة ورقية من فئة الـ 100 ليرة سورية لنحصل على 600 ليرة سورية
  - 1 قطعة نقدية من فئة الـ 25 ليرة سورية لنحصل على 625 ليرة سورية
  - 1 قطعة نقدية من فئة الـ 10 ليرات سورية لنحصل على 635 ليرة سورية
  - 4 قطع نقدية من فئة الـ 1 ليرة سورية لنحصل على 639 ليرة سورية.

3.1. خوارزميات البحث search algorithms

هدفها البحث عن عنصر معطيات محدد في ضمن سلسلة مرتبة، والتي يمكن وصفها كما يلي: البحث عن موضع العنصر x ضمن سلسلة من العناصر المختلفة $a_1, a_2, \ldots, a_n$، أو تبيان أنه غير موجود ضمن السلسلة (أي خرج خوارزمية البحث هو الموضع i إذا كان $x = a_i$ أو 0 إذا لم يكن x ضمن السلسلة).

البحث التسلسلي (الخطي) linear search

نبدأ بمقارنة العنصر x بالعنصر a_1. إذا كان $x = a_1$، الحل هو 1، وإذا كان $x \neq a_1$ نقارن العنصر x بالعنصر a_2. إذا كان $x = a_2$، الحل هو 2، وإذا كان $x \neq a_2$ نقارن العنصر x بالعنصر a_3 وهكذا نستمر على هذا المنوال حتى نجد العنصر الذي نبحث عنه أو أن السلسلة تنتهي بدون إيجاد العنصر x والحل في هذه الحالة هو 0.

لغة الخوارزمية للبحث الخطي هي:

procedure $linear\ search\,(x : integer,\ a_1, a_2, \ldots, a_n : distinct\ integers)$

$i = 1$
while $(i \leq n\ and\ x \neq a_i)$
$i = i + 1$
if $i \leq n$ then $location = i$
else $location = 0$
return location {subscript i of the term that equals x, or is 0 if x is not found}

البحث الثنائي binary search

نبدأ بمقارنة العنصر x مع العنصر الذي دليله m الموجود في منتصف السلسلة المرتبة (تصاعدياً على سبيل المثال) ونناقش الحالات التالية:

a) $x = a_m$ يتوقف البحث ونكون قد وجدنا العنصر.
b) $x > a_m$ العنصر x لا يمكن أن يوجد قبل a_m ونتابع البحث ضمن النصف اليميني من السلسلة.
c) $x < a_m$ نتابع البحث ضمن النصف اليساري من السلسلة.

نتابع عملية البحث بحيث نقسم على 2 عدد العناصر الواجب مناقشتها في كل مرحلة.

procedure $binary\ search\,(x : integer,\ a_1, a_{2,} \ldots, a_n : increasing\ integers)$

$i = 1$ {i is left endpoint of search interval}
$j = n$ {j is right endpoint of search interval}
while $i < j$
$m = \lfloor (i + i) / 2 \rfloor$
  if $x > a_m$ then $i = m + 1$
  else $j = m$
if $x = a_i$ then $location = i$
else $location = 0$
return location {subscript i of the term ai equal to x, or 0 if x is not found}

مثال 1: للبحث عن العنصر 19 ضمن سلسلة الأعداد 22 20 19 18 16 15 13 12 10 8 7 6 5 3 2 1، المكونة من 16 عنصر، نقسمها إلى سلسلتين كل منها 8 عناصر 10 8 7 6 5 3 2 1 و 22 20 19 18 16 15 13 12. بما أن 19 أكبر من عنصر المنتصف (10) بالتالي سيكون البحث عن 19 في السلسلة الأكبر (النصف اليميني). يتم تقسيم السلسلة اليمينية إلى سلسلتين كل منها 4 عناصر 16 15 13 12 و 22 20 19 18، بما أن 16 < 19 بالتالي يتم البحث في السلسلة النصف اليسارية حيث يتم تقسيمها إلى سلسلتين كل منها عنصرين 19 18 و 22 20. بما أن 19 ليس أكبر من 19 بالتالي يتم البحث في السلسلة اليمينية التي يتم تقسيمها إلى سلسلتين كل منها عنصر واحد 18 و 19. بما أن 18 < 19 بالتالي يتم البحث ضمن السلسلة التي تحوي عنصر واحد 19 والذي دليله يساوي 14 وهو خرج الخوارزمية (لأن 19 = 19).

4.1. خوارزميات الفرز sorting algorithms

لدينا سلسلة تحوي n عنصراً، يرتبط بكل عنصر من عناصر السلسلة مفتاح ينتمي إلى مجموعة مرتبة كلياً. نريد الحصول على سلسلة تكون بديلاً لعناصر السلسلة الأصلية، بحيث تكون مفاتيح الفرز مرتبة تصاعدياً حيث نقرأ السلسلة من البداية إلى النهاية. الغاية من الفرز هي الوصول السريع إلى المعلومات بطرق البحث.

مجموعة المفاتيح C هي أي مجموعة مرتبة ترتيباً كلياً، أي أنها مجموعة مزودة بعلاقة R تحقق الخواص التالية:

$$\forall x \in C \qquad x\,R\,x$$
$$\forall x, y \in C \qquad (x\,R\,y) \text{ and } (y\,R\,x) \Rightarrow x = y$$
$$\forall x, y, z \in C \qquad (x\,R\,y) \text{ and } (y\,R\,z) \Rightarrow x\,R\,z$$
$$\forall x, y \in C \qquad (x\,R\,y) \text{ or } (y\,R\,x)$$

ملاحظة 1: يمكن اعتماد أي من مكونات عناصر السلسلة كمفتاح للفرز، كما يمكن إيجاد تراكيب مختلفة من مكونات العناصر لإنشاء الفرز.

مثال 2: يمكن فرز مجموعة الأشخاص حسب الاسم أو حسب الكنية أو حسب العمر أو حسب الطول. كما يمكن اعتماد الثنائية <Age, Size> مفتاحاً للفرز و تعرف علاقة الترتيب $\le$ كما يلي:

$$(x \le y) \Leftrightarrow (x\text{ Age} < y\text{ .Age}) \text{ or } (x\text{ .Age} = y\text{ Age and } x\text{ .Size} \le y\text{ Size})$$

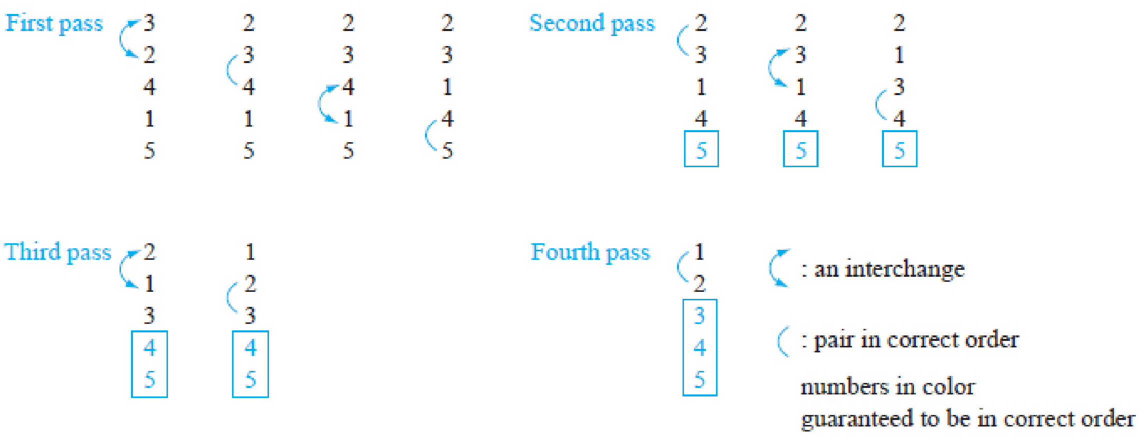
في هذه الحالة نسمي مفتاح الفرز مركباً، ونستطيع تحديد أوليات المركبات، فنسمي المركبة الأولى مفتاحاً جزئياً أولياً، وبقية المركبات الأخرى مفتاحاً جزئياً ثانوياً.

الفرز بطريقة الفقاعات bubble sort

لإيجاد أصغر عنصر في السلسلة، يمكن مسحها ابتداءً من نهايتها، وتبديل العناصر المتجاورة إذا كانت لا تراعي الترتيب. في نهاية عملية المسح والتبديل يكون أصغر عنصر موجود في بداية السلسلة. لغة الخوارزمية للفرز بالفقاعات هي التالية:

procedure $bubblesort\,(a_1, \ldots, a_n : real\ \ numbers\ \ with\ \ n \geq 2)$
for $i = 1$ **to** $n - 1$
  for $j = 1$ **to** $n - i$
    if $a_j > a_{j+1}$ **then** interchange a_j and a_{j+1}
$\{a_1, \ldots, a_n\ \ is\ \ in\ \ increasing\ \ order\}$

مثال 3: افرز العناصر 3, 2, 4, 1, 5 باستخدام خوارزمية الفرز بالفقاعات



المرور الأول: نبدأ بمقارنة 3 و 2. بما أن 3 < 2 بالتالي نبدل بينهما ونحصل على السلسلة 2, 3, 4, 1, 5. بما أن 4 < 3 نكمل بمقارنة 4 و 1. بما أن 1 < 4 بالتالي نبدل بينهما ونحصل على السلسلة 2, 3, 1, 4, 5 بما أن 5 < 4 فإن المرور الأول انتهي والذي يضمن أن أكبر عنصر (5) موجود في الموضع الصحيح.

نكمل بنفس الطريقة المرور الثاني (3 مقارنات) ومن ثم الثالث (مقارنتين) وأخيراً المرور الرابع (مقارنة واحدة) نحصل على السلسلة مرتبة تصاعدياً 1, 2, 3, 4, 5.

الفرز بالإقحام selection sort

تعتبر خوارزمية الفرز بالإقحام فعالة من أجل عدد صغير من القيم، وهذه الخوارزمية مستوحاة من الطريقة التي يتبعها معظم الناس في ترتيب أوراق اللعب. تفترض خوارزمية الإقحام أنه في المرحلة j أن العناصر الـ $j-1$ الأولى من السلسلة مرتبة، ونريد إيجاد موقع العنصر رقم j بين هذه العناصر. تتم عملية الإقحام بمقارنة العنصر المذكور مع عناصر السلسلة المذكورة عنصر عنصر بدءاً من أول عنصر منها. في نهاية المرحلة j نحصل على سلسلة حدودها الـ j الأولى مرتبة.

لغة الخوارزمية لخوارزمية الفرز بالإقحام هي التالية:

procedure $insertion\ sort(a_1, a_2, \ldots, a_n : real\ numbers\ with\ n \geq 2)$

for $j = 2$ to n

.. $i = 1$

while $a_j > a_i$

$i = i + 1$

$m = a_j$

for $k = 0$ to $j - i - 1$

$a_{j-k} = a_{j-k-1}$

$a_i = m$

$\{a_1, \ldots, a_n\ is\ in\ increasing\ order\}$

مثال 4: افرز العناصر 5 ,1 ,4 ,2 ,3 باستخدام خوارزمية الفرز بالإقحام.

الحل: نقارن العنصر 2 مع 3. بما أن 2 > 3، نضع العنصر 2 في بداية السلسلة منتجة السلسلة 5 ,1 ,4 ,3 ,2 (لدينا العنصرين 2 و3 في الترتيب الصحيح). الآن نضع العنصر 4 في الموضع الصحيح ضمن السلسلة المرتبة 3 ,2 وذلك عن طريق المقارنة 2 < 4 و3 < 4. بما أن 3 < 4 بالتالي يبقى العدد 4 مكانه في الموضع الثالث ونحصل على 5 ,1 ,4 ,3 ,2 (العناصر الثلاثة الأولى مرتبة). نضع العنصر 1 في الموضع الصحيح ضمن السلسلة المرتبة ,2 4 ,3. بما أن 2 > 1، نحصل على السلسلة 5 ,4 ,3 ,2 ,1. أخيراً نقحم العدد 5 في الموضع الصحيح ضمن السلسلة المرتبة 4 ,3 ,2 ,1 عن طريق المقارنة مع عناصر تلك السلسلة المرتبة. بما أن 4 < 5 بالتالي يبقى العنصر 5 مكانه في الموضع الأخير منتجاً السلسلة المرتبة 5 ,4 ,3 ,2 ,1.

2. تزايد التوابع growth of functions

لقياس فعالية خوارزمية سنركز اهتمامنا على العمليات الأساسية basic operations (في خوارزميات البحث والفرز العمليات الأساسية هي عمليات المقارنة بين العناصر وعمليات التبديل فيما بينها).

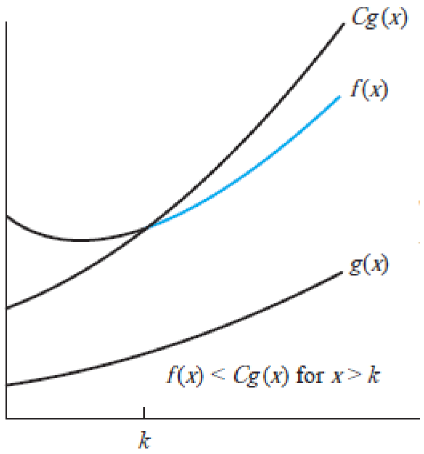
عندما يكون حجم المعطيات n كبير يكون من غير المهم أن نعرف هل تحتاج خوارزمية ما إلى n أم إلى $n+5$ عملية أساسية، ويمكن في معظم الأحيان إهمال الثوابت الضربية. فمثلاً عندما نريد مقارنة الخوارزمية A التي عدد عملياتها الأساسية n^2 مع الخوارزمية B التي عدد عملياتها الأساسية $4n$ فإن الخوارزمية B أفضل من A من أجل جميع قيم n التي هي أكبر من 4.

تؤول التقريبات السابقة إلى إيجاد ما يسمى مرتبة كِبر تابع، وتجري مقارنة الخوارزميات على أساس مرتبة الكبر لتوابع التعقيد الزمني (عدد العمليات الأساسية). من أجل مقارنة الخوارزميات في حالة حجوم معطيات كبيرة، لابد إذاً من استخدام بعض التعاريف الرياضية الأساسية.

1.2. تعريف O الكبيرة big O notation

تعريف 2: ليكن لدينا التابعان f و g والمعرفان على كافة القيم الموجبة الصحيحة أو الحقيقية. نقول عن التابع f إنه مُسيطر عليه تقاربياً من قبل التابع g ونرمز إلى ذلك بـ $f(x)=O(g(x))$ إذا وجد ثابتان C و k بحيث $|f(x)|\leq C|g(x)|$ من أجل كل $x>k$.

ملاحظة 2: من التعريف السابق $f(x)=O(g(x))$ يمكن القول أن التابع $f(x)$ يتزايد بشكل أبطأ من التابع $g(x)$.



مثال 5: بين أن $f(x)=x^2+2x+1=O(x^2)$

الحل: من أجل $x>1$ لدينا $x<x^2$ و $1<x^2$ بالتالي: $0\leq x^2+2x+1\leq x^2+2x^2+x^2=4x^2$، بالتالي $f(x)=O(x^2)$ ($C=4$ و $k=1$).

ومن أجل $x>2$ لدينا $2x^2\leq x^2$ و $1\leq x^2$ بالتالي: $0\leq x^2+2x+1\leq x^2+x^2+x^2=3x^2$، بالتالي أيضاً $f(x)=O(x^2)$ ($C=3$ و $k=2$).

ملاحظة 3: ليكن $f(x) = O(g(x))$ والتابع $|h(x)| > |g(x)|$ بالتالي يكون $f(x) = O(h(x))$

مثال 6: بين أن $7x^2 = O(x^3)$

الحل: يجب البحث عن C و k بحيث $7x^2 \leq Cx^3$ من أجل كل $x > k$. بملاحظة أنه من أجل $x > 7$ وهذا صحيح لأنه يكفي ضرب طرفي $x > 7$ بالمقدار الموجب x^2 نحصل على المطلوب. أي وجدنا $C = 1$ و $k = 7$.

كما يمكننا أخذ $k = 1$ و $C = 7$ لتبان أن $7x^2 = O(x^3)$ ($x > 1$ يعطي $7x^3 > 7x^2$).

مثال 7: هل $x^3 = O(7x^2)$؟

الحل: هل يوجد C و k بحيث $x^3 \leq C(7x^2)$ من أجل كل $x > k$؟ سنبرهن أن ذلك غير موجود عن طريق نقض الفرض. بفرض أن C و k موجودان بحيث $x^3 \leq C(7x^2)$ من أجل كل $x > k$، بالتالي هذا يكافئ $x \leq 7C$ (بالتقسيم على المقدار الموجب x^2) وهذا غير صحيح لأنه مهما كانت قيمة C التي نأخذها فإنه يوجد قيم كبيرة x تجعل العلاقة $x \leq 7C$ غير صحيحة. بالتالي x^3 ليست $O(7x^2)$

مبرهنة 1: ليكن التابع $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$، حيث $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ أعداد حقيقية. عندئذ $f(x) = O(x^n)$

سنقوم حالياً بإعطاء بعض الأمثلة على التوابع التي مجموعة تعريفها الأعداد الصحيحة الموجبة.

مثال 8: كيف يمكن استخدام O الكبيرة لتقدير مجموع الأعداد الصحيحة الموجبة الأولى.

الحل: $1 + 2 + \dots + n \leq n + n + \dots + n = n^2$، بالتالي فإن $1 + 2 + \dots + n = O(n^2)$ ($C = 1$ و $k = 1$).

مثال 9: أوجد O الكبيرة ل $n!$ (عاملي) و O الكبيرة ل $\log(n!)$

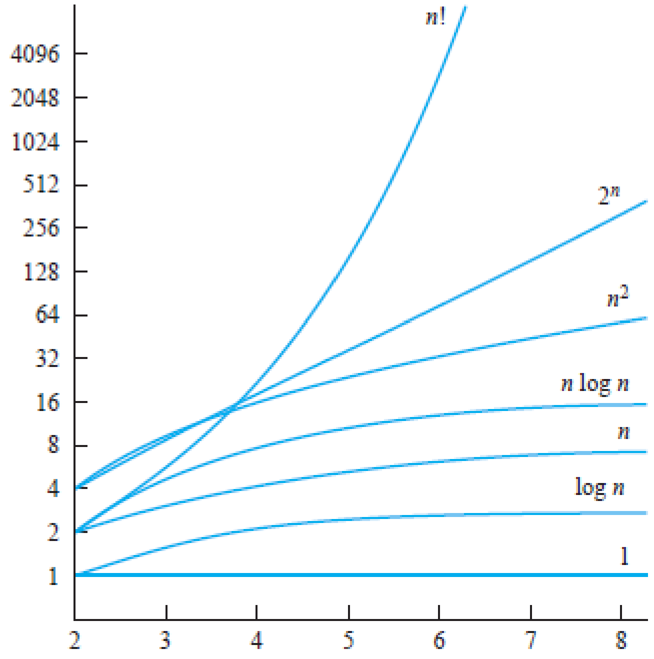
الحل: $n! = 1.2.3. \dots .n \leq n.n. \dots .n = n^n$، بالتالي $n! = O(n^n)$ ($C = 1$ و $k = 1$). وبأخذ لوغاريتم الطرفين لمتراجحة $n!$ السابقة نحصل على: $\log(n!) \leq \log(n^n) = n.\log n$، أي أنه وبأخذ $C = 1$ و $k = 1$ لدينا $\log(n!) = O(n.\log n)$

مثال 10: يمكن باستخدام الاستقراء الرياضي برهان المتراجحة $n < 2^n$ وذلك من أجل أي عدد موجب n. بين أن $n = O(2^n)$.

الحل: بأخذ المتراجحة $n < 2^n$ نستنتج سريعاً أن $n = O(2^n)$ ($C = 1$ و $k = 1$).

ملاحظة 4: بما أن تابع اللوغاريتم تابع متزايد، بالتالي بأخذ لوغاريتم (أساس 2) الطرفين للمتراجحة $n < 2^n$ نحصل على $\log_2(n) < n$. بالتالي $\log_2(n) = O(n)$، بأخذ $C = k = 1$.

يتم استخدام O الكبيرة لتقدير عدد العمليات الأساسية لحل مسألة باستخدام خوارزمية ما. أغلب التوابع المستخدمة في هذا التقدير هي التالية: $1, \log n, n, n \log n, n^2, 2^n, n!$. الشكل التالي يبين تلك التوابع.



خصائص O الكبيرة big O properties

(a الانعكاسية: $f(x) = O(f(x))$

(b الضرب بثابت: $c.O(f(x)) = O(f(x))$

(c جمع وضرب التوابع:

مبرهنة 2: بفرض أن $f_1(x) = O(g_1(x))$ و $f_2(x) = O(g_2(x))$. بالتالي فإن:

$$(f_1+f_2)(x) = O\left(max\left(|g_1(x)|,\ |g_2(x)|\right)\right)$$

نتيجة 1: بفرض أن $f_1(x) = O(g(x))$ و $f_2(x) = O(g(x))$. بالتالي فإن: $(f_1+f_2)(x) = O(g(x))$.

مبرهنة 3: بفرض أن $f_1(x) = O(g_1(x))$ و $f_2(x) = O(g_2(x))$. بالتالي فإن:

$$(f_1f_2)(x) = O\left(max\left(g_1(x)g_2(x)\right)\right)$$

مثال 11: أعط تقدير لـ O الكبيرة من أجل $f(n) = 3n\ log(n!) + (n^2+3)\ log\ n$.

الحل: لنبدأ بتقدير الحد $3n\ log(n!)$. رأينا سابقاً ان $log(n!) = O(n\ log\ n)$، وبما أن $3n = O(n)$، بالتالي فإن $3n\ log(n!) = O(n^2\ log\ n)$. لتقدير الحد الثاني $(n^2+3)\ log\ n$ نرى أن $(n^2+3) < 2n^2$ حيث $n > 2$، بالتالي $(n^2+3) = O(n^2)$، ينتج من ذلك أن $(n^2+3)\ log\ n = O(n^2\ log\ n)$. أخيراً بجمع الحدين نحصل على $f(n) = O(n^2\ log\ n)$.

مثال 12: أعط تقدير لـ O الكبيرة من أجل $f(x) = (x+1)\ log(x^2+1) + 3x^2$.

الحل: لنبدأ بتقدير الحد $(x+1)\ log(x^2+1)$. بداية $(x+1) = O(x)$ كما أن $x^2+1 \le 2x^2$ من أجل $x > 1$ بالتالي $log(x^2+1) \le log(2x^2) = log\ 2 + log\ x^2 = log\ 2 + 2log\ x \le 3\ log\ x$ من أجل $x > 2$. وهذا يبين أن $log(x^2+1) = O(log\ x)$، بالتالي

الحد الثاني يعطي $(x+1)\log(x^2+1) = O(x\log x)$. $3x^2 = O(x^2)$. مما سبق ينتج $f(x) = O(\max(x\log x, x^2))$، بما أن $x\log x \le x^2$ من أجل $x > 1$ ينتج أن $f(x) = O(x^2)$.

2.2. تعريف Ω الكبيرة big Ω notation

تعريف 3: ليكن لدينا التابعان f و g والمعرفان على كافة القيم الموجبة الصحيحة أو الحقيقية. نقول عن التابع f إنه يُسيطر تقاربياً على التابع g ونرمز إلى ذلك بـ $f(x) = \Omega(g(x))$ إذا وجد ثابتان C و k بحيث $|f(x)| \ge C|g(x)|$ من أجل كل $x > k$.

ملاحظة 5: يوجد علاقة وثيقة بين O الكبيرة و Ω الكبيرة $g(x) = O(f(x)) \Leftrightarrow f(x) = \Omega(g(x))$.

مثال 13: بين أن $f(x) = 8x^3 + 5x^2 + 7 = \Omega(x^3)$

الحل: $f(x) = 8x^3 + 5x^2 + 7 \ge 8x^3$ من أجل أي عدد حقيقي موجب، وهذا يكافئ كون $g(x) = x^3$ هو O كبيرة للتابع $f(x)$ أي $x^3 = O(8x^3 + 5x^2 + 7)$.

3.2. تعريف Θ الكبيرة big Θ notation

تعريف 4: ليكن لدينا التابعان f و g والمعرفان على كافة القيم الموجبة الصحيحة أو الحقيقية. نقول عن التابع f إنه من نفس مرتبة التابع g ونرمز إلى ذلك بـ $f(x) = \Theta(g(x))$ إذا كان $f(x) = O(g(x))$ و $f(x) = \Theta(g(x))$. أو إذا وفقط إذا وجد عددان حقيقيان C_1 و C_2 وعدد صحيح موجب k بحيث تتحقق العلاقة التالية: $C_1|g(x)| \le |f(x)| \le C_2|g(x)|$.

مثال 14: هل مجموع ال n عدد صحيح موجب الأولى هو $\Theta(n^2)$؟

الحل: وجدنا في المثال 8 أن التابع $f(n) = 1 + 2 + \ldots + n = O(n^2)$، لتبيان أن $f(n) = \Theta(n^2)$ يكفي أن نبين أن $f(n) = \Theta(n^2)$، أي علينا إيجاد عدد صحيح موجب C بحيث $f(n) > Cn^2$.

$$\begin{aligned} f(n) = 1 + 2 + \ldots + n &\ge \lceil n/2 \rceil + (\lceil n/2 \rceil + 1) + \ldots + n \\ &\ge \lceil n/2 \rceil + \lceil n/2 \rceil + \ldots + \lceil n/2 \rceil \\ &= (n - \lceil n/2 \rceil + 1)\lceil n/2 \rceil \\ &\ge (n/2)(n/2) \\ &= n^2/4 \qquad C = 1/4 \end{aligned}$$

مثال 15: بين أن $3x^2 + 8x\log x = \Theta(x^2)$

الحل: من الواضح أن $x^2 = O(3x^2 + 8x\log x)$. كما أن $0 \le 8x\log x \le 8x^2$، بالتالي ومن أجل كل $x > 1$ لدينا $3x^2 + 8x\log x \le 11x^2$. أي $3x^2 + 8x\log x = O(x^2)$، مما سبق ينتج المطلوب.

مبرهنة 4: ليكن التابع $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$، حيث $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ أعداد حقيقية و $an \ne 0$. عندئذ $f(x) = \Theta(x^n)$

مثال 16: $3x^8 + 10x^7 + 221x^2 + 1444 = \Theta(x^8)$.

ISSN: 2617-989X

3. تعقيد الخوارزميات complexity of algorithms

بشكل عام، من أجل مسألة ما يمكن أن يوجد أكثر من خوارزمية لحل تلك المسألة، لذلك فالسؤال الذي يطرح نفسه: كيف نختار الخوارزمية الفعالة التي سنستخدمها لحل تلك المسألة المطروحة؟

يمكننا الاعتماد على قياس زمن تنفيذ البرنامج الناتج عن الخوارزمية ولكنها فكرة غير جيدة وذلك للأسباب التالية:

زمن تنفيذ البرنامج يعتمد على الحاسوب (سريع، بطيء)، خلال تنفيذ البرنامج قد ينشغل الحاسب بأعمال أخرى، كتابة البرنامج تعتمد على لغة البرمجة وعلى مهارة المبرمج أيضاً.

لذلك فإنه من المستحسن إيجاد قياس فعالية خوارزمية ما بشكل مستقل عن الآلة، عن لغة البرمجة وعن المبرمج.

زمن التعقيد time complexity

يمكن التعبير عن زمن تعقيد خوارزمية بعدد العمليات المستخدمة من قبل الخوارزمية. العمليات المستخدمة في قياس زمن التعقيد يمكن لها أن تكون مقارنة أو جمع أو ضرب أو قسمة أعداد صحيحة بالإضافة إلى أي عمليات أساسية أخرى.

مثال 17: أوجد زمن التعقيد لخوارزمية البحث التسلسلي.

الحل: في كل خطوة من حلقة while يتم تنفيذ مقارنتين، الأولى $i \le n$ لمعرفة فيما إذا وصلنا إلى نهاية السلسلة والثانية $x \ne a_i$ لمقارنة العنصر x مع عنصر السلسلة. بالإضافة إلى ذلك يوجد مقارنة أخرى خارج الحلقة $i \le n$.

بالنتيجة: إذا كان العنصر x موجود في السلسلة $x = a_i$، يوجد لدينا $2i + 1$ عملية مقارنة. وإذا لم يكن العنصر x موجود في السلسلة فإنه يوجد لدينا $2n + 2$ عملية مقارنة، $2n$ عملية مقارنة لتحديد أن العنصر x ليس a_i وذلك من أجل كل $i = 1, 2, \dots, n$ وعملية مقارنة أخرى للخروج من الحلقة وعملية مقارنة واحدة خارج الحلقة.

نستنتج مما سبق أن البحث الخطي يتطلب $\Theta(n)$ مقارنة في أسوأ الأحوال $(2n + 2 = \Theta(n))$

التعقيد في أسوأ الأحوال worst-case complexity

التعقيد في أسوأ الأحوال لخوارزمية يعني أكبر عدد من العمليات اللازمة لحل المسألة المعطية باستخدام هذه الخوارزمية على دخل من حجم معين. بمعنى آخر هو عدد العمليات اللازمة تحتاجها الخوارزمية لضمان الحصول على حل. وجدنا في المثال 17 السابق في خوارزمية البحث التسلسلي أن عدد المقارنات في أسوأ الأحوال للخوارزمية هو $2n + 2$ والموافق لكون العنصر الذي نبحث عنه غير موجود في السلسلة، بالتالي التعقيد في أسوأ الأحوال هو $\Theta(n)$.

التعقيد في أحسن الأحوال best-case complexity

التعقيد في أحسن الأحوال لخوارزمية يعني أقل عدد من العمليات اللازمة لحل المسألة المعطية باستخدام هذه الخوارزمية. في المثال 17 السابق في خوارزمية البحث التسلسلي عدد المقارنات للخوارزمية هو $2i + 1$ عندما يكون العنصر x موجود في الموقع i $(x = a_i)$، بالتالي عدد المقارنات في أحسن الأحوال هو عندما يكون العنصر الذي نبحث عنه موجود في أول السلسلة $(i = 1)$ والموافق لعدد من المقارنات مقداره $2(1) + 1 = 3$. بالتالي التعقيد في أحسن الأحوال هو $\Theta(1)$.

التعقيد الوسطي average-case complexity

التعقيد الوسطي لخوارزمية يعني العدد الوسطي للعمليات اللازمة لحل المسألة باستخدام هذه الخوارزمية على كل أنواع الدخل الممكنة من حجم معين.

مثال 18: أوجد التعقيد الوسطي لخوارزمية البحث التسلسلي بفرض أن العنصر الذي نبحث عنه موجود في السلسلة وأن احتمال وجوده في أي موقع هو نفسه.

الحل: العنصر x حسب الفرض ممكن أن يكون أحد عناصر السلسلة $a_1, a_2, \ldots, a_n$. وجدنا سابقاً في المثال 17 إذا كان العنصر x موجود في السلسلة $x = a_i$، فإنه يوجد لدينا $2i + 1$ عملية مقارنة. بالتالي إذا كان $x = a_1$، فإننا نحتاج إلى $2(1) + 1 = 3$ مقارنات، وإذا كان $x = a_2$، فإننا نحتاج إلى $2(2) + 1 = 5$ مقارنات، وهكذا ... بالتالي العدد الوسطي للمقارنات المستخدمة هو:

$$\frac{3+5+\ldots+(2n+1)}{n} = \frac{2(1+2+\ldots+n)+n}{n} = \frac{2[n(n+1)/2]}{n} + 1 = n+2$$

أي أن التعقيد الوسطي لخوارزمية البحث التسلسلي هو $\Theta(n)$.

تعقيد ضرب المصفوفات complexity of matrix multiplication

ليكن لدينا المصفوفتان $A = [a_{ij}]$ ذات البعد $m \times p$ و $B = [b_{ij}]$ ذات البعد $p \times n$، فإن حاصل ضرب A و B هو المصفوفة $C = [c_{ij}]$ ذات البعد $m \times n$ بحيث $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$. لغة الخوارزمية لعملية الضرب هي التالية:

```
procedure matrix multiplication(A, B : matrices)
for i = 1 to m
  for j = 1 to n
    cij = 0
    for k = 1 to p
      c_ij = c_ij + a_ik b_kj
return C        {C = [c_ij] is the product of A and B}
```

مثال 19: ما هو عدد عمليات الجمع والضرب المستخدمة في ضرب مصفوفتين مربعتين $n \times n$ ؟

الحل: تحوي مصفوفة الضرب $A \times B$ على n^2 عنصر. من أجل الحصول على كل عنصر منها يتطلب n عملية ضرب و $n - 1$ عملية جمع. بالتالي فإن العدد الكلي لعمليات الضرب هو n^3 عملية، والعدد الكلي لعمليات الجمع هو $n^2(n - 1)$

فهم تعقيد الخوارزميات understanding the complexity of algorithms

يبين الجدول التالي بعض المصطلحات المستخدمة لوصف تعقيد الخوارزميات. على سبيل المثال إيجاد أكبر عنصر ل 100 أول حد من سلسلة تحوي n عنصر حيث $n \geq 100$ باستخدام خوارزمية أكبر عنصر التي وجدناها سابقاً، لهذه الخوارزمية تعقيد ثابت لأنها تحتاج إلى 99 عملية مقارنة مهما كان العدد n. تعقيد خوارزمية البحث التسلسلي لها تعقيد خطي (أسوأ الأحوال والحالة الوسطية). تعقيد خوارزمية البحث الثنائي هو لوغاريتمي (أسوأ الأحوال). تعقيد خوارزمية الفرز بالفقاعات هو تربيعي (كثير حدود من الدرجة 2) لأنها تستخدم $\Theta(n^2)$ مقارنة (في أسوأ الأحوال). يوجد العديد من خوارزميات الفرز التي تعقيدها هو $n \log n$ وتسمى خوارزميات الفرز السريعة كخوارزمية الفرز بالدمج merge sort. خوارزمية تعقيدها عاملي factorial إذا كان تعقيدها من الشكل $\Theta(n!)$، مثال على ذلك خوارزمية المسافر

الجوال Traveling Salesman وهي: لدينا مسافر جوال يريد زيارة n مكان مختلف ضمن مدينة واحدة، ما هو أقصر طريق يمكن أن يختاره لزيارة كافة الأماكن؟

Commonly Used Terminology for the Complexity of Algorithms.

Complexity	*Terminology*
$\Theta(1)$	Constant complexity
$\Theta(\log n)$	Logarithmic complexity
$\Theta(n)$	Linear complexity
$\Theta(n \log n)$	Linearithmic complexity
$\Theta(n^b)$	Polynomial complexity
$\Theta(b^n)$, where $b > 1$	Exponential complexity
$\Theta(n!)$	Factorial complexity

يبين الجدول التالي الزمن اللازم لحل مسائل من حجوم مختلفة مع خوارزمية تستخدم العدد n من العمليات، بفرض أن العملية الواحدة تستغرق زمناً قدره 11−10 ثانية. الأزمان التي هي أكبر من 10100 سنة أشير إليها بنجمة.

The Computer Time Used by Algorithms.

Problem Size	*Bit Operations Used*					
n	$\log n$	n	$n \log n$	n^2	2^n	$n!$
10	3×10^{-11} s	10^{-10} s	3×10^{-10} s	10^{-9} s	10^{-8} s	3×10^{-7} s
10^2	7×10^{-11} s	10^{-9} s	7×10^{-9} s	10^{-7} s	4×10^{11} yr	*
10^3	1.0×10^{-10} s	10^{-8} s	1×10^{-7} s	10^{-5} s	*	*
10^4	1.3×10^{-10} s	10^{-7} s	1×10^{-6} s	10^{-3} s	*	*
10^5	1.7×10^{-10} s	10^{-6} s	2×10^{-5} s	0.1 s	*	*
10^6	2×10^{-10} s	10^{-5} s	2×10^{-4} s	0.17 min	*	*

ISSN: 2617-989X

تمارين

1. وصّف خوارزمية دخلها سلسلة من الأعداد الصحيحة عددها n وخرجها موضع آخر عدد زوجي في السلسلة أو تُرجع العدد 0 إذا كانت السلسلة لا تحوي أي عدد زوجي.

2. وصّف خوارزمية تقوم بتبديل قيم العنصرين x و y باستخدام عمليات الالحاق assignment فقط. ما هو عدد عمليات الالحاق اللازمة؟

3. اسرد كل الخطوات المستخدمة للبحث عن العنصر 9 في السلسلة 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9 ,11 وذلك باستخدام:

a) خوارزمية البحث التسلسلي

b) خوارزمية البحث الثنائي

4. وصّف خوارزمية تحدد موضع أول حدوث لأكبر عنصر من سلسلة عدد عناصرها منتهي، حيث عناصر السلسلة أعداد صحيحة ليس بالضرورة أن تكون متباينة.

5. وصّف خوارزمية تعد عدد الواحدات في سلسلة بيتات (أصفر وواحدات) عن طريق فحص كل بت من بتات السلسلة فيما إذا كان واحد أو صفر.

6. ما هو عدد المقارنات اللازمة لخوارزمية الفرز بالإقحام لفرز السلسلة $1, 2, \ldots, n$؟

7. أوجد أصغر عدد صحيح n بحيث $f(x) = O(x^n)$ من أجل كل من التوابع التالية:

a) $f(x) = 2x^2 + x^3 \log x$

b) $f(x) = (x^4 + x^2 + 1)/(x^3 + 1)$

c) $f(x) = 3x^5 + (\log x)^4$

d) $f(x) = 2x^3 + x^2 \log x$

8. ليكن k عدد صحيح موجب. بين أن $1^k + 2^k + \ldots + n^k = O(n^{k+1})$.

9. رتب التوابع التالية $\sqrt{n},\ 1000 \log n,\ n \log n,\ 2n!,\ 2n,\ 3n,\ n^2/1000000$ بحيث كل تابع هو $big\ O$ للتابع الذي يليه.

10. أعط تقدير ل O الكبيرة من أجل التوابع التالية:

a) $(n^2 + 8)(n + 1)$

b) $(n! + 2^n)(n^3 + \log(n^2+1))$

c) $(n \log n + n^2)(n^3 + 2)$

d) $(2^n + n^2)(n^3 + 3^n)$

11. بين أن $3x^2 + x + 1 = \Theta(3x^2)$ بإيجاد كل من k و C_1 و C_2.

12. أعط تقديراً ل O الكبيرة لعدد العمليات (ضرب أو جمع) المستخدمة في هذا الجزء من الخوارزمية:

$t = 0$

for $i = 1$ to 3

for $j = 1$ to 4

$t = t + ij$

13. أعط تقديراً ل O الكبيرة لعدد العمليات (جمع) المستخدمة في هذا الجزء من الخوارزمية:

$t = 0$

for $i = 1$ to n

for $j = 1$ to n

$t = t + i + j$

14. ما هي أكبر قيمة ل n التي من أجلها يتم الحل في زمن قدره دقيقة واحدة باستخدام خوارزمية تتطلب $f(n)$ عملية وحيث يتم تنفيذ العملية بزمن قدره 10^{-12} ثانية، في الحالات التالية:

a) $f(n) = \log n$

b) $f(n) = n^2$

c) $f(n) = 2^n$

15. كم من الوقت تأخذ خوارزمية لحل مسألة حجمها n إذا كانت الخوارزمية تأخذ $2n^2 + 2^n$ عملية وحيث يتم تنفيذ العملية بزمن قدره 10^{-9} ثانية، من أجل قيم n:

a) 10

b) 20

c) 50

d) 100

العلامة العظمى: 100 **علامة النجاح: 50** **المدة: ساعة واحدة**

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة **(40) درجة**

.1 أيا من العبارات التالية غير صحيحة:

a) إذا كانت $f(x) = \Omega(g(x))$ بالتالي $g(x) = \Omega(f(x))$

b) إذا كانت $f(x) = \Theta(g(x))$ بالتالي $g(x) = O(f(x))$

c) إذا كانت $f(x) = \Omega(g(x))$ بالتالي $g(x) = O(f(x))$

d) إذا كانت $f(x) = \Theta(g(x))$ بالتالي $g(x) = \Theta(f(x))$

.2 بما أن $3n^2+8n = O(n^2)$، بالتالي يوجد C و k بحيث $3n^2+8n \le Cn^2$ من أجل أي عدد موجب $n > k$. بفرض أن $C = 6$ ما هو أصغر عدد موجب k يحقق ذلك:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

.3 أي زوج من التوابع التالية له الخاصة $f(x) = O(g(x))$ و $g(x) = O(f(x))$:

a) $(x^3+3)^2$ و x^5

b) x^2+logx و $(x+log\ x)^2$

c) 2^x و x^2

d) x^2 و $log\ x$

.4 أي من التوابع التالية هو O(n log n)

a) $log\ n^n$

b) $n^2\ log\ n$

c) 2^n

d) n^2

.5 إذا كان $f(n)=O(2^n)$ و $g(n)=O(n^2)$. أي من العبارات التالية صحيحة؟

a) $f(n)g(n)=O(4^n)$

b) $f(n)+g(n)=O(2n^2)$

c) $f(n)+g(n)=O(n^4)$

d) $f(n)g(n)=O(n^4)$

ISSN: 2617-989X

السؤال الثاني: أجب بصح أو خطأ (مع التعليل) **(40) درجة**

.1 $3x+7=O(x)$

a) صح

b) خطأ

.2 $5log\ x=O(x)$

a) صح

b) خطأ

.3 $x\ log\ x=O(x^2)$

a) صح

b) خطأ

.4 $3^n=O(2^n)$

a) صح

b) خطأ

.5 $2^x=O(3^x)$

a) صح

b) خطأ

.6 $f(x)=O(g(x))$ بالتالي $f(x)=O(g(x)/2)$

a) صح

b) خطأ

.7 $2^x=\Omega(3^x)$

a) صح

b) خطأ

.8 $(x^4+x^2+1)/(x^2+1)=\Theta(x^2)$

a) صح

b) خطأ

ISSN: 2617-989X

السؤال الثالث: **10 درجات**

1. أسرد كل الخطوات المستخدمة في خوارزمية البحث عن أكبر عدد صحيح ضمن السلسلة:

1, 8, 12, 9, 11, 2, 14, 5, 10, 4

الحل:

$max = 1,\ i = 2,\ max = 8,\ i = 3,\ max = 12,\ i = 4,$

$i = 5,\ i = 6,\ i = 7,\ max = 14,\ i = 8,\ i = 9,\ i = 10,\ i = 11$

توجيه في حال الخطأ: الفقرة 1

السؤال الرابع: **10 درجات**

1. أسرد كل الخطوات المستخدمة في خوارزمية البحث عن العنصر 9 ضمن السلسلة 11, 9 ,8 ,6 ,5 ,4 ,3 باستخدام: أولاً البحث التسلسلي، ثانياً البحث الثنائي

الحل:

$Linear\ search: i = 1,\ i = 2,\ i = 3,\ i = 4,\ i = 5,\ i = 6,\ i = 7,\ location = 7;$

$Binary\ search: i = 1, j = 8,\ m = 4,\ i = 5,\ m = 6,\ i = 7,\ m = 7, j = 7,\ location = 7$

توجيه في حال الخطأ: الفقرة 1.3

السؤال الأول	الإجابة الصحيحة	توجيه في حال الخطأ
1	a	الفقرة 2
2	c	الفقرة 1.2
3	b	الفقرة 1.2
4	a	الفقرة 1.2
5	a	الفقرة 1.2

السؤال الثاني	الإجابة الصحيحة	توجيه في حال الخطأ
1	a	الفقرة 1.2
2	a	الفقرة 1.2
3	a	الفقرة 1.2
4	b	الفقرة 1.2
5	a	الفقرة 1.2
6	a	الفقرة 1.2
7	b	الفقرة 2.2
8	a	الفقرة 3.2

الفصل السادس:البيانات

ISSN: 2617-989X

ISSN: 2617-989X

الكلمات المفتاحية:

بيان موجه، بيان غير موجه، عقدة، سهم، حلقة، درجة عقدة، الدرجة الواردة، الدرجة الصادرة، بيان تام، بيان دائري، بيان دولابي، بيان تكعيبي، بيان ذات جزئين، بيان بسيط، بيان جزئي، مصفوفة الجوار، مصفوفة الورود، الترابطية، مترابط بقوة، مترابط بضعف، مسار، دارة، مسار أولر، دارة أولر، مسار هاملتون، دارة هاملتون، أقصر مسار، المسافر الجوال.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على مفهوم البيان وخواصه وتعاريف أساسية متعلقة فيه وأنواعه وكيفية تمثيله وتطبيقاته في الحياة العملية كإيجاد أقصر مسار بين مدينتين على سبيل المثال واستخدامه أيضاً في حل مسألة المسافر المتجول.

أهداف تعليمية:

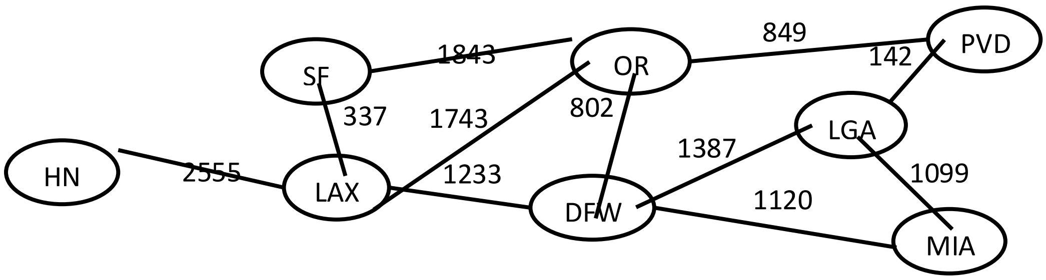
يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- البيانات تعريفها خواصها وأنواعها
- تمثيل البيانات باستخدام مصفوفة الجوار
- الترابطية في البيانات
- مسارات أولر ومسارات هاملتون
- مسائل أقصر مسار

1. تعاريف وخواص أساسية definitions and basic properties

1.1. تعريف البيانات graphs definition

ليكن لدينا مجموعة المطارات في دولة ما، بعض تلك المطارات يرتبط برحلات مباشرة مع مطارات أخرى من نفس البلد أو من بلدان أخرى والبعض الآخر يرتبط بقلة مع باقي المطارات. من المفيد أحياناً إيجاد بنية لربط تلك المطارات مع بعضها البعض لتبيان الرحلات المباشرة بينها (ومن الممكن أيضاً إضافة معلومات إضافية كالتكلفة أو المسافة أو الزمن اللازم لكل رحلة مباشرة). يمكننا تمثيل ذلك برسم خارطة نعبر عن كل مطار بنقطة وإذا كان مطاران مرتبطان برحلة مباشرة نمثلها بخط بينهما وعلى هذا الخط يمكن أن نضع التكلفة أو المسافة أو الزمن، نسمي هذا التمثيل بالبيان.

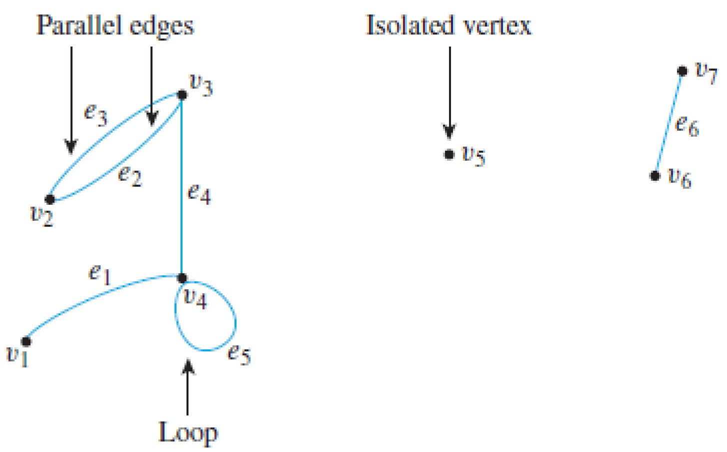


تعريف 1: البيان G عبارة عن ثنائية مرتبة (V, E)، حيث V هي مجموعة غير خالية منتهية من العقد Vertices (في مثالنا العقد عبارة عن المطارات) و E هي مجموعة الأسهم (الأضلاع) Edges. كل سهم له عقدة واحدة أو عقدتين مرتبطتين به، ندعوها طرفي السهم endpoints.

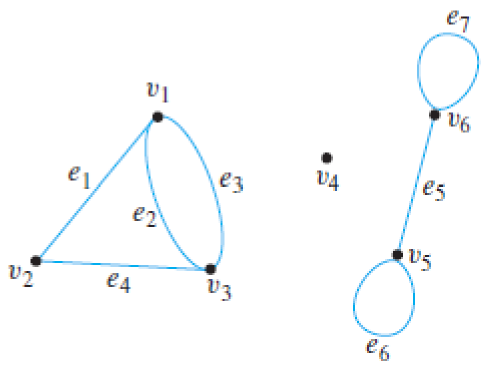
نسمي كل سهم له عقدة واحدة مرتبطة به، حلقة loop. مثال على ذلك السهم e_5. ونسمي الأسهم التي تتشارك بنفس النهايات أسهماً متوازية parallel. مثال على ذلك السهمين e_2 و e_3.

نسمي العقدتين المرتبطتين بالسهم على أنهما متجاورتين adjacent مثال على ذلك العقدتين v_6 و v_7، بينما نسمي عقدة الحلقة على أنها مجاورة لنفسها مثال على ذلك العقدة v_4.

نسمي العقدة التي ليس لها أسهم واردة بالمعزولة isolated مثال على ذلك العقدة v_5.



مثال 1: ليكن لدينا البيان التالي:



1. اكتب مجموعة العقد ومجموعة الأسهم وكذلك طرفي الأسهم.
2. أوجد كل الأسهم الواردة إلى v_1، كل العقد المجاورة ل v_1، كل الأسهم المجاورة ل e_1، الحلقات، الأسهم المتوازية، العقد المجاورة لنفسها، العقد المعزولة.

الحل:

1. مجموعة العقد = $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

مجموعة الأسهم = $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

Edge	Endpoints
e_1	$\{v_1, v_2\}$
e_2	$\{v_1, v_3\}$
e_3	$\{v_1, v_3\}$
e_4	$\{v_2, v_3\}$
e_5	$\{v_5, v_6\}$
e_6	$\{v_5\}$
e_7	$\{v_6\}$

2. الأسهم الواردة إلى v_1: e_1 و e_2 و e_3.

العقد المجاورة ل v_1: v_2 و v_3.

الأسهم المجاورة ل e_1: e_2 و e_3 و e_4.

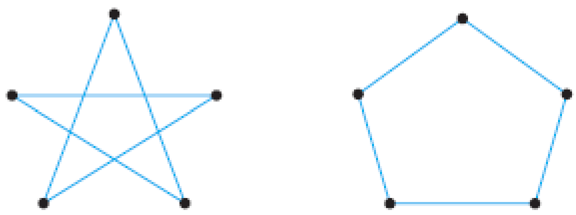
الحلقات: e_6 و e_7

الأسهم المتوازية: e_2 و e_3.

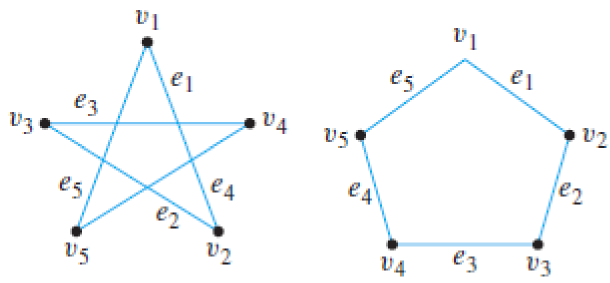
العقد المجاورة لنفسها: v_5 و v_6.

العقد المعزولة: v_4.

مثال 2: ليكن لدينا البيانين التاليين سمّ العقد والأسهم لكل منهما بحيث يمثلان نفس البيان



الحل:



ملاحظة 1: يُمكن لمجموعة العقد V للبيان G أن تكون غير منتهية. نسمي البيان الذي له عدد غير منته من العقد أو عدد غير منته من الأسهم بالبيان غير المنتهي infinite.

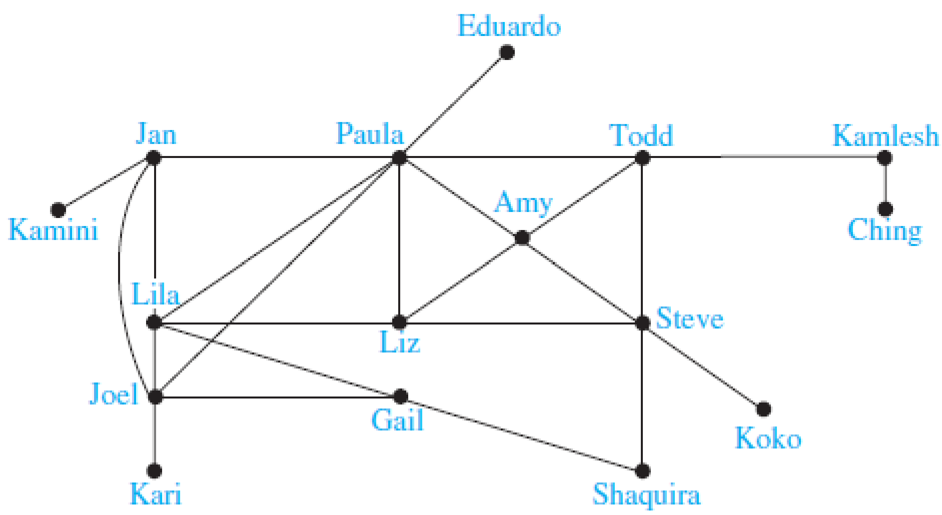
2.1. أمثلة عن البيانات graph examples

يتم استخدام البيانات في نمذجة العديد من المسائل المعقدة بهدف حلها.

الشبكات الاجتماعية social networks

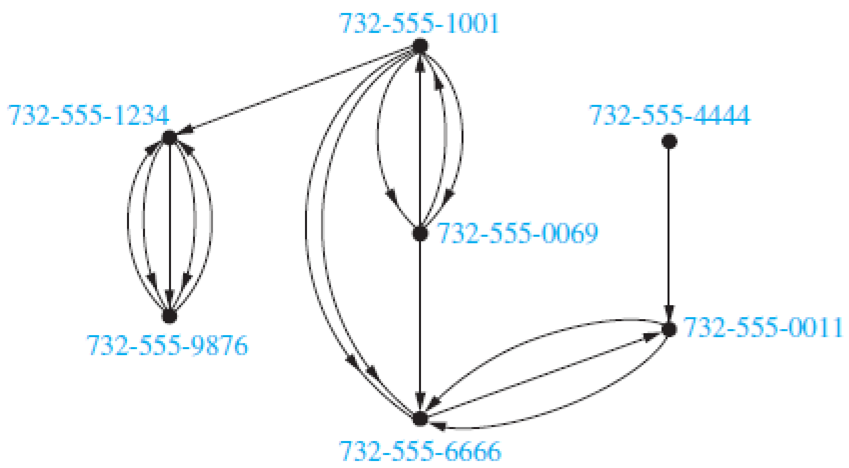
تُستخدم البيانات لنمذجة البنى الاجتماعية المبنية على الأنواع المختلفة من العلاقات بين الناس أو مجموعات من الناس. في هذه البيانات يتم تمثيل الأفراد أو المنظمات بعقد، والعلاقات بين الأفراد أو المنظمات يتم تمثيلها بالأسهم.

مثال 3: بيانات التعارف والصداقة acquaintanceship and friendship Graphs. نستخدم بيان بسيط لتمثيل فيما إذا كان شخصان يعرفان بعض أو أنهما أصدقاء، نربط الشخصان بسهم غير موجه عندما يعرفان بعضهما البعض.



شبكات الاتصالات communication networks

مثال 4: بيانات الاتصالات call graphs. نستخدم بيان موجه لتمثيل المكالمات حيث يتم تمثيل كل رقم هاتفي بعقدة وكل اتصال هاتفي بسهم موجه.



شبكات المعلومات information networks

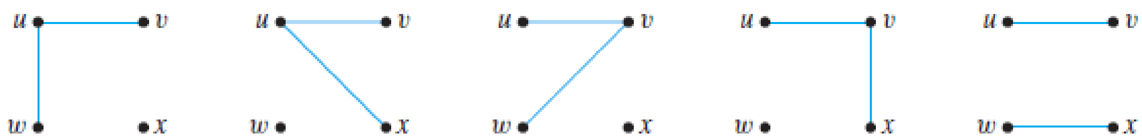
مثال 5: بيانات الويب Web graphs. يتم نمذجة الويب ببيان موجه، حيث يتم تمثيل كل صفحة ويب بعقدة وحيث يبدأ السهم من صفحة الويب a وتنتهي في صفحة الويب b إذا وجد رابط على a يُشير إلى b.

3.1. خواص البيانات graph properties

تعريف 2: نسمي بيان بسيط simple graph البيان الذي لا يحوي أية حلقات أو أسهماً متوازية. في البيان البسيط نرمز للسهم المحدد بالطرفين v و w ب $\{v, w\}$

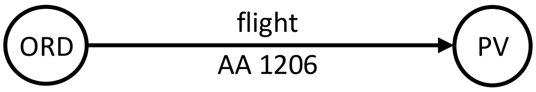
مثال 6: ارسم كل البيانات البسيطة الممكنة والمؤلفة من أربع عقد $\{u, v, w, x\}$ وسهمين أحدهما $\{u, v\}$

الحل: إن عدد الأسهم الممكنة من أربع عقد هي ستة أسهم التالية: $\{u, v\}, \{u, w\}, \{u, x\}, \{v, w\}, \{v, x\}, \{w, x\}$. واحد من هذه الأسهم هو $\{u, v\}$ بالتالي السهم الثاني يمكن أن يكون واحد من الأسهم الخمسة المتبقية.

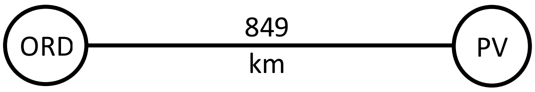


تعريف 3: نسمي بيان موجه directed graph، البيان $G = (V, E)$، حيث V مجموعة غير خالية من العقد و E هي مجموعة الأسهم الموجهة، حيث كل سهم يرتبط بزوج مرتب من العقد ندعوها طرفي السهم endpoints.

ملاحظة 2: في البيان الموجه إذا وجد سهم من v إلى w فليس من الضروري أن يوجد سهم من w إلى v. أي لدينا زوج مرتب (v, w)، بمعنى $\{v, w\} \neq \{w, v\}$. نسمي العقدة v الذيل tail ونسمي العقدة w الرأس head.



ملاحظة 3: في البيان غير الموجه تكون الثنائيات (v, w) غير مرتبة أي أنه إذا كانت v في جوار w فإن w هي في جوار v أيضاً (السهم في الاتجاهين)، أي أن $\{w, v\} = \{v, w\}$.

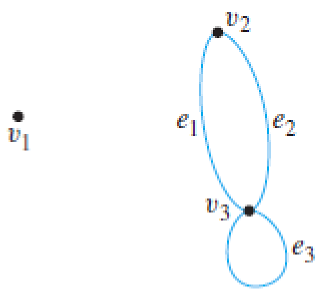


تعريف 4: نعرف درجة degree عقدة v في بيان غير موجه، ونرمز لها بـ $deg(v)$، على أنه عدد الأسهم التي تصل إلى العقدة، وإذا كان السهم حلقة نعدّه مرتين. في المثال السابق، بيان مجموعة المطارات، لدينا على سبيل المثال:

$$deg(LAX) = 4,\ deg(PVD) = 2,\ deg(HNL) = 1$$

تعريف 5: نعرف الدرجة الكلية لبيان على أنه مجموع درجات العدد التي يتألف منها $deg(G) = \sum_{v \in V} deg(v)$.

مثال 7: أوجد درجة كل عقدة من عقد البيان G التالي ومن ثم أوجد الدرجة الكلية له:



الحل:

$$deg(v_1) = 0 \qquad deg(v_2) = 2, \qquad deg(v_3) = 4$$

$$deg(G) = deg(v_1) + deg(v_2) + deg(v_3) = 0 + 2 + 4 = 6$$

مبرهنة 1: ليكن في البيان $G = (V, E)$ غير الموجه e سهم. يكون لدينا: $2e = \sum_{v \in V} deg(v)$.

نتيجة 1: الدرجة الكلية لبيان هي عدد زوجي.

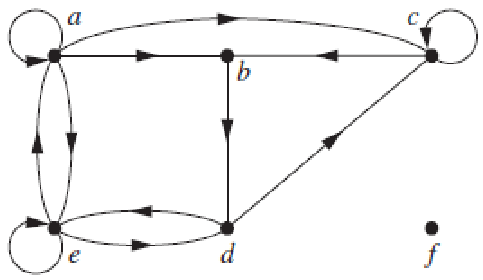
مثال 8: ما هو عدد الأسهم في بيان له 10 عقد درجة كل منها 6؟

الحل: بما أن الدرجة الكلية للبيان هي $60 = 6.10$، بالتالي $2e = 60$. إذن عدد الأسهم هو $e = 30$.

مبرهنة 2: في البيان $G = (V, E)$ غير الموجه يوجد عدد زوجي من العقد التي درجتها عدد فردي.

تعريف 6: نعرف الدرجة الواردة in–degree لعقدة v في بيان موجه على أنه عدد الأسهم التي تصل إلى هذه العقدة، ونرمز لها بـ $deg^-(v)$. ونعرف الدرجة الصادرة out–degree لعقدة v على أنه عدد الأسهم التي تخرج من هذه العقدة، ونرمز لها بـ $deg^+(v)$

مثال 9: أوجد الدرجة الواردة والدرجة الصادرة لكل عقدة من عقد البيان التالي:



الحل:

الدرجات الواردة لعقد البيان هي:

$$deg^-(a) = 2, \rightarrow deg^-(b) = 2, \rightarrow deg^-(c) = 3, deg^-(d) = 2, \rightarrow deg^-(e) = 3, \rightarrow deg^-(f) = 0$$

والدرجات الصادرة لعقد البيان هي:

$$deg^+(a) = 4, \rightarrow deg^+(b) = 1, \rightarrow deg^+(c) = 2, \rightarrow deg^+(d) = 2, deg^+(e) = 3, \rightarrow deg^+(f) = 0$$

مبرهنة 3: ليكن في البيان $G = (V, E)$ الموجه e سهم. يكون لدينا:

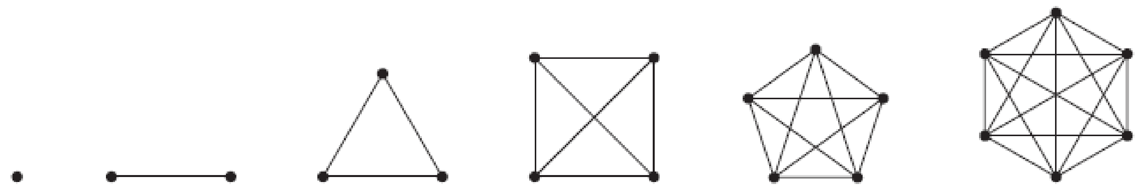
$$\sum_{v \in V} deg^-(v) = \sum_{v \in V} deg^+(v) = e$$

مثال 10: في المثال السابق نجد أن:

$$\sum_{v \in V} deg^-(v) = 2 + 2 + 3 + 2 + 3 + 0 = 12 = \sum_{v \in V} deg^+(v) = 4 + 1 + 2 + 2 + 3 + 0$$

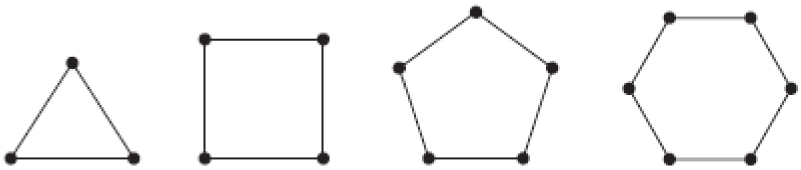
4.1. أنواع خاصة من البيانات special graphs

البيانات التامة complete graphs: هي عبارة عن بيانات بسيطة ب n عقدة بحيث أنها تحوي على سهم واحد بين كل زوج من العقد المختلفة، ونرمز لها ب K_n. يبين الشكل التالي البيانات التامة K_n من أجل $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.



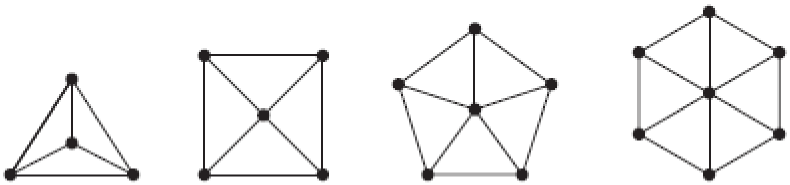
K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6

البيانات الدائرية cycles: وهي عبارة عن بيانات بسيطة ب n عقدة $(n \leq 3)$ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ و n سهم $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}$، ونرمز لها بـ C_n. يبين الشكل التالي البيانات C_n من أجل . .



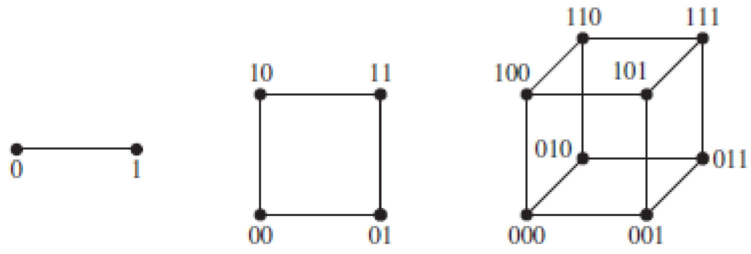
C_3 C_4 C_5 C_6

البيانات الدولابية wheels: يتم الحصول عليها بإضافة عقدة إلى البيانات الدائرية $(n \geq 3)$ وإضافة سهم من العقدة الجديدة إلى كافة العقد الأخرى، ونرمز لها بـ W_n. يبين الشكل التالي W_n من أجل $n = 3, 4, 5, 6$.



W_3 W_4 W_5 W_6

البيانات التكعيبية n−cubes: تُمثل عقدها التي عددها 2^n كافة القيم الثنائية لسلسلة طولها n بت. تكون عقدتان متجاورتان إذا وفقط إذا اختلفتا ببت واحد، ونرمز لها ب Q_n. يبين الشكل التالي البيانات Q_n من أجل $n = 1, 2, 3$.



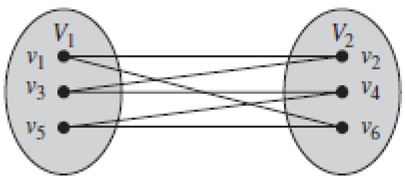
Q_1 Q_2 Q_3

يمكن الحصول على $(n+1)-cube$ Q_{n+1} من $n-cube$ Q_n وذلك بأخذ نسختين من Q_n ونُسبق أسماء labels عقد النسخة الأولى ب 0 وأسماء عقد النسخة الثانية ب 1، ومن ثم إضافة أسهم تصل العقدتين المختلفتين فقط بالبت الأول. على سبيل المثال يتم بناء Q_3 بأخذ نسختين من Q_2 واحدة تكون الوجه العلوي ل Q_3 والأخرى الوجه السفلي ل Q_3 ونضيف 0 في بداية اسم كل عقدة من عقد الوجه السفلي (11 مثلاً تصبح 011)، ونضيف 1 في بداية اسم كل عقدة من عقد الوجه العلوي (00 مثلاً تصبح 100) وأخيراً نضيف أسهم بين عقدتين يختلفان بالبت الأول.

البيانات ذات الجزئين bipartite graphs

تعريف 7: نقول عن بيان بسيط G أنه ذو جزئين إذا تمكنا من تجزئة مجموعة العقد V التي يتألف منها إلى مجموعتين V_1 و V_2 بحيث أن كل سهم من أسهم البيان يربط عقدة في V_1 بعقدة في V_2، أي لا يوجد أي سهم من G يربط عقدتين في V_1 أو في V_2.

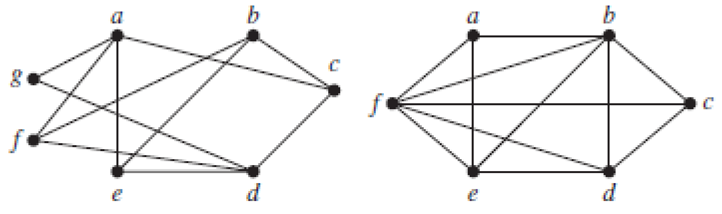
مثال 11: البيان البسيط C_6 هو بيان ذو جزئين لأنه يمكن تجزئة مجموعة عقده إلى مجموعتين $V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$ و $V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$، وكل سهل في C_6 يربط عقدة في V_1 مع عقدة في V_2، كما يبينه الشكل التالي:



مثال 12: البيان K_3 ليس بيان ذو جزئين لأنه إذا جزئنا مجموعة العقد التي يتألف منها K_3 إلى مجموعتين منفصلتين فإن واحدة من المجموعتين ستكون مكونة من عقدتين. فإذا كان البيان ذو جزئين فإن هاتين العقدتين لا يمكن أن ترتبطا مع بعض بسهم، لكن في K_3 كل عقدة ترتبط إلى كل عقدة من العقدتين الأخريين بسهم.

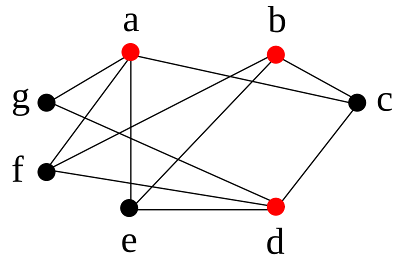
مبرهنة 4: يكون البيان البسيط G ذو جزئين إذا وفقط إذا كان من الممكن تلوين عقد البيان بلونين مختلفين بحيث أنه لا يوجد عقدتين متجاورتين لهما نفس اللون.

مثال 13: هل البيانين G و H التاليين ذو جزئين؟

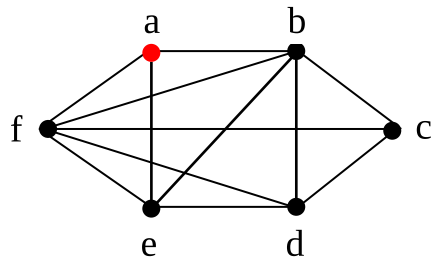


G H

الحل: البيان G يمكن تلوينه كما يلي بحيث لا يوجد عقدتين متجاورتين لهما نفس اللون، بالتالي البيان G ذو جزئين.



أما بالنسبة للبيان H نبدأ بتلوين العقدة a بالأحمر على سبيل المثال، بالتالي علينا تلوين العقد b و e و f بالأسود لأن كل منها مجاور ل a، ولكن هذا غير ممكن لأن كل من e و f متجاوران أيضاً. بالتالي البيان H ليس ذو جزئين.



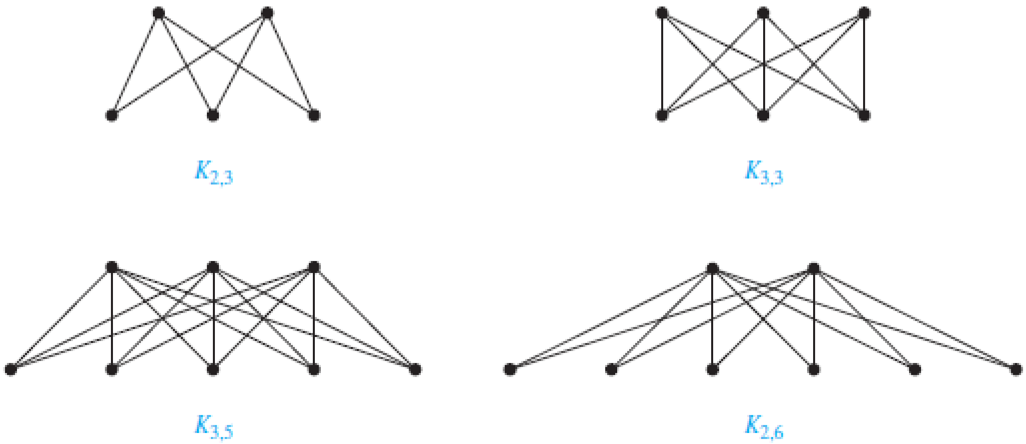
البيانات الكاملة ذات الجزئين $K_{m,n}$ Complete bipartite graphs

تعريف 8: ليكن العدادان الموجبان m و n. نقول عن بيان أنه بيان كامل ذو جزئين على العقد (m, n)، والذي نرمز له بالرمز $K_{m,n}$، البيان البسيط المؤلف من العقد المختلفة $v_1, v_2, \ldots, v_m$ و $w_1, w_2, \ldots, w_n$ والذي يحقق الخواص التالية وذلك من أجل كل $i, k = 1, 2, \ldots, m$ ومن أجل كل $j, l = 1, 2, \ldots, n$:

1. يوجد سهم من كل عقدة v_i إلى كل عقدة w_j
2. لا يوجد أي سهم من أي عقدة v_i إلى أي عقدة v_k
3. لا يوجد أي سهم من أي عقدة w_j إلى أي عقدة w_l

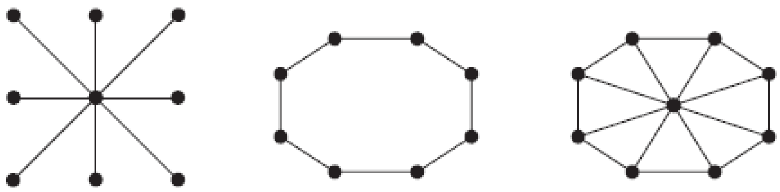
ISSN: 2617-989X

مثال 14: يبين الشكل التالي البيانات الكاملة ذات الجزئين $K_{2,3}$ و $K_{3,3}$ و $K_{3,5}$ و $K_{2,6}$:



5.1. بعض تطبيقات الأنواع الخاصة من البيانات some applications of special types of graphs

- الشبكات المحلية Local Area Network (LAN): يُمكن وصل الحواسب مع بعضها البعض، وكذلك أيضاً الأجهزة الطرفية كالطابعات على سبيل المثال، يُمكن وصلها باستخدام شبكة محلية LAN. بعض هذه الشبكات يستخدم البنية النجمية star topology، حيث كافة العقد تكون مربوطة بعقدة مركزية. تتم المخاطبة بين جهاز وآخر عن طريق جهاز العقدة المركزية كما هو مبين في الشكل (a) والبعض الآخر يستخدم البنية الحلقية ring topology (البيانات الدائرية C_n)، كما هو مبين في الشكل (b)، حيث يتم إرسال الرسائل بين جهاز وآخر عبر الحلقة حتى تصل الرسالة إلى الجهاز المعني. وأخيراً يُمكن استخدام البنيتين السابقتين مع بعضهما البعض، بنية هجينة، (البيانات الدولابية W_n)، كما هو مبين في الشكل (c)، حيث يتم إرسال الرسائل بين جهاز وآخر عبر الحلقة أو عبر العقدة المركزية والسبب في استخدام هذه البنية الهجينة هو من أجل زيادة الوثوقية.

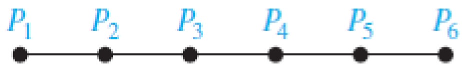


(a) (b) (c)

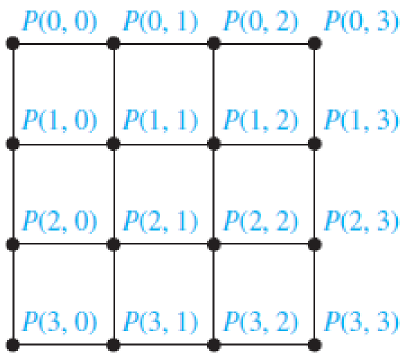
الوصلات الشبكية للمعالجة المتوازية Interconnecting Networks for parallel Computation: المعالجة المتوازية تستخدم حواسب مكونة من العديد من المعالجات. ويمكن للمعالج الواحد أن يحتاج إلى معطيات خرج من معالج آخر، بالتالي من الضروري وصل تلك المعالجات مع بعضها البعض. إن أسهل الطرق المستخدمة في الوصلات الشبكية للمعالجة المتوازية، ولكنها الأغلى، تتضمن الوصلة الثنائية بين كل زوج من المعالجات والتي يُمكن تمثيلها بالبيان التام K_n، حيث n هو عدد المعالجات المستخدمة. تكمن المشكلة هنا في عدد الوصلات الكبير اللازم لربط المعالجات كلها مع بعضها البعض لا سيما إذا كان عدد المعالجات كبير نسبياً. على سبيل المثال ليكن لدينا 64

ISSN: 2617-989X

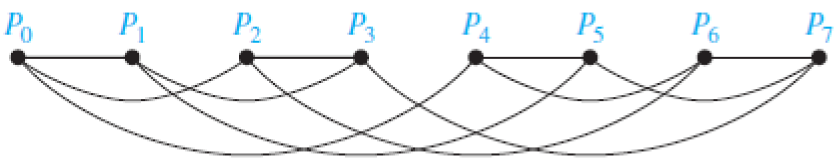
معالج، فإن عدد الوصلات اللازم هو $2016 = C(64, 2)$. في الجهة المقابلة أسهل طريقة وأرخصها هي ترتيب الـ n معالج بشكل خطي linear array. في هذه الحالة يرتبط كل معالج P_i (فيما عدا P_1 و P_n) مع جيرانه P_{i+1} و P_{i-1} عن طريق وصلة ثنائية الاتجاه. بينما يرتبط المعالج P_1 مع P_2 فقط و المعالج P_n مع P_{n-1} فقط، كما هو مبين في الشكل التالي:



باستخدام البنية الشبكية (نسق ثنائي البعد)، حيث عدد المعالجات هو مربع عدد ما $n = m^2$. نرمز للمعالجات بـ $P(i, j),\ 0 \le i \le m-1,\ 0 \le j \le m-1$. يرتبط كل معالج بجيرانه الأربعة $P(i \pm 1, j)$ و $P(i, j \pm 1)$، ما عدا المعالجات التي تقع على الزوايا حيث يرتبط كل منها بوصلة ثنائية الاتجاه مع معالجين آخرين، والمعالجات الاخرى التي هي على الأطراف يرتبط كل منها بوصلة ثنائية الاتجاه معم ثلاث معالجات، كما هو مبين في الشكل التالي:



بنية أخرى أكثر استخداماً هي البنية التكعيبية hypercube، حيث عدد المعالجات هو $n = 2^m$. نرمز للمعالجات بـ $P_0, P_1, \ldots, P_n$. يرتبط كل معالج عن طريق وصلة ثنائية إلى m معالج آخر، أي أننا نستخدم البيانات من النوع التكعيبي Qn (n–cubes). يُمثل الشكل التالي بنية تكعيبية مؤلفة من 8 معالجات (طريقة أخرى لرسم Q_3).

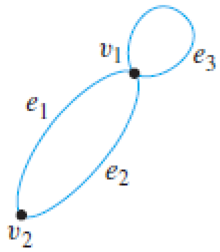


ISSN: 2617-989X

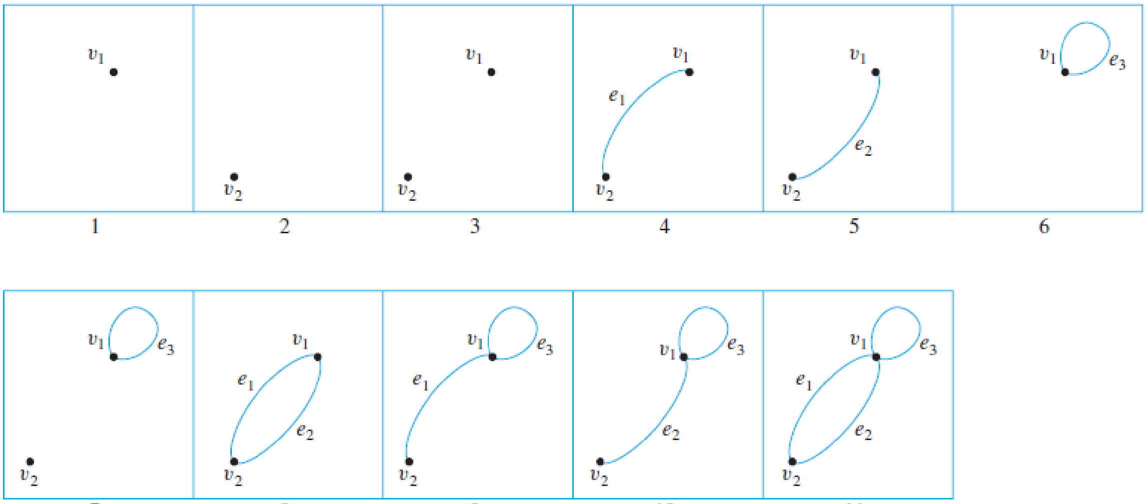
6.1. البيانات الجزئية subgraphs

تعريف 9: نعرف البيان الجزئي من البيان $G = (V, E)$ على أنه البيان $H = (W, F)$، بحيث أن $W \subseteq V$ و $F \subseteq E$.

مثال 15: أوجد كافة البيانات الجزئية من البيان التالي:



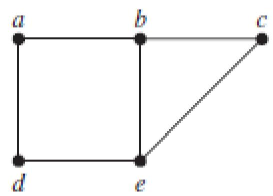
الحل:



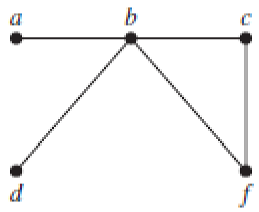
7.1. اجتماع البيانات graph unions

تعريف 10: نعرف اجتماع بيانين بسيطين $G_1 = (V_1, E_1)$ و $G_2 = (V_2, E_2)$ على أنه البيان البسيط المؤلف من مجموعة العقد $V_1 \cup V_2$ ومجموعة الأسهم $E_1 \cup E_2$. ونرمز لاجتماع G_1 و G_2 ب $G_1 \cup G_2$.

مثال 16: أوجد اجتماع G_1 و G_2 المعرفان بالشكل التالي:

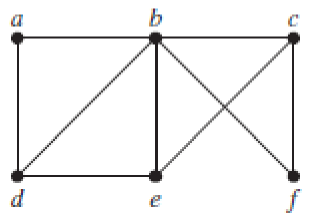


G_1



G_2

الحل: يبين الشكل التالي اجتماع البيانين G_1 و G_2.



$G_1 \cup G_2$

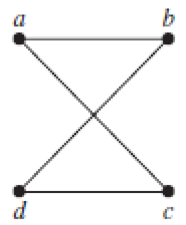
2. تمثيل البيانات representing graphs

1.2. مصفوفة الجوار adjacency matrix

تعريف 11: ليكن لدينا البيان غير الموجه $G = (V, E)$ المكون من مجموعة العقد $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ نعرف مصفوفة الجوار للبيان G على أنها المصفوفة المربعة $A = (a_{ij})$ ذات البعد $n \times n$ المعرفة على النحو التالي (a_{ij} يساوي عدد الأسهم التي تربط العقدة v_i بالعقدة v_j):

a_{ij} = the number of edges connecting vi and vj $\qquad i, j = 1, 2, \ldots, n$

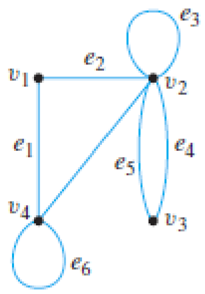
مثال 17: أوجد مصفوفة الجوار للبيان التالي:



الحل:

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

مثال 18: أوجد مصفوفة الجوار للبيان التالي:



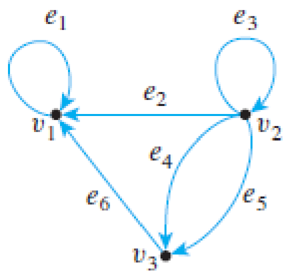
الحل:

$$\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ v_3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ v_4 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

تعريف 12: ليكن لدينا البيان الموجه $G = (V, E)$ المكون من مجموعة العقد $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ نعرف مصفوفة الجوار للبيان G على أنها المصفوفة المربعة $A = (a_{ij})$ ذات البعد $n \times n$ المعرفة على النحو التالي (a_{ij} يساوي عدد الأسهم من العقدة v_i إلى العقدة v_j):

a_{ij} = the number of edges from v_i to v_j , i, j = 1, 2, …, n

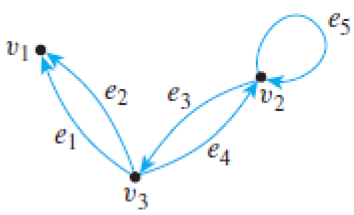
مثال 19: أوجد مصفوفة الجوار للبيان الموجه التالي:



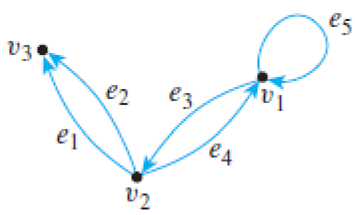
الحل:

$$\begin{array}{c|ccc} & v_1 & v_2 & v_3 \\ \hline v_1 & 1 & 0 & 0 \\ v_2 & 1 & 1 & 2 \\ v_3 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

مثال 20: أوجد مصفوفة الجوار للبيانين الموجهين التاليين الذين يختلفان فقط بترتيب العقد:



(a)



(b)

الحل:

$$\begin{array}{c|ccc} & v_1 & v_2 & v_3 \\ \hline v_1 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & 1 \\ v_3 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

(a)

$$\begin{array}{c|ccc} & v_1 & v_2 & v_3 \\ \hline v_1 & 1 & 1 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 2 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

(b)

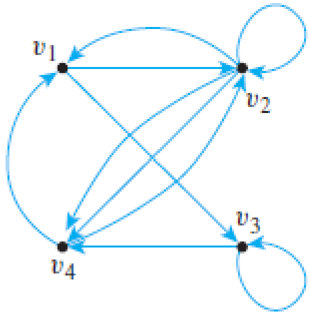
مثال 21: أوجد البيان الموجه الذي مصفوفة جواره هي التالية:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل: ليكن G البيان الموافق لمصفوفة الجوار أعلاه، وليكن v_1, v_2, v_3, v_4 مجموعة عقد البيان G:

$$\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ v_4 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

بالتالي يكون البيان الموجه الموافق للمصفوفة هو التالي:

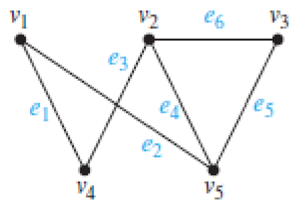


2.2. مصفوفة الورود incidence matrix

تعريف 13: ليكن لدينا البيان غير الموجه $G = (V, E)$ المكون من مجموعة العقد $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$، ومجموعة الأسهم $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. نعرف مصفوفة الورود للبيان G على أنها المصفوفة $M = (m_{ij})$ ذات البعد $n \times m$ المعرفة على النحو التالي:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{when edge } e_j \text{ is incident with } v_i, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

مثال 22: أوجد مصفوفة الورود للبيان التالي:



الحل:

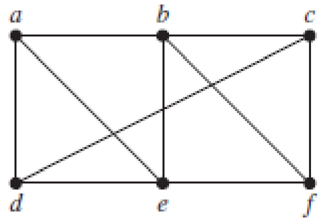
$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

3. الترابطية connectivity

1.3. الترابطية في البيانات غير الموجهة connectedness in undirected graphs

تعريف 14: نعرف المسار path بطول $n \geq 0$ من العقدة u إلى العقدة v ضمن بيان غير موجه G على أنه سلسلة من n سهم $e_1, e_2, \ldots, e_n$ من البيان G، وحيث أن: $e_1 = \{x_0 = u, x_1\}, e_2 = \{x_1, x_2\}, \ldots,$ $en = \{x_{n-1}, x_n = v\}$. عندما يكون المسار بسيط نرمز للمسار بسلسلة العقد $x_0, x_1, \ldots, x_n$. ونسمي مساراً على أنه دارة circuit إذا كان يبدأ وينتهي بنفس العقدة، أي $v = u$. كما ندعو مساراً بسيطاً إذا كان لا يحوي على نفس السهم أكثر من مرة واحدة.

مثال 23: ليكن البيان البسيط التالي



a, d, c, f, e عبارة عن مسار بسيط طوله 4.

d, e, c, a ليس مسار.

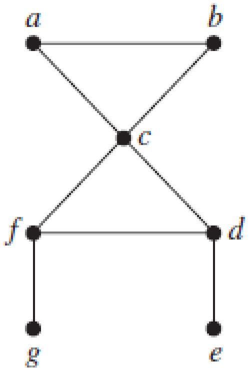
b, c, f, e, b عبارة عن دارة طولها 4.

a, b, e, d, a, b عبارة عن مسار طوله 4 ولكنه غير بسيط لأنه يحوي السهم $\{a, b\}$ مرتين.

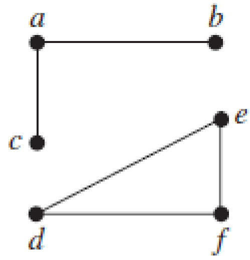
ISSN: 2617-989X

تعريف 15: نقول عن بيان غير موجه على أنه مترابط connected إذا وجد مسار بين كل زوج من عقد البيان المختلفة.

مثال 24: ليكن البيانين التاليين



G_1



G_2

من الواضح أن البيان G_1 مترابط لأنه يوجد بين أي زوج من العقد المختلفة مسار. بينما البيان G_2 غير مترابط لأنه لا يوجد مسار بين العقدتين a و d.

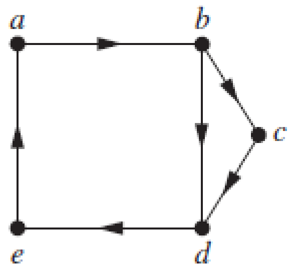
مبرهنة 5: يوجد مسار بسيط بين أي عقدتين مختلفتين في بيان مترابط غير موجه.

2.3. الترابطية في البيانات الموجهة connectedness in directed graphs

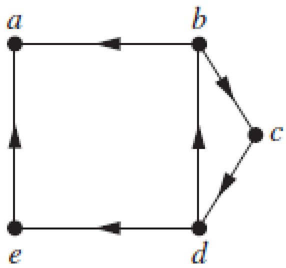
تعريف 16: نقول عن بيان موجه على أنه مترابط بقوة strongly connected إذا وجد مسار من a إلى b وكذلك من b إلى a حيث a, b عقدتين من البيان.

تعريف 17: نقول عن بيان موجه على أنه مترابط بضعف weakly connected إذا وجد مسار بين أي عقدتين مختلفتين من البيان غير الموجه الموافق له.

مثال 25: ليكن البيانين التاليين



G



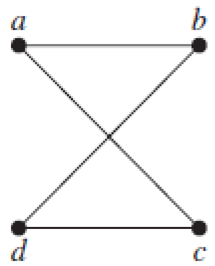
H

إن البيان G هو مترابط بقوة لأنه يوجد مسار بين أي عقدتين من البيان الموجه، وبالتالي فهو مترابط بضعف، أما البيان H فليس مترابط بقوة لأنه لا يوجد مسار من a إلى b ولكنه مترابط بضعف.

3.3. عدد المسارات بين العقد counting paths between vertices

مبرهنة 6: ليكن G بيان مصفوف جواره A بالنسبة لمجموعة العقد $v_1, v_2, \ldots, v_n$ التي يتكون منها. إن عدد المسارات المختلفة بطول $r > 0$ من العقدة v_i إلى العقدة v_j، يساوي العنصر (i, j) من المصفوفة A^r.

مثال 26: ما هو عدد المسارات بطول 4 من العقدة a إلى العقدة d في البيان البسيط التالي



الحل: إن مصفوفة الجوار للبيان بالنسبة للعقد a, b, c, d هي:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

بالتالي فإن عدد المسارات بطول 4 من العقدة a إلى العقدة d هو العنصر $(1, 4) = 8$ من المصفوفة A^4.

$$\mathbf{A}^4 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

المسارات الثمانية هي التالية:

$a, b, a, b, d \;\rightarrow\; a, b, a, c, d \;\rightarrow\; a, b, d, b, d \;\rightarrow\; a, b, d, c, d$

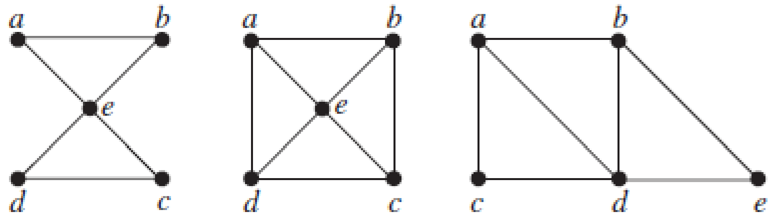
$a, c, a, b, d \;\rightarrow\; a, c, a, c, d \rightarrow\; a, c, d, b, d \;\rightarrow\; a, c, d, c, d$

4. مسارات أولر ومسارات هاملتون Euler and Hamilton paths

1.4. مسارات ودارات أولر Euler paths and circuits

تعريف 18: نسمي دارة أولر Euler circuit في بيان G دارة بسيطة تحوي كافة أسهم البيان، كما نسمي مسار أولر Euler path في بيان G أي مسار بسيط يحوي كافة أسهم البيان.

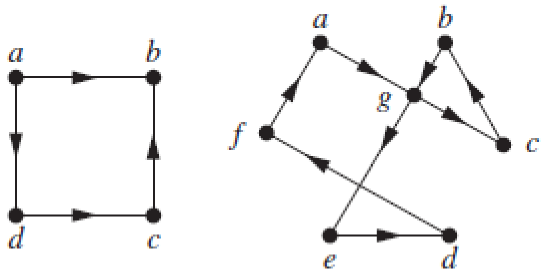
مثال 27: أياً من البيانات غير موجهة التالية لها دارة أولر؟ وأياً من البيانات التي ليس لديها دارة أولر لها مسار أولر؟



G_1 G_2 G_3

الحل: يحوي G_1 على دارة أولر، على سبيل المثال: a, e, c, d, e, b, a. بينما لا يحوي كل من G_2 و G_3 على أية دارة أولر. يحوي G_3 على مسار أولر: a, c, d, e, b, d, a, b. بينما لا يحوي البيان G_2 على أي مسار أولر.

مثال 28: أياً من البيانات الموجهة التالية لديها دارة أولر؟ وأياً من البيانات التي ليس لديها دارة أولر لديها مسار أولر؟



H_1 H_2 H_3

الحل: يحوي البيان H_2 على دارة أولر، على سبيل المثال الدارة: $a, g, c, b, g, e, d, f, a$، بينما لا يحوي كل من H_1 و H_3 على أية دارة أولر. يحوي البيان H_3 على مسار أولر: c, a, b, c, d, b. بينما لا يحوي البيان من H_1 على أي مسار أولر.

مبرهنة 7: الشرط اللازم والكافي لوجود دارة أولر في بيان مترابط مكون من عقدتين على الأقل هو أن تكون درجة كل عقدة من عقده عدد زوجي.

ISSN: 2617-989X

خوارزمية بناء دارات أولر constructing Euler circuits

procedure Euler(G : connected multigraph with all vertices of even degree)

circuit $:= a$ circuit in G beginning at an arbitrarily chosen vertex with edges successively added to form a path that returns to this vertex

$H := G$ with the edges of this circuit removed

while H has edges

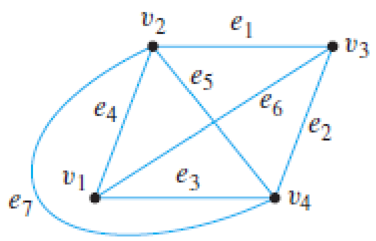
subcircuit $:= a$ circuit in H beginning at a vertex in H that also is an endpoint of an edge of circuit

$H := H$ with edges of subcircuit and all isolated vertices removed

circuit = circuit with subcircuit inserted at the appropriate vertex

return circuit {circuit is an Euler circuit}

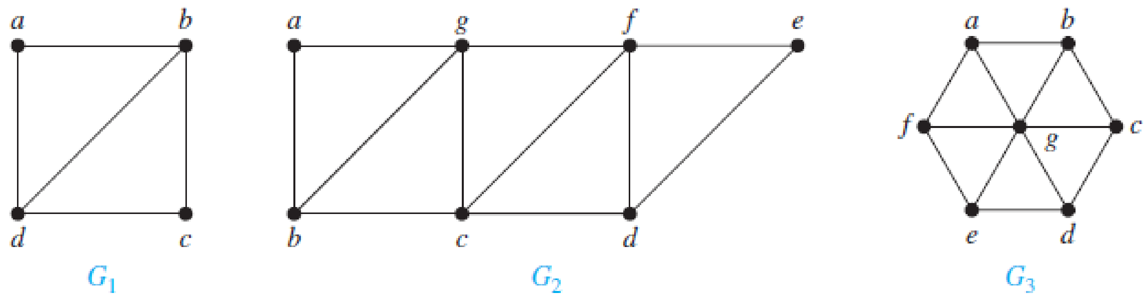
مثال 29: بين أن البيان التالي لا يحوي على دارة أولر



الحل: إن درجة كل من العقدتين v_1 و v_3 هي 3 (عدد فردي). بالتالي حسب النظرية السابقة ليس للبيان المذكور دارة أولر.

مبرهنة 8: الشرط اللازم والكافي لوجود مسار أولر، ولكن من دون أن تكون دارة أولر، في بيان مترابط هو أن يوجد عقدتين تماماً درجة كل منها عدد فردي.

مثال 30: أياً من البيانات التالية يحوي على مسار أولر؟

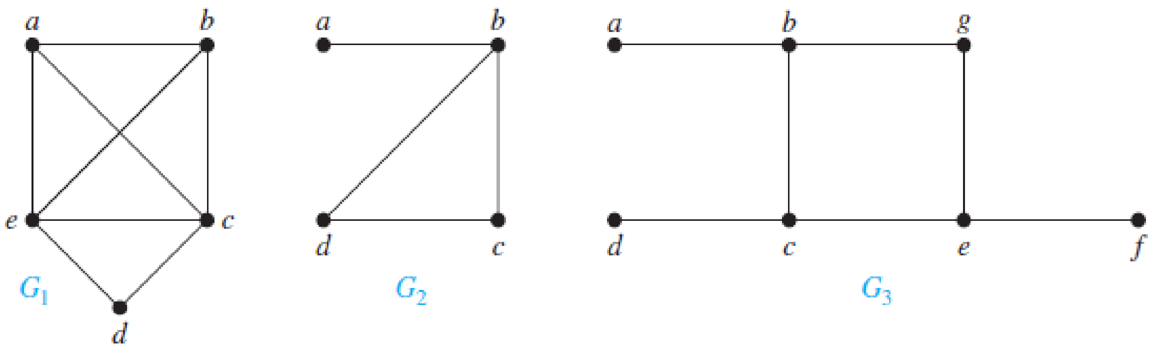


الحل: يحوي البيان G_1 على عقدتين تماماً درجة كل منها فردي (3): b و d، وبالتالي فهو يحوي على مسار أولر وهو d, a, b, c, d, b. كذلك الأمر بالنسبة للبيان G_2 فهو يحوي على عقدتين تماماً درجة كل منها فردي (3): d و b، وبالتالي فهو يحوي على مسار أولر وهو $b, a, g, f, e, d, c, g, b, c, f, d$. بينما البيان G_3 يحوي على 6 عقد درجة كل منها فردي وبالتالي فهو لا يحوي على مسار أولر.

2.4. مسارات ودارات هاملتون Hamilton paths and circuits

تعريف 19: نسمي المسار البسيط $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ ضمن البيان $G = (V, E)$ على أنه مسار هاملتون Hamilton path إذا كان $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ و $x_i \neq x_j$ من أجل $0 \leq i < j \leq n$ (مسار بسيط يمر عبر كل عقدة من عقد البيان ومرة واحدة فقط). نسمي أيضاً $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_0$ $(n > 1)$, على أنه دارة هاملتون في البيان $G = (V, E)$ إذا كان $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ يمثل مسار هاملتون، بمعنى آخر دارة هاملتون هي دارة بسيطة تحوي كافة عقد البيان.

مثال 31: أياً من البيانات التالية لديها دارة هاملتون؟ وأياً من البيانات التي ليس لديها دارة هاملتون لديها مسار هاملتون؟



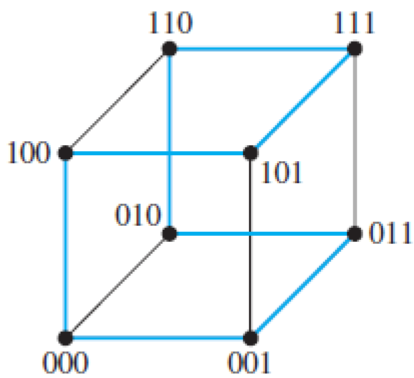
الحل: يحوي البيان G_1 على دارة هاملتون: a, b, c, d, e, a. بينما لا يحوي كل من G_2 و G_3 على أية دارة هاملتون. ويحوي البيان G_2 على مسار هاملتون: a, b, c, d. بينما لا يحوي البيان G_3 على أي مسار هاملتون.

مثال 32: البيانات التامة K_n من أجل $n \geq 3$ تحوي على دارة هاملتون.

مبرهنة 9: الشرط الكافي لوجود دارة هاملتون في بيان بسيط $G = (V, E)$ يحوي n عقدة $n \geq 3$ هو إذا كان درجة كل عقدة من عقده هي على الاقل $n/2$.

مبرهنة 10: الشرط الكافي لوجود دارة هاملتون في بيان بسيط $G = (V, E)$ يحوي n عقدة $n \geq 3$ هو إذا كان $deg(u) + deg(v) \geq n$ من أجل أي زوج من العقد u و v غير المتجاورة.

مثال 33: دارة هاملتون للبيان التكعيبي Q_3



ISSN: 2617-989X

5. مسائل أقصر مسار shortest path problems

يوجد العديد من المسائل التي يُمكن نمذجتها باستخدام البيانات الموزونة من بينها، كما ذكرنا في بداية الفصل، نظام المطارات. المسألة هنا تكمن في إيجاد أقصر طريق بين مدينتين (عقدتين) إذا اعتبرنا أن تابع الوزن هو المسافة (المسافة أو المسار يُعرف على أنه مجموع الأوزان للأسهم التي يتألف منها هذا المسار).

1.5. خوارزمية أقصر مسار a shortest-path algorithm

بدأ البحث في مثل هذه الخوارزميات منذ عام 1950 وبالرغم من بساطة المسألة إلا أن البحث في هذا الموضوع مازال مستمراً حتى الآن. يوجد العديد من الخوارزميات التي تجد أقصر مسار بين عقدتين ضمن بيان موزون، من بين تلك الخوارزميات وأشهرها خوارزمية Dijkstra والتي زمن تعقيدها $O(n^2)$، حيث n يمثل عدد العقد ضمن البيان. يبين الجدول التالي التحسينات التي أجريت على خوارزمية Dijkstra وحتى الآن (n عدد العقد، m عدد الأسهم):

Algorithm	Complexity
Dijkstra (1959)	$O(n^2)$
Williams (1964)	$O(m.log_2 n)$
Johnson (1977)	$O(m.log_d n),\ d = max(2,\ m/n)$
Boas (1977)	$O(c + m.log_2 c.log_2 log_2 c)$
Johnson (1982)	$O(m.log_2 log_2 c)$
Fredman & Tarjan (1984)	$O(m + n.log_2 n)$
Gabow (1985)	$O(m.log_d c),\ d = max(2,\ m/n)$
Tarjan (1989)	$O(m + n.\sqrt{log_2 c})$

تعتمد خوارزمية Dijkstra لإيجاد أقصر مسار بين العقدتين a و z ضمن بيان مترابط موزون على إيجاد أقصر طريق بين العقدة a إلى أول عقدة بعدها، ومن ثم إيجاد أقصر طريق بين العقدة a وثاني عقدة، وهكذا حتى نصل إلى أقصر طريق بين العقدة a والعقدة z. إذن تقوم الخوارزمية المذكورة بسلسلة من التكرارات iterations، وفي كل تكرار نضيف عقدة إلى مجموعة العقد التي حصلنا عليها في التكرارات السابقة.

نقوم في البداية بإعطاء العقدة a القيمة صفر (أقصر طريق بين عقدة ونفسها يساوي إلى الصفر)، كما نعطي بقية العقد القيمة ∞ (أو عدد كبير جداً). وتصبح الخوارزمية على النحو التالي:

procedure Dijkstra(G : weighted connected simple graph, with all weights positive)

{G has vertices $a = v0, v1, \ldots, vn = z$ and lengths $w(vi, vj)$

where $w(vi, vj) = \infty if$ $\{vi, vj\}$ is not an edge in G}

for $i = 1$ to n

.. $L(vi) = \infty$

$L(a) := 0$

$S := \varnothing$

{the labels are now initialized so that the label of a is 0 and all other labels are ∞,

and S is the empty set}

while $z \in S$

.. $u := a$ vertex not in S with $L(u)$ minimal

... $S := S \cup \{u\}$

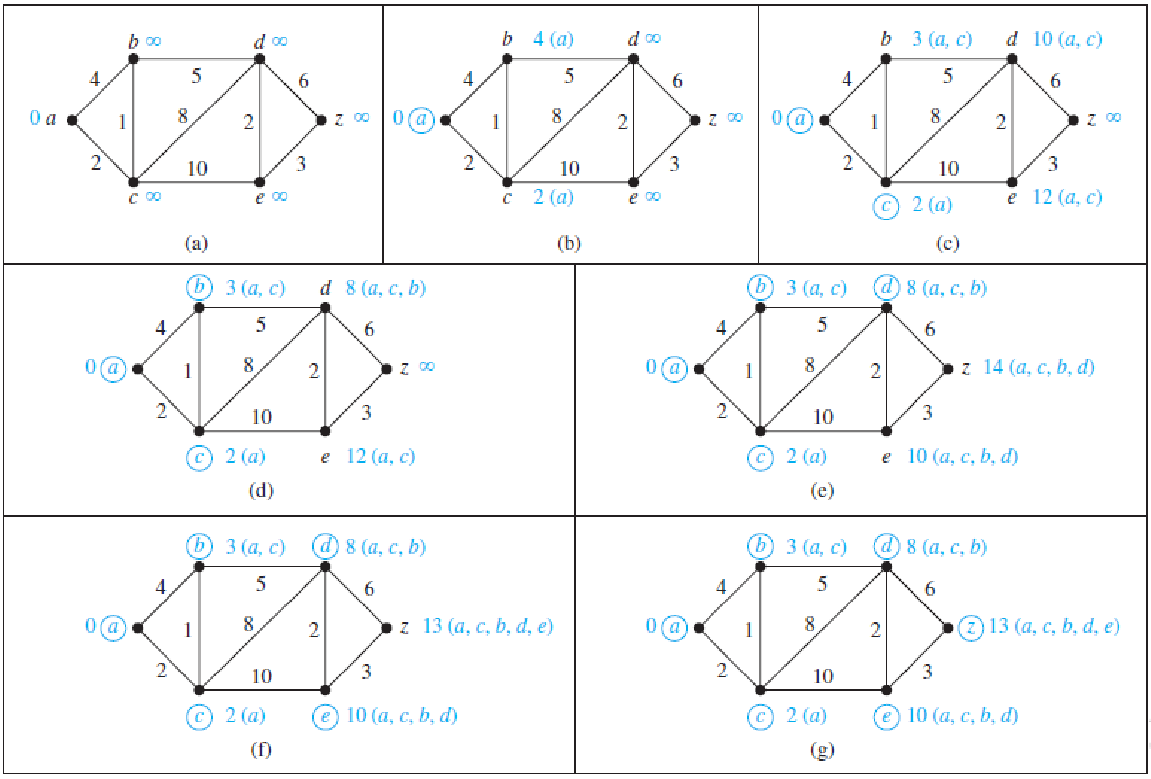
for all vertices v not in S

if $L(u) + w(u, v) < L(v)$ then $L(v) := L(u) + w(u, v)$

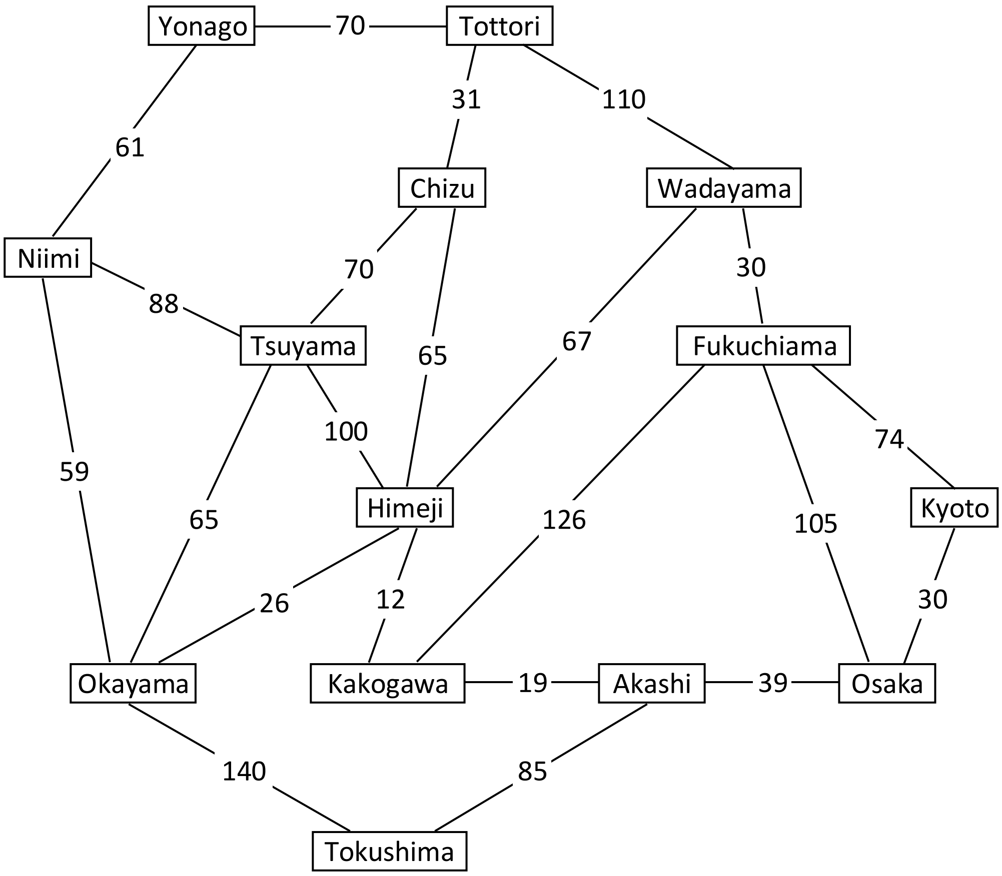
{this adds a vertex to S with minimal label and updates the labels of vertices not in S}

return $L(z)$ {$L(z)$ = length of a shortest path from a to z}

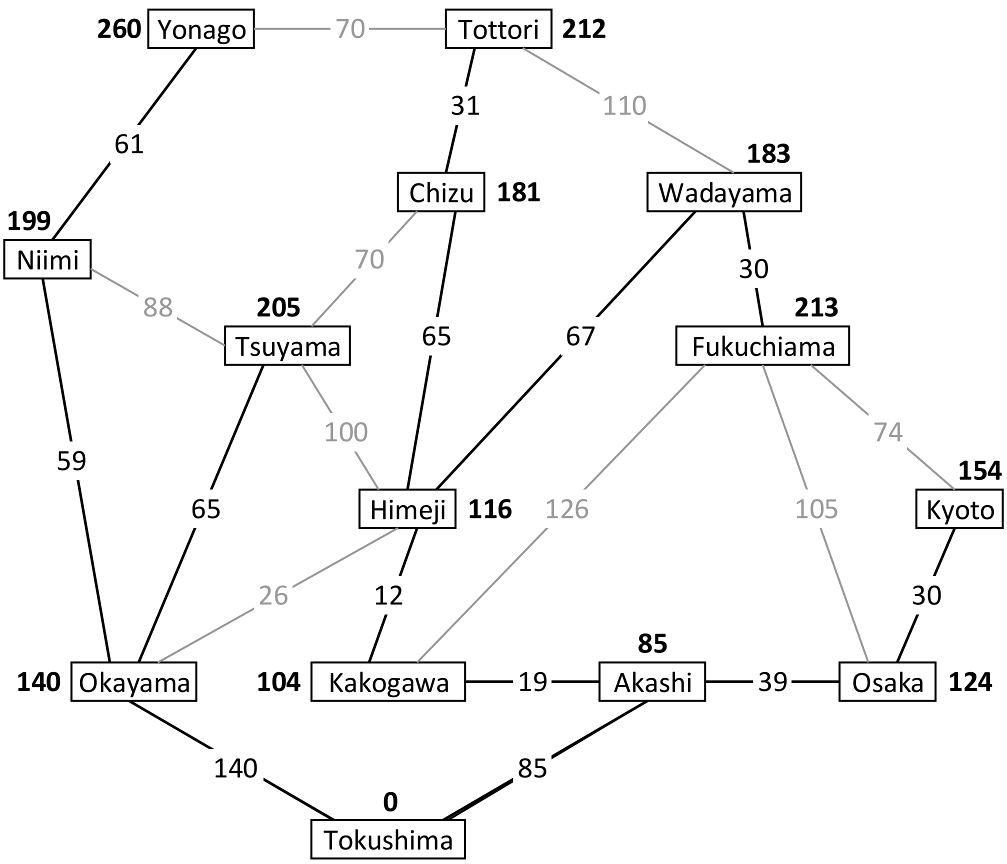
مثال 34: استخدم خوارزمية Dijkstra لإيجاد طول أقصر مسار بين العقدتين a و z في البيان الموزون الموجود في الشكل التالي (a).



مثال 35: يبين المثال التالي بياناً موزوناً عقده تمثل المدن اليابانية وتابع الوزن يمثل المسافة بين كل مدينة عن الأخرى.

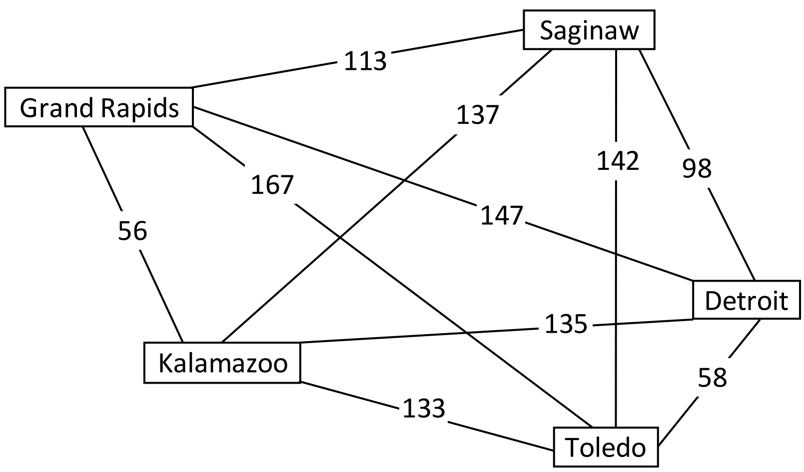


بتطبيق خوارزمية Dijkstra على البيان المذكور لإيجاد أقصر مسار بين مدينة Tokushima وكل مدينة من المدن الأخرى نحصل على الشكل التالي:



2.5. مسألة المسافر الجوال traveling salesman

لدينا مسافر جوال يريد زيارة n مدينة مرة واحدة ومن ثم يعود إلى نقطة البداية. على سبيل المثال يريد المسافر زيارة الخمس مدن التالية: Detroit, Toledo, Saginaw, Grand Rapids and Kalamazoo كما هو مبين في الشكل التالي:



السؤال المطروح ما هو ترتيب المدن التي يزورها المسافر الجوال بحيث تكون المسافة المقطوعة أصغر ما يُمكن؟ لحل هذه المسألة نفترض أنه يبدأ من مدينة Detroit، نختبر كافة الطرق الممكنة لزيارة المدن الأربعة الأخرى وأخيراً العودة إلى Detroit. يوجد 24 طريقة ممكنة ولكن عندما نزور المدن في الاتجاه المعاكس فإننا نقطع نفس المسافة، أي أنه يوجد 12 طريقة مختلفة لإيجاد أقصر طريق ممكن (458 miles)، كما هو مبين في الجدول التالي:

Route	Total Distance (miles)
Detroit–Toledo–Grand Rapids–Saginaw–Kalamazoo–Detroit	610
Detroit–Toledo–Grand Rapids–Kalamazoo–Saginaw–Detroit	516
Detroit–Toledo–Kalamazoo–Saginaw–Grand Rapids–Detroit	588
Detroit–Toledo–Kalamazoo–Grand Rapids–Saginaw–Detroit	458
Detroit–Toledo–Saginaw–Kalamazoo–Grand Rapids–Detroit	540
Detroit–Toledo–Saginaw–Grand Rapids–Kalamazoo–Detroit	504
Detroit–Saginaw–Toledo–Grand Rapids–Kalamazoo–Detroit	598
Detroit–Saginaw–Toledo–Kalamazoo–Grand Rapids–Detroit	576
Detroit–Saginaw–Kalamazoo–Toledo–Grand Rapids–Detroit	682
Detroit–Saginaw–Grand Rapids–Toledo–Kalamazoo–Detroit	646
Detroit–Grand Rapids–Saginaw–Toledo–Kalamazoo–Detroit	670
Detroit–Grand Rapids–Toledo–Saginaw–Kalamazoo–Detroit	728

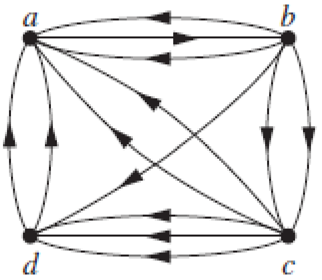
من الواضح أن المسارات الـ 12 المختلفة هي عبارة عن مسارات هاملتون. إذن ضمن بيان مؤلف من n عقدة نبحث عن كافة مسارات هاملتون ومن ثم نختار المسار الذي يحقق أقصر طريق ممكن. عندما نبدأ من عقدة معينة فإنه لدينا $(n-1)!$ مسار هاملتون مختلف وبما أن التكلفة هي نفسها إذا مررنا على العقد في الإتجاه المعاكس وجب علينا اختبار $(n-1)!/2$ مسار مختلف لإيجاد الحل (أقصر طريق).

إن تعقيد مسألة المسافر الجوال هي أسية ولا يُمكن حلها من أجل الأعداد الكبيرة لـ n. على سبيل المثال من أجل $n = 25$ يكون عدد مسارات هاملتون المختلفة هو $24!/2 \approx 3.1x10^{23}$، بفرض أن اختبار كل مسار يحتاج إلى $1\,ns$ فإن الزمن اللازم لحل المسألة هو بحدود 10 مليون سنة.

وبما أن مسألة المسافر الجوال مطلوبة فإننا سنعتمد لحلها إلى استخدام خوارزميات تقريبية approximation algorithm. تلك الخوارزميات لا تُعطي الحل الدقيق ولكنها تُعطي حلاً قريباً منه، بمعنى أنها تجد مسار هاملتون وزنه W' بحيث $W \le W' \le cW$ (Wطول المسار الحقيقي الدقيق و c عبارة عن ثابت). عملياً تم تطوير خوارزميات تقريبية لحل المسألة المذكورة والتي تستطيع التعامل مع $n \approx 1000$ وإيجاد حلاً في بضع دقائق ولا يختلف عن الحل الحقيقي أكثر من 2%.

تمارين

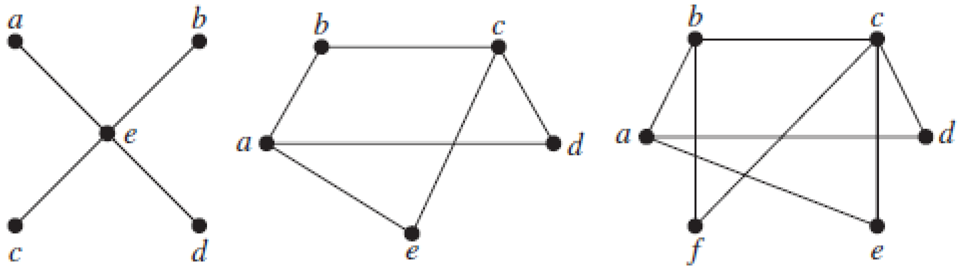
1. ليكن لدينا البيان التالي



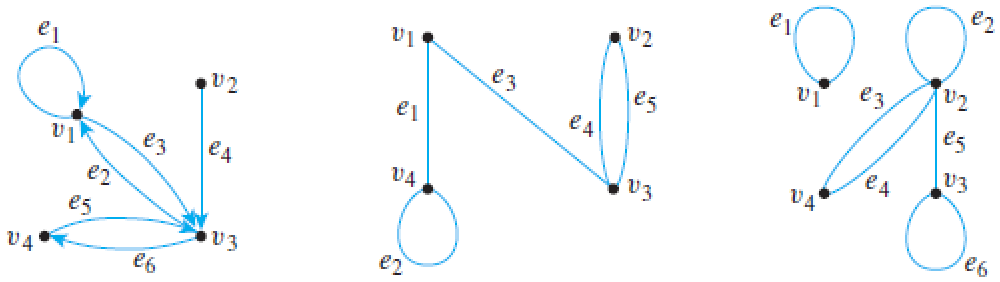
أوجد ما يلي: عدد العقد، عدد الأسهم، الدرجة الواردة والدرجة الصادرة لكل عقدة. أوجد مجموع الدرجات الواردة للعقد، مجموع الدرجات الصادرة للعقد. قارن كل مجموع منهما مع عدد الأسهم؟ ما ذا تستنتج.

2. ارسم البيانات التالية: $K_7,\ K_{1,8},\ C_7,\ W_7,\ Q_4$.

3. بين فيما إذا كانت البيانات التالية ذات جزئين



4. أوجد مصفوفة الجوار للبيانات التالية



5. أوجد البيانات الموجهة التي مصفوفة جوارها التالية

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

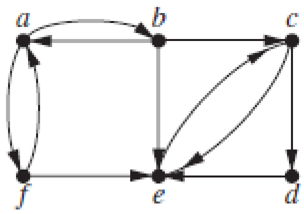
6. أوجد البيان الذي مصفوفة جواره التالية

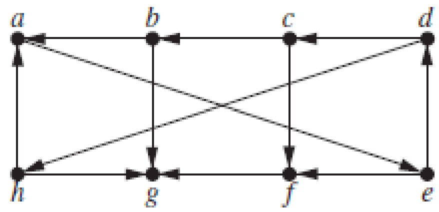
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

هل هو ذات جزئين؟

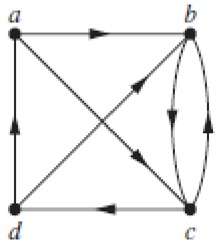
7. أوجد مصفوفة الجوار ومصفوفة الورود للبيانات التالية: $K_5,\ C_5,\ W_5$.

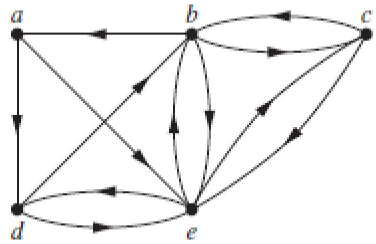
8. أي من البيانات التالية مترابط بقوة



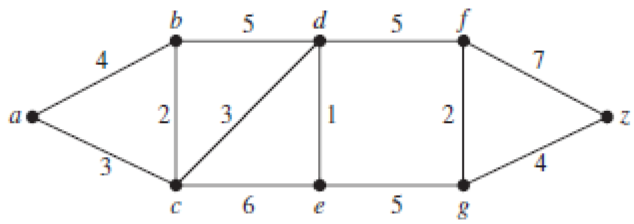


9. بين فيما إذا يوجد دارة أولر في البيانات التالية وأوجدها في حال وجودها، وفي حال عدم وجودها ابحث عن مسار أولر وأوجده في حال وجوده.





10. استخدم خوارزمية Dijkstra لإيجاد طول أقصر مسار بين العقدتين a و z في البيان التالي



ISSN: 2617-989X

العلامة العظمى: 100 **علامة النجاح: 50** **المدة: ساعة ونصف**

السؤال الأول: أملأ الفراغات المناسبة **(40) درجة**

1. نسمي بيان بسيط ....

البيان الذي لا يحوي أية حلقات أو أسهماً متوازية

2. نعرف درجة عقدة v في بيان غير موجه، على أنه ....

عدد الأسهم التي تصل إلى العقدة

3. نعرف الدرجة الكلية لبيان على أنه ....

مجموع درجات العدد التي يتألف منها

4. نعرف الدرجة الواردة لعقدة v في بيان موجه على أنه ....

عدد الأسهم التي تصل إلى هذه العقدة

5. نقول عن بيان موجه على أنه مترابط بقوة ....

إذا وجد مسار من a إلى b وكذلك من b إلى a حيث a, b عقدتين من البيان

6. نسمي دارة أولر في بيان G ....

دارة بسيطة تحوي كافة أسهم البيان

7. الشرط اللازم والكافي لوجود دارة أولر في بيان مترابط مكون من عقدتين على الأقل هو أن ....

تكون درجة كل عقدة من عقده عدد زوجي

8. الشرط اللازم والكافي لوجود مسار أولر، ولكن من دون أن تكون دارة أولر، في بيان مترابط هو أن .... يوجد

عقدتين تماماً درجة كل منها عدد فردي

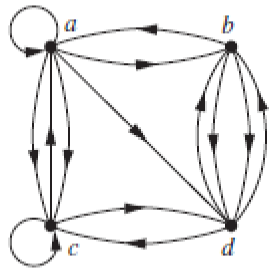
9. دارة هاملتون هي ....

دارة بسيطة تحوي كافة عقد البيان

10. تقوم خوارزمية Dijkstra على إيجاد ....

أقصر مسار بين عقدتين ضمن بيان موزون

السؤال الثاني: أوجد مصفوفة الجوار للبيان التالي **(15) درجة**



الحل:

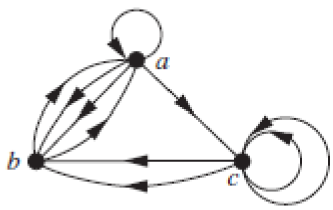
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

توجيه في حال الخطأ: الفقرة 1.2

السؤال الثالث: أوجد البيان الموجه الذي مصفوفة جواره هي التالية **(15) درجة**

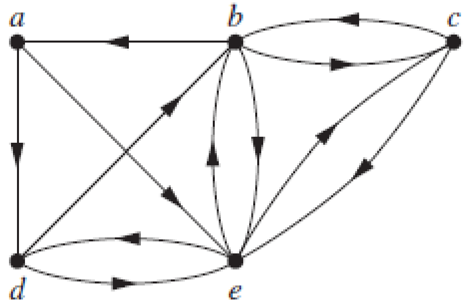
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل:



توجيه في حال الخطأ: الفقرة 1.2

السؤال الرابع: بين فيما إذا يوجد دارة أولر في البيانات التالية وأوجدها في حال وجودها، وفي حال عدم وجودها ابحث عن مسار أولر وأوجده في حال وجوده **(15) درجة**



الحل:

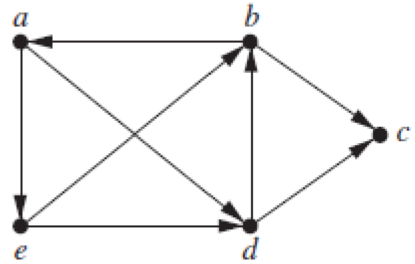
لا يوجد دارة أولر لأن درجة العقدتين a و b عدد فردي

يوجد مسار أولر لأن درجة العقدتين a و b عدد فردي ودرجة كل من c و d و e زوجي (يوجد عقدتين تماماً درجة كل منها عدد فردي) والمسار هو:

$$a,\ d,\ e,\ d,\ b,\ a,\ e,\ c,\ e,\ b,\ c,\ b,\ e$$

توجيه في حال الخطأ: الفقرة 1.4

السؤال الخامس: هل البيان التالي مترابط بقوة وإذا كان لا فهل هو مترابط بضعف **(15) درجات**



الحل:

ليس مترابط بقوة لأنه لا يوجد مسار من c إلى e، وإنما مترابط بضعف.

توجيه في حال الخطأ: الفقرة 2.3

السؤال الأول	الاجابة الصحيحة	توجيه في حال الخطأ
1	البيان الذي لا يحوي أية حلقات أو أسهماً متوازية	الفقرة 3.1
2	عدد الأسهم التي تصل إلى العقدة	الفقرة 3.1
3	مجموع درجات العدد التي يتألف منها	الفقرة 3.1
4	عدد الأسهم التي تصل إلى هذه العقدة	الفقرة 3.1
5	إذا وجد مسار من a إلى b وكذلك من b إلى a حيث a, b عقدتين من البيان	الفقرة 2.3
6	دارة بسيطة تحوي كافة أسهم البيان	الفقرة 1.4
7	تكون درجة كل عقدة من عقده عدد زوجي	الفقرة 1.4
8	يوجد عقدتين تماماً درجة كل منها عدد فردي	الفقرة 1.4
9	دارة بسيطة تحوي كافة عقد البيان	الفقرة 2.4
10	أقصر مسار بين عقدتين ضمن بيان موزون	الفقرة 1.5

الفصل السابع: الأشجار

رقم الصفحة	العنوان

الكلمات المفتاحية:

شجرة، غابة، شجرة ذات جذر ، عقدة داخلية، ورقة، مستوى، ارتفاع، ولد، شقيق، أب، خلف، سلف، شجرة ثنائية، شجرة جزئية، شجرة جزئية يسارية، شجرة جزئية يمينية، شجرة متوازنة، شجرة تامة، شجرة بحث ثنائية، شجرة قرار ، ترميز هوفمان، رمز مصدر ، التجوال، الترتيب المصدر ، الترتيب المتناظر ، الترتيب الملحق، شجرة تغطية، البحث بالعمق أولاً، البحث بالعرض أولاً، شجرة تغطية أصغرية، خوارزمية برايم، خوارزمية كروسكال.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على مفهوم الشجرة وخواصها وتعاريف أساسية متعلقة فيها وأنواعها وكيفية تمثيلها وتطبيقاتها في الحياة العملية في عمليات البحث والفرز وإيجاد التكلفة الأصغرية.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

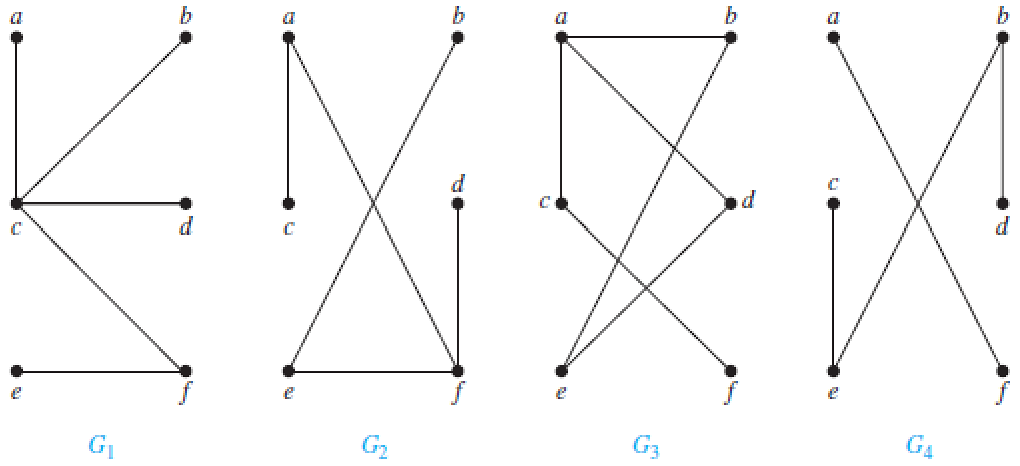
- الأشجار تعريفها خواصها وأنواعها.
- أشجار البحث الثنائية.
- أشجار القرار.
- تشفير هوفمان.
- التجوال ضمن شجرة ثنائية.
- أشجار التغطية.
- أشجار التغطية الأصغرية.

1. مقدمة إلى الأشجار introduction to trees

1.1. تعاريف definitions

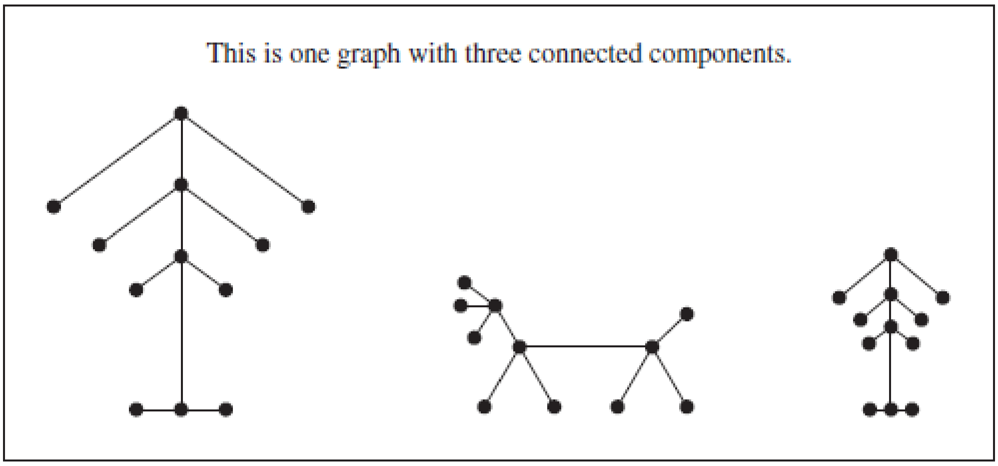
تعريف 1: نسمي شجرة بيان غير موجه مرتبط لا يحوي دارات بسيطة.

مثال 1: أياً من البيانات التالية تمثل أشجار؟



الحل: G_1 و G_2 عبارة عن شجرة لأن كل منها عبارة عن بيان مترابط بدون دارات بسيطة. G_3 ليس بشجرة لأن المسار e, d, a, d, e عبارة عن دارة بسيطة، وأخيراً G_4 ليس بشجرة لأنه بيان غير مرتبط.

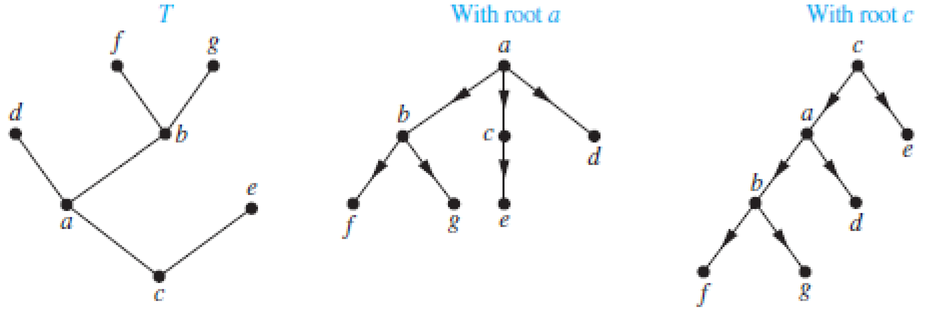
نسمي البيانات التي لا تحوي على دارات بسيطة، ولكن ليست بالضرورة مترابطة بالغابات forests ولها الخاصة بأن كل جزء منها مترابط عبارة عن شجرة. يبين المثال التالي غابة مكونة من 3 أشجار مترابطة.



مبرهنة 1: بيان غير موجه مترابط يكون شجرة إذا وفقط إذا وجد مسار واحد فقط بسيط بين أي عقدتين من عقد البيان.

تعريف 2: نسمي شجرة ذات جذر rooted tree، شجرة لها عقدة مميزة نسميها الجذر، يُمكن بواسطتها الوصول إلى مجموعة من العقد، ومن هذه العقد نستطيع الوصول إلى عقد أخرى وهكذا.

مثال 2: يبين الشكل التالي الشجرتين ذوات الجذر وذلك بتعيين العقدة a لتكون جذر (الوسط) والعقدة c لتكون جذر (اليمين)، على الترتيب، من الشجرة T (اليسار).

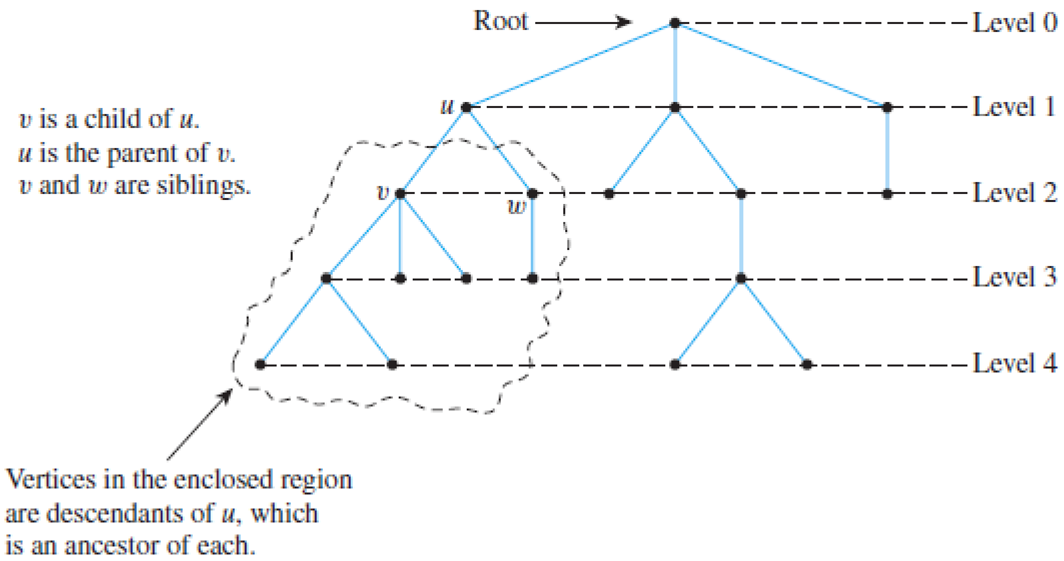


تعريف 3: لتكن T شجرة ذات جذر. إذا كان لدى الشجرة عقدة واحدة أو عقدتين نسمي كل منها عقدة نهائية terminal node (أو ورقة leaf). أما إذا كان للشجرة 3 عقد على الأقل، عندها نسمي كل عقدة منها درجتها تساوي الواحد ورقة، والعقد التي درجتها أكبر من الواحد نسميها عقد داخلية.

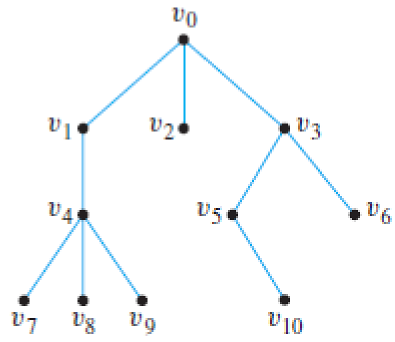
مثال 3: في الشجرة السابقة (اليمين) التي جذرها c، العقد a, b, c هي عقد داخلية بينما العقد d, e, f, g عبارة عن أوراق.

تعريف 4: لتكن T شجرة ذات جذر. نسمي مستوى level عقدة عدد الأسهم التي تصل المسار الوحيد بين تلك العقدة والجذر. كما نسمي ارتفاع height شجرة ذات جذر الارتفاع الأعظمي لعقد الشجرة.

تعريف 5: لتكن T شجرة ذات جذر. لتكن v عقدة داخلية، نسمي أولاد (أبناء) children لـ v كل العقد المجاورة لـ v والتي تقع في مستوى أكبر بواحد من مستوى v. لتكن العقدة w ابن لـ v، عندها نسمي v أب parent لـ w. نسمي العقدتان المختلفتان v و w اللذان لهما نفس الأب u بالأشقاء siblings. نسمي سلف ancestor عقدة هو أي عقدة أعلى منها مستوى، وخلف descendant عقدة هو أي عقدة أسفل منها مستوى.



مثال 4: لتكن T الشجرة ذات الجذر التالية:

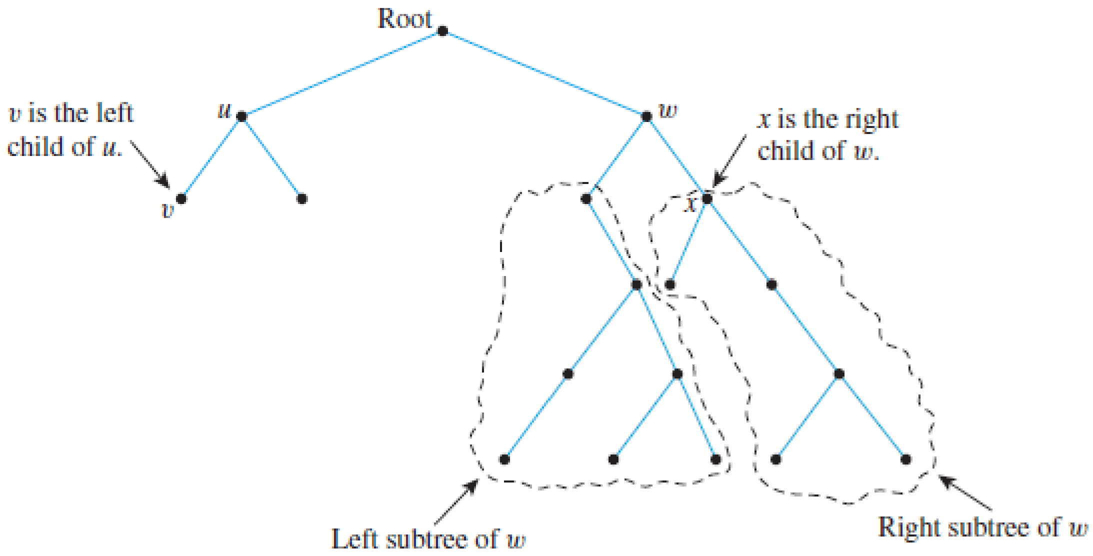


مستوى العقدة v_5 هو 2، مستوى العقدة v_0 هو 0، مستوى العقدة v_{10} هو 3. ارتفاع الشجرة هو 3، أولاد العقدة v_3 هما v_5 و v_6، أب العقدة v_2 هو v_0، أشقاء العقدة v_8 هما v_7 و v_9، وأخيراً خلف العقدة v_3 هم v_5 و v_6 و v_{10}.

تعريف 6: نسمي شجرة مرتبة ذات جذر ordered rooted tree كل شجرة ذات جذر حيث أن أولاد كل عقدة داخلية تكون مرتبة. يتم رسم الأشجار المرتبة ذات الجذر حيث يتم إظهار أولاد كل عقدة داخلية بالترتيب من اليسار إلى اليمين.

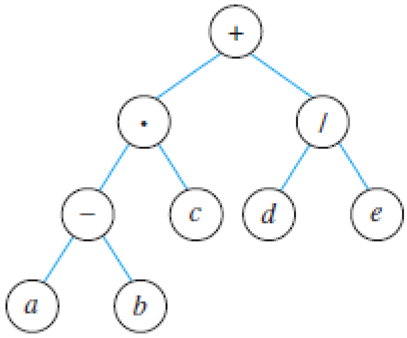
تعريف 7: نسمي شجرة ثنائية binary tree، شجرة ذات جذر بحيث لكل عقدة أب ولدان على الأكثر. يتم تسمية كل ولد من الشجرة الثنائية إما الولد اليساري left child أو الولد اليميني right child. نسمي شجرة ثنائية تامة full binary tree شجرة ثنائية ذات جذر بحيث لكل عقدة أب ولدان تماماً.

لتكن عقدة الأب v في الشجرة الثنائية T، إذا كان ل v ولد يساري، عندها الشجرة الجزئية اليسارية left subtree من v هي الشجرة الثنائية التي جذرها الولد اليساري ل v، وعقده الولد اليساري ل v وكل خلف له. يتم تعريف الشجرة الجزئية اليمينية right subtree ل v بطريقة مشابهة.

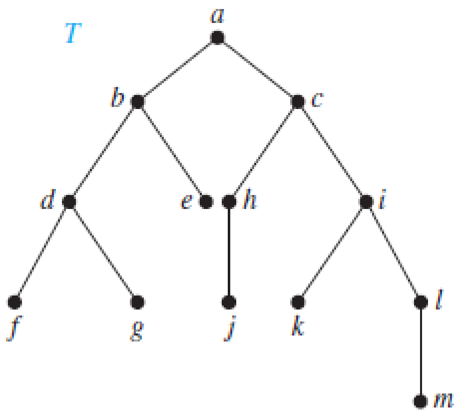


مثال 5: تمثيل عبارة حسابية

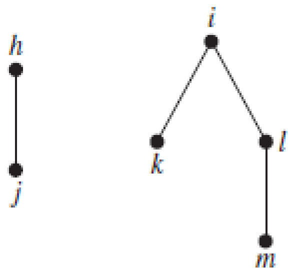
ليكن لدينا العبارة التالية: $((a-b)c)+(d/e)$



مثال 6: ما هو الولد اليساري والولد اليميني للعقدة d من الشجرة الثنائية T التالية (a)؟ وما هي الشجرة الجزئية اليسارية واليمينية من c.



الحل: الولد اليساري ل d هو f واليميني هو g. الشجرة الجزئية اليسارية واليمينية ل c مبينة في الشكل التالي على الترتيب.

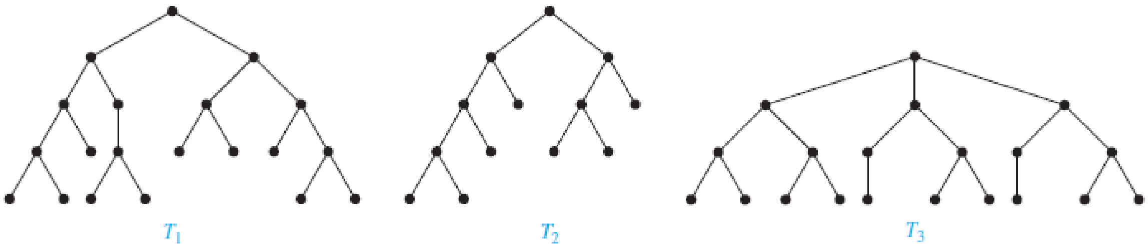


الأشجار المتوازنة balanced trees

سنرى فيما بعد أن عمليات البحث والإضافة في أشجار البحث تجري بعدد من المقارنات من مرتبة $log_2 n$ حيث n حجم الشجرة (عدد عقدها). ولكن في أسوأ الحالات يزداد هذا المقدار ليصبح من مرتبة n (يتعلق بارتفاع شجرة البحث). لذلك من أجل تخفيض عدد عمليات المقارنة في عملية البحث وجب إعادة التوازن للشجرة، بمعنى آخر تخفيض ارتفاع الشجرة.

تعريف 8: نقول عن شجرة ثنائية ذات جذر أنها متوازنة balanced إذا كان مستوى كافة أوراق الشجرة يساوي h أو $h-1$.

مثال 7: أياً من الأشجار التالية متوازنة؟



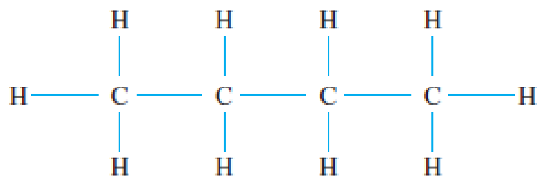
الحل: الشجرة T_1 متوازنة لأن كل الأوراق لها المستوى 3أو 4. الشجرة T_2 غير متوازنة لأن أوراقها لها المستوى 2 أو 3 أو 4. الشجرة T_3 متوازنة لأن كل الأوراق لها المستوى 3.

2.1. أمثلة عن الأشجار examples of trees

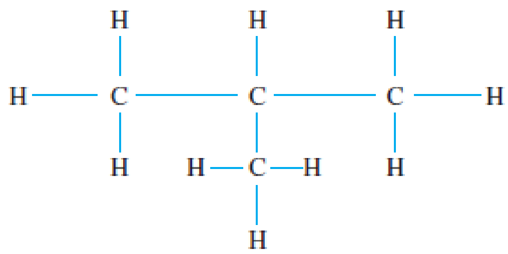
تستخدم الأشجار كنماذج في مجالات متنوعة مثل علم الحاسوب، الكيمياء، الجيولوجيا، علم النبات، فيما يلي مجموعة متنوعة من الأمثلة التي تعتمد على الأشجار.

مثال 8: بنية الجزيئات الهيدروكربونية

تتكون الجزيئات الهيدروكربونية من الكربون والهيدروجين. يمكن لكل ذرة كربون أن ترتبط ما يصل إلى أربع روابط كيميائية مع الذرات الأخرى، ولكل ذرة الهيدروجين يمكن أن ترتبط برابط واحد مع ذرة أخرى. وبالتالي فإن بنية الجزيئات الهيدروكربونية يمكن تمثيلها بالبيانات التالية، حيث تمثل العقد ذرات الهيدروجين والكربون التي يُرمز لها ب H و C، وتمثل الأسهم الروابط الكيميائية فيما بينها.



Butane

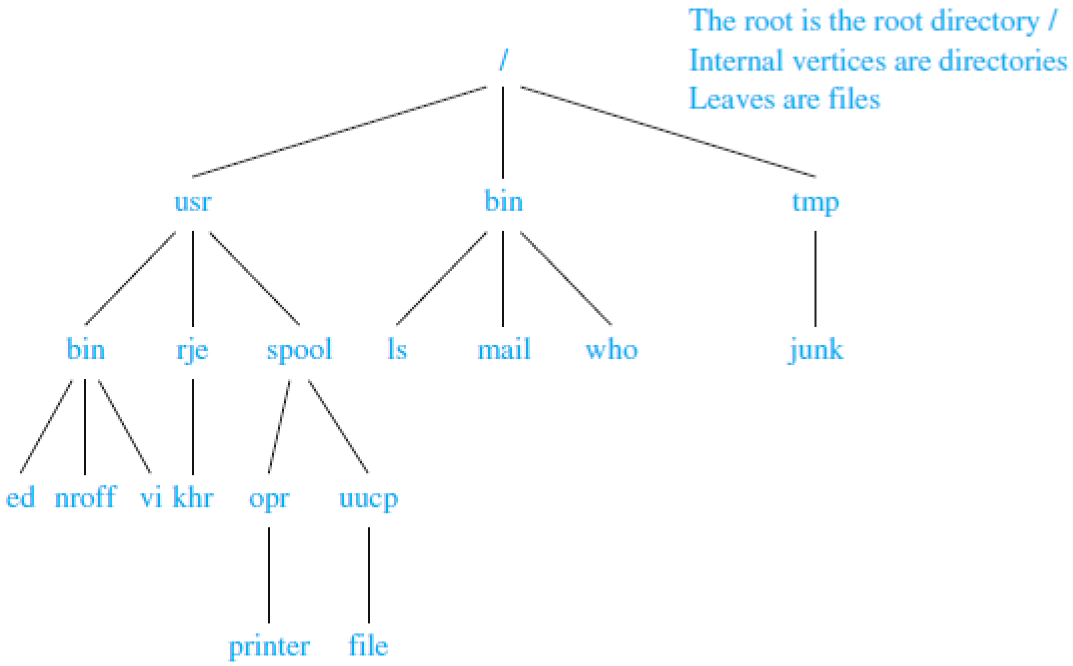


Isobutane

مثال 9: أنظمة الملفات الحاسوبية

يتم تنظيم الملفات في الحاسوب ضمن مجلدات directories، إذ يُمكن للمجلد أن يحوي على ملفات ومجلدات جزئية. يتألف مجلد الجذر من نظام الملف الكلي، بالتالي يُمكن تمثيل نظام الملف بشجرة ذات جذر حيث يمثل جذر الشجرة مجلد الجذر والعقد الداخلية تمثل المجلدات الجزئية ومن ثم الأوراق التي تمثل الملفات العادية. يبين المثال التالي نظام ملف حاسوبي

ISSN: 2617-989X



3.1. خواص الأشجار properties of trees

مبرهنة 2: الشجرة ب n عقدة لها $n-1$ سهم.

مبرهنة 3: الشجرة الثنائية التامة ب

1. i عقدة داخلية لها $2i+1$ عقدة و $l=i+1$ ورقة.
2. n عقدة لها $i=(n-1)/2$ عقدة داخلية و $l=(n+1)/2$ ورقة.
3. l ورقة لها $2l-1$ عقدة و $i=l-1$ عقدة داخلية.

مبرهنة 4: الشجرة الثنائية ذات الارتفاع h لها 2^h ورقة على الأكثر.

نتيجة 1: إذا كان لشجرة ثنائية ارتفاعها h تحوي l ورقة، بالتالي $h \geq \lceil \log_2 l \rceil$. إذا كانت الشجرة الثنائية تامة ومتوازنة فإن $h = \lceil \log_2 l \rceil$، حيث $\lceil x \rceil$ أصغر عدد صحيح أكبر أو يساوي العدد x.

مثال 10: هل يوجد شجرة ثنائية ارتفاعها 5 وعدد أوراقها 38؟

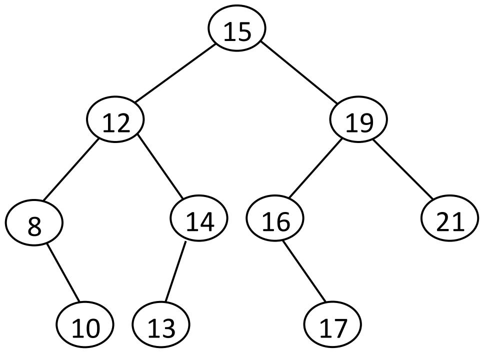
الحل: لا يوجد مثل هذه الشجرة، لأن العدد الأعظمي للأوراق في شجرة ثنائية ارتفاعها 5 هو $32 = 2^5$.

2. تطبيقات الأشجار applications of trees

1.2. شجرة البحث الثنائية binary search tree

تُعتبر عملية البحث عن عنصر ضمن لائحة من العناصر من أهم المسائل المطروحة في علم الحاسب. يكمن الهدف الرئيسي هنا في إيجاد خوارزمية بحث فعالة عندما يتم ترتيب العناصر بشكل تام، وهذا يمكن إنجازه باستخدام أشجار البحث الثنائية.

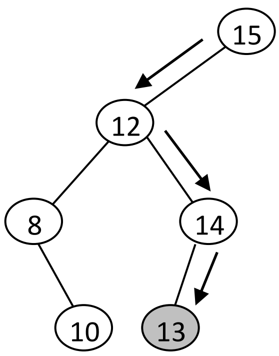
تعريف 9 (شجرة بحث ثنائية): هي عبارة شجرة ثنائية تحقق الشرط التالي: من أجل كل عقدة من هذه الشجرة محتواها C فإن العقد الجزئية اليسارية لهذه العقدة محتواها دائماً أصغر من C والعقد الجزئية اليمينية محتواها دائماً أكبر من C. يبين الشكل التالي مثالاً لشجرة بحث ثنائية:



خوارزمية البحث عن عنصر: للبحث عن عنصر x ضمن شجرة بحث ثنائية، نقارن هذا العنصر مع العنصر الموجود في جذر الشجرة:

- في حالة المساواة يتوقف البحث عند هذه المرحلة.
- إذا كان x أكبر من العنصر الموجود في الجذر نتابع البحث في الشجرة الجزئية اليمينية.
- إذا كان x أصغر من العنصر الموجود في الجذر نتابع البحث في الشجرة الجزئية اليسارية.
- إذا كانت الشجرة الجزئية فارغة فإن عملية البحث تنتهي بالإخفاق (العنصر غير موجود).

مثال 11: البحث عن العنصر 13 في الشجرة السابقة

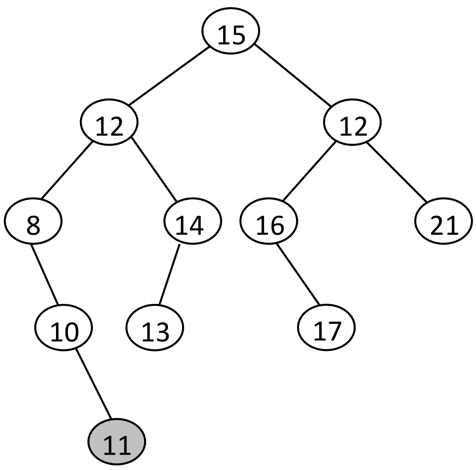


- العنصر 13 أصغر من الجذر 15، بالتالي يتم البحث عن العنصر المذكور في الشجرة الجزئية اليسارية التي جذرها العنصر 12.
- العنصر 13 أكبر من 12، بالتالي يتم البحث عن العنصر المذكور في الشجرة الجزئية اليمينية التي جذرها 14
- العنصر 13 أصغر من 14، بالتالي يتم البحث عن العنصر المذكور في الشجرة الجزئية اليسارية التي جذرها 13.
- العنصر 13 يساوي العنصر 13، بالتالي يتوقف البحث بالعثور على العنصر المطلوب.

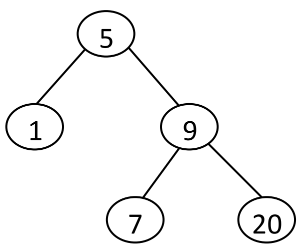
إضافة عنصر إلى شجرة بحث ثنائية: لإضافة عنصر يجب أولاً تحديد مكان الإضافة، ويمكن تجزئة الإضافة إلى مرحلتين: الأولى مرحلة البحث عن موقع العنصر الجديد (عملية بحث) والثانية مرحلة الإضافة. ويمكن التمييز بين طريقتين للإضافة: إضافة عند الأوراق وإضافة عند الجذر. سنتكلم هنا فقط في الإضافة عند الأوراق، حيث يكون العنصر المضاف ورقة جديدة في الشجرة ويجري البحث عن مكان هذه الورقة بطريقة البحث عن العنصر نفسه.

مثال 12: لإضافة العدد 11 إلى الشجرة السابقة

- 11 أصغر من الجذر 15، بالتالي يتم الإضافة إلى الشجرة الجزئية اليسارية التي جذرها العنصر 12
- 11 أصغر من 12، بالتالي يتم الإضافة إلى الشجرة الجزئية اليسارية التي جذرها العنصر 8
- 11 أكبر من 8، بالتالي يتم الإضافة إلى الشجرة الجزئية اليمينية التي جذرها العنصر 10
- 11 أكبر من 10، بالتالي يتم الإضافة إلى الشجرة الجزئية اليمينية



ملاحظة 1: يمكن بناء شجرة بحث ثنائية بالإضافة المتتالية لعناصر المجموعة، يبين الشكل التالي الإدخال المتتالي للعناصر التالية: 5, 1, 9, 7, 20



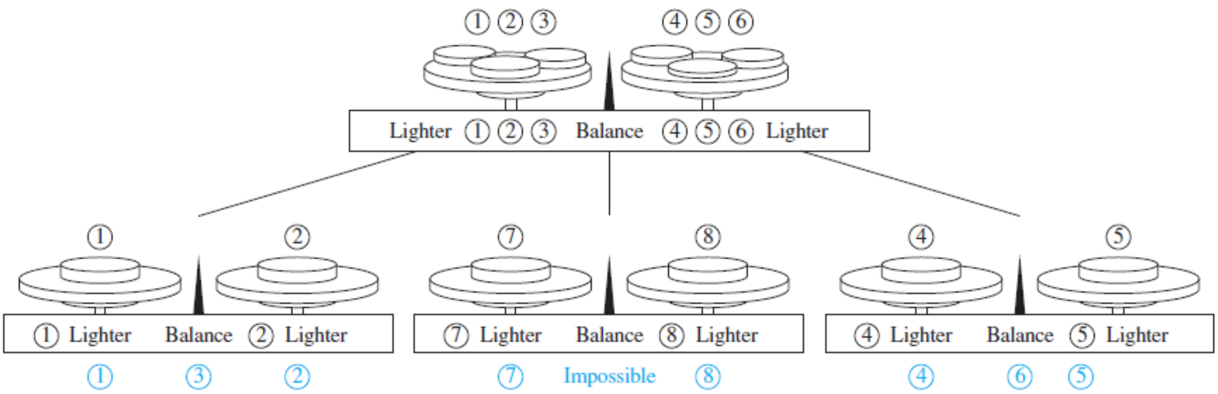
مبرهنة 5: التعقيد الزمني الوسطي لخوارزمية البحث عن عنصر في شجرة البحث الثنائية هي من مرتبة $\log_2 n$، حيث n عدد عقد الشجرة.

2.2. أشجار القرار decision trees

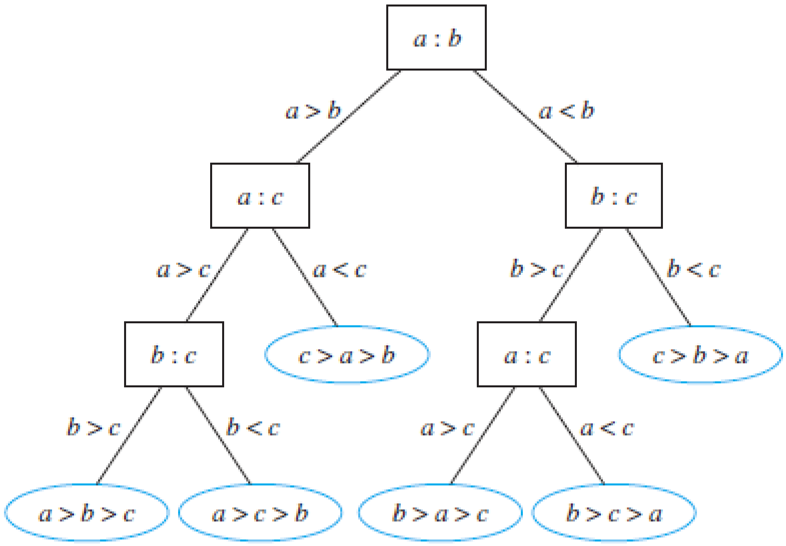
يمكن استخدام الأشجار في نمذجة المسائل، بحيث أن سلسلة من القرارات تؤدي إلى إيجاد حل. على سبيل المثال تحديد العناصر التي تعتمد على سلسلة من المقارنات، حيث كل أن كل عملية مقارنة تخبرنا فيما إذا وجدنا العنصر، أو أنه يجب علينا الذهاب إلى الشجرة الجزئية اليسارية أو اليمينية. نسمي الشجرة ذات الجذر بحيث كل عقدة داخلية منها توافق قرار بشجرة قرار.

مثال 13: لدينا 8 قطع نقدية (مرقّمة من 1 إلى 8)، 7 قطع منها متماثلة في الوزن والثامنة وزنها أقل من البقية. ما هو العدد الأصغري للوزنات اللازم إجراؤها لإيجاد قطعة النقود المغشوشة باستخدام ميزان.

الحل: يوجد 3 احتمالات ممكنة من أجل كل وزنة، إما أن تكون الكفتان متساويتان، أو أن تكون الكفة اليسرى أوزن، أو أن تكون الكفة اليمنى أوزن. وبالتالي لدينا شجرة ثلاثية 3−ary tree، كما أنه يوجد لشجرة القرار 8 أوراق على الأقل. إن أكبر عدد من الوزنات اللازمة لتحديد القطعة المغشوشة هو ارتفاع شجرة القرار، وبما أن ارتفاع شجرة القرار هو على الأقل $\lceil \log_3 8 \rceil = 2$. أي أننا بحاجة إلى وزنتين على الأقل. كما أنه من الممكن تحديد القطعة المغشوشة باستخدام وزنتين فقط، والشكل التالي كيفية الحصول عليها:



مثال 14: يبين الشكل التالي شجرة القرار التي ترتب عناصر القائمة a, b, c.



يُقاس تعقيد خوارزميات الفرز التي تعتمد على المقارنات الثنائية على عدد المقارنات الثنائية المستخدمة. إن العدد الأعظمي لتلك المقارنات التي نحتاجها يساوي إلى ارتفاع شجرة القرار. فإذا كان لدينا n عنصر بالتالي يوجد $n!$ ترتيب ممكن لتلك العناصر ($n!$ ورقة)، أي أن ارتفاع الشجرة الثنائية على الأقل $\lceil log\ n! \rceil$.

مبرهنة 6: خوارزمية الفرز التي تعتمد على المقارنات الثنائية binary comparisons تتطلب على الأقل $\lceil log\ n! \rceil$ عملية مقارنة.

مبرهنة 7: العدد الوسطي لعدد المقارنات المستخدمة في خوارزميات الفرز لفرز n عنصر والتي تعتمد على المقارنات الثنائية هو $\Omega(n\ log\ n)$.

3.2. ترميز هوفمان Huffman codes

يُعتبر ترميز هوفمان تقنية مستخدمة بشكل كبير في عملية ضغط المعطيات data compression، حيث يُمكنه أن يضغط بنسبة تتراوح بين 20% و 90%. تستخدم خوارزمية هوفمان جدولاً يحوي على معدل تكرار frequency كل محرف ضمن نص معين (ملف ما) وذلك من أجل تمثيل كل محرف بسلسلة ثنائية مناسبة.

لنفرض أنه على سبيل المثال لدينا ملف معطيات مكون من 100,000 محرف وأن معدل تردد كل محرف من المحارف الموجودة في الملف مُعطى بالجدول التالي:

	a	b	c	d	e	f
Frequency (K)	45	13	12	16	9	5
Code1 (fixed length)	000	001	010	011	100	101
Code2 (variable length)	0	101	100	111	1101	1100

بفرض أننا استخدمنا الترميز 1 ذو الطول الثابت، فإننا نحتاج إلى 3 بت لتمثيل كل محرف وبالتالي فإننا نحتاج إلى إجمالي 300 كيلو بت من أجل تخزين الملف المذكور (أو إرساله transmit).

أما إذا استخدمنا الترميز 2 ذو الطول المتغير، حيث نرمّز المحارف ذات التردد المرتفع بكلمات قصيرة (عدد البيتات المستخدمة في الترميز منخفض) والمحارف ذات التردد المنخفض بكلمات طويلة (في المثال السابق تم ترميز المحرف a بسلسلة مؤلفة من بت واحد هو 0، وتم ترميز المحرف f بسلسلة مؤلفة من 4 بتات هي 1100. في هذه الحالة يحتاج الترميز إلى:

$$(45.1 + 13.3 + 12.3 + 16.3 + 9.4 + 5.4).1000 = 224\ 000\ bits$$

وبالتالي نكون قد وفّرنا ما يقارب 25%.

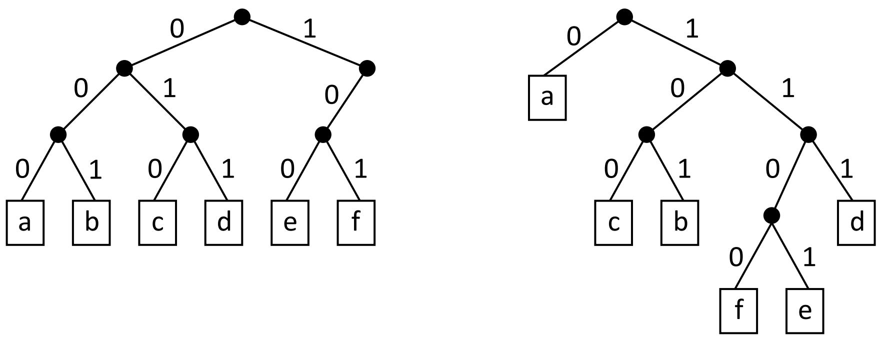
سنهتم بنوع واحد من الترميز وهو الترميز المصدر Prefix Codes، أي أنه لا يوجد كلمة مرمّزة بحيث تكون مصدر لكلمة أخرى. على سبيل المثال 0, 000 ليستا رمزان مصدران، أما 0, 101, 100, 111, 1101, 1100 فهي رموز مصدرة.

إن ترميز المحارف الثلاثة abc هو كالتالي: 0101100، والسلسلة الثنائية 001011101 هي ترميز للمحارف التالية: $aabe$.

تتطلب عملية فك الترميز أن يكون تمثيل الترميز مناسباً بحيث نستطيع إيجاد الكلمة المرمّزة البدائية بطريقة سهلة، وهذا يُمكن تحقيقه باستخدام الأشجار الثنائية والتي تمثل أوراقها المحارف التي رمّزناها، أي أن:

- شجرة فك الترميز decoding tree: عبارة عن أشجار أوراقها هي المحارف.
- كلمة الترميز codeword: سلسلة من البتات من الجذر وحتى الورقة.

يبين الشكل التالي الشجرة الثنائية التي تمثل الترميز المصدر لكل من الترميزين 1 و 2 المذكورين في الجدول السابق:



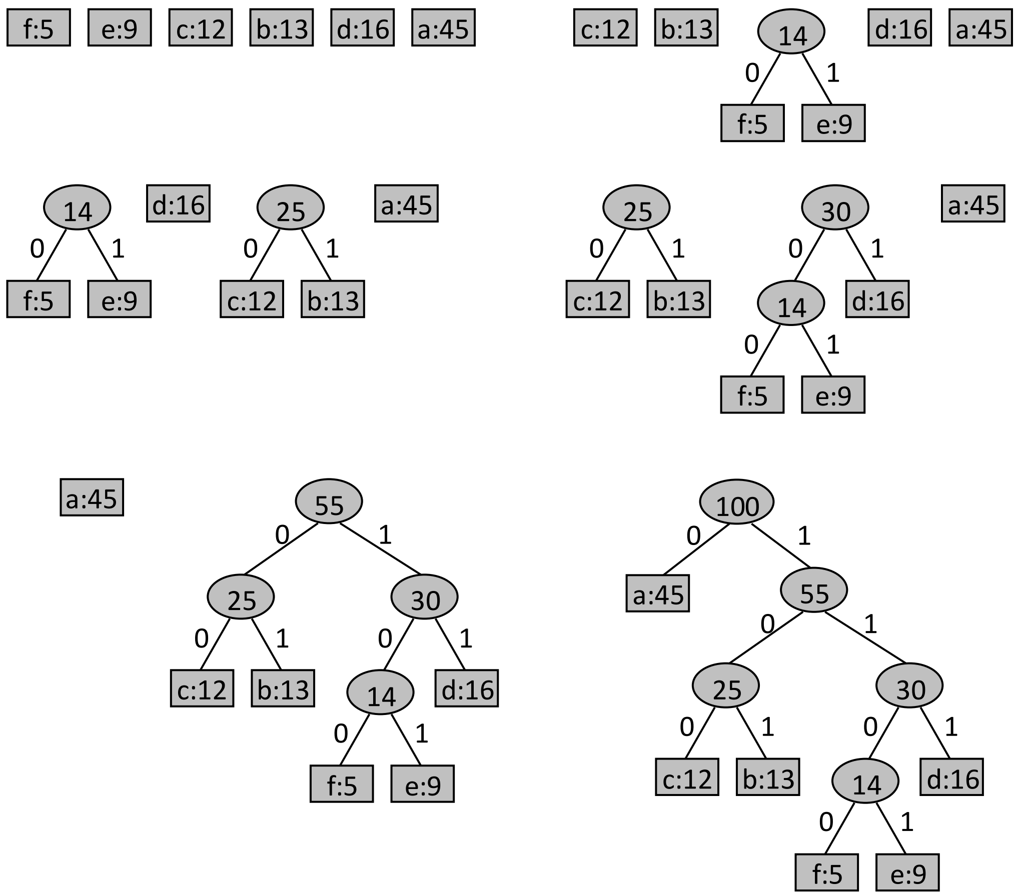
بناء ترميز هوفمان

الخطوة الأولى: نأخذ المحرفين x, y اللذين ترددهما أقل ما يمكن من مجموعة المحارف C التي عددها n محرف وتردد كل محرف c من C هو $f(c)$، ومن ثم ننشأ شجرة جزئية يكون المحرفان x, y فيها أوراق. نسمي جذر الشجرة الجزئية المكونة ب z.

الخطوة الثانية: نضع التردد $f(z) = f(x) + f(y)$ نحذف كل من x و y ونضيف z ويصبح لدينا مجموعة المحارف $C' = C \cup \{z\} - \{x, y\}$. من الواضح أن $|C'| = |C| - 1$.

الخطوة الثالثة: نكرر الخطوتين السابقتين الأولى والثانية على مجموعة المحارف الجديدة C' حتى يصبح عدد محارفها محرف واحد.

مثال 15: تطبيق الخوارزمية السابقة على المثال السابق يُعطي:



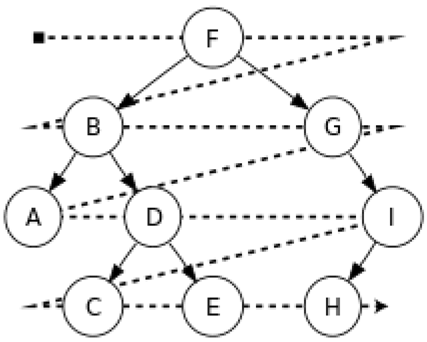
3. التجوال ضمن شجرة ثنائية tree traversal

تهدف عملية التجول إلى المرور بكل عقدة من عقد الشجرة حسب ترتيب معين بهدف إجراء معالجة عليها.

يوجد أربع أنواع من التجوال ضمن شجرة ثنائية: level order, postorder, inorder, preorder.

خوارزمية التجوال حسب الترتيب بالمستوى level order هي الأسهل فهماً ولكنها الأصعب تنفيذاً. نبدأ بمعالجة الجذر ومن ثم ننتقل إلى كل مستوى من مستويات الشجرة الثنائية وفي كل مستوى نعالج من اليسار إلى اليمين.

مثال 16: بأي ترتيب يتم التجوال في الشجرة التالية باستخدام ال level order؟

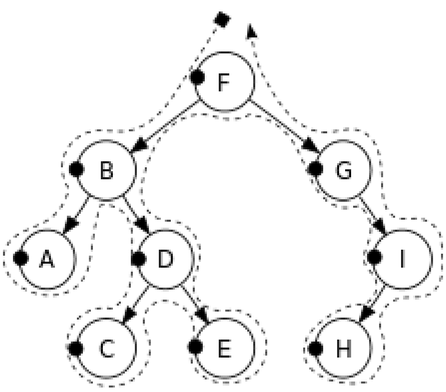


الحل: يتم التجوال كما يلي $F, B, G, A, D, I, C, E, H$

في التجوال حسب الترتيب المصدر preorder فإننا نعالج الجذر أولاً وبعدها نعالج الشجرة الجزئية اليسارية باستخدام preorder (خوارزمية عودية) ومن ثم نعالج الشجرة الجزئية اليمينية باستخدام preorder أيضاً.

```
algorithm preorder(T :tree)
  if not empty(T ) then
    visit(T )
    preorder(LChild(T ))
    preorder(RChild(T ))
  endif
endAlg
```

مثال 17: بأي ترتيب يتم التجوال في الشجرة التالية باستخدام ال preorder؟

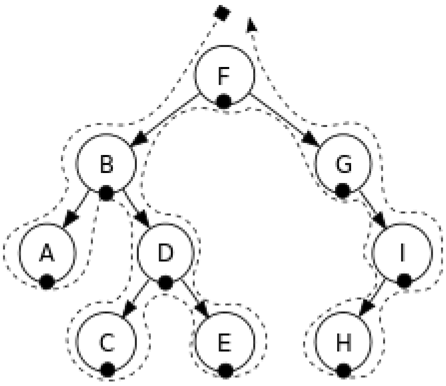


الحل: نمر أولا على الجذر F ، بعدها يتم المرور على الشجرة الجزئية اليسارية التي جذرها B باستخدام ال preorder، بعدها يتم المرور على الشجرة الجزئية اليمينية التي جذرها G باستخدام ال preorder، بالتالي يتم التجوال كما يلي $F, B, A, D, C, E, G, I, H$

في التجوال حسب الترتيب المتناظر inorder فإننا نعالج أولاً الشجرة الجزئية اليسارية باستخدام الخوارزمية العودية inorder وبعدها نعالج الجذر وأخيراً نعالج الشجرة الجزئية اليمينية باستخدام inorder أيضاً.

```
algorithm inorder(T :tree)
  if not empty(T ) then
    inorder( L Child(T ))
    visit(T )
    inorder( R Child(T ))
  endif
endAlg
```

مثال 18: بأي ترتيب يتم التجوال في الشجرة التالية باستخدام ال inorder؟

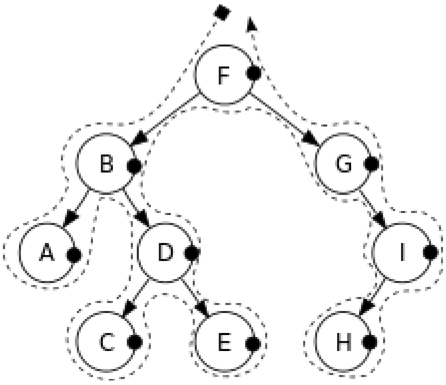


الحل: نمر أولا على الشجرة الجزئية اليسارية التي جذرها B باستخدام ال inorder، بعدها يتم المرور على الجذر F ، بعدها يتم المرور على الشجرة الجزئية اليمينية التي جذرها G باستخدام ال inorder، بالتالي يتم التجوال كما يلي $A, B, C, D, E, F, G, H, I$.

التجوال حسب الترتيب الملحق postorder فإننا نعالج أولاً الشجرة الجزئية اليسارية باستخدام الخوارزمية العودية postorder وبعدها نعالج الشجرة الجزئية اليمينية باستخدام postorder ومن ثم نعالج الجذر.

```
algorithm postorder(T :tree)
  if not empty(T ) then
    postorder(LChild(T ))
    postorder(RChild(T ))
    visit(T )
  endif
endAlg
```

مثال 19: بأي ترتيب يتم التجوال في الشجرة التالية باستخدام ال postorder؟



الحل: نمر أولا على الشجرة الجزئية اليسارية التي جذرها B باستخدام ال postorder، بعدها يتم المرور على الشجرة الجزئية اليمينية التي جذرها G باستخدام ال postorder، بعدها يتم المرور على الجذر F بالتالي يتم التجوال كما يلي:

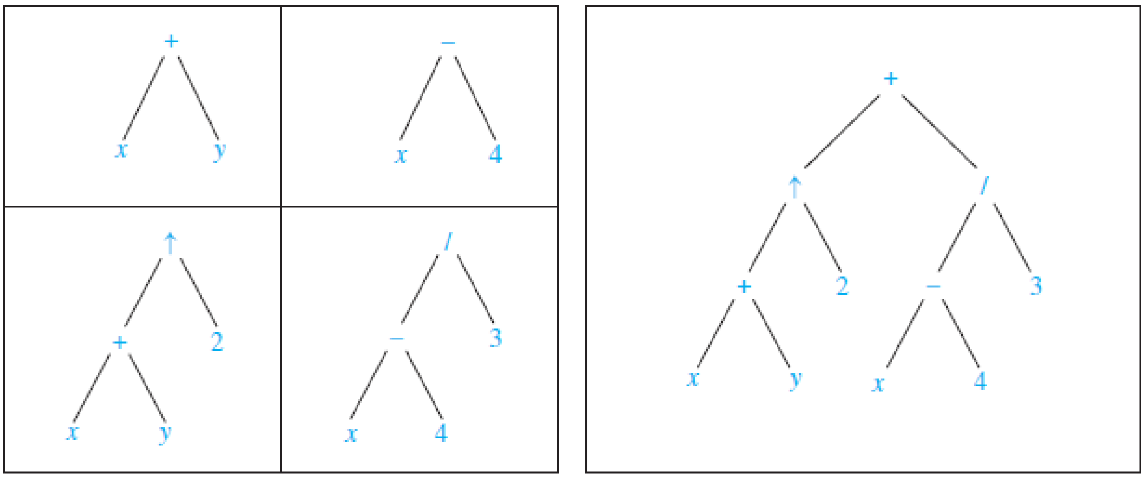
$A, C, E, D, B, H, I, G, F$.

التزميز المتناظر والسابق واللاحق Infix, Prefix, and Postfix Notation

يمكننا تمثيل العبارات المعقدة، كالفرضيات المركبة والتعابير الحسابية باستخدام الأشجار المرتبة ذات الجذر. على سبيل المثال ليكن تمثيل العبارات الحسابية التي تتضمن عمليات الجمع $(+)$ والطرح $(-)$ والضرب $(*)$ والقسمة $(/)$ والأس $(\uparrow)$ والتي سيتم استخدام الأشجار الثنائية لهذا التمثيل، حيث تمثل العقد الداخلية العمليات operations وتمثل الأوراق المتحولات أو الأعداد.

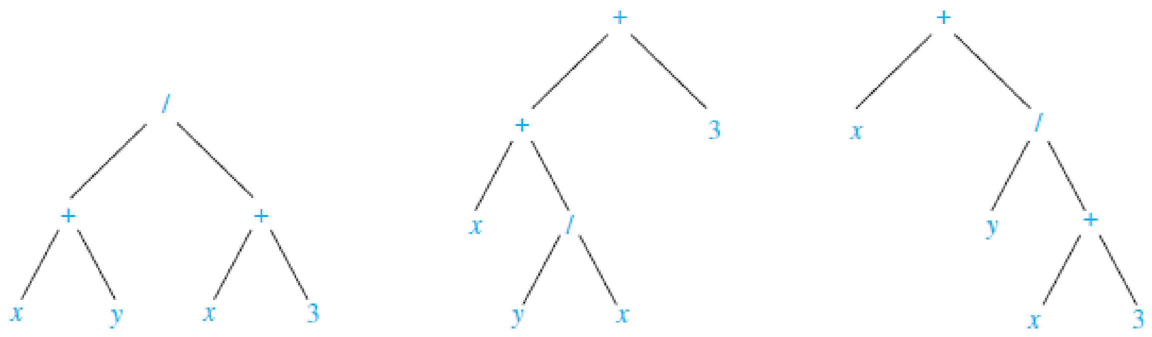
مثال 20: أوجد الشجرة الثنائية التي تمثل العبارة الحسابية التالية $((x+y)\uparrow 2) + ((x-4)/3)$؟

الحل: يُمكن بناء الشجرة الثنائية للعبارة الحسابية من الأسفل إلى الأعلى. أولاً نبني الشجرة الجزئية للعبارة $x+y$، بعدها يتم دمجها مع شجرة جزئية أكبر تمثل $(x+y)\uparrow 2$. أيضاً يتم بناء الشجرة الجزئية $x-4$ بعدها يتم دمجها مع شجرة جزئية أكبر تمثل $(x-4)/3$. أخيراً يتم دمج الشجرة الجزئية التي تمثل $(x+y)\uparrow 2$ مع الشجرة الجزئية التي تمثل $(x-4)/3$ لتشكل الشجرة الثنائية المطلوبة كما يبينه الشكل التالي



ينتج التجوال حسب الترتيب المتناظر لشجرة ثنائية تمثل عبارة حسابية العبارة الأصلية بالعناصر والعمليات وبنفس الترتيب الذي حدثت فيه.

مثال 21: التجوال حسب الترتيب المتناظر للأشجار الثنائية التالية التي تمثل التعابير الحسابية التالية $(x+y)/(x+3)$ و $(x+(y/x))+3$ و $x+(y/(x+3))$ كلها تقود إلى العبارة الحسابية المتناظرة $x+y/x+3$



لجعل التعابير الحسابية غير مبهمة (واضحة) يكون من الضروري تضمين الأقواس في التجوال حسب الترتيب المتناظر في كل مرة نصادف عملية، ونسمي التعبير الذي نحصل عليه بالأقواس بالشكل المتناظر infix form.

نحصل على الشكل السابق prefix form لتعبير ما عندما نقوم بالتجوال حسب الترتيب المصدر preorder لشجرة ثنائية ذات جذر ، والعبارات المكتوبة بالشكل السابق نسميها بالترميز البولوني Polish notation حيث لا حاجة هنا إلى الأقواس.

مثال 22: اكتب بالشكل السابق العبارة التالية $((x+y)\uparrow 2)\ +\ ((x-4)/3)$

الحل: نحصل على الشكل السابق بالتجوال في الشجرة الثنائية التي تمثل التعبير المذكور حسب الترتيب المصدر ، وهذا ينتج $+\uparrow + x\ y\ 2\ /\ -\ x\ 4\ 3$.

في الشكل السابق لتعبير حسابي، العملية الثنائية (+ على سبيل المثال) تسبق زوج مؤثراتها operands. بالتالي يمكن تخمين العبارة الحسابية الممثلة بالشكل السابق بالعمل عليها من اليمين إلى اليسار. عندما نصادف عملية ثنائية فإننا ننجز العملية الموافقة على زوج المؤثرات اللذان يقعان مباشرة إلى يمين العملية. وبالتالي عند إنجاز العملية نعتبر النتيجة على أنها مؤثر جديد.

مثال 23: ما هي قيمة التعبير المكتوب بالشكل السابق prefix التالي $+ - * \; 2 \; 3 \; 5 \; / \uparrow 2 \; 3 \; 4$؟

الحل: قيمة التعبير يبينه الشكل التالي

$$+ \quad - \quad * \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad / \quad \underbrace{\uparrow \quad 2 \quad 3}_{2 \uparrow 3 = 8} \quad 4$$

$$+ \quad - \quad * \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad \underbrace{/ \quad 8 \quad 4}_{8/4 = 2}$$

$$+ \quad - \quad \underbrace{* \quad 2 \quad 3}_{2 * 3 = 6} \quad 5 \quad 2$$

$$+ \quad \underbrace{- \quad 6 \quad 5}_{6 - 5 = 1} \quad 2$$

$$\underbrace{+ \quad 1 \quad 2}_{1 + 2 = 3}$$

Value of expression: 3

نحصل على الشكل اللاحق postfix form لتعبير ما عندما نقوم بالتجوال حسب الترتيب الملحق postorder لشجرة ثنائية ذات جذر، والعبارات المكتوبة بالشكل السابق نسميها بالترميز البولوني المعكوس reverse Polish notation حيث لا حاجة هنا إلى الأقواس.

مثال 24: اكتب بالشكل السابق العبارة التالية $((x+y)\uparrow 2) + ((x-4)/3)$

الحل: نحصل على الشكل السابق بالتجوال في الشجرة الثنائية التي تمثل التعبير المذكور حسب الترتيب الملحق، وهذا ينتج $+ \; / \; 3 \; - \; 4 \; x \uparrow 2 \; + \; y$.

في الشكل اللاحق لتعبير حسابي، العملية الثنائية (+ على سبيل المثال) تلحق زوج مؤثراتها operands. بالتالي يمكن تخمين العبارة الحسابية الممثلة بالشكل اللاحق بالعمل عليها من اليسار إلى اليمين. عندما نصادف عملية ثنائية فإننا ننجز العملية الموافقة على زوج المؤثرات اللذان يقعان مباشرة إلى يسار العملية. وبالتالي عند إنجاز العملية نعتبر النتيجة على أنها مؤثر جديد.

مثال 25: ما هي قيمة التعبير المكتوب بالشكل اللاحق postfix التالي $7\ 2\ 3\ *\ -\ 4 \uparrow 9\ 3\ /\ +$؟

الحل: قيمة التعبير يبينه الشكل التالي

$$7\ \underbrace{2\ \ 3\ \ *}_{2*3=6}\ -\ 4\ \uparrow\ 9\ 3\ /\ +$$

$$\underbrace{7\ \ 6\ \ -}_{7-6=1}\ 4\ \uparrow\ 9\ 3\ /\ +$$

$$\underbrace{1\ \ 4\ \ \uparrow}_{1^4=1}\ 9\ 3\ /\ +$$

$$1\ \underbrace{9\ \ 3\ \ /}_{9/3=3}\ +$$

$$\underbrace{1\ \ 3\ \ +}_{1+3=4}$$

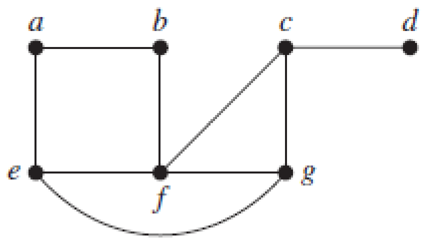
Value of expression: 4

4. أشجار التغطية spanning trees

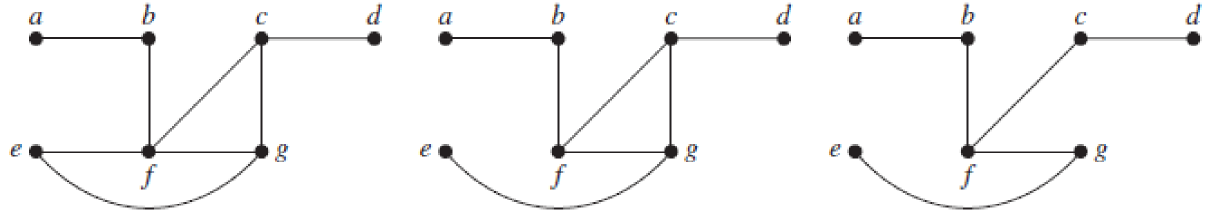
1.4. مقدمة introduction

تعريف 10: ليكن G بيان بسيط. نسمي شجرة تغطية من G بيان جزئي من G يحوي كل عقد البيان G.

مثال 26: أوجد شجرة تغطية من البيان G التالي



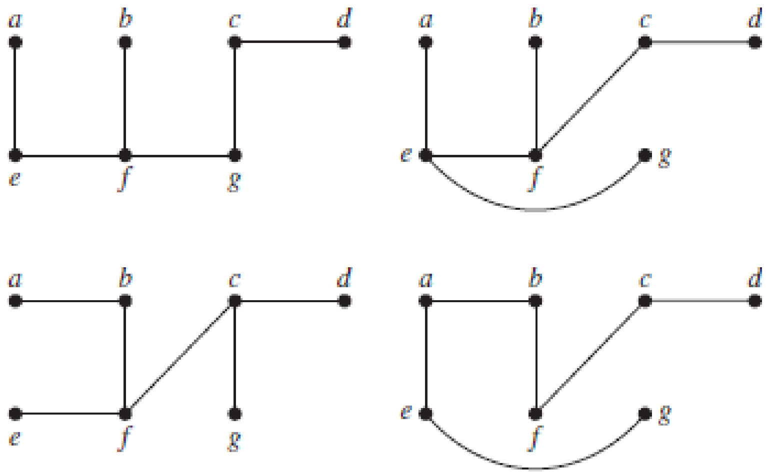
الحل: البيان G مرتبط لكنه ليس شجرة لأنه يحوي دارات بسيطة. لنحذف السهم $\{a, e\}$ وهذا يحذف دارة بسيطة واحدة والنتيجة بيان جزئي من G يحوي كافة عقد البيان G. من ثم نحذف السهم $\{e, f\}$ الذي يحذف بدوره دارة بسيطة ثانية. وأخيراً نحذف السهم $\{c, g\}$ لينتج بيان بسيط وبدون دارات بسيطة. البيان الجزئي النهائي الناتج عبارة عن شجرة تغطية كما هو مبين في الشكل التالي



Edge removed: $\{a, e\}$ $\{e, f\}$ $\{c, g\}$

(a) (b) (c)

ملاحظة 2: شجرة التغطية التي حصلنا عليها سابقاً من البيان G ليست وحيدة، على سبيل المثال يمكن الحصول على شجرات تغطية مختلفة من نفس البيان كما يبينه الشكل التالي



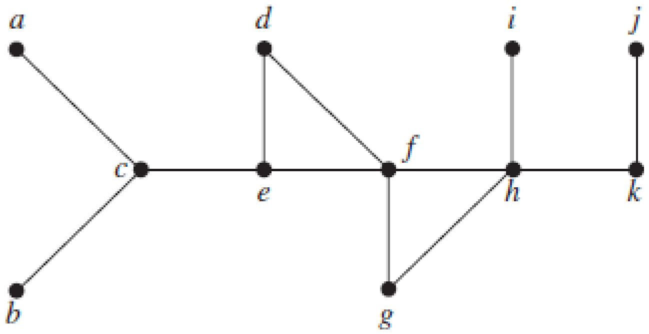
مبرهنة 8: بيان بسيط يكون مرتبط إذا وفقط إذا يحوي شجرة تغطية.

2.4. البحث بالعمق اولاً depth−first search

خوارزمية الحصول على شجرة تغطية من بيان بحذف الدارات البسيطة هي خوارزمية غير فعالة لأنه يتطلب أولاً إيجاد الدارات البسيطة. طريقة أخرى لبناء شجرة تغطية تكمن في الإضافة المتتالية للأسهم، طريقتان للقيام بذلك الطريقة الأولى باستخدام البحث بالعمق أولاً حيث نقوم باختيار عقدة من البيان بشكل عشوائي لتكون عقدة الجذر. نشكل بعدها مساراً يبدأ من العقدة المذكورة بالإضافة المتتالية للعقد والأسهم. فإذا مرّ المسار على كافة عقد البيان تكون الشجرة المؤلفة من عقد المسار هي شجرة التغطية المطلوبة. وإذا لم يتم تغطية كافة العقد نرجع إلى العقدة ما قبل الأخيرة ونحاول، إذا كان ذلك ممكناً، تشكيل مسار يبدأ منها ويمر بالعقد التي لم يتم المرور عليها سابقاً. إذا لم نستطع فعل ذلك نرجع إلى الوراء عقدة أخرى (العقدة الثانية ما قبل الأخيرة) ونحاول مرة أخرى. نكرر الإجرائية السابقة حيث نبدأ عند آخر عقدة تم المرور عليها، نرجع إلى الوراء عقدة واحدة في كل مرة مشكلين مسارات قدر الإمكان حتى نصل إلى مرحلة حيث لا يمكن إضافة أي سهم إلى الشجرة عندها نكون قد حصلنا على شجرة التغطية المطلوبة.

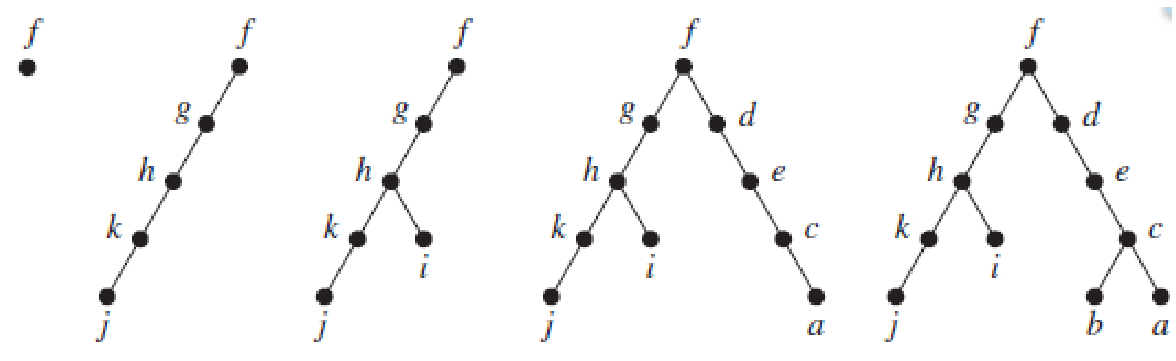
ISSN: 2617-989X

مثال 27: استخدم البحث بالعمق أولاً لإيجاد شجرة تغطية للبيان التالي



الحل:

نختار العقدة f مثلاً لتكون الجذر. نبني مساراً بالإضافة المتتالية للأسهم والعقد وهذا يولّد مساراً f, g, h, k, j (يمكن بناء مسار آخر). بعدها نرجع إلى العقدة k، وبما أنه لا يوجد أي مسار يبدأ ب k ويحوي على عقد لم يتم زيارتها. بالتالي نرجع إلى العقدة h ونشكل المسار h, i. بعدها نرجع إلى العقدة g ومن ثم إلى العقدة f ومنها نشكل المسار f, d, e, c, a. ومن ثم نرجع إلى العقدة c ونشكل المسار c, b. وهذا ينتج شجرة تغطية مبينة في الشكل التالي

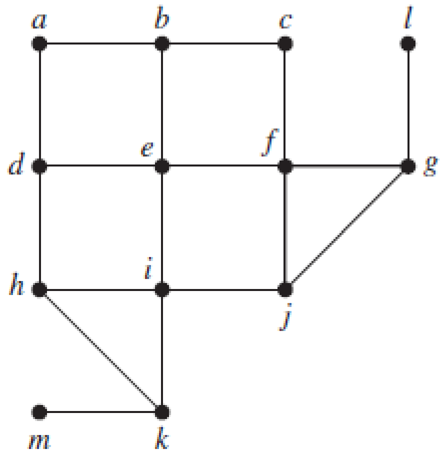


(a) (b) (c) (d) (e)

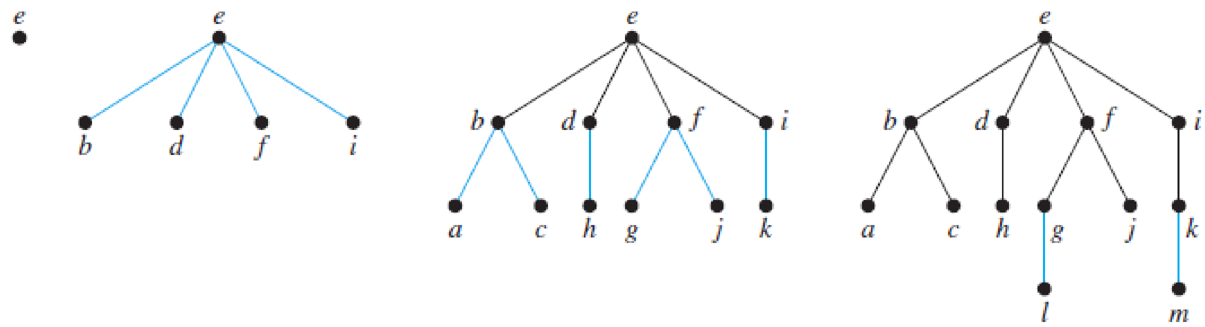
3.4. البحث بالعرض اولاً breadth–first search

الطريقة الثانية لبناء شجرة تغطية من بيان G هي باستخدام البحث بالعرض أولاً حيث نقوم باختيار عقدة من البيان بشكل عشوائي لتكون عقدة الجذر. ومن ثم يتم إضافة كافة الأسهم الواردة إلى تلك العقدة، العقد الجديدة المضافة في هذه المرحلة تشكل عقد المستوى الأول لشجرة التغطية التي نقوم بترتيبها بشكل عشوائي. بعدها ومن أجل كل عقدة من المستوى الأول نضيف كل سهم وارد إلى تلك العقدة بحيث لا يؤدي إلى تشكيل دارة بسيطة. نقوم بترتيب أولاد كل عقدة من عقد المستوى الأول وهذا ينتج عقد المستوى الثاني لشجرة التغطية. من ثم نتبع نفس الإجرائية حتى يتم إضافة كافة العقد البيان إلى شجرة التغطية.

مثال 28: استخدم البحث بالعرض أولاً لإيجاد شجرة تغطية للبيان التالي



الحل: نختار العقدة e على سبيل المثال لتكون عقدة الجذر، بعدها نضيف كافة الأسهم الواردة إلى تلك العقدة، الأسهم من e إلى b, d, f, i، حيث تكون العقد الأربع في المستوى الأول لشجرة التغطية. بعدها نضيف الأسهم الواردة إلى العقدة b، الأسهم من b إلى a, c وكذلك السهم من d إلى h و الأسهم من f إلى j, g والسهم من i إلى k. العقد الجديدة a, c, h, j, g, k تقع في المستوى الثاني من الشجرة. بعدها نضيف الأسهم من g إلى l ومن k إلى m كما هو مبين في الشكل التالي



4.4. أشجار التغطية الأصغرية minimum spanning trees

تعريف 11: شجرة تغطية أصغرية في بيان موزون مرتبط هي عبارة عن شجرة تغطية لها أصغر مجموع أوزان ممكن للأسهم التي تتألف منها.

سنقدم خوارزميتين من أجل بناء شجرة تغطية أصغرية كلاهما يعتمد على الإضافة المتتالية للأسهم ذات الوزن الأصغري من بين تلك الأسهم التي لها خاصة محددة والتي لم يتم استخدامها بعد.

خوارزمية برايم Prim's algorithm

نبدأ باختيار سهم بوزن أصغري ونضعه في شجرة التغطية. ومن ثم نضيف بشكل متتالي على شجرة التغطية الأسهم التي لها الوزن الأصغري والواردة إلى العقدة الموجودة في الشجرة آنفة الذكر ، وبحيث لا تشكل دارة بسيطة مع الأسهم الموجودة في شجرة التغطية. نتوقف عندما يصل عدد الأسهم المضافة $n-1$ سهم.

procedure Prim(G : weighted connected undirected graph with n vertices)

$T = a$ minimum−weight edge

for $i = 1$ **to** $n-2$

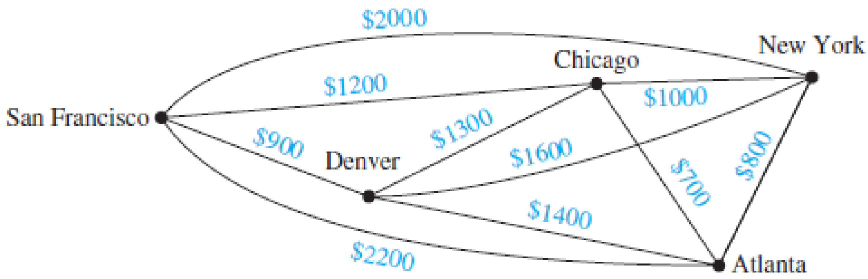
.. e = an edge of minimum weight incident to a vertex in T and not

  forming a simple circuit in T if added to T

  $T = T$ with e added

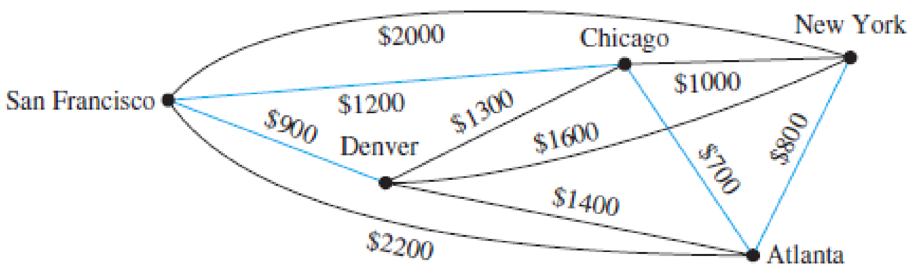
return T {T is a minimum spanning tree of G}

مثال 29: استخدم خوارزمية برايم لإيجاد التكلفة الأصغرية لشبكة الاتصالات التي تربط كل الحواسيب الممثلة في البيان التالي



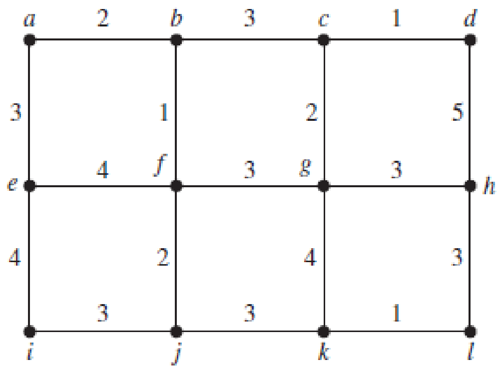
الحل:

يبين الشكل التالي حيث الأسهم الملونة بالأزرق تمثل شجرة التغطية الأصغرية (التكلفة الأصغرية لشبكة الاتصالات) الناتجة عن استخدام خوارزمية برايم.

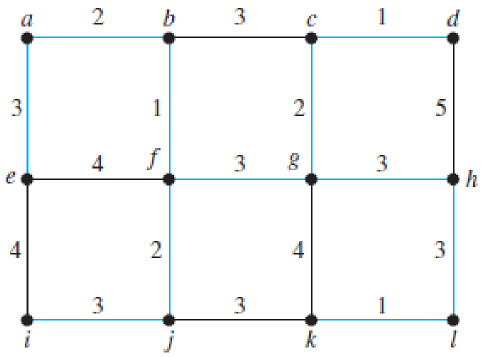


Choice	Edge	Cost
1	{Chicago, Atlanta}	\$ 700
2	{Atlanta, New York}	\$ 800
3	{Chicago, San Francisco}	\$1200
4	{San Francisco, Denver}	\$ 900
	Total:	\$3600

مثال 30: استخدم خوارزمية برايم لإيجاد شجرة التغطية الأصغرية للبيان التالي



الحل: يبين الشكل التالي حيث الأسهم الملونة بالأزرق تمثل شجرة التغطية الأصغرية الناتجة عن استخدام خوارزمية برايم.



(a)

Choice	Edge	Weight
1	$\{b, f\}$	1
2	$\{a, b\}$	2
3	$\{f, j\}$	2
4	$\{a, e\}$	3
5	$\{i, j\}$	3
6	$\{f, g\}$	3
7	$\{c, g\}$	2
8	$\{c, d\}$	1
9	$\{g, h\}$	3
10	$\{h, l\}$	3
11	$\{k, l\}$	1
	Total:	24

(b)

خوارزمية كروسكال Kruskal's algorithm

نبدأ باختيار سهم بوزن أصغري ونضعه في شجرة التغطية. ومن ثم نضيف بشكل متتالي على شجرة التغطية الأسهم التي لها الوزن الأصغري والتي لا تشكل دارة بسيطة مع الأسهم الموجودة في شجرة التغطية. نتوقف عندما يصل عدد الأسهم المضافة $n - 1$ سهم.

procedure Kruskal(G : weighted connected undirected graph with n vertices)

T = empty graph

for $i = 1$ to $n - 1$

  e = any edge in G with smallest weight that does not form a simple circuit when added to T

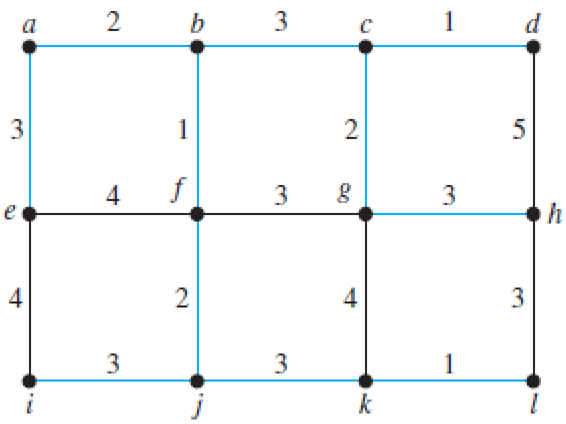
  $T = T$ with e added

return T { T is a minimum spanning tree of G }

ملاحظة 3: الفرق بين خوارزميتي برايم وكروسكال هي أنه في خوارزمية برايم الأسهم ذات الوزن الأصغري والواردة إلى عقدة موجودة في الشجرة والتي لا تشكل دارة بسيطة هي التي يتم اختيارها. بينما في خوارزمية كروسكال الأسهم ذات الوزن الأصغري التي ليست بالضرورة أن تكون واردة إلى عقدة موجودة في الشجرة والتي لا تشكل دارة بسيطة هي التي يتم اختيارها.

مثال 31: استخدم خوارزمية كروسكال لإيجاد شجرة التغطية الأصغرية للبيان السابق

الحل: يبين الشكل التالي حيث الأسهم الملونة بالأزرق تمثل شجرة التغطية الأصغرية الناتجة عن استخدام خوارزمية كروسكال.



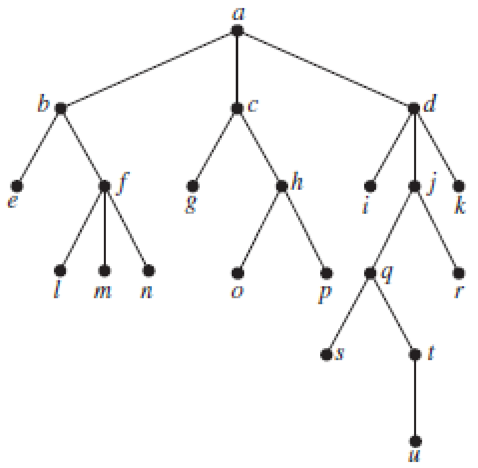
(a)

Choice	Edge	Weight
1	$\{c, d\}$	1
2	$\{k, l\}$	1
3	$\{b, f\}$	1
4	$\{c, g\}$	2
5	$\{a, b\}$	2
6	$\{f, j\}$	2
7	$\{b, c\}$	3
8	$\{j, k\}$	3
9	$\{g, h\}$	3
10	$\{i, j\}$	3
11	$\{a, e\}$	3
	Total:	24

(b)

تمارين

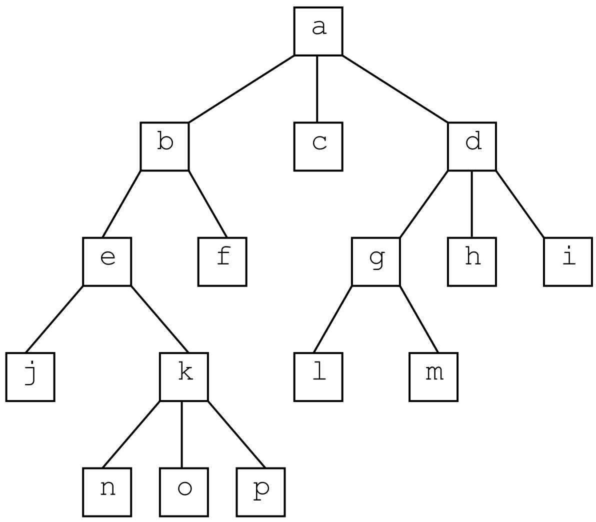
1. لتكن الشجرة التالية



أوجد ما يلي: جذر الشجرة، العقد الداخلية، الأوراق، أولاد العقدة j ، اب العقدة h، أشقاء العقدة o، سلف العقدة m ، خلف العقدة b، ارتفاع العقد، ارتفاع الشجرة.

2. أوجد الشجرة الثنائية التي تجوالها حسب الترتيب المصدر preorder (من اليسار إلى اليمين) هو: $A, B, C, E, D, W, J, Q, E, X, Y$ وتجوالها حسب الترتيب المتناظر inorder هو: $C, B, E, A, J, W, D, Q, X, E, Y$

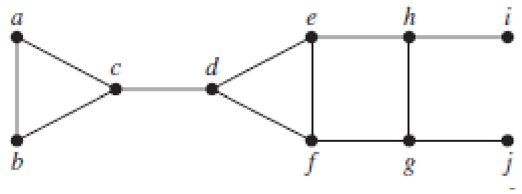
3. أوجد تجوال الشجرة التالية حسب الترتيب preorder وكذلك حسب الترتيب inorder



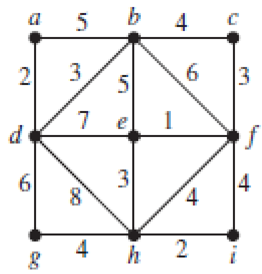
4. استخدم تشفير هوفمان لتشفير الرموز بالترددات التالية: $a:0.2,\ b:0.10,\ c:0.15,\ d:0.25,\ e:0.30$. ما هو العدد الوسطي للبتات اللازم لتشفير محرف واحد؟

.5 صمم شجرة بحث ثنائية بالإضافة المتتالية لعناصر المجموعة التالية: 8 ,1 ,5 ,10 ,14 ,12 ,4 ,3 ,13

.6 استخدم البحث بالعمق أولاً لإيجاد شجرة تغطية للبيان التالي باختيار عقدة الجذر a



.7 استخدم خوارزمية برايم لإيجاد شجرة التغطية الأصغرية للبيان التالي



.8 استخدم خوارزمية كروسكال لإيجاد شجرة التغطية الأصغرية للبيان السابق (التمرين 7)

العلامة العظمى: 100 **علامة النجاح: 50** **المدة: ساعة ونصف**

السؤال الأول: أملأ الفراغات المناسبة **(40) درجة**

.1 نسمي شجرة ....

بيان غير موجه مرتبط لا يحوي دارات بسيطة

.2 بيان غير موجه مترابط يكون شجرة إذا وفقط إذا ....

وجد مسار واحد فقط بسيط بين أي عقدتين من عقد البيان

.3 نسمي ارتفاع شجرة ذات جذر ....

الارتفاع الأعظمي لعقد الشجرة

.4 في شجرة لها 3 عقد على الأقل، نسمي كل عقدة درجتها تساوي الواحد ب

الورقة

.5 نسمي شجرة ثنائية، ....

شجرة ذات جذر بحيث لكل عقدة أب ولدان على الأكثر

.6 نقول عن شجرة ثنائية ذات جذر أنها متوازنة إذا ....

كان مستوى كافة أوراق الشجرة يساوي h أو $h-1$

.7 ليكن G بيان بسيط. نسمي شجرة تغطية من G ....

بيان جزئي من G يحوي كل عقد البيان G

.8 شجرة تغطية أصغرية في بيان موزون مرتبط هي عبارة عن ....

شجرة تغطية لها أصغر مجموع أوزان ممكن للأسهم التي تتألف منها

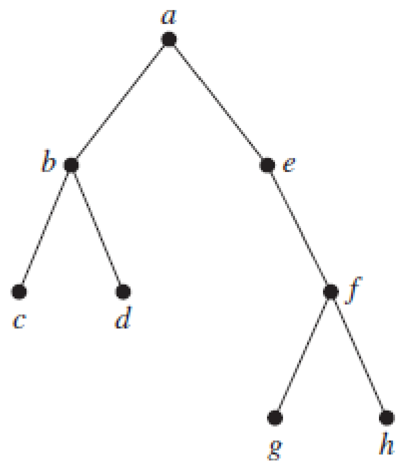
.9 الشجرة الثنائية ذات الارتفاع h لها............ ورقة على الأكثر

2^h

.10 نستخدم خوارزمية برايم Prim من أجل بناء ....

شجرة تغطية أصغرية في بيان موزون مرتبط

السؤال الثاني: أوجد تجوال الشجرة التالية حسب الترتيب preorder و inorder و postorder (15) درجة



الحل:

preorder: a, b, c, d, e, f, g, h

inorder: c, b, d, a, e, g, f, h

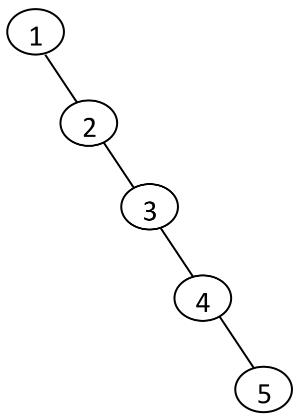
postorder: c, d, b, g, h, f, e, a

توجيه في حال الخطأ: الفقرة 3

السؤال الثالث: صمم شجرة بحث ثنائية بالإضافة المتتالية لعناصر المجموعة التالية (من اليسار إلى اليمين): (10) درجات

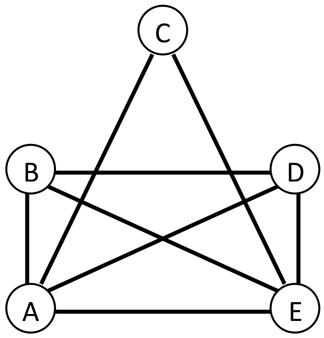
1, 2, 3, 4, 5

الحل:

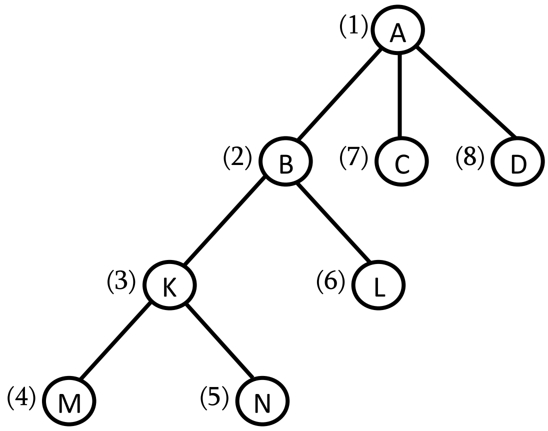


توجيه في حال الخطأ: الفقرة 1.2

السؤال الرابع: استخدم البحث بالعمق أولاً لإيجاد شجرة تغطية للبيان التالي باختيار عقدة الجذر A
(15) درجة

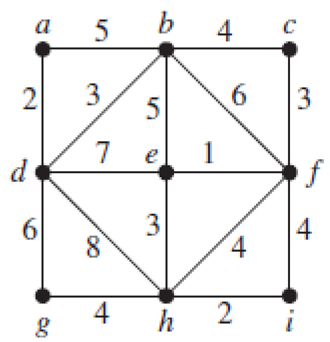


الحل:



توجيه في حال الخطأ: الفقرة 2.4

السؤال الخامس: استخدم خوارزمية كروسكال لإيجاد شجرة التغطية الأصغرية للبيان التالي **(15) درجة**



الحل:

$\{e, f\}, \{a, d\}, \{h, i\}, \{b, d\}, \{c, f\}, \{e, h\}, \{b, c\}, \{g, h\}$

توجيه في حال الخطأ: الفقرة 4.4

السؤال الأول	الاجابة الصحيحة	توجيه في حال الخطأ
1	بيان غير موجه مرتبط لا يحوي دارات بسيطة	الفقرة 1.1
2	وجد مسار واحد فقط بسيط بين أي عقدتين من عقد البيان	الفقرة 1.1
3	الارتفاع الأعظمي لعقد الشجرة	الفقرة 1.1
4	الورقة	الفقرة 1.1
5	شجرة ذات جذر بحيث لكل عقدة أب ولدان على الأكثر	الفقرة 1.1
6	كان مستوى كافة أوراق الشجرة يساوي h أو $h-1$	الفقرة 1.1
7	بيان جزئي من G يحوي كل عقد البيان G	الفقرة 1.4
8	شجرة تغطية لها أصغر مجموع أوزان ممكن للأسهم التي تتألف منها	الفقرة 4.4
9	2^h	الفقرة 3.1
10	شجرة تغطية أصغرية في بيان موزون مرتبط	الفقرة 4.4