الجامعة الافتراضية السورية

SYRIAN VIRTUAL UNIVERSITY

الاحتمالات والاحصاء

الدكتور رامز قدسية

ISSN: 2617-989X

Books

الاحتمالات والإحصاء
الدكتور رامز قدسية

من منشورات الجامعة الافتراضية السورية

الجمهورية العربية السورية 2018

Probability & Statistics
Ramez Koudsieh

Publications of the Syrian Virtual University (SVU)

Syrian Arab Republic, 2018

ISSN: 2617-989X

الفهرس

ISSN: 2617-989X

ISSN: 2617-989X

الفصل الأول: مفاهيم أساسية في الإحصاء

Chapter 1: Basic concepts in statistics

الكلمات المفتاحية:

الإحصاء الوصفي، الإحصاء الاستدلالي، المجتمع، العينة، معطيات كمية، معطيات وصفية، معطيات متقطعة، معطيات مستمرة، وسيط احصائي، الإحصائية، أخذ العينات، العينات الاحتمالية، جدول تكراري، جدول تكراري تراكمي، مدرج تكراري، مضلع تكراري، مخطط صندوقي، رسو بيانية، أعمدة بيانية، مخطط الساق والأوراق، نزعة مركزية، المتوسط، الوسيط، المنوال، التشتت، الانحراف المعياري، المدى، المدى الربيعي، معامل الاختلاف، متراجحة تشيبتشيف، القيم المعيارية.

ملخص:

نهتم في هذا الفصل بتوضيح المفاهيم الأساسية لعلم الإحصاء وأنواع المعطيات وطرق الإحصاء الممكن تطبيقها على كل منها. كما نهتم أيضاً بمصادر الحصول على المعطيات وطرق أخذ العينات والطرق التي تستخدم من أجل تنظيم وإظهار المعطيات. وأخيراً نهتم بدراسة مركز وتشتت المعطيات وهي من الخصائص الهامة جداً للمعطيات التي تساعد على توصيفها واستثمارها.

الأهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- المفاهيم الأساسية في علم الإحصاء
- أنواع المعطيات ومصادر الحصول عليها
- تنظيم المعطيات وعرضها
- مقاييس النزعة المركزية وطرق حسابها (المتوسط، الوسيط، ...)
- مقاييس التشتت وطرق حسابها (المدى، التشتت، ...)

ISSN: 2617-989X

1. مدخل إلى الإحصاء introduction to statistic:

يُعرف علم الإحصاء على أنه ذلك الفرع من العلوم المكون من مجموعة من الطرق الرياضية المستخدمة في جمع وتنظيم وعرض وتلخيص المعلومات والمعطيات ومن ثم تحليلها وفق طرق وأساليب علمية للحصول على استدلالات وقرارات سليمة على ضوء هذا التحليل.

ينقسم علم الإحصاء إلى قسمين أساسيين هما:

الإحصاء الوصفي descriptive or deductive statistics: يهتم بتنظيم المعطيات وتلخيصها وعرضها، والغرض من التنظيم والتلخيص والعرض هو المساعدة على فهم المعطيات. وهو لا يتضمن أي تعميم أو استنتاج من المعطيات.

الإحصاء الاستدلالي inductive statistics or statistical inference: عبارة عن مجموعة من الطرق العلمية لسبر معالم مجتمع بناء على معلومات يتم الحصول عليها من عينة إحصائية مأخوذة وفق طرق إحصائية علمية مناسبة.

1.1. مفاهيم أساسية في علم الإحصاء general concepts in statistics:

1.1.1. المجتمع population:

المجتمع هو المجموعة الكلية من الأشياء (تسمى عناصر المجتمع) المراد دراستها والتي لها خصائص مشتركة حيث سيتم عمل بعض الاستدلالات والنتائج حولها. ونسمي عدد أفراد المجتمع بحجم المجتمع ويرمز له عادة بالرمز N. والمجتمع إما أن يكون محدوداً (منتهياً) مثل مجتمع طلاب كلية الجامعة الافتراضية السورية، أو غير محدود (غير منته) مثل المجتمع المكون من النجوم في السماء.

2.1.1. العينة sample:

العينة هي مجموعة مكونة من عدد محدد من أفراد المجتمع يتم اختيارهم بطريقة مناسبة بحيث تمثل المجتمع تمثيلاً جيداً وذلك لدراسة صفات المجتمع إذ يُستدل بصفات العينة على صفات المجتمع. ونسمي عدد أفراد العينة بحجم العينة sample size ويرمز لها عادة بالرمز n.

قد تكون الحاجة ضرورية لأخذ عينة بدلاً من دراسة المجتمع كله، على سبيل المثال أخذ عينة من دم الإنسان لفحصها حيث أننا لا نستطيع فحص كل دمه لأن ذلك يؤدي إلى موته. كذلك قد تؤدي دراسة المجتمع كله إلى فقدان عناصره أو إتلافها ومن هنا يجب أخذ عينه صغيرة منها، على سبيل المثال عند فحص كمية من البيض نأخذ عينة منها ونقوم بكسرها لنرى فيما إذا كان البيض سليماً أم لا.

3.1.1. المعطيات data:

هي مجموعة المشاهدات أو الملاحظات المأخوذة من الدراسة الإحصائية. ويمكن تقسيم المعطيات إلى نوعين:

- **معطيات كمية** وتتألف من أرقام تمثل عدد أو قياس ما، مثل معطيات أطوال مجموعة من الأشخاص وتقاس بالسنتيمتر، رواتب الموظفين وتقاس بالليرة السورية. ويمكن تقسيم المعطيات الكمية إلى نوعين:
  - **معطيات متقطعة** وهي معطيات تنتج عندما يكون عدد القيم الممكنة للمعطيات هو إما عدد محدود أو قابل للعد، مثل علامات طالب في الجامعة الافتراضية.
  - **معطيات مستمرة** وهي معطيات تنتج عندما يكون عدد القيم الممكنة للمعطيات عدد غير محدود وغير قابل للعد (مجال مستمر)، مثل درجات الحرارة على مدار السنة لمدينة دمشق.

- **معطيات وصفية** حيث يمكن تقسيمها إلى فئات تتميز فيما بينها ببعض الخصائص غير الرقمية، مثل معطيات المستوى التعليمي (أمّي أو يقرأ ويكتب: ابتدائية، متوسطة، ثانوية، جامعية، أعلى من جامعية)، معطيات الحالة الاجتماعية (متزوج أو أعزب أو أرمل أو مطلق)، معطيات الجنس (ذكر أو أنثى) لمجموعة من الأشخاص.

4.1.1. المتحول variable:

المتحول هو مقدار كمي أو وصفي ويستخدم لقياس خاصية أو مميزة معينة لعناصر المجتمع أو العينة. يتم قياس المتحول على أفراد المجتمع أو العينة وتتغير قيمته من فرد إلى آخر. من أمثلة المتحولات: طول الشخص، عدد أولاد الشخص (متحول كمي)، فصيلة الدم للشخص، المستوى التعليمي للشخص (متحول وصفي).

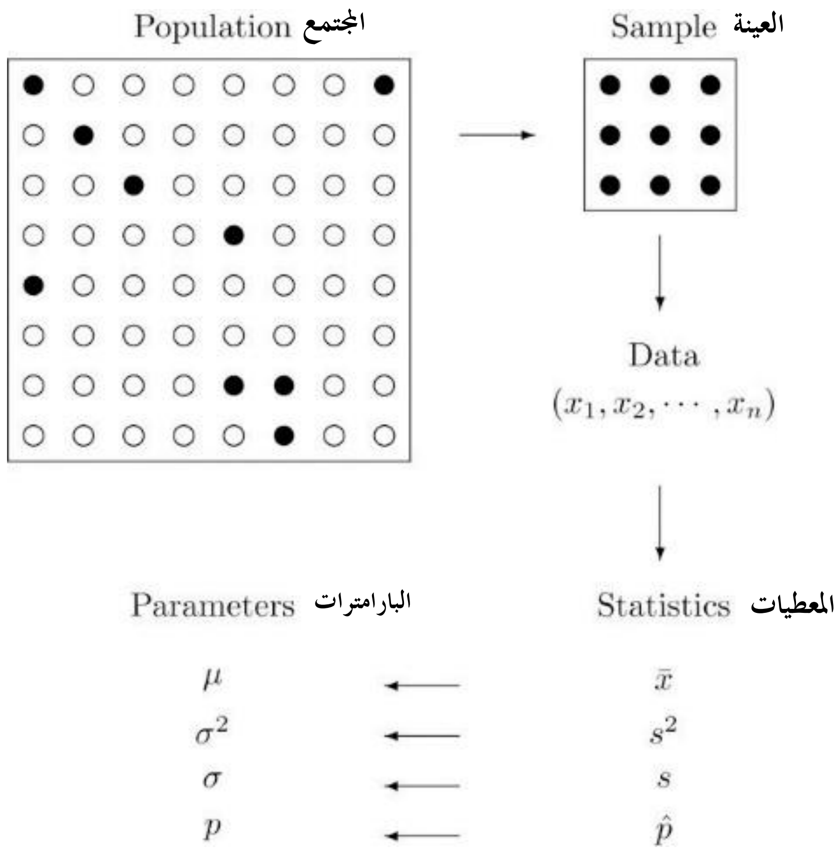
5.1.1. المعلمة (البارامتر أو الوسيط) parameter:

المعلمة هي سمة أو خاصية رقمية تصف المجتمع، وبما أننا لا نستطيع أخذ كل عينات المجتمع فإن المعلمة غير معروفة. المعلمات هي قيم محددة fixed (حتى لو كنا لا نعرفهم). مثال متوسط العمر في دولة معينة أو نسبة الذين يدخنون بصفة دائمة في مجتمع معين.

6.1.1. الإحصائية statistic:

الإحصائية هي سمة أو خاصية رقمية تصف عينة من المجتمع. بالطبع عينات مختلفة تُنتج إحصائيات مختلفة المعلمات. مثال متوسط العمر لعينة مكونة من 500 شخص في دولة معينة أو نسبة الذين يدخنون بصفة دائمة لعينة مكونة من 200 شخص في مجتمع معين.

إن العلاقة بين المجتمع قيد الدراسة والعينة المأخوذة من هذا المجتمع ربما هي أهم مفهوم في الإحصاء. هذه العلاقة يبينها الشكل التالي:



2.1. تجميع المعطيات collecting data:

تعتبر طرق تجميع (تحصيل) المعطيات من أهم المراحل التي يعتمد عليها البحث الإحصائي، كما أن تجميع المعطيات بأسلوب علمي صحيح، يترتب عليه الوصول إلى نتائج دقيقة في التحليل. هناك مصدرين للحصول منها على المعطيات هما:

- **المصادر الأولية (الميدانية):** وهي المصادر التي نحصل منها على المعطيات بشكل مباشر، حيث يقوم الباحث نفسه بجمع المعطيات من ميدان المعرفة أو الدراسة التي يهتم بها، فعندما يهتم الباحث بجمع معطيات عن الأسرة، يقوم بإجراء مقابلة مع رب الأسرة ويتم الحصول منه مباشرة على معطيات خاصة بأسرته، مثل معطيات المنطقة التابع لها، والحي الذي يسكن فيه، والجنسية، والمهنة، والدخل الشهري، وعدد أفراد الأسرة، والمستوى التعليمي، ... وهكذا.

يتميز هذا النوع من المصادر بالدقة والثقة في المعطيات، لأن الباحث هو الذي يقوم بنفسه بجمع المعطيات، ولكن من مساوئها أنها تحتاج إلى وقت ومجهود كبير، كما أنها مكلفة من الناحية المادية.

- **المصادر الثانوية (التاريخية):** وهي المصادر التي نحصل منها على المعطيات بشكل غير مباشر، بمعنى آخر يتم الحصول عليها بواسطة أشخاص آخرين أو أجهزة أو هيئات رسمية متخصصة، مثل سجلات المواليد والوفيات والسجلات الصادرة عن هيئة الأمم والبنك الدولي وغيرها. على سبيل

المثال نستطيع معرفة الحاصلين على شهادة الثانوية العامة في سورية من خلال الاطلاع على السجلات الخاصة بإدارة الامتحانات.

من مزايا هذا النوع من المصادر، توفير الوقت والجهد والمال، إلا أن درجة ثقة الباحث فيها ليست بنفس الدرجة في حالة المصادر الأولية.

3.1. إجرائيات أخذ العينات sampling procedures:

العينة السليمة هي العينة الممثلة للمجتمع الذي اختيرت منه، وعملية أخذ العينات بطريقة غير مناسبة واحدة من أسوأ الأخطاء الممكن ارتكابها. ويمكن تقسيم العينات وفقا لأسلوب اختيارها إلى نوعين هما العينات الاحتمالية والعينات غير الاحتمالية.

1.3.1. العينات الاحتمالية probability sampling:

هي العينات التي يتم اختيار عناصرها وفقا لقواعد الاحتمالات، بمعنى آخر هي التي يتم اختيار عناصرها من مجتمع الدراسة بطريقة عشوائية، بهدف تجنب التحيّز الناتج عن اختيار العناصر، ومن أهم أنواع العينات الاحتمالية ما يلي:

1. **العينة العشوائية البسيطة simple random sample:** تؤدى هذه الطريقة إلى احتمال اختيار أي عنصر من أفراد المجتمع كعنصر من عناصر العينة، كما أن لكل عنصر فرصة متساوية لاختياره ضمن العينة.
2. **العينة العشوائية المنتظمة systematic random sample:** يتم فيها اختيار الحالة الأولى من العينة بطريقة عشوائية ثم يتم اختيار بقية الحالات على أبعاد رقمية منتظمة أو متساوية بين الحالات.
3. **العينة العشوائية الطبقية stratified random sample:** يتم في هذه الطريقة تقسيم المجتمع إلى عدة مجموعات نسمي كل منها طبقة تشترك بنفس الخواص (الجنس، العمر، ...).
4. **العينة العشوائية العنقودية cluster random sample:** يتم في هذه الطريقة تقسيم المجتمع إلى مقاطع، بعدها يتم اختيار بعض هذه المقاطع عشوائياً ومن ثم نختار جميع العناصر من تلك المقاطع.

2.3.1. العينات غير الاحتمالية non probability sampling:

هي العينات التي يتم اختيار عناصرها بطريقة غير عشوائية، حيث يقوم الباحث باختيار عناصر العينة بالصورة التي تحقق الهدف من المعاينة، مثل اختيار عينة من المزارع التي تنتج التمور من النوع السكري، وأهم أنواع العينات غير الاحتمالية:

1. **العينة العمدية purposive sample:** يتم اختيار الحالات بناء على هدف خاص لدى الباحث. مثال تحليل محتوى مجلة محددة، دراسة متعمقة لبعض حالات التخلف العقلي.

2. **العينة الحصصية quota sample:** تتطلب معرفة مسبقة لمجتمع الدراسة من حيث تكوين المجموعات داخله، وعملية الاختيار في كل مجموعة لا ترتبط بقواعد معينة ولكن لقناعة الباحث بشرط أن تمثل كل مجموعة في العينة حسب تمثيلها في مجتمع الدراسة. مثال تحديد الباحث فئات المجتمع (ذكور وإناث) ثم يختار عدد ثابت من كل فئة إذ يقرر اختيار عشرة ذكور وخمس إناث.

2. تنظيم المعطيات وعرضها organization and display of data:

بعد تجميع المعطيات سواء من المصادر التاريخية أو المصادر الميدانية فإنها تكون معطيات أولية غير منظمة تصعب دراستها أو استنتاج أي معلومة مفيدة منها. ولذلك تدعو الحاجة إلى تنظيم المعطيات وتلخيصها بصورة يسهل فهمها، ولتوضيح ذلك نعتبر المثال التالي:

مثال 1: ليكن لدينا علامات طلاب الجامعة الافتراضية في مادة الإحصاء والاحتمالات التالية:

23, 50, 38, 42, 63, 75, 10, 33, 26, 39, 35, 47,
43, 52, 56, 59, 64, 77, 15, 21, 51, 54, 72, 68,
36, 65, 52, 60, 27, 34, 47, 48, 55, 58, 59, 62,
51, 48, 50, 41, 57, 65, 54, 43, 56, 44, 30, 46,
67, 53

المعطيات السابقة لا يمكن دراستها والاستفادة منها. فعلى سبيل المثال ما هو عدد الطلاب الناجحين (علامتهم فوق ال 60)؟ أو ما هو عدد الطلاب الذين تتراوح علامتهم بين 65 و75 درجة؟ بالتالي فإن أول مرحلة من مرحلة من التحليل الاحصائي هي تنظيم هذه المعطيات في جداول تكرارية.

1.2.الجداول التكرارية frequency distributions:

الجدول التكراري عبارة عن جدول يلخص المعطيات فهو يبين تكرار كل مفردة من مفردات العينة في حال كان عدد المفردات ذات القيم المختلفة غير كبير.

مثال 2: أوجد الجدول التكراري لعينة من القياسات تمثل طول الساق ل 10 أنواع من النباتات بالسنتيمتر:

. 62, 59, 68, 62, 58, 59, 65, 62, 65,65

الحل:

طول الساق	التكرار
58	1
59	2
62	3
65	3
68	1
المجموع	**10**

أما في الحالة التي يكون عدد المفردات المختلفة كبير يتم توزيع قيم المفردات على فئات classes ويحدد عدد المعطيات التي تنتمي إلى كل فئة.

- نسمي عدد المعطيات التي تنتمي إلى كل فئة بتكرار frequency تلك الفئة، ويرمز للتكرار بالرمز f
- نسمي الحد الأدنى للفئة أقل قيمة يمكن أن تنتمي إلى تلك الفئة.
- نسمي الحد الأعلى للفئة أكبر قيمة يمكن أن تنتمي إلى تلك الفئة.

طريق تكوين الفئات المنتظمة للمعطيات الكمية:

الهدف من تكوين الفئات هو تجميع القيم المتقاربة في مجموعات وحيث لا توجد قواعد ثابتة لتحديد طول الفئات ولا عددها، وعادة يتراوح عدد الفئات من 5 إلى 20 فئة. ولتحديد عدد الفئات وطول كل فئة يعتمد على الخبرة، هذا ويمكن استخدام العلاقة التالية في إيجاد العدد الأعظمي لعدد الصفوف (n عدد المعطيات):

$$C = 3.3\log(n) \approx \sqrt{n}$$

لتوضيح كيفية تكوين الفئات المنتظمة نأخذ معطيات المثال الأول (علامات طلاب الجامعة الافتراضية في مادة الإحصاء والاحتمالات):

- نختار عدد الفئات $C = 3.3\log(50) \approx 6.66$ بالتالي نأخذ $C = 7$.
- نحسب مدى المعطيات (أكبر قيمة − أصغر قيمة) Range=77−10=67.
- نحسب طول الفئة بتقسيم المدى على عدد الفئات، أي L = 67/7 = 9.6 نقربها فتصبح 10.
- نختار أصغر قيمة لتكون بداية الفئة الأولى (10 في مثالنا)، نضيف إليها طول الفئة فنحصل على بداية الفئة الثانية (في مثالنا 20 = 10+10) وفي كل مرة نضيف إلى بداية فئة ما بد طول الفئة نحصل على بداية الفئة التي تليها.
- لإيجاد نهاية كل فئة نضيف إلى بدايتها طول الفئة مطروحاً منه واحد (في مثالنا نهاية الفئة الأولى هي 19).

مثال 3: ليكن لدينا علامات طلاب الجامعة الافتراضية في مادة الإحصاء والاحتمالات السابقة. الجدول التالي يبين الجدول التكراري لعلامات الطلاب ($n = 50$):

العلامة (M)	التكرار
$10 \le M < 20$	2
$20 \le M < 30$	4
$30 \le M < 40$	7
$40 \le M < 50$	10
$50 \le M < 60$	16
$60 \le M < 70$	8
$70 \le M < 80$	3
المجموع	**50**

ملاحظة 1: مجموع تكرار الفئات لعينة من المعطيات يساوي حجم العينة.

ويمكن بالاعتماد على جدول التوزيع التكراري الحصول على الجداول التالية:

1. **جدول التوزيع التكراري النسبي relative frequency distribution**، حيث يتم تعريف التكرار النسبي للفئة بالعلاقة التالية:

$$\text{Relative frequency} = \text{frequency}/\text{sample size} = f/n$$

مثال 4: ليكن لدينا علامات طلاب الجامعة الافتراضية في مادة الإحصاء والاحتمالات السابقة. الجدول التالي يبين الجدول التكراري النسبي لعلامات الطلاب:

التكرار النسبي	العلامة (M)
0.04	$10 \leq M < 20$
0.08	$20 \leq M < 30$
0.14	$30 \leq M < 40$
0.2	$40 \leq M < 50$
0.32	$50 \leq M < 60$
0.16	$60 \leq M < 70$
0.06	$70 \leq M < 80$
1	المجموع

2. **جدول التوزيع التكراري المئوي percentage frequency distribution**، حيث يتم الحصول على التكرار المئوي للفئة بضرب التكرار النسبي بالعدد 100، أي:

$$\text{Percentage frequency} = \frac{f}{n} * 100$$

مثال 5: ليكن لدينا علامات طلاب الجامعة الافتراضية في مادة الإحصاء والاحتمالات السابقة. الجدول التالي يبين الجدول التكراري المئوي لعلامات الطلاب:

التكرار المئوي	العلامة (M)
4%	$10 \leq M < 20$
8%	$20 \leq M < 30$
14%	$30 \leq M < 40$
20%	$40 \leq M < 50$

$50 \le M < 60$	32%
$60 \le M < 70$	16%
$70 \le M < 80$	6%
المجموع	**100%**

تعريف 1 (مركز الفئة): يتم تعريف مركز الفئة midpoint بالعلاقة التالية:

مركز الفئة = (الحد الأعلى للفئة + الحد الأدنى للفئة)/2

يمكن تجميع الجداول السابقة للمعطيات في جدول واحد يشمل الفئات ومراكز الفئات والتكرار النسبي والتكرار المئوي كما يبنه الجدول التالي لتوزيع علامات الطلاب:

العلامة (M)	مركز الفئة	التكرار	التكرار النسبي	التكرار المئوي
$10 \le M < 20$	14.5	2	0.04	4%
$20 \le M < 30$	24.5	4	0.08	8%
$30 \le M < 40$	34.5	7	0.14	14%
$40 \le M < 50$	44.5	10	0.2	2%
$50 \le M < 60$	54.5	16	0.32	32%
$60 \le M < 70$	64.5	8	0.16	16%
$70 \le M < 80$	74.5	3	0.06	6%
المجموع		**50**	**1**	**100%**

3. جدول التوزيع التكراري التراكمي: cumulative frequency distribution

في كثير من الأحيان نحتاج للإجابة على التساؤلات التالية: ما هو عدد الطلاب الذين تكون علامتهم أصغر من قيمة معينة؟ أو ما هو عدد الطلاب الذين تكون علامتهم أكبر من قيمة معينة؟ أو ما هو عدد الطلاب الذين تكون علامتهم محصورة بين قيمتين محددتين؟

للإجابة على تلك التساؤلات يتم استخدام ما يسمى جداول التوزيع التراكمية وهي نوعان الصاعدة والهابطة.

جدول التوزيع التكراري التراكمي الصاعد:

نعرف التكرار التراكمي الصاعد للفئة على أنه عدد المعطيات التي تقل عن الحد الأعلى للفئة، وهي تساوي إلى تكرار الفئة مضافاً إليها مجموع تكرارات الفئات السابقة لها.

يتم استخدام جدول التكرار التراكمي الصاعد لإيجاد عدد المعطيات التي تكون قيمها أصغر من قيمة معينة، كما يستخدم أيضاً لإيجاد عدد المعطيات التي قيمها محصورة بين قيمتين محددتين.

مثال 6: ليكن لدينا علامات طلاب الجامعة الافتراضية في مادة الإحصاء والاحتمالات السابقة. أوجد جدول التكرار التراكمي الصاعد لعلامات الطلاب.

الحل:

عدد الطلاب الذين علامتهم أقل من 10 يساوي 0

عدد الطلاب الذين علامتهم أقل من 19 يساوي 2

عدد الطلاب الذين علامتهم أقل من 29 يساوي $6 = 4 + 2$

عدد الطلاب الذين علامتهم أقل من 39 يساوي $13 = 7 + 4 + 2$

...

بوضع النتائج السابقة في جدول نحصل على جدول التكرار التراكمي الصاعد لعلامات الطلاب.

العلامة	التكرار التراكمي الصاعد
أقل من 10	0
أقل من 20	2
أقل من 30	6
أقل من 40	13
أقل من 50	23
أقل من 60	39
أقل من 70	47
أقل من 80	50
المجموع	**50**

يمكن من الجدول السابق استنتاج أن عدد الطلاب الذين علامتهم أقل من 60 هو 39، وأن عدد الطلاب الذين تتراوح علامتهم بين 40 و70 هو $70 = 13 - 47$

جدول التوزيع التكراري التراكمي الهابط:

نعرف التكرار التراكمي الهابط للفئة على أنه عدد المعطيات التي تزيد عن أو تساوي الحد الأدنى للفئة.

مثال 7: ليكن لدينا علامات طلاب الجامعة الافتراضية في مادة الإحصاء والاحتمالات السابقة. أوجد جدول التكرار التراكمي الهابط لعلامات الطلاب.

الحل:

عدد الطلاب الذين علامتهم أكبر أو تساوي 10 يساوي 50

عدد الطلاب الذين علامتهم أكبر أو تساوي 20 يساوي $48 = 2 - 50$

عدد الطلاب الذين علامتهم أكبر أو تساوي 30 يساوي $44 = 4 - 2 - 50$

عدد الطلاب الذين علامتهم أكبر أو تساوي 30 يساوي 37 = 7 4 – 2 – 50

...

بوضع النتائج السابقة في جدول نحصل على جدول التكرار التراكمي الهابط لعلامات الطلاب.

العلامة	التكرار التراكمي الهابط
أكبر أو يساوي 10	50
أكبر أو يساوي 20	48
أكبر أو يساوي 30	44
أكبر أو يساوي 40	37
أكبر أو يساوي 50	27
أكبر أو يساوي 60	11
أكبر أو يساوي 70	3
أكبر أو يساوي 80	0
المجموع	**50**

2.2. العرض البياني graphical representation:

إن تنظيم وتلخيص وعرض المعطيات على شكل جداول تكرارية يعطي صورة شاملة وواضحة عن المعطيات الأولية وتوزيعاتها التكرارية، ولكن عرض هذه الجداول التكرارية بشكل بياني يعطي فكرة أوضح وأسرع عن أشكال التوزيعات التكرارية.

يتم عرض التوزيعات التكرارية بيانياً باستخدام العديد من المعطيات graphs أهمها:

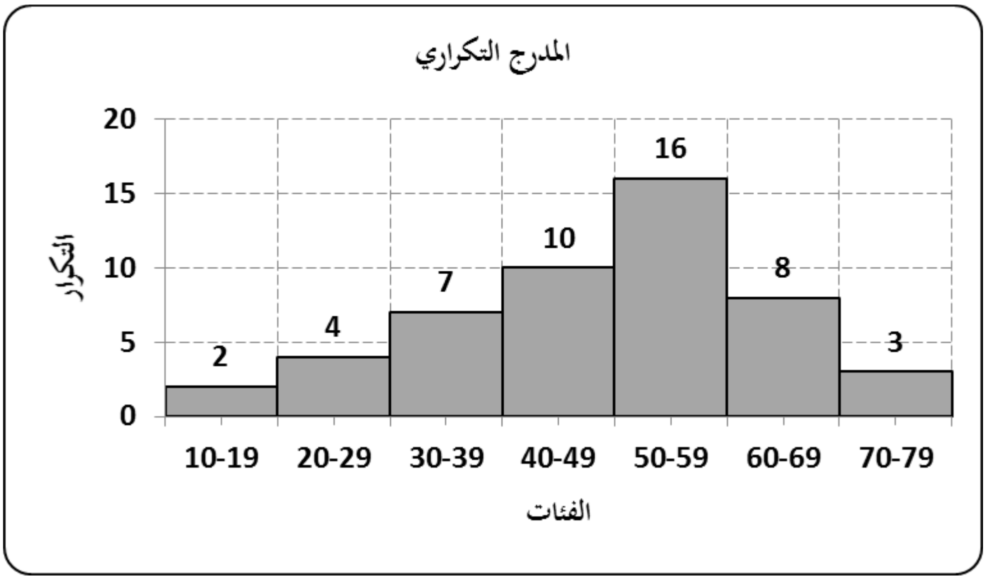
- المدرج التكراري
- المضلع التكراري
- المنحني التكراري
- المنحني التكراري التراكمي الصاعد والهابط.

1.2.2. المدرج التكراري histogram:

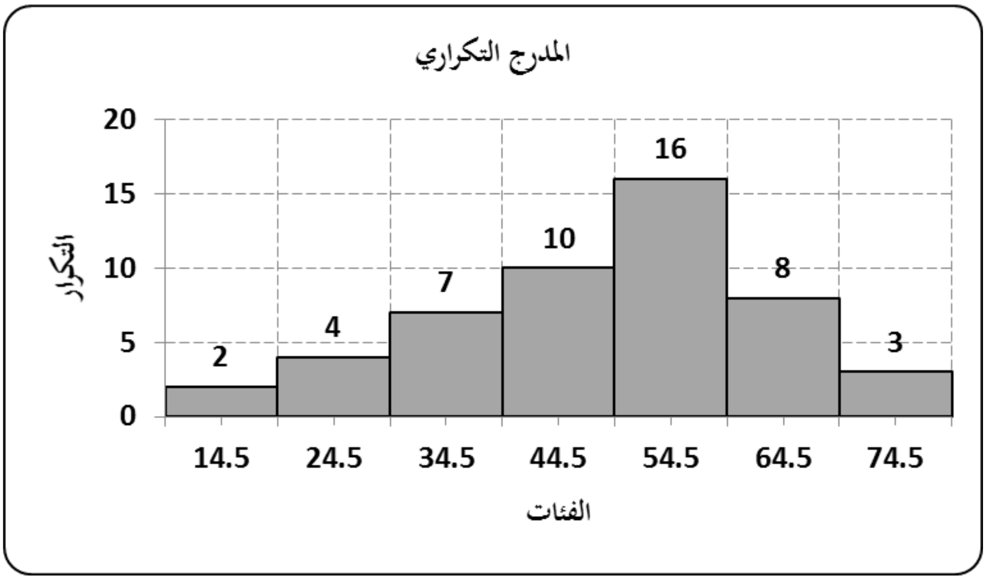
يمثل المحور الأفقي الفئات ويمثل المحور الشاقولي تكرارها. نرسم مستطيلات متلاصقة على الفئات قاعدتها طول الفئة وارتفاعها عبارة عن تكرار هذه الفئات.

مثال 8: ليكن لدينا علامات طلاب الجامعة الافتراضية في مادة الإحصاء والاحتمالات السابقة. أوجد المدرج التكراري لعلامات الطلاب.

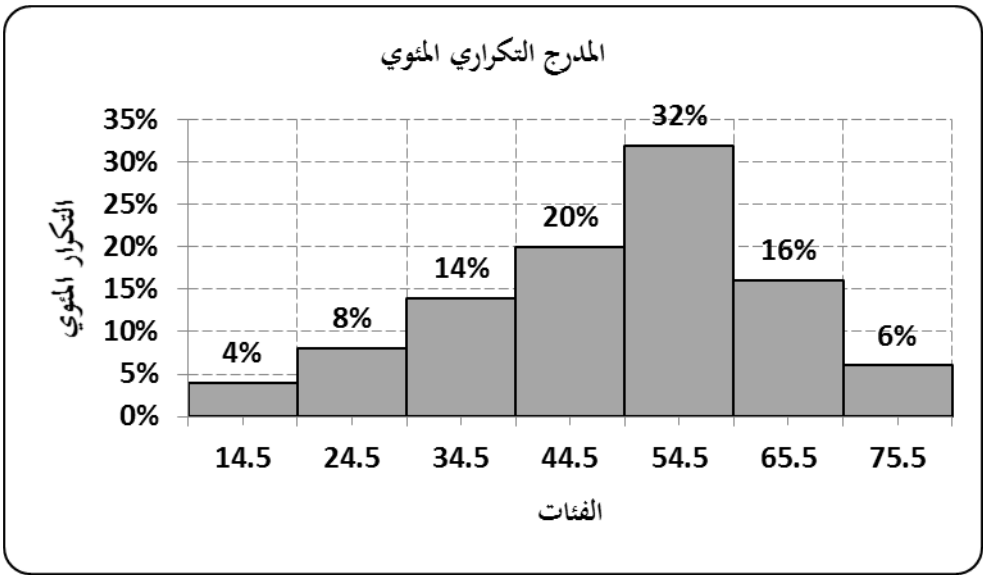
الحل:



من الملاحظ أن كل مستطيل من المدرج التكراري محدد بالحد الأدنى والحد الأعلى للفئة الموافقة. ولكن في كثير من الأحيان يتم استخدام نقطة المنتصف للفئة بدلاً من استخدام الحدين الأدنى والأعلى للفئة كما هو مبين في الشكل التالي:



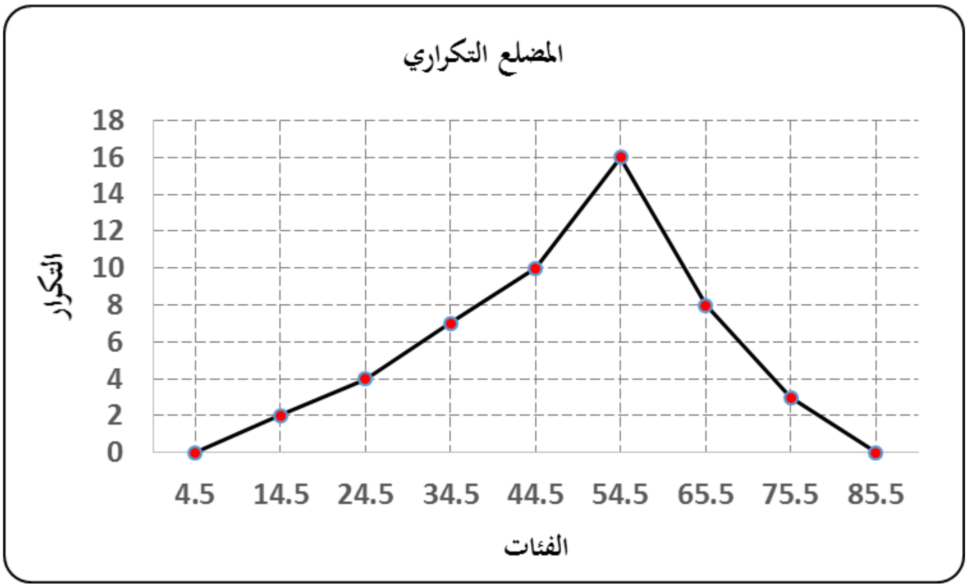
من الممكن أيضاً استخدام التكرار المئوي للفئات لنحصل عنها على المدرج التكراري المئوي كما يبينه الشكل التالي:



.2.2.2 المضلع التكراري polygon:

يمثل المحور الأفقي الفئات ويمثل المحور الشاقولي تكرارها كما هو الحال بالنسبة للجدول التكراري ولكن بدلاً من رسم مستطيل يمثل ارتفاع التكرار نضع نقطة واحدة عند منتصف الفئة ارتفاعها يمثل التكرار. وفي الأخير نقوم بوصل النقاط التي حصلنا عليها بخطوط مستقيمة فنحصل على المضلع التكراري.

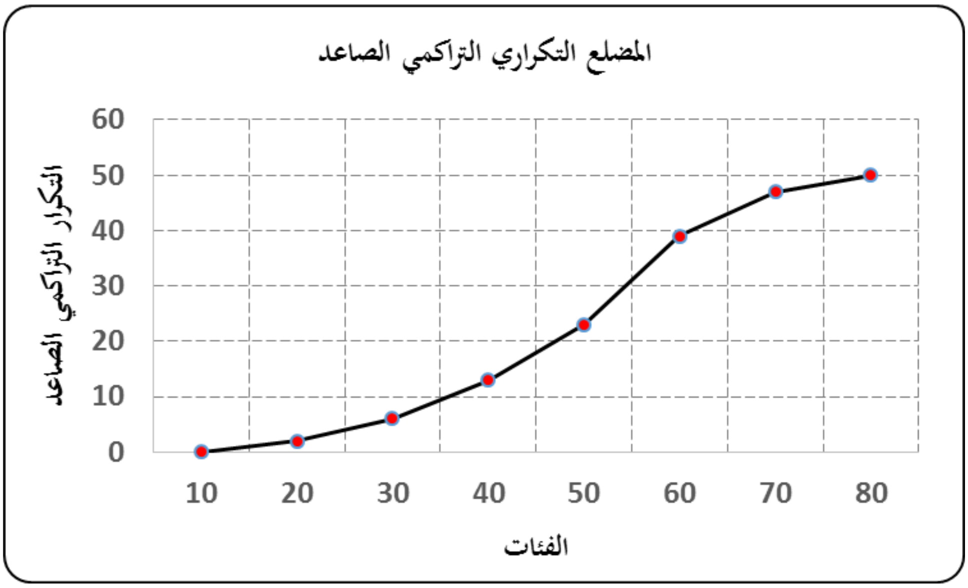
مثال 9: ليكن لدينا علامات طلاب الجامعة الافتراضية في مادة الإحصاء والاحتمالات السابقة. أوجد المضلع التكراري لعلامات الطلاب.



.3.2.2 المنحني التكراري التراكمي cumulative frequency curve:

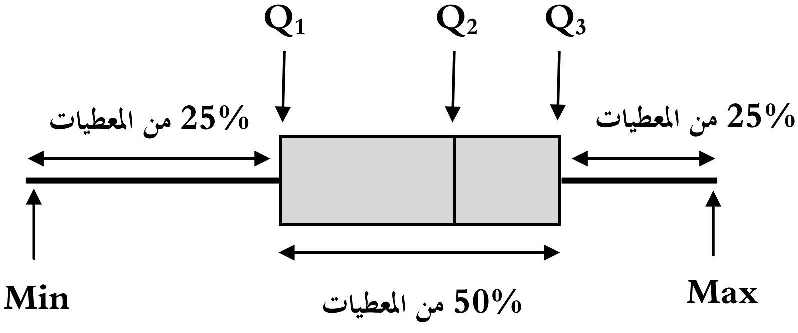
وهي نوعان تكرارية تراكمية صاعدة وتكرارية تراكمية هابطة. في كلا الحالتين، يمثل المحور الأفقي الفئات بحدودها الدنيا ويمثل المحور الشاقولي التكرار التراكمي الصاعد للفئات (الصاعدة) أو التكرار التراكمي الصاعد للفئات (الهابطة).

مثال 10: ليكن لدينا علامات طلاب الجامعة الافتراضية في مادة الإحصاء والاحتمالات السابقة. أوجد المنحني التكراري التراكمي لعلامات الطلاب.



4.2.2. المخطط الصندوقي box plot:

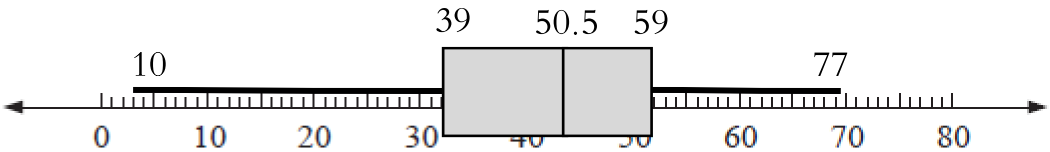
المخطط الصندوقي هو طريقة للتمثيل البياني للمعطيات العينة من خلال تمثيل القيم الإحصائية الخمس المحددة للعينة وهي: القيمة الصغرى min، الربيع الأول (الأدنى) Q_1 ويساوي القيمة التي يسبقها ربع المعطيات (أو 25% من المعطيات)، الوسيط median Q_2 ويساوي القيمة التي يسبقها نصف المعطيات (أو 50% من المعطيات)، الربيع الثالث (الأعلى) Q_3 ويساوي القيمة التي يسبقها ثلاثة أرباع المعطيات (أو 75% من المعطيات)، والقيمة العظمى max.



مثال 11: ليكن لدينا علامات طلاب الجامعة الافتراضية في مادة الإحصاء والاحتمالات السابقة. أوجد المخطط الصندوقي لعلامات الطلاب.

الحل:

$$Min=10,\ Max=77,\ Q_1=39,\ Q_2=50.5,\ Q_3=59$$



3.2. الرسوم البيانية chart:

تُستخدم الرسوم البيانية المختلفة أكثر الأحيان لتوضيح الجداول الإحصائية وجعل الرؤية للعلاقة بين المتغيرات أكثر سهولة. أهم الرسوم المستخدمة هي الخط البياني والأعمدة البيانية والرسوم الدائرية.

1.3.2. الخط البياني line chart:

الخط البياني عبارة عن خط منكسر يمثل عادة مسار المعطيات تم تحصيلها على فترات زمنية مختلفة. يمثل المحور الأفقي في هذه الحالة الزمن ويمثل المحور الشاقولي قيم المعطيات.

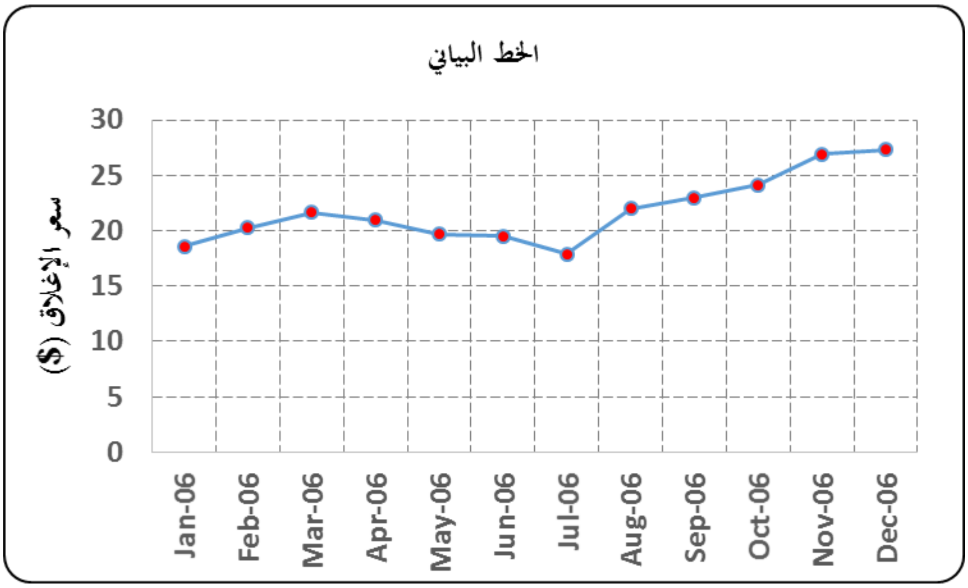
إذا كان لدينا أكثر من ظاهرة وقراءات قيم المعطيات لكل منها مأخوذة في الفترة الزمنية نفسها ويراد المقارنة بينها فإننا نرسم أكثر من خط للظواهر على نفس الرسمة.

مثال 12: تمثل معطيات الجدول التالي سعر إغلاق أسهم إحدى الشركات الأميركية بنهاية كل شهر من شباط 2006 ولغاية كانون الأول من 2006:

الشهر	سعر الإغلاق	الشهر	سعر الإغلاق
1/06	18.57	7/06	17.88
2/06	20.24	8/06	21.99
3/06	21.67	9/06	22.98
4/06	20.95	10/06	24.13
5/06	19.68	11/06	26.91
6/06	19.53	12/06	27.33

أوجد الخط البياني لمعطيات الجدول المذكور.

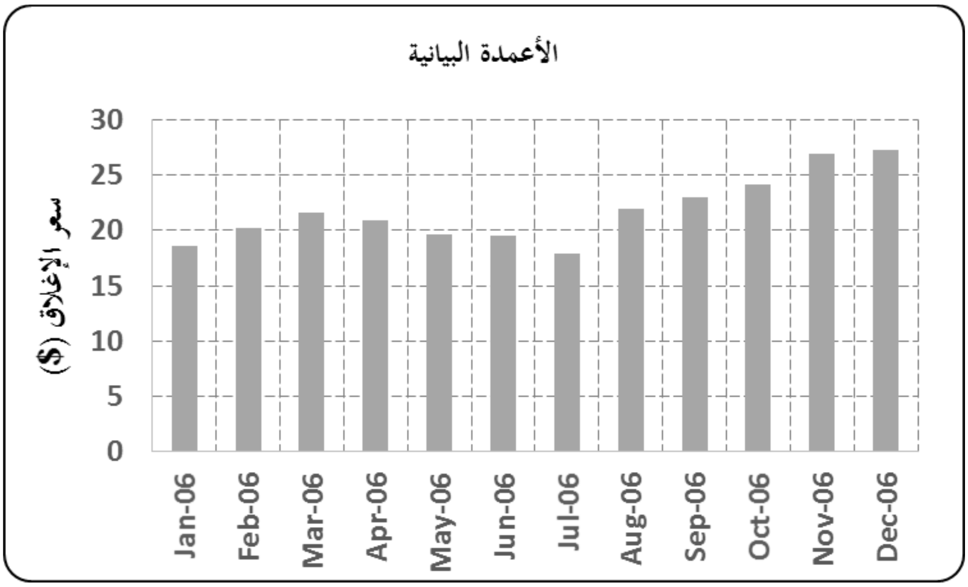
الحل:



2.3.2. الأعمدة البيانية bar chart:

الأعمدة البيانية عبارة عن مستطيلات عرضها متساوي وارتفاعها تمثل قيم المعطيات. وتستخدم عادة لتمثيل ظاهرة واحدة (الأعمدة البيانية البسيطة)، أو للمقارنة بين ظاهرتين أو مجموعة من الظواهر ومقارنة التطور فيما بينها (الأعمدة البيانية المزدوجة). كما أنه ليس من الضروري أن تكون قراءات قيم المعطيات مقاسة مع مرور الزمن.

مثال 13: أوجد الأعمدة البيانية لمعطيات الجدول السابق.

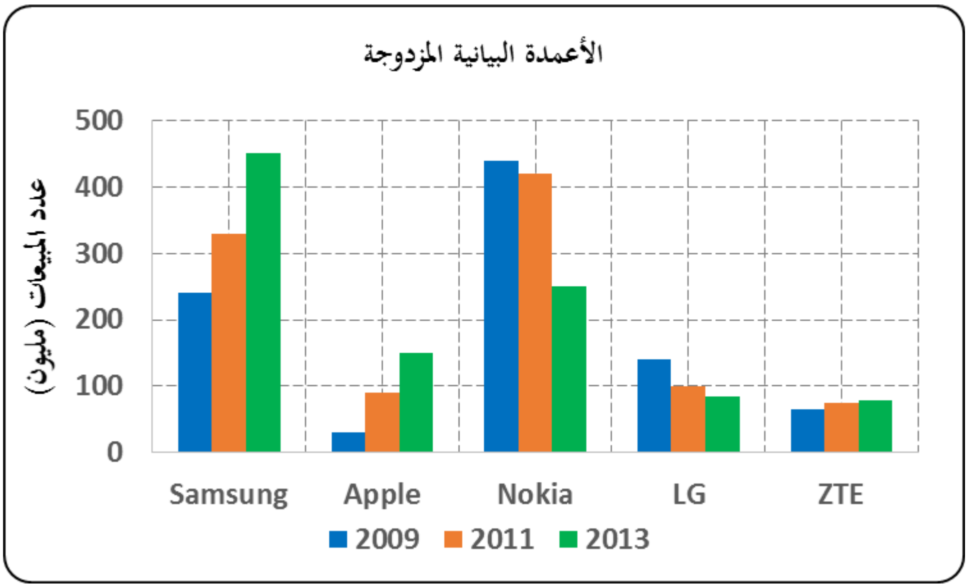


مثال 14: تمثل معطيات الجدول التالي مبيعات أشهر 5 شركات للأجهزة الخلوية بين الأعوام 2009 و2013.

الشركة/العام	2009	2011	2013
Samsung	240	330	450
Apple	30	90	150
Nokia	440	420	250
LG	140	100	85
ZTE	65	75	78

أوجد الأعمدة البيانية المزدوجة لمعطيات الجدول السابق.

الحل:



3.3.2.الرسوم الدائرية Pie chart:

الرسوم الدائرية عبارة عن دائرة يتم تقسيمها إلى قطاعات زاوية sectors، وكل قطاع زاوي يمثل فئة معينة من المعطيات ومساحة القطاع الزاوي متناسبة مع تكرار تلك الفئة f . ويتم حساب القطاع الزاوي لفئة معينة بالعلاقة التالية:

$$Angle = 360\text{x}\frac{f}{n}$$

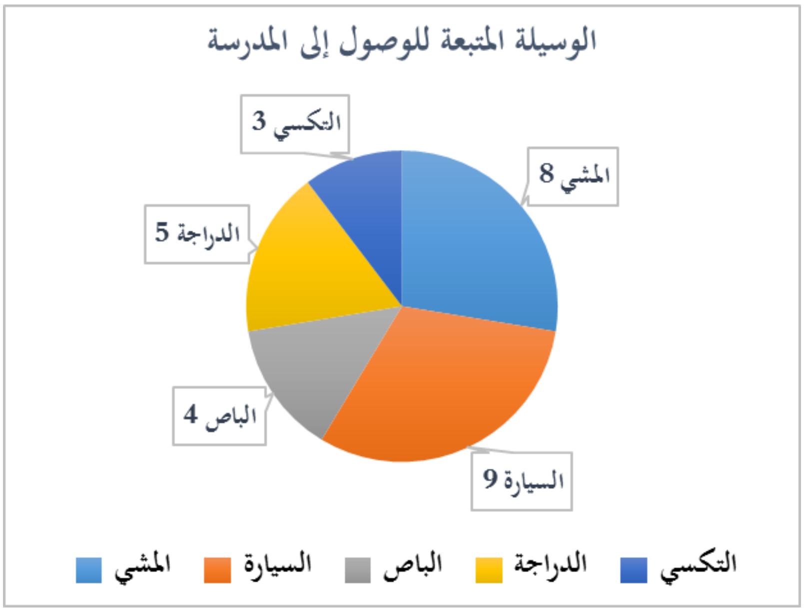
مثال 15: سئل طلاب صف في المدارس عن كيفية الوصول إلى المدرسة (الوسيلة المستخدمة). تم تجميع الأجوبة وحصلنا على الجدول التالي:

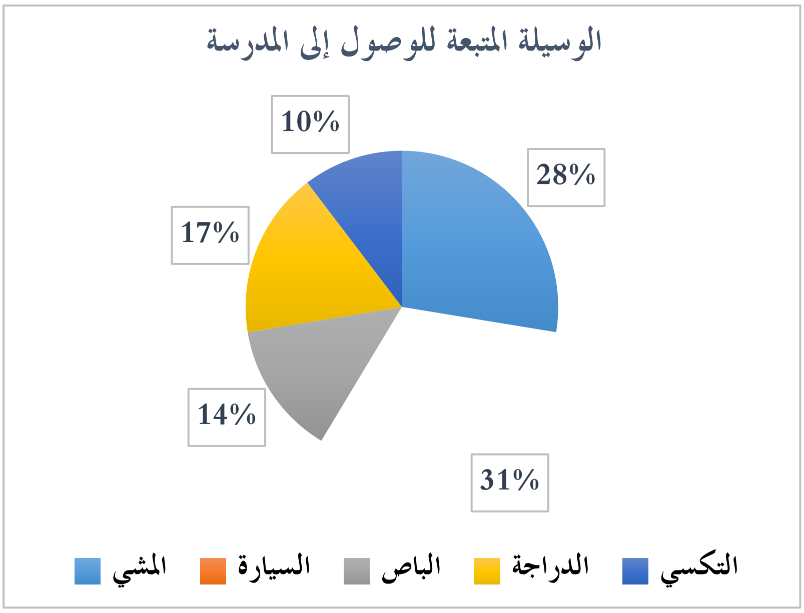
عدد الطلاب	الوسيلة المستخدمة

المشي	8
السيارة	9
الباص	4
الدراجة	5
التكسي	3

أوجد الرسوم الدائرية الموافقة.

الحل:





ISSN: 2617-989X

4.3.2. مخطط الساق والأوراق stem–and–leaf plots:

مخطط الساق والأوراق هو طريقة أخرى لتمثيل المعطيات الكمية بيانياً، فهي تساعد على تكوين فكرة جيدة عن المدى الذي تغطيه المعطيات وكيفية تمركزها. يتم تمثيل كل مفردة على شكل ورقة وساق، حيث يتم تشكيل الورقة من آخر رقم على اليمين من قيمة المفردة والساق يتكون من بقية الأرقام. على سبيل المثال القيمة 147 الورقة هي الرقم 7 والساق هو الرقم 14، أما بالنسبة للقيمة 5.8 الورقة هي الرقم 8 والساق هو الرقم 5.

مثال 16: ليكن لدينا علامات طلاب الجامعة الافتراضية في مادة الإحصاء والاحتمالات السابقة. أوجد مخطط الساق والأوراق لعلامات الطلاب.

الحل:

من الملاحظ أن علامات الطلاب تتغير بين 10 و77، بالتالي نشكل الساق من الأرقام 1 إلى 7 كما هو مبين في الشكل أقصى اليسار.

نستعرض القيم واحدة تلك الأخرى مثلاً نبدأ بالقيمة 23 فنضع الرقم 3 أمام الرقم 2 الموجود في الساق. وهكذا نستمر حتى تنتهي القيم ويكون الناتج كما هو مبين في الشكل في الوسط.

ضمن كل ساق نعيد ترتيب الأوراق تصاعدياً كما هو مبين في الشكل أقصى اليمين

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

1	0 5
2	3 6 1 7
3	8 3 9 5 6 4 0
4	2 7 3 7 8 8 1 3 4 6
5	0 2 6 9 1 4 2 5 8 9 1 0 7 4 6 3
6	3 4 8 5 0 2 5 7
7	5 7 2

1	0 5
2	1 3 6 7
3	0 3 4 5 6 8 9
4	1 2 3 3 4 6 7 7 8 8
5	0 0 1 1 2 2 3 4 4 5 6 6 7 8 9 9
6	0 2 3 4 5 5 7 8
7	2 5 7

مثال 17: أوجد مخطط الساق والأوراق للمعطيات التالية:

13.5	13.2	10.5	14.7	13.2	12.2	12.6	19.1	14.5	12.3	13.9	16.2
12.1	11.0	15.1	10.1	14.1	12.8	19.7	12.8	13.3	11.3	15.4	17.4
13.5	15.4	15.1	17.1	12.4	16.3	11.3	10.6	15.7	13.3	23.8	22.7
14.8	23.5	19.7	14.1								

الحل:

10	1 5 6
11	0 3 3
12	1 2 3 4 6 8 8
13	2 2 3 3 5 5 9
14	1 1 5 7 8
15	1 1 4 4 7
16	2 3
17	1 4
18	
19	1 7 7
20	
21	
22	7
23	5 8

3. مقاييس النزعة المركزية measures of central tendency:

مقاييس النزعة المركزية هي مقاييس عددية تستخدم لقياس موضع تركز أو تجمع المعطيات إذ أن معطيات أي ظاهرة تنزع (تميل) في الغالب إلى التركز والتجمع حول قيم معينة. وتُستخدم مقاييس النزعة المركزية لتلخيص المعطيات عددياً إذ أنها تعتبر قيم نموذجية أو مثالية للمعطيات. كما أن هذه المقاييس تُستخدم لوصف مجموعة المعطيات وكذلك لمقارنة مجموعات المعطيات المختلفة. ومن أهم هذه المقاييس نذكر: الوسط الحسابي أو المتوسط، الوسيط، والمنوال.

1.3. المتوسط mean:

يعتبر المتوسط من أهم وأفضل مقاييس النزعة المركزية ومن أكثرها شيوعاً واستخداماً في التحليل الإحصائي وذلك لما يتمتع به من خصائص وصفات إحصائية جيدة.

تعريف 2: إذا كان عدد المعطيات (حجم العينة) هو n وكانت قيم العينة هي $x_1, x_2, \dots, x_n$ ، فإن المتوسط والذي يُرمز له بالرمز $\bar{x}$ ويعرف بالصيغة التالية:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

مثال 18: أوجد المتوسط لعلامات طالب في الجامعة الافتراضية في المواد التي سجل فيها حيث حصل على العلامات التالية (8 مواد): $65, 75, 80, 95, 82, 74, 72, 67$.

الحل:

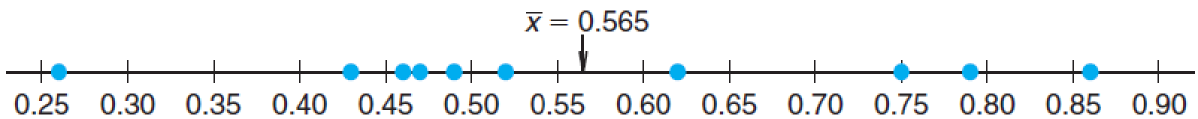
$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{8} \frac{x_i}{8} = \frac{65+75+80+95+82+74+72+67}{8} = 76.25$$

مثال 19: أوجد المتوسط لعينة من 10 القيم: $0.26, 0.43, 0.47, 0.49, 0.52, 0.75, 0.79, 0.86,$ $0.62, 0.46$.

الحل:

$$\bar{x} = \frac{0.26 + 0.43 + \dots + 0.62 + 0.86}{10} = 0.565$$

ملاحظة 2: يمثل متوسط عينة من القيم مركز ثقل centroid تلك العينة، بمعنى أنه النقطة التي عندها يتوازن نظام من الأوزان قيمها هي قيم المعطيات الفردية. يبين الشكل التالي مركز ثقل قيم المثال 2.



ملاحظة 3: عندما يتم ظهور المفردة أكثر من مرة في العينة (تكرارها أكبر من الواحد)، وبفرض أن قيم المفردات المختلفة في العينة هي $x_1, x_2, \ldots, x_k$ وأن تكرار كل منها هو $f_1, f_2, \ldots, f_k$ على الترتيب، فإن المتوسط يحسب كما يلي:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{n} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots + f_k x_k}{n}$$

مثال 20: أوجد المتوسط لعينة من القياسات تمثل طول الساق لـــ 10 أنواع من النباتات بالسنتيمتر والمعطى بالجدول التالي (مثال 2):

طول الساق	التكرار
58	1
59	2
62	3
65	3
68	1
المجموع	**10**

الحل:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} f_i x_i}{10} = \frac{1x58 + 2x59 + 3x62 + 3x65 + 1x68}{10} = 62.5$$

ملاحظة 4: عندما تكون معطيات العينة منظمة ضمن جدول تكراري باستخدام الفئات، فإنه يتم حساب المتوسط باستخدام العلاقة السابقة وحيث تكون القيم x_i عبارة عن مراكز الفئات.

مثال 21: أوجد المتوسط لعلامات طلاب الجامعة الافتراضية في مادة الإحصاء والاحتمالات المبينة في جدول التكرار التالي:

العلامة (M)	مركز الفئة	التكرار
$10 \le M < 20$	14.5	2
$20 \le M < 30$	24.5	4
$30 \le M < 40$	34.5	7
$40 \le M < 50$	44.5	10

$50 \leq M < 60$	54.5	16
$60 \leq M < 70$	64.5	8
$70 \leq M < 80$	74.5	3
المجموع		**50**

الحل:

$$\bar{x} = \frac{2x14.5 + 4x24.5 + ... + 8x64.5 + 3x74.5}{50} = 48.5$$

خواص المتوسط:

ليكن لدينا العينة $x_1, x_2, \ldots, x_n$ والتي متوسطها $\bar{x}$:

1. المجموع الجبري لانحرافات القيم عن المتوسط $\bar{x}$ يساوي الصفر، أي أن:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = (x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + ... + (x_n - \bar{x}) = 0$$

2. إضافة أو طرح نفس القيمة b إلى قيم المعطيات التي متوسطها $\bar{x}$ يُنتج متوسطاً مقداره $\bar{x} \pm b$، أي أن: $\overline{(x \pm b)} = \bar{x} \pm b$.

3. ضرب قيم المعطيات التي متوسطها $\bar{x}$ بنفس القيمة a يُنتج متوسطاً مقداره $a\bar{x}$، أي أن: $\overline{ax} = a\bar{x}$.

4. إذا كان لدينا مجموعتان من المعطيات بحيث أن عدد معطيات المجموعة الأولى هو n_1 ومتوسطها هو $\overline{x_1}$وكان عدد معطيات المجموعة الثانية هو n_2 ومتوسطها هو $\overline{x_2}$ فإن متوسط المجموعة الكلية $\bar{x}$ المكونة من دمج هاتين المجموعتين يمكن حسابه كما يلي:

$$\bar{x} = \frac{n_1\overline{x_1} + n_2\overline{x_2}}{n_1 + n_2}$$

ملاحظة 5: يُمكن تجميع الخاصتين 2 و3 كما يلي: $\overline{(ax \pm b)} = a\bar{x} \pm b$.

مثال 22: ليكن لدينا مجموعتان من المعطيات بحيث أن عدد معطيات المجموعة الأولى هو 8 ومتوسطها هو 4 وعدد معطيات المجموعة الثانية هو 12 ومتوسطها هو 8 فما هو متوسط المجموعة الكلية المكونة من دمج هاتين المجموعتين؟

الحل:

$$\bar{x} = \frac{n_1\overline{x_1} + n_2\overline{x_2}}{n_1 + n_2} = \frac{8x4 + 12x8}{8 + 12} = \frac{128}{20} = 6.4$$

مثال 23: إذا كان متوسط العينة $x_1, x_2, \ldots, x_n$ هو 25 فما هو المتوسط للعينة $\frac{x_1 - 5}{2}, \frac{x_2 - 5}{2}, ..., \frac{x_n - 5}{2}$؟

الحل:

المتوسط هو : $10 = \frac{25-5}{2} = \frac{\bar{x}-5}{2}$.

من ميزات المتوسط أنه: سهل التعريف والحساب، وحيد لمجموعة المعطيات الواحدة، وأخيرا يأخذ بعين الاعتبار كافة معطيات العينة.

ومن مساوئ المتوسط: يتأثر بالقيم الشاذة singular values، وهو غير معرف بالنسبة للمعطيات الوصفية إذ لا يمكن حسابه إلا من المعطيات الكمية فقط.

2.3. الوسيط median:

يعتبر الوسيط أحد مقاييس النزعة المركزية المشهورة، ويعرف الوسيط لمجموعة من المعطيات على أنه تلك القيمة التي تتوسط المعطيات عند ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً، أي أنه تلك القيمة التي تقسم المعطيات بعد ترتيبها إلى جزأين متساويين فتكون المعطيات في الجزء الأول تقل عن أو تساوى الوسيط والمعطيات في الجزء الثاني تزيد عن أو تساوى الوسيط. أي أن 50% من المعطيات تساوي أو تقل عن الوسيط وأن 50% من المعطيات تساوي أو تزيد عن الوسيط.

تعريف 3: إذا كان عدد المعطيات (حجم العينة) هو n وكانت قيم العينة هي $x_1, x_2, \ldots, x_n$ والمرتبة ترتيباً تصاعدياً، فإن الوسيط والذي يُرمز له بالرمز x ويعرف بالصيغة التالية (نميز حالتين حسب القيمة n هل هي عدد فردي أم زوجي):

$$x = \begin{cases} x_{(n+1)/2}, & if\ \ n\, is\, odd \\ \frac{1}{2}(x_{n/2} + x_{n/2+1}), & if\ \ n\, is\, even \end{cases}$$

مثال 24: أوجد الوسيط لعلامات طالب التالية: 65, 75, 80, 95, 82, 74, 72, 67, 79.

الحل:

بعد ترتيب العلامات تصبح على النحو التالي: ~~65, 67, 72, 74~~, 75, ~~79, 80, 82, 95~~. بما أن عدد العينات $n = 9$ هو عدد فردي فإن الوسيط هو:

$$x = x_{(n+1)/2} = x_{(9+1)/2} = x_5 = 75$$

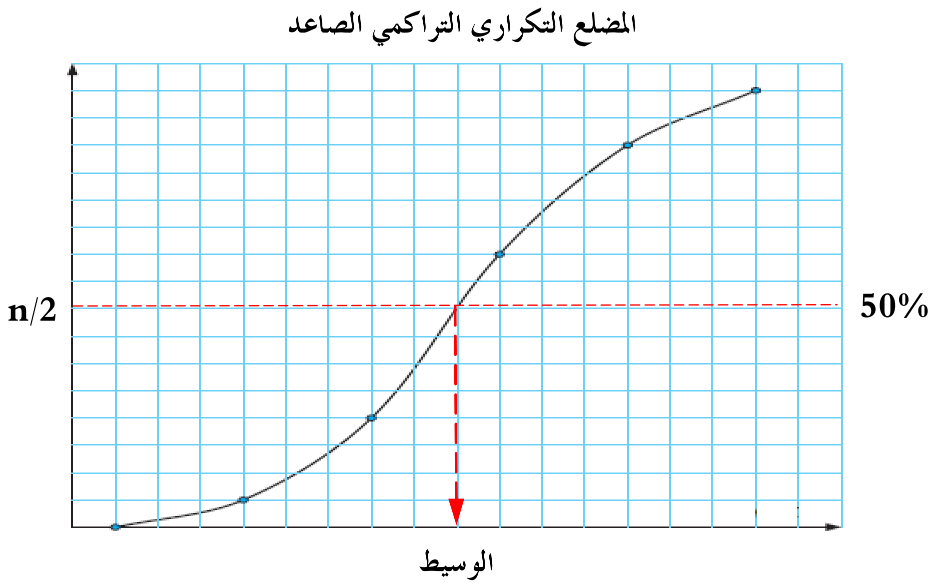
مثال 25: أوجد الوسيط لعلامات طالب في 10 مواد والتي هي التالية: 65, 75, 80, 95, 82, 74, 72, 67, 79, 67.

الحل:

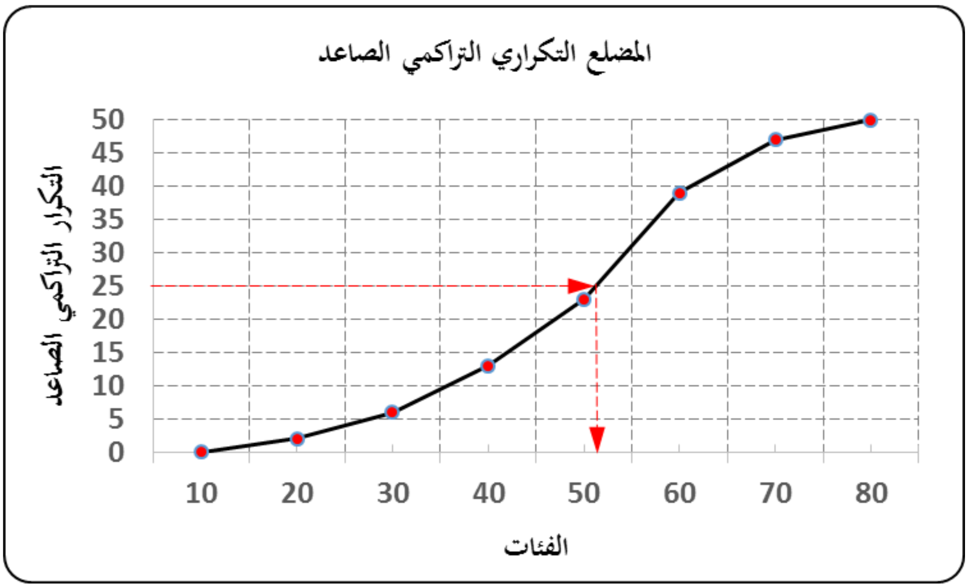
بعد ترتيب العلامات تصبح على النحو التالي: ~~65, 67, 67, 72~~, 74, 75, ~~79, 80, 82, 95~~. بما أن عدد العينات $n = 10$ هو عدد فردي فإن الوسيط هو:

$$x=\frac{1}{2}(x_{n/2}+x_{n/2+1})=\frac{1}{2}(x_5+x_6)=\frac{1}{2}(74+75)=74.5$$

ملاحظة 6: عندما تكون معطيات العينة منظمة ضمن مضلع تكراري تراكمي صاعد، فإنه يمكننا حساب القيمة التقريبية للوسيط بيانياً، ويتم ذلك عن طريق تحديد موقع ترتيب الوسيط المساوي إلى $n/2$ (سواء كان عدد معطيات العينة n فردياً أو زوجياً) على المحور الشاقولي، ومن هذا الموقع نرسم خطاً افقياً يتقاطع مع المضلع في نقطة. ومن هذه النقطة نرسم عموداً يتقاطع مع المحور الأفقي في نقطة تمثل القيمة التقريبية للوسيط، كما يبينه الشكل التالي:



مثال 26: أوجد القيمة التقريبية لوسيط علامات طلاب الجامعة الافتراضية في مادة الإحصاء والاحتمالات المبينة في المضلع التكراري التراكمي التصاعدي التالي:



الحل:

من المضلع التكراري التراكمي التصاعدي نستطيع قراءة الوسيط والذي يساوي تقريباً 51.

من ميزات الوسيط أنه: سهل التعريف والحساب، وحيد لمجموعة المعطيات الواحدة، وأخيرا الوسيط أقل تأثراً من المتوسط بالقيم الشاذة.

ومن مساوئ الوسيط: لا يأخذ بعين الاعتبار جميع المعطيات إذ أنه يعتمد فقط على القيم التي في المنتصف وعلى ترتيب المعطيات بغض النظر عن قيمها، وهو غير معرف بالنسبة للمعطيات الوصفية إذ لا يمكن حسابه إلا من المعطيات الكمية فقط.

3.3. المنوال mode:

المنوال هو أحد مقاييس النزعة المركزية شائعة الاستخدام ولاسيما في حالة المعطيات الوصفية.

تعريف 4: يعرف المنوال لمجموعة من المعطيات على أنه تلك القيمة التي تتكرر أكثر من غيرها أي أنها القيمة ذات التكرار الأكبر (إن وجدت)، ويرمز للمنوال عادة بالرمز Mod.

ملاحظة 7: يُمكن لعينة من المعطيات ألا يكون لها منوال، كما يُكن أن يكون لها أكثر من منوال.

مثال 27: يبين الجدول التالي معطيات إحدى الدراسات التي طبقت على 8 أشخاص لقياس العمر (بالسنة) والوزن (بالكلغ) والطول (بالسنتيمتر) وفصيلة الدم. أوجد منوال المعطيات المختلفة.

الشخص	1	2	3	4	5	6	7	8
العمر	25	32	27	23	24	32	25	37
الوزن	66	68	70	71	77	72	65	68
الطول	166	163	164	160	159	161	168	169
فصيلة الدم	A	B	AB	O	O	AB	A	O

الحل:

المعطيات	المنوال
العمر	25 و32
الوزن	68
الطول	لا يوجد
فصيلة الدم	O

ملاحظة 8: عندما تكون معطيات العينة منظمة بجدول تكراري نستطيع حساب المنوال بطريقة حسابية. من أجل ذلك نعرف الفئة المنوالية بأنها الفئة ذات التكرار الأكبر (ويمكن أن يكون هناك فترة منوالية واحدة أو عدة فترات منوالية أو قد لا يوجد فترة منوالية)، ويكون المنوال في حال وجوده عبارة عن مركز الفئة.

مثال 28: ليكن لدينا علامات طلاب الجامعة الافتراضية في مادة الإحصاء والاحتمالات السابقة.

العلامة (M)	التكرار
$10 \leq M < 20$	2
$20 \leq M < 30$	4
$30 \leq M < 40$	7
$40 \leq M < 50$	10
$50 \leq M < 60$	16
$60 \leq M < 70$	8
$70 \leq M < 80$	3
المجموع	**50**

أوجد قيمة المنوال حسابياً.

الحل:

الفترة المنوالية هي $[50, 60[$ لأنها الفترة الأكبر تكراراً (16)، بالتالي المنوال يساوي 54.5 (مركز الفئة).

من ميزات المنوال: أنه سهل التعريف والحساب والمنوال أقل تأثراً من المتوسط بالقيم الشاذة، ويمكن حساب المنوال بالنسبة للمعطيات الوصفية.

ومن مساوئ الوسيط: لا يأخذ بعين الاعتبار جميع المعطيات إذ أنه يعتمد فقط على المعطيات ذات التكرار الأكثر، وقد لا يوجد منوال لمجموعة من المعطيات أو قد يكون هناك أكثر من منوال.

4. مقاييس التباين measures of variability:

وجدنا سابقاً بعض مقاييس النزعة المركزية والتي تمثل مقاييس عددية لموضع أو مكان تركز المعطيات لظاهرة ما، وقد ذكرنا بأن هذه المقاييس تُستخدم لمقارنة مجموعات المعطيات المختلفة. في الحقيقة فإن مقاييس النزعة المركزية غير كافية لإيجاد مقارنة شاملة بين تلك المجموعات، فقد تكون هناك مجموعات من المعطيات لها نفس مقاييس النزعة المركزية ولكنها تختلف في بعض الصفات الأخرى. يبين المثال التالي مجموعتين من المعطيات لهما نفس المتوسط ولكنهما مختلفتان في طبيعة تشتتهما.

مثال 29: ليكن لدينا العينتين التاليتين:

العينة الأولى: 60, 59, 58, 57, 56, 55, 54, 53, 52, 51, 50

العينة الثانية: 75, 71, 67, 63, 59, 55, 51, 47, 43, 39, 35

بالرغم من أن المتوسط يساوي 55 للعينتين إلا أن التشتت أو الاختلاف بين القيم في كل عينة غير متساوٍ. ومن الواضح أن معطيات العينة الأولى أكثر تقارباً فيما بينها (أقل تشتتاً وتباعداً فيما بينها) من معطيات العينة الثانية. لذلك دعت الحاجة لإيجاد مقاييس تقيس طبيعة تشتت (أو تفرق أو تباعد) المعطيات فيما بينها. هذه المقاييس تسمى مقاييس التشتت.

يكون تشتت المعطيات صغيراً إذا كانت قيمها متقاربة فيما بينها والعكس بالعكس. تستخدم مقاييس التشتت لوصف مجموعة المعطيات وكذلك لمقارنة مجموعات المعطيات المختلفة، إذ أن مقاييس النزعة المركزية لا تكفي وحدها لعملية الوصف أو المقارنة. من أشهر مقاييس التشتت نذكر: المدى، المدى الربيعي، التباين، الانحراف المعياري ومعامل الاختلاف.

1.4. المدى range:

يعتبر المدى من أسهل مقاييس التشتت تعريفًا وحساباً ويعطينا فكرة سريعة عن مدى تفرق المعطيات.

تعريف 5: يعرف المدى لمجموعة من المعطيات بالصيغة التالية: $Range = x_{\max} - x_{\min}$، حيث أن $x_{\max}$ تعبر عن أكبر قيمة للمعطيات و $x_{\min}$ تعبر عن أصغر قيمة.

مثال 30: أوجد المدي للعينة التالية: 19, 26, 37, 41, 45, 17, 34, 22.

الحل: $Range = 45 - 19 = 26$

من ميزات المدى أنه: سهل التعريف والحساب.

من مساوئ المدى: لا يأخذ المدى في الاعتبار كافة القيم، كما أنه يتأثر بالقيم الشاذة.

2.4. المدى الربيعي interquartile range:

رأينا أن المدى يتأثر كثيراً بالقيم الشاذة ولذلك دعت الحاجة لإيجاد مقاييس أخرى للتشتت لا تتأثر بالقيم المتطرفة. أحد هذه المقاييس هو المدى الربيعي، حيث أن القيم المتطرفة هي تلك القيم الصغيرة أو الكبيرة، بالتالي فإنه عند حساب المدى الربيعي لا يؤخذ في الاعتبار ربع المعطيات الصغيرة (25%) ولا ربع المعطيات الكبيرة (25%). أي أنه يهتم بقيمتين، الأولى هي تلك التي يقل عنها ربع عدد أفراد العينة فقط، والثانية هي تلك التي يزيد عنها ربع عدد أفراد العينة فقط، وهما يسميان على الترتيب الربيع الأول أو الأدنى والربيع الأعلى أو الثالث.

تعريف 6: نرمز للمدى الربيعي بالرمز IRQ ويعرف بالصيغة التالية: $IRQ = Q_3 - Q_1$، حيث Q_1 يعبر عن الربيع الأول ويساوي القيمة التي يسبقها ربع المعطيات (أو 25% من المعطيات) و Q_3 يعبر عن الربيع الثالث ويساوي القيمة التي يسبقها ثلاثة أرباع المعطيات (أو 75% من المعطيات).

¼ n =25% ¼ n= 25%

-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-|----------------|----------------|-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-

ربع البيانات الصغيرة Q_1 Q_2 Q_3 ربع البيانات الكبيرة

ملاحظة 9: يقسم الوسيط العينة المرتبة إلى نصفين النصف الأدنى والنصف الأعلى، الربيع الأول هو وسيط النصف الأدنى لتلك العينة والربيع الثالث هو وسيط النصف الأعلى.

مثال 31: ليكن لدينا العينة التالية: 9 ,1 ,7 ,3 ,6 ,8 ,5 ,8 ,3 ,9 ,6 ,7 ,1 ,3 ,7. أوجد كل من الوسيط والربيع الأول والربيع الثالث والمدى الربيعي.

الحل:

بعد ترتيب قيم العينة تصبح على النحو التالي: ~~1, 1, 3, 3, 3, 5, 6~~, 6, ~~7, 7, 7, 8, 8, 9, 9~~ وبما أن $n = 15$ عدد فردي فإن الوسيط هو العينة التي ترتيبها 8 = (15+1)/2 = (n+1)/2، أي أنه يساوي 6 (العينة الثامنة).

من أجل حساب الربيع الأول نحسب الوسيط للعينة ~~1, 1, 3~~, 3, ~~3, 5, 6~~ بالتالي $Q_1 = 3$، ومن أجل حساب الربيع الثالث نحسب الوسيط للعينة ~~7, 7, 7~~, 8, ~~8, 9, 9~~ بالتالي $Q_1 = 8$. أخيراً المدى الربيعي $IRQ = Q_3 - Q_1 = 8 - 3 = 5$.

مثال 32: ليكن لدينا العينة التالية:

6, 4, 9, 15, 5, 13, 7, 12, 8, 10, 4, 1, 13, 1, 6, 4, 5, 2, 8, 2

أوجد كل من الوسيط والربيع الأول والربيع الثالث والمدى الربيعي.

الحل:

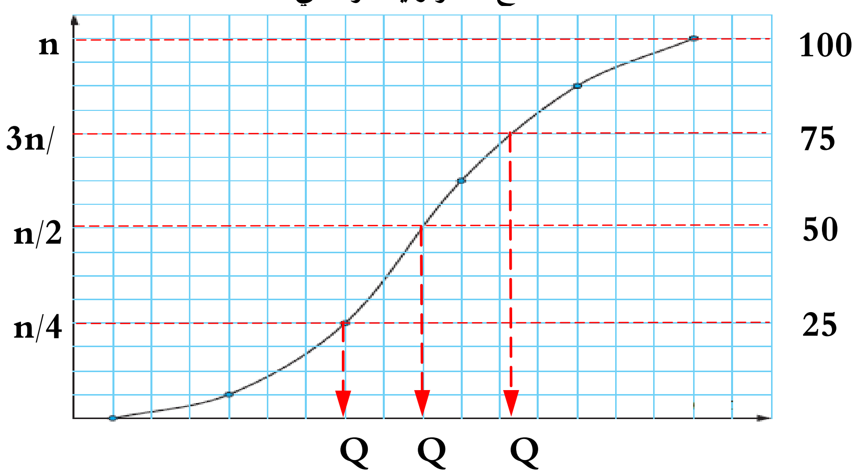
بعد ترتيب قيم العينة تصبح على النحو التالي: ~~1, 1, 2, 2, 4, 4, 4, 5, 5,~~ 6, 6, ~~7, 8, 8, 9, 10, 12, 13, 13, 15~~ وبما أن $n = 20$ عدد زوجي فإن الوسيط يساوي $6 = (6+6)/2$.

من أجل حساب الربيع الأول نحسب الوسيط لعينة النصف الأدنى ~~1, 1, 2, 2,~~ 4, 4, ~~4, 5, 5, 6~~ بالتالي وبملاحظة أن $n = 10$ عدد زوجي، $Q_1 = (4+4)/2 = 4$، ومن أجل حساب الربيع الثالث نحسب الوسيط لعينة النصف الأعلى ~~6, 7, 8, 8,~~ 9, 10, ~~12, 13, 13, 15~~ بالتالي $Q_3 = (9+10)/2 = 9.5$.

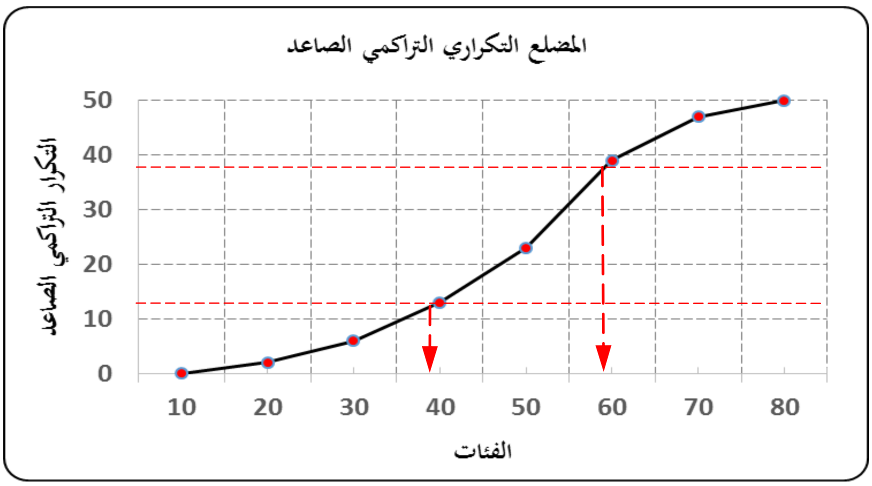
أخيراً المدى الربيعي $IRQ = Q_3 - Q_1 = 9.5 - 4 = 5.5$.

ملاحظة 10: عندما تكون معطيات العينة منظمة ضمن مضلع تكراري تراكمي صاعد، فإنه يمكننا حساب القيمة التقريبية للمدى الربيعي بيانياً، ويتم ذلك عن طريق حساب كل من الربيع الأول Q_1 (الموافق لــ $n/4$) والربيع الثالث Q_3 (الموافق لــ $3n/4$) بطريقة مشابهه تماماً لحساب الوسيط (الموافق لــ $n/2$) التي وجدناها سابقاً، كما يبينه الشكل التالي:

المضلع التكراري التراكمي



مثال 33: أوجد القيمة التقريبية للمدى الربيعي لعلامات طلاب الجامعة الافتراضية في مادة الإحصاء والاحتمالات المبينة في المضلع التكراري التراكمي التصاعدي التالي:



الحل:

من المضلع التكراري التراكمي التصاعدي نستطيع قراءة الربيع الأول والذي يساوي تقريباً 39، والربيع الثالث والذي يساوي تقريباً 59. بالتالي المدى الربيعي يساوي 20 = 39 − 59.

من ميزات المدى الربيعي أنه: لا يتأثر بالقيم الشاذة.

من مساوئ المدى: لا يأخذ المدى الربيعي في الاعتبار كافة قيم العينة.

3.4. التشتت variance والانحراف المعياري standard deviation:

يعتبر التباين والانحراف المعياري من أهم وأفضل مقاييس التشتت ومن أكثرها شيوعاً واستخداماً في التحليل الإحصائي وذلك لما يتمتعان به من خصائص وصفات إحصائية جيدة.

1.3.4. التشتت:

تعتمد فكرة التباين على تشتت أو تباعد قيم المعطيات عن متوسطها، فالتباين يكون كبيراً إذا كانت قيم المعطيات متباعدة عن متوسطها والعكس بالعكس. ويعرف التباين بأنه متوسط مربع انحرافات القيم عن الوسط الحسابي.

تعريف 7: إذا كان عدد المعطيات (حجم العينة) هو n وكانت قيم العينة هي $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ومتوسطها $\bar{x}$ فإن التباين والذي يُرمز له بالرمز s^2 ويعرف بالصيغة التالية:

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

مثال 34: ضمن تجربة اختبار انحراف مقياس الـــ PH. تم تجميع معطيات عن المقياس بقياس درجة ال PH لمادة محايدة $(PH = 7.0)$. عينه من حجم $n = 10$ تم أخذها في هذا الخصوص، أعطت النتائج التالية:

7.07, 7.00, 7.10, 6.97, 7.00, 7.03, 7.01, 7.01, 6.98, 7.08

متوسط العينة $\bar{x}$ هو:

$$\bar{x} = \frac{7.07 + 7.00 + \ldots + 7.08}{10} = 7.025$$

تشتت العينة s^2 هو:

$$s^2 = \frac{(7.07 - 7.025)^2 + (7.00 - 7.025)^2 + \ldots + (7.08 - 7.025)^2}{9} = 0.00194$$

يمكن حساب التشتت باستخدام صيغة حسابية مختلفة (أكثر سهولة وأكثر دقة)، بملاحظة أن:

$$s^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\bar{x})^2}{n-1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i^2-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2)}{n-1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{n-1}-\sum_{i=1}^{n}\frac{-2x_i\bar{x}}{n-1}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\bar{x}^2}{n-1}$$

وأن المقدار:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{-2x_i\bar{x}}{n-1}=-2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n-1}=-2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}\frac{nx_i}{n(n-1)}=-\frac{2n\bar{x}}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}=-\frac{2n\bar{x}^2}{n-1}$$

وأن:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\bar{x}^2}{n-1}=\frac{n\bar{x}^2}{n-1}$$

بالنتيجة:

$$s^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{n-1}-\frac{n\bar{x}^2}{n-1}$$

في المثال السابق:

$$s^2=\sum_{i=1}^{10}\frac{x_i^2}{9}-\frac{10\bar{x}^2}{9}=\frac{7.07^2+7.00^2+...+7.08^2}{9}-\frac{10(7.025)^2}{9}=0.00194$$

ملاحظة 11: عندما يتم ظهور المفردة أكثر من مرة في العينة (تكرارها أكبر من الواحد)، وبفرض أن قيم المفردات المختلفة في العينة هي $x_1, x_2, \ldots, x_k$ وأن تكرار كل منها هو $f_1, f_2, \ldots, f_k$ على الترتيب، فإن التشتت يحسب كما يلي:

$$s^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{f_i(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$$

أو باستخدام العلاقة:

$$s^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{f_ix_i^2}{n-1}-\frac{n\bar{x}^2}{n-1}$$

مثال 35: أوجد التشتت لعينة من القياسات تمثل طول الساق لـــ 10 أنواع من النباتات بالسنتم والمعطى بالجدول التالي (مثال 2):

طول الساق	التكرار
58	1
59	2
62	3
65	3
68	1
المجموع	**10**

الحل:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{5} f_i x_i}{10}=\frac{1\text{x}58+2\text{x}59+3\text{x}62+3\text{x}65+1\text{x}68}{10}=62.5$$

$$s^2=\sum_{i=1}^{5}\frac{f_i x_i^2}{9}-\frac{10\bar{x}^2}{9}=\frac{1\text{x}58^2+2\text{x}59^2+3\text{x}62^2+3\text{x}65^2+1\text{x}68^2}{9}-\frac{10\text{x}62.5^2}{9}$$

$$s^2=10.5$$

ملاحظة 12: عندما تكون معطيات العينة منظمة ضمن جدول تكراري باستخدام الفئات، فإنه يتم حساب التشتت باستخدام العلاقة السابقة وحيث تكون القيم x_i عبارة عن مراكز الفئات.

مثال 36: أوجد التشتت لعلامات طلاب الجامعة الافتراضية في مادة الإحصاء والاحتمالات المبينة في جدول التكرار التالي:

العلامة (M)	مركز الفئة	التكرار
$10 \le M < 20$	14.5	2
$20 \le M < 30$	24.5	4
$30 \le M < 40$	34.5	7
$40 \le M < 50$	44.5	10
$50 \le M < 60$	54.5	16
$60 \le M < 70$	64.5	8
$70 \le M < 80$	74.5	3
المجموع		**50**

الحل:

$$\bar{x}=\frac{2\text{x}14.5+4\text{x}24.5+7\text{x}34.5+10\text{x}44.5+16\text{x}54.5+8\text{x}64.5+3\text{x}74.5}{50}$$

$$\bar{x}=48.5$$

$$s^2=\sum_{i=1}^{7}\frac{f_i x_i^2}{49}-\frac{50\bar{x}^2}{49}=\frac{2\text{x}14.5^2+4\text{x}24.5^2+...+3\text{x}74.5^2}{49}-\frac{50\text{x}48.7^2}{49}$$

$$s^2=229.8$$

2.3.4.الانحراف المعياري:

إن التباين من أهم وأفضل مقاييس التشتت ولكنه يقاس بوحدة المعطيات الأصلية المربعة. وفي كثير من الأحيان نرغب في استخدام مقياس للتشتت يقاس بوحدة المعطيات الأصلية، أحد هذه المقاييس هو الانحراف المعياري. ويعرف الانحراف المعياري على أنه الجذر التربيعي للتباين.

تعريف 8: إذا كان عدد المعطيات (حجم العينة) هو n وكانت قيم العينة هي $x_1, x_2, \ldots, x_n$ وتشتتها s^2 فإن الانحراف المعياري والذي يُرمز له بالرمز s ويعرف بالصيغة التالية:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

أو عندما يتم ظهور المفردة أكثر من مرة في العينة، وبفرض أن تكرار كل منها هو $f_1, f_2, \ldots, f_k$ على الترتيب:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \frac{f_i(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

مثال 37: أوجد الانحراف المعياري لعينة المثال 11.

الحل:

$$s = \sqrt{0.00194} = 0.044$$

خواص التشتت والانحراف المعياري:

يخضع التشتت والانحراف المعياري إلى العمليات الجبرية التالية:

التشتت	الانحراف المعياري	العينة
s^2	s	$x_1, x_2, \ldots, x_n$
s^2	s	$x_1 \pm b, x_2 \pm b, \ldots, x_n \pm b$
$a^2 s^2$	$\vert a \vert s$	$ax_1, ax_2, \ldots, ax_n$
$a^2 s^2$	$\vert a \vert s$	$ax_1 \pm b, ax_2 \pm b, \ldots, ax_n \pm b$

مثال 38:

التشتت	الانحراف المعياري	العينة	العملية

3.5	1.871	4, 6, 5, 8, 9, 7	x
3.5	1.871	6, 8, 7, 10, 11, 9	$x+2$
9x3.5 = 31.5	3x1.871 = 5.612	12, 18, 15, 24, 27, 21	$3x$
4x3.5 = 14	2x1.871 = 3.742	11, 15, 13, 19, 21, 17	$2x+3$

مثال 39: إذا كان تشتت العينة $x_1, x_2, \ldots, x_n$ هو 25 فما هو تشتت العينة $\frac{x_1-5}{2}, \frac{x_2-5}{2}, \ldots, \frac{x_n-5}{2}$؟

الحل:

التشتت هو :

$$s^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{x} 25 = \frac{25}{4} = 6.25$$

والانحراف المعياري هو:

$$s = \sqrt{6.25} = 2.5$$

1. إذا كان لدينا مجموعتان من المعطيات بحيث أن عدد معطيات المجموعة الأولى هو n_1 وتشتتها هو s_1^2 وكان عدد معطيات المجموعة الثانية هو n_2 وتشتتها هو s_2^2 فإن تشتت المجموعة الكلية $\bar{x}$ المكونة من دمج هاتين المجموعتين يمكن حسابه كما يلي:

$$s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-1}$$

مثال 40: ليكن لدينا مجموعتان من المعطيات بحيث أن عدد معطيات المجموعة الأولى هو 8 وتشتتها هو 4 وعدد معطيات المجموعة الثانية هو 13 وتشتتها هو 8 فما هو تشتت المجموعة الكلية المكونة من دمج هاتين المجموعتين؟

الحل:

$$s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-1} = \frac{7\text{x}4 + 12\text{x}8}{8+13-1} = 6.2$$

4.4. معامل الاختلاف coefficient of variation:

إن التباين والانحراف المعياري من المقاييس المفيدة لقياس التشتت لتوزيع متغير ما، ولكن في كثير من الأحيان نهتم بمقارنة التشتت والاختلاف لتوزيعي متغيرين متغيرين مختلفين. وبما أن التباين والانحراف المعياري مقياسان يعتمدان على وحدة المعطيات فإنه يصعب استخدامهما لمقارنة تجانس المجموعات المختلفة من المعطيات في الحالتين التاليتين:

- إذا كانت وحدتا المتغيرين مختلفتين حيث لا نستطيع مقارنة الوحدات المختلفة.
- إذا كان متوسطا المتغيرين مختلفين وذلك لأن تباين توزيع المتغير ذي المتوسط الصغير ينزع لأن يكون صغيراً والعكس بالعكس.

لذلك دعت الحاجة إلى مقياس لا يعتمد على وحدة المتغير ويقيس ما يسمى بالتشتت النسبي. وأحد هذه المقاييس هو ما يسمى بمعامل الاختلاف ويستخدم لمقارنة التشتت النسبي أو التجانس لمجموعات المعطيات المختلفة. فمجموعة المعطيات ذات معامل الاختلاف الأكبر يكون تشتتها النسبي أكبر أي أنها تكون أقل تجانساً والعكس بالعكس.

تعريف 9: ليكن لدينا عينة من المعطيات متوسطها $\bar{x}$ وانحرافها المعياري s، نرمز بمعامل الاختلاف للعينة المذكورة بالرمز CV ويعرف بالصيغة التالية: $CV = \frac{s}{\bar{x}}$.

مثال 41: يبين الجدول التالي معطيات إحدى الدراسات التي طبقت على 8 أشخاص لقياس العمر (بالسنة) والوزن (بالكلغ) والطول (بالسنتيمتر). أوجد المعطيات الأكثر تجانساً معطيات الأعمار أم معطيات الأوزان أم معطيات الأطوال؟

الشخص	1	2	3	4	5	6	7	8
العمر	25	32	27	23	24	32	25	37
الوزن	66	68	70	71	77	72	65	68
الطول	166	163	164	160	159	161	168	169

الحل:

المعطيات	المتوسط	الانحراف المعياري	معامل الاختلاف
الأعمار	28.125	4.970	0.177
الأوزان	69.625	3.815	0.055
الأطوال	163.750	3.694	0.023

من الجدول السابق نستنتج أن معطيات الأطوال هي الأكثر تجانساً لأن معامل الاختلاف للأطوال أصغر من معامل الاختلاف للمعطيات الأخرى.

5.4. متراجحة تشيبيشيف Chebechev inequality:

تعتبر متراجحة تشيبيشيف من النظريات المفيدة التي تعطينا حداً أدنى لنسبة المعطيات التي تقع ضمن مجال معين عند معرفة متوسط المعطيات وانحرافها المعياري دون الحاجة لمعرفة المعطيات الأصلية أو التوزيع الذي أخذت منه العينة.

مبرهنة 1: ليكن لدينا عينة من المعطيات متوسطها $\bar{x}$ وانحرافها المعياري s فإن نسبة المعطيات الواقعة ضمن المجال $[\bar{x}-ks, \bar{x}+ks]$ لا تقل عن $\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)$، حيث $k>1$.

ملاحظة 13: نطبق متراجحة تشيبيشيف للمجالات التي منتصفها هو المتوسط.

ملاحظة 14: من الواضح رؤية أن نسبة المعطيات الواقعة خارج المجال $[\bar{x}-ks, \bar{x}+ks]$ هي على الأكثر $\dfrac{1}{k^2}$.

يبين الجدول التالي بعض القيم ل k والقيمة $1-\dfrac{1}{k^2}$ الموافقة لها:

k	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	**2**	**3**
$1-\dfrac{1}{k^2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{3}{4}$	$\dfrac{8}{9}$

مثال 42: لدينا عينة من المعطيات متوسطها 25 وانحرافها المعياري 4.5 ماهي نسبة المعطيات الواقعة ضمن المجال [16, 34]؟

الحل:

من الملاحظ أن مركز المجال [16, 34] هو 25 = 2/(16+34)، أي متوسط العينة المعطاة، بالتالي يمكننا تطبيق متراجحة تشيبيشيف.

علينا الآن إيجاد قيم k : $[\bar{x}-ks, \bar{x}+ ks]=[16, 34$، بالتالي $\bar{x}-ks=25-4.5k=16$ بحل هذه المعادلة نحصل على $k=2$. والقيمة $0.75=\left(1-\dfrac{1}{4}\right)=\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)=\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)$.

أي أن نسبة المعطيات الواقعة ضمن المجال [16, 34] لا تقل عن 75%.

مثال 43: لدينا عينة المثال السابق. أوجد مجال يقع فيها ما لا يقل عن 50% من المعطيات.

الحل:

$$\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=0.5 \Rightarrow \frac{1}{k^2}=0.5 \Rightarrow k^2=2 \Rightarrow k=\sqrt{2}\simeq 1.41$$

وبالتالي فإن المجال الذي يقع فيها ما لا يقل عن 50% من المعطيات هو:

$$\left[\bar{x}-ks, \bar{x}+ks\right]=\left[25-\sqrt{2}\text{x}4.5, 25+\sqrt{2}\text{x}4.5\right]\approx[18.6, 31.4]$$

6.4.القيم المعيارية standard values:

نواجه في كثير من الأحيان أثناء دراستنا لكثير من الظواهر مقارنة مفردتين من مفرداتها وبحيث تصعب هذه المقارنة خاصة إذا كانت المفردتان تنتميان إلى ظاهرتين مختلفتين من حيث المتوسط والانحراف المعياري.

على سبيل المثال لمقارنة علامة طالب في إحدى المواد بعلامته في مادة أخرى، فمثلاً إذا حصل أحد الطلاب على علامة 85 من 100 في مادة الفيزياء وكانت علامته في الرياضيات 80 من 100، يتبادر إلى الذهن أن مستوى تحصيل الطالب في الفيزياء أفضل منه في الرياضيات. لهذا اتفق الإحصائيون على ان نقيس بعد كل منهما عن وسطها الحسابي بانحرافها المعياري وهذا ما يعرف بالقيمة المعيارية.

تعريف 10: ليكن لدينا عينة من المعطيات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ حجمها n ومتوسطها $\bar{x}$ وانحرافها المعياري $s\neq 0$، نعرف القيمة المعيارية للقيمة x_i (المفردة الأصلية) كما يلي:

$$z_i=\frac{x_i-\bar{x}}{s}, \quad i=1, 2, \ldots, n$$

- تكون القيمة المعيارية موجبة إذا كانت المفردة فوق المتوسط ويكون سالبة إذا كانت تحته.
- المفردة الأصلية للقيمة المعيارية z_i هي: $x_i=\bar{x}+sz_i$.
- متوسط القيم المعيارية يساوي الصفر.
- الانحراف المعياري للقيم المعيارية يساوي الواحد.

مثال 44: ليكن لدينا عينة من المعطيات متوسطها $\bar{x}=9$ وانحرافها المعياري $s=6$، أوجد القيمة المعيارية للقيمة 12 ومن ثم أوجد القيمة الأصلية للقيمة المعيارية $z=0.1$.

الحل:

القيمة المعيارية للقيمة $x=12$ هي: $z=\frac{x-\bar{x}}{s}=\frac{12-9}{6}=0.5$

القيمة الأصلية للقيمة المعيارية $z=0.1$ هي: $x=\bar{x}+sz=9+6\text{x}0.1=9.6$

مثال 45: في امتحان لمقرر الإحصاء كان المتوسط لعلامات طلاب صف 70 وانحراف معياري 10 وفي امتحان لمقرر الرياضيات للصف نفسه كان المتوسط لعلامات الصف 60 والانحراف المعياري 6. فإذا كانت علامة أحد الطلاب في امتحان الإحصاء 80 وعلامته في الرياضيات 72 ففي أي الامتحانين كان مستوى تحصيله أفضل؟

الحل:

القيمة المعيارية للقيمة $x = 80$ في مادة الإحصاء هي: $z = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{80 - 70}{10} = 1$

القيمة المعيارية للقيمة $x = 72$ في مادة الرياضيات هي: $z = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{72 - 60}{6} = 2$

بما أن القيمة المعيارية لمقرر الرياضيات 2 أكبر من القيمة المعيارية لمقرر الإحصاء 1 فإن مستوى تحصيله في مقرر الرياضيات أفضل من مستوى تحصيله في مقرر الإحصاء بالرغم من أن علامته في مقرر الإحصاء أفضل من علامته في مقرر الرياضيات.

تمارين

1. لتكن المعطيات التالية:

15, 11, 12, 13, 10, 12, 14, 16, 12

أوجد ما يلي:

a) المتوسط
b) الوسيط
c) الربيع الأول والثالث
d) المنوال
e) التشتت
f) الانحراف المعياري

2. يبين الجدول التالي الفئات وتكراراتها

الفئات	[10,20[	[20,30[	[30,40[	[40,50[	[50,60[	[60,70[	[70,80[
التكرارات	12	10	11	10	15	11	7

أوجد ما يلي:

a) المتوسط
b) الوسيط
c) الربيع الأول والثالث
d) المنوال
e) التشتت
f) الانحراف المعياري

3. تبين القيم التالية أعمار، مقدرة بالساعات، للمبات اقتصادية 40 watt, 110 volt والتي أخذت من اختبارات قسرية. أوجد المخطط الصندوقي لتلك الأعمار

919	1196	785	1126	936	918	1156	920
948	1067	1092	1162	1170	929	950	905
972	1035	1045	855	1195	1195	1340	1122
938	970	1237	956	102	1157	978	832
1009	1157	1151	1009	765	958	902	1022
1333	811	1217	1085	896	958	1311	1037
702	923						

4. لتكن معطيات التمرين السابق. أوجد ما يلي:

a) الجدول التكراري لأعمار اللمبات وذلك باستخدام عدد مناسب من الفئات.

b) جدول التكرار التراكمي الصاعد لأعمار اللمبات.

c) المدرج التكراري لأعمار اللمبات.

d) المنحني التكراري التراكمي لأعمار اللمبات.

5. عينة من القراءات تم أخذها من مجتمع أعطت الجدول التالي:

x	20	25	28	30	32	35
f	5	25	20	25	15	10

عينة ثانية من نفس المجتمع أعطت ما يلي:

$$n_2 = 50, \quad \sum x = 1620, \quad \sum x^2 = 55928$$

أوجد المتوسط والتشتت العينة الكلية المكونة من دمج هاتين العينتين.

6. عينة من طلاب الجامعة الافتراضية حجمها 300، متوسط أوزانهم 58 kg وتشتت مقداره $16\ \text{kg}^2$، المطلوب:

a) المجال الذي يحوي على الأقل 200 وزناً من أوزان العينة.

b) المجال الذي يقع خارجه على الأكثر 50 وزناً من أوزان العينة.

c) العدد الأعظمي للطلاب الذين تقع أوزانهم خارج المجال [53, 63].

d) العدد الأصغري للطلاب الذين تقع أوزانهم ضمن المجال [48, 68].

ISSN: 2617-989X

العلامة العظمى: 100 **علامة النجاح: 50** **المدة: ساعة واحدة**

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة **(80) درجة**

1. إذا كان 35 قيمة الحد الأعلى لفئة طولها 10، بالتالي فإن الحد الأدنى للفئة هو:

a) 20
b) 25
c) 30
d) لا شيء مما سبق

2. متوسط العينة التالية 50 ,40 ,30 ,20 ,10 هو:

a) 15
b) 25
c) 35
d) 30

3. أياً من المقاييس التالية ليس مقياس للنزعة المركزية؟

a) المتوسط
b) الوسيط
c) المدى
d) المنوال

4. أياً من المقاييس للنزعة المركزية التالية لا يمكن إيجاده بيانياً؟

a) المتوسط
b) الوسيط
c) المنوال
d) لا شيء مما سبق

5. أياً من المقاييس للنزعة المركزية التالية يمكن أن يأخذ أكثر من قيمة من أجل عينة واحدة؟

a) المتوسط

b) الوسيط

c) المنوال

d) لا شيء مما سبق

6. ما يحدث لمتوسط عينة من القيم (n قيمة) إذا طرحنا من كل قيمة من قيم العينة المقدار 5؟

a) لا يتغير المتوسط

b) يزداد المتوسط بمقدار 5

c) ينقص المتوسط بمقدار 5

d) ينقص المتوسط بمقدار 5/n

7. الانحراف المعياري لعينة من 50 قيمة هو 8. إذا ضربنا كل قيمة من قيم العينة بالقيمة 2، تصبح قيمة الانحراف المعياري:

a) 4

b) 8

c) 16

d) لا شيء مما سبق

8. أياً من المقاييس التالية هو مقياس نسبي للتباين؟

a) الانحراف المعياري

b) التشتت

c) معامل الاختلاف

d) كل ما سبق

.9 إذا كان متوسط عينة من القيم هو 25 ومعامل الاختلاف هو 0.1، عندئذ الانحراف المعياري هو:

a) 6.25

b) 2.5

c) 0.25

d) لا شيء مما سبق

.10 وسيط العينة التالية 1 ,4 ,12 ,5 ,7 ,6 ,5 ,8 ,6 ,12 ,5 هو:

a) 6

b) 5

c) 7

d) 8

.11 منوال العينة التالية 1 ,4 ,12 ,5 ,7 ,6 ,5 ,8 ,6 ,12 ,5 هو:

a) 6

b) 5

c) 7

d) لا شيء مما سبق

.12 مدى العينة التالية 1 ,4 ,12 ,5 ,7 ,6 ,5 ,8 ,6 ,12 ,5 هو:

a) 12

b) 1

c) 11

d) 8

13. أياً من المقاييس التالية ليس مقياس للتباين؟

a) المدى

b) الربيعيات quartiles

c) التشتت

d) الانحراف المعياري

14. أياً من مقاييس التباين التالية التي تتأثر أكبر ما يمكن بالقيم الشاذة؟

a) التشتت

b) الانحراف المعياري

c) المدى الربيعي

d) المدى

ليكن لدينا جدول التكرار التالي:

التكرار	الفترة
40	[0, 9[
50	[10, 19[
70	[20, 29[
40	[30, 39[

15. طول الفترة هو:

a) 10

b) 9

c) 11

d) تختلف من فترة لأخرى

16. التكرار النسبي للفترة]19 ,10] هو:

a) 0.9

b) 0.45

c) 0.25

d) لا يمكن إيجاده بالمعطيات المتوفرة

السؤال الثاني: **(20) درجة**

عينة من طلاب الجامعة الافتراضية حجمها 200، متوسط أوزانهم 60 kg وتشتت مقداره 25 kg2، المطلوب:

a) المجال الذي يحوي على الأقل 150 وزناً من أوزان العينة.

b) المجال الذي يقع خارجه على الأكثر 25 وزناً من أوزان العينة.

c) العدد الأعظمي للطلاب الذين تقع أوزانهم خارج المجال [52, 68].

d) العدد الأصغري للطلاب الذين تقع أوزانهم ضمن المجال [48, 72].

الحل:

a) $\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ من نسبة المعطيات تقع ضمن المجال $[\bar{x}-ks, \bar{x}+ks]$.

$$1-\frac{1}{k^2}=\frac{150}{200}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{k^2}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

$$k=2$$

بالتالي 150 وزناً من أوزان العينة تقع ضمن المجال: $[60-2(5), 60+2(10)]=[50, 70]$.

b) نعين k بحيث يكون $\frac{1}{k^2}=\frac{25}{200}=\frac{1}{8}$، بالتالي $\bar{x}=60=\frac{54+66}{2}$. أي أن 25 وزناً من أوزان العينة على الأكثر تقع خارج المجال

$[60-5\sqrt{8}, 60+5\sqrt{8}]=[45.86, 74.14]$.

c) المجال [52, 68]: مركزه $\bar{x}=60=\frac{52+68}{2}$ ونصف قطره $ks=8=\frac{68-52}{2}$، بالتالي $5k=8$ أو $k=8/5=1.6$.

وبالتالي العدد الأعظمي للطلاب تقع أوزانهم خارج الفترة [52, 68] هو:

$$n(\frac{1}{k^2}) = 200(\frac{1}{(1.6)^2}) = 78.125$$

78 طالباً.

d) المجال [48, 72]: مركزه $\bar{x} = 60 = \frac{48+72}{2}$ ونصف قطره $ks = 12 = \frac{72-48}{2}$ ، بالتالي $5k = 12$ أو $k = 12/5 = 2.4$.

وبالتالي العدد الأصغري للطلاب تقع أوزانهم داخل المجال [48, 72] هو:

$$n(1-\frac{1}{k^2}) = 200(1-\frac{1}{(2.4)^2}) = 165.28$$

165 طالباً.

توجيه في حال الخطأ: راجع الفقرة 4.5

توجيه في حال الخطأ	الإجابة الصحيحة	السؤال الأول
الفقرة 2	b	1
الفقرة 1.3	d	2
الفقرة 3	c	3
الفقرة 1.3 و2	a	4
الفقرة 3	d	5
الفقرة 1.3	c	6
الفقرة 4.3	c	7
الفقرة 4	c	8
الفقرة 4	b	9
الفقرة 2.3	a	10
الفقرة 3.3	b	11
الفقرة 1.4	c	12
الفقرة 4	b	13
الفقرة 4	d	14
الفقرة 2	a	15
الفقرة 2	c	16

الفصل الثاني: مفاهيم أساسية في الاحتمالات
Chapter 2: Basic concepts in probability

الكلمات المفتاحية:

تجربة عشوائية، فضاء العينة، حدث، حدث بسيط، متمم حدث، اجتماع حدثين، تقاطع حدثين، المبدأ الأساسي في العد، التباديل، التوافيق، احتمال حدث، تجزئة، احتمال شرطي، أحداث مستقلة، مبرهنة بايز، قانون الاحتمال الكلي.

ملخص:

يهدف هذا الفصل بتوضيح المفاهيم الأساسية لنظرية الاحتمال وخواصها وقوانينها، الحدث وأنواع الأحداث والتمييز بين قاعدة الجمع وقاعدة الجداء والأحداث المستقلة والمتنافية والمبادئ الأساسية لنظرية العد والتمييز بين عدد طرق الاختيار المرتب التي يمكن تكوينها من عدة أشياء (التباديل) وبين عدد طرق الاختيار غير المرتب التي يمكن تكوينها من عدة أشياء (التوافيق)، والاحتمال الشرطي ونظرية بايز.

الأهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- المفاهيم الأساسية لنظرية الاحتمال
- الأحداث البسيطة والمركبة
- المبدأ الأساسي في العد والتباديل والتوافيق
- احتمال الحدث
- الاحتمال الشرطي والأحداث المستقلة
- مبرهنة بايز وقانون الاحتمال الكلي

تلعب الاحتمالات دوراً كبيراً في الحياة اليومية وفي كثير من العلوم فهي تُستخدم في قياس حادثة معينة غير مؤكدة الحدوث، فكثيرا ما نتخذ قرارات بناءً على معلومات ناقصة وتساعدنا الاحتمالات على ذلك، فمثلاً: قد يهمل الطالب دراسة جزء صغير من المقرر لأن احتمال أن يأتي منه سؤال في الامتحان صغير. وقد نلغي رحلة رتبنا لها منذ فترة لأن احتمال أن يكون الجو رديء كبير.

ونظرية الاحتمالات هي فرع من فروع الرياضيات التطبيقية الذي يهتم بدراسة تأثير الصدفة على الظواهر والأشياء. فإذا ألقيت قطعة نقود إلى الأعلى فإنه من المؤكد سقوطها على الأرض، ولكن لا نعلم على أي وجه سوف تسقط أو أي الوجهين سوف يظهر وهذا يسمى بـــالصدفة.

1. تعاريف أساسية basic definitions:

1.1. التجربة العشوائية random experience:

التجربة هي إجراء يمكن وصفه وصفا دقيقاً وملاحظة ما ينتج عنه، وهناك نوعان من التجارب: التجارب المحددة (بمعنى أنه إذا تكررت التجربة نفسها تحت نفس الظروف فمن المؤكد الحصول على النتيجة نفسها مثل إلقاء تفاحة في الهواء فإنه لابد من أن تسقط على الأرض)، والتجارب العشوائية.

تعريف 1: التجربة العشوائية هي تجربة يمكن إجراؤها في كل مكان وزمان بنفس الظروف الذاتية والموضوعية بحيث لا يُمكن التنبؤ بنتيجة التجربة بشكل قطعي ومؤكد قبل حدوثها، ولكن من الممكن معرفة كل النواتج المتوقعة مسبقاً، بالإضافة إلى أنه يمكن معرفة أو قياس فرصة حدوث (ظهور) كل نتيجة من نتائج التجربة قبل حدوثها. مثال إلقاء (رمي) قطعة نقود.

2.1. فضاء العينة sample space:

تعريف 2: فضاء العينة للتجربة العشوائية هي المجموعة المكونة من جميع النتائج الممكنة للتجربة، ونرمز لفضاء العينة بالرمز Ω. نسمي كل نتيجة من نتائج التجربة العشوائية عنصر element في فضاء العينة أو نقطة العينة sample point.

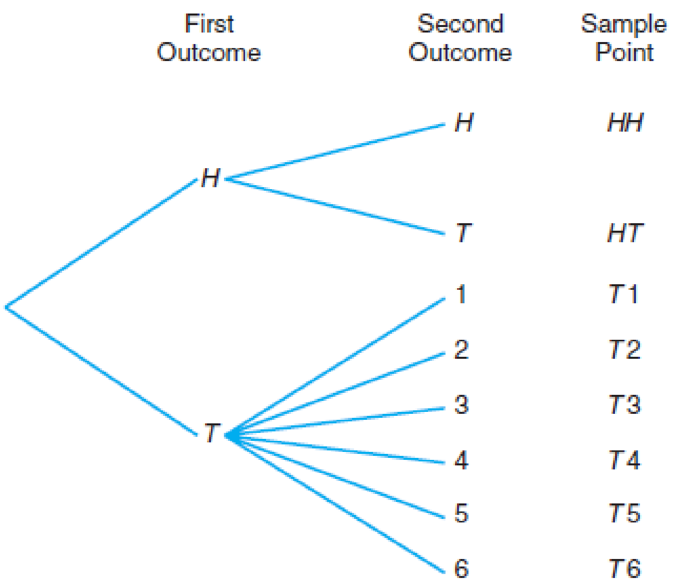
مثال 1: فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة من النقود مرة واحدة (وتسجيل الرمز الظاهر على الوجه العلوي) هي $\Omega=\{H,\ T\}$، حيث H تمثل ظهور الكتابة و T تمثل ظهور الشعار.

مثال 2: فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة النرد مرة واحدة (وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلوي) هي $\Omega=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

أما إذا كان اهتمامنا فقط إذا كان الناتج (الرقم الظاهر على الوجه العلوي) فردي odd أو زوجي $even$، فإن فضاء العينة هي $\Omega=\{odd,\ even\}$.

مثال 3: أوجد فضاء العينة للتجربة التالية: نرمي قطعة من النقود فإذا كان الناتج كتابة نرميها مرة ثانية، وإذا كان الناتج شعاراً نرمي قطعة النرد مرة واحدة.

الحل: فضاء العينة هي $\Omega=\{HH, HT, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$، والتي يمكن تمثيلها بمخطط الشجرة كما يلي:

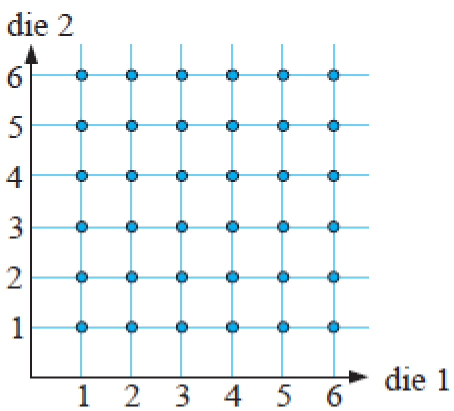


مثال 4: أوجد فضاء العينة لتجربة رمي قطعة النرد مرتين متتاليتين.

الحل:

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\\ &(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)\\ &(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\\ &(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)\\ &(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)\\ &(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}\end{aligned}$$

والتي يمكن تمثيلها باستخدام الشبكة grid كما يلي:



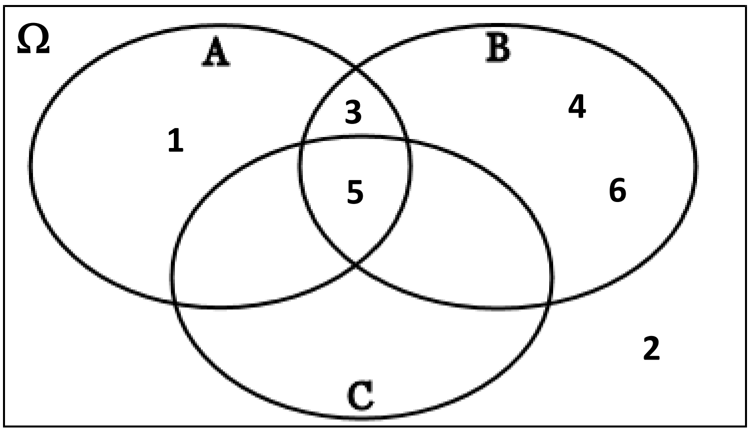
2. الأحداث events:

تعريف 3: نعرف الحدث على أنه مجموعة جزئية من فضاء العينة Ω. أي أن A حدث إذا وفقط إذا كانت $A\subseteq\Omega$.

مثال 5: ليكن لدينا تجربة رمي قطعة النرد مرة واحدة، المجموعات التالية تشكل أحداث لأنها مجموعات جزئية من فضاء العينة Ω:

- ظهور عدد فردي $A=\{1,\ 3,\ 5\}$.
- ظهور عدد أكبر تماماً من 2 $B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$.
- ظهور العدد 5 $C=\{5\}$. نسمي هذا الحدث بالحدث البسيط simple event (الحدث المكون من عنصر واحد).
- ظهور عدد سالب $\Phi=\{\}$. نسمي هذا الحدث بالحدث المستحيل impossible event (الحدث الذي لا يحتوي على أية نتيجة).
- ظهور عدد موجب $\Omega=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$. نسمي هذا الحدث بالحدث الأكيد sure event (الحدث المكون من جميع النتائج الممكنة للتجربة).

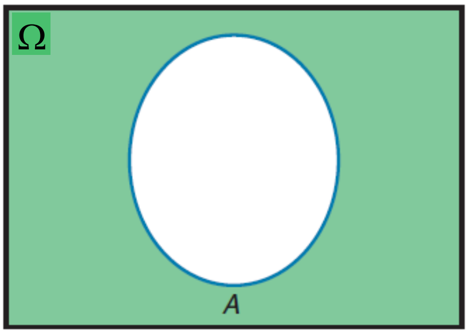
ملاحظة 1: بما أن الأحداث عبارة عن مجموعات بالتالي يمكن استخدام مخططات فن لتمثيل الأحداث. يبين الشكل التالي كل من الأحداث $A,\ B,\ C$.



1.2. العمليات على الأحداث operations on events:

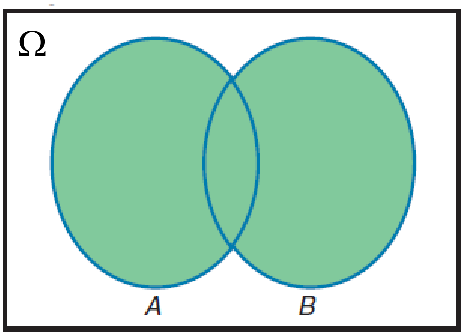
1.1.2. متمم حدث Complement:

تعريف 4: نعرف متمم الحدث A بالنسبة إلى Ω، الحدث المكون من جميع عناصر فضاء العينة التي لا تنتمي إلى A. ونرمز لمتتم حدث A بالرمز $\overline{A}$ أو A'، $A'=\{x\in\Omega:\ x\notin A\}$. يبين الشكل التالي مخطط فن.



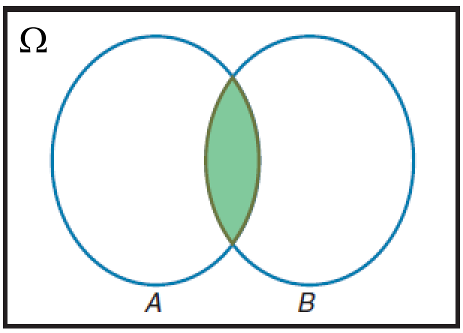
2.1.2. اجتماع حدثين union:

تعريف 5: نعرف اجتماع حدثين A و B، يرمز له بالرمز $A\cup B$، الحدث المكون من جميع العناصر التي تنتمي إلى A أو تنتمي إلى B أو تنتمي إلى كليهما، $A\cup B=\{x\in\Omega : x\in A \ or \ x\in B\}$.
يبين الشكل التالي مخطط فن الموافق.



3.1.2. تقاطع حدثين intersection:

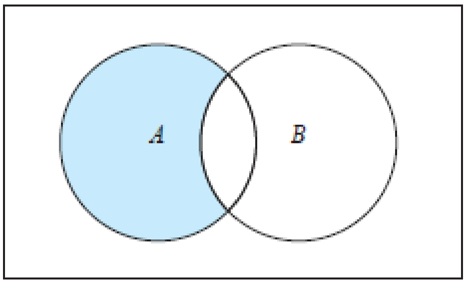
تعريف 6: نعرف تقاطع حدثين A و B، يرمز له بالرمز $A\cap B$، الحدث المكون من جميع العناصر التي تنتمي إلى A و B في آن واحد، $A\cap B=\{x\in\Omega : x\in A \ and \ x\in B\}$. يبين الشكل التالي مخطط فن الموافق.



تعريف 7: نقول عن حدثين A و B أنهما متنافيان mutually exclusive أو منفصلان disjoint إذا كانا غير متقاطعين، أي أن $A\cap B=\Phi$. وهذا يعني أنه لا يوجد عناصر مشتركة بينهما لا يمكن وقوعهما معاً، أي أن وقوع أحدهما ينفي وقوع الآخر.

4.1.2. فرق حدثين difference:

تعريف 8: نعرف فرق حدثين A و B، يرمز له بالرمز $A\setminus B$، الحدث المكون من جميع العناصر الموجودة في A غير الموجودة في B، $A\setminus B=\{x\in\Omega: x\in A \;\; and \;\; x\notin B\}$. يبين الشكل التالي مخطط فن الموافق.



ملاحظة 2: يمكن البرهان على أن: $A\setminus B=A\cap B'$.

مثال 6: ليكن لدينا المثال السابق، أوجد كل من A' و $A\cap B$ و $A\cup B$ و $A\setminus B$.

الحل:

$A'=\{2, 4, 6\}$

$A\cap B=\{3,\ 5\}$

$A\cup B=\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

$A\setminus B=\{4,\ 6\}$

3. تعداد نقاط العينة counting sample points:

في كثير من الحالات، يجب أن نكون قادرين على حل مسائل احتمالية عن طريق حساب عدد عناصر فضاء العينة دون الحاجة إلى سرد عناصرها. المبدأ الأساسي للعد، غالبا ما يشار باسم قاعدة الضرب، سيكون الحل لهذه المسائل.

1.3. المبدأ الأساسي في العد the fundamental principle of counting:

إذا كانت العملية p تُنجز بــ n مرحلة متتالية $S_1, S_2, \ldots, S_n$ (n عدد طبيعي موجب)، حيث يُمكن أن تُنجز المرحلة الأولى S_1 بــ r_1 طريقة مختلفة، ويُمكن أن تُنجز المرحلة الثانية S_2 بــ r_2 طريقة مختلفة مقابل كل طريقة من طرق إنجاز المرحلة الأولى S_1، وهكذا ...، ويُمكن أن تُنجز المرحلة S_n بــ r_n طريقة مختلفة مقابل كل طريقة من طرق إنجاز المراحل السابقة جميعها، فيكون عدد طرق إنجاز العملية p يساوي $r_1 \text{ x } r_2 \text{ x} \ldots \text{x } r_n$.

مثال 7: يوجد في إحدى المحلات الرياضية المواصفات التالية لحذاء كرة القدم:

اللون: أبيض، أزرق، بني، أسود

المقاس: 40، 41، 42، 43، 44، 45 (من كل لون). كم عدد الأنواع المختلفة المعروضة في المحل؟

الحل:

باستخدام المبدأ الأساسي في العد، فإن عدد الأنواع المختلفة المعروضة في المحل = 4 (اللون) × 6 (المقاسات) = 24 نوع مختلف.

مثال 8: ما هو عدد عناصر فضاء العينة عندما نرمي زوج من النرد مرة واحدة؟

الحل:

يُمكن لقطعة النرد الأولى أن يكون خرجها أياً من الأرقام من 1 إلى 6 $(r_1 = 6)$، ومن أجل أي قيمة من هذه القيم الستة، يُمكن لقطعة النرد الثانية أن يكون خرجها أيضاً أياً من الأرقام من 1 إلى 6 $(r_2 = 6)$. بالتالي يُمكن لزوج النرد أن يظهر بــ 36 = 6 x 6 طريقة مختلفة، بالتالي عدد عناصر فضاء العينة عندما نرمي زوج من النرد مرة واحدة هو 36.

مثال 9: كم عدداً مكوناً من ثلاثة أرقام يمكن تكوينه من الأرقام 5 ,4 ,3 ,2 ,1 في الحالتين التاليتين:

a) إذا سمح بالتكرار؟ **b)** إذا لم يسمح بالتكرار؟

الحل:

a) عدد الطرق $5 \text{ x } 5 \text{ x } 5 = 125$.

b) عدد الطرق $3 \text{ x } 4 \text{ x } 5 = 60$.

مثال 10: كم عدداً مكوناً من ثلاثة أرقام يمكن تكوينه من الأرقام 4 ,3 ,2 ,1 ,0 في الحالتين التاليتين:

a) إذا سمح بالتكرار؟

b) إذا لم يسمح بالتكرار؟

الحل:

a) عدد طرق اختيار المئات هو $r_1 = 4$ (لا يُمكن اختيار الصفر)، أما عدد طرق اختيار العشرات والآحاد هو $r_2 = r_3 = 5$. بالتالي العدد الكلي للطرق هو $4 \text{ x } 5 \text{ x } 5 = 100$.

b) عدد طرق اختيار المئات هو $r_1 = 4$ (لا يُمكن اختيار الصفر)، أما عدد طرق اختيار العشرات فهو $r_2 = 4$ والآحاد هو $r_3 = 3$. بالتالي العدد الكلي للطرق هو $4 \text{ x } 4 \text{ x } 3 = 48$.

مثال 11: كم عددا زوجياً مكوناً من أربعة أرقام يمكن تكوينه من الأرقام 9 ,6 ,5 ,2 ,1 ,0 إذا لم يسمح بتكرار الرقم أكثر من مرة واحدة؟

الحل:

بما أن العدد زوجي فإن عدد طرق اختيار الآحاد هو $r_1 = 3$، وبما أن العدد مكون من أربعة أرقام فإن الآلاف لا يُمكن أن يكون 0. بالتالي علينا تمييز حالتين للآحاد الأولى 0 والثانية مختلفة عن الصفر. في الحالة الأولى عندما يكون الآحاد مساوياً للصفر يكون $r_1 = 1$، ويكون عدد طرق اختيار الآلاف هو $r_4 = 5$ وعدد طرق اختيار المئات هو $r_3 = 4$ وعدد طرق اختيار العشرات هو $r_2 = 3$، بالتالي في هذه الحالة يكون لدينا العدد الكلي للطرق هو 60 = 3 x 4 x 5 x 1 طريقة.

أما في الحالة الثانية وعندما يكون الآحاد مختلفاً عن الصفر يكون $r_1 = 2$، ويكون عدد طرق اختيار الآلاف هو $r_4 = 4$ وعدد طرق اختيار المئات هو $r_3 = 4$ وعدد طرق اختيار العشرات هو $r_2 = 3$، بالتالي في هذه الحالة يكون لدينا العدد الكلي للطرق هو 96 = 3 x 4 x 4 x 2 طريقة.

وبما أن الحالتين متنافيتان فإن العدد الكلي للطرق المختلفة هو 154 = 96 + 60.

2.3.التباديل permutations:

تعريف 9: لتكن S مجموعة غير خالية ذات n عنصراً، كل مجموعة جزئية مرتبة منها ذات r عنصراً) $0 \le r \le n$(تُسمى تبديلاً ل n عنصراً مأخوذاً r في كل مرة، ونرمز لها بالرمز $P(n, r)$.

مبرهنة 1: عدد تباديل n عنصراً مأخوذة r في كل مرة يعطى بالعلاقة التالية:

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$$

مثال 12: بكم طريقة يمكن توزيع ثلاث ميداليات مختلفة على ثلاث طلاب فائزين في أولمبياد الرياضيات من بين 8 طلاب مشاركين؟

الحل:

ISSN: 2617-989X

عدد الطرق المختلفة يساوي إلى عدد تباديل 8 عناصر مأخوذة 3 في كل مرة، أي:

$$\mathrm{P}(8,\ 3) = 8\mathrm{x}7\mathrm{x}6 = 336$$

تعريف 10: من أجل أي عدد صحيح n غير سالب، نعرف $n!$ (n عاملي) كما يلي:

$$n! = n(n-1)...(2)(1)$$

مع حالة خاصة $0! = 1$.

مثال 13:

$$2! = 2\mathrm{x}1 = 2$$
$$3! = 3\mathrm{x}2\mathrm{x}1 = 6$$
$$4! = 4\mathrm{x}3\mathrm{x}2\mathrm{x}1 = 24$$
$$n! = n(n-1)!$$

مبرهنة 2: عدد تباديل n عنصر هو $n! = P(n, n)$.

مثال 14: بكم طريق يُمكن ترتيب 5 كتب فوق بعضها البعض موضوعة على الرف؟

الحل:

عدد الطرق يساوي عدد تباديل 5 عناصر، أي $5! = 120$

مبرهنة 3: عدد تباديل n عنصراً مأخوذة r في كل مرة يعطى بالعلاقة التالية:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال 15: بكم طريقة يُمكن جلوس 4 شباب و3 صبايا في الحالات التالية:

a) لا يوجد أية قيود
b) تناوب الشباب والصبايا
c) الشباب والصبايا في مجموعات منفصلة
d) فادي F ولميس L يريدان الجلوس بجانب بعضهما البعض

الحل:

a) عدد الطرق المختلفة يساوي $P(7, 7) = 7! = 5040$.
b) بما أن عدد الشباب أكثر من عدد الصبايا بالتالي سيكون شب على كل طرف BGBGBGB، وعدد الطرق المختلفة يساوي $4!\mathrm{x}3! = 24\mathrm{x}6 = 144$.

c) أي سيكونان على الشكل GGG & BBBB أو BBBB & GGG، بالتالي عدد الطرق المختلفة يساوي $2x4!x3! = 288$.

d) أي سيكونان على الشكل FLXXXXX أو LFXXXXX، حيث X يمثل شب أو صبية بالتالي عدد الطرق المختلفة يساوي $2x5! = 240$.

مبرهنة 4: عدد تباديل n عنصراً مرتبة على دائرة circular arrangement يساوي $(n-1)!$.

3.3. التوافيق combinations:

تعريف 11: لتكن S مجموعة غير خالية ذات n عنصراً، كل مجموعة جزئية منها ذات r عنصراً $(0 \le r \le n)$ تُسمى توافيق لـــ n عنصراً مأخوذاً r في كل مرة، ونرمز لها بالرمز $C(n, r)$.

مبرهنة 5: عدد توافيق n عنصراً مأخوذة r في كل مرة يعطى بالعلاقة التالية:

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال 16: يوجد في أحد الصفوف 8 طلاب و5 طالبات، بكن طريقة يُمكن تشكيل لجنة أنشطة خماسية تتألف من 3 طلاب وطالبتين من هذا الصف؟

الحل:

يُمكن اختيار الطلاب الثلاثة بـــ $C(8, 3)$ طريقة مختلفة، ويُمكن اختيار طالبتين بـــ $C(5, 2)$ طريقة مختلفة لكل طريقة من طرق اختيار الطلاب الثلاثة. إذن يكون عدد طرق تشكيل اللجنة هو:

$$C(8, 3)xC(5, 2) = 56x10 = 560$$

مثال 17: علينا اختيار فريق مكون من 4 أشخاص بشكل عشوائي من بين 5 نساء و6 رجال. ما هو عدد الطرق المختلفة في الحالتين:

a) لا يوجد أية قيود.

b) عدد الرجال أكبر من عدد النساء.

الحل:

a) علينا اختيار 4 أشخاص من بين 11، بالتالي عدد الطرق المختلفة هو:

$$C(11, 4) = 330$$

b) عدد الذكور أكثر من الإناث، بالتالي إما 3 ذكور وامرأة واحدة، أو 4 ذكور:

عدد طرق اختيار 3 ذكور وامرأة واحدة هو:

$$C(6,3)\text{x}C(5,1)=20\text{x}5=100$$

عدد طرق اختيار 4 ذكور هو:

$$C(6,4)=15$$

عدد طرق اختيار الفريق بحيث يكون عدد الرجال أكبر من عدد النساء هو: 115 = 15 + 100.

مثال 18: عائلة مؤلفة من أب وأم و10 أولاد. تم دعوة لمجموعة من العائلة مكونة من 4 أشخاص، ما هو عدد الطرق المختلفة لتشكيل المجموعة في الحالات التالية:

a) تحوي الأب والأم حصراً.

b) تحوي على أحد الأبوين (الأب أو الأم فقط).

c) لا تحوي على الابوين.

الحل:

a) علينا اختيار ولدين من بين 10، بالتالي عدد الطرق المختلفة هو:

$$C(10,2)=45$$

b) علينا اختيار ثلاث أولاد من بين 10 وأحد الأبوين من بين 2، بالتالي عدد الطرق المختلفة هو:

$$C(10,3)\text{x}C(2,1)=120\text{x}2=240$$

c) علينا اختيار أربعة أولاد من بين 10، بالتالي عدد الطرق المختلفة هو:

$$C(10,4)=210$$

4. احتمال الحدث probability of an event:

احتمال حدث A هو قيمة عددية يرمز له بالرمز $P(A)$ تعبر عن فرصة وقوع الحدث A عند إجراء التجربة، وتتراوح هذه القيمة بين الصفر والواحد.

1.4. النتائج متساوية الاحتمال equally likely outcomes:

إذا كان احتمال ظهور أي نتيجة من نتائج التجربة العشوائية مساوية لاحتمال ظهور أي نتيجة أخرى فإننا نقول بأن نتائج هذه التجربة متساوية الاحتمال. مثال في تجربة رمي قطعة النرد المتزن مرة واحدة فإن احتمال ظهور الرقم 1 يساوي احتمال ظهور الرقم 2 ويساوي احتمال ظهور الرقم 3 ويساوي احتمال ظهور الرقم 4 ويساوي احتمال ظهور الرقم 5 ويساوي احتمال ظهور الرقم 6.

تعريف 12: احتمال الحدث A يساوي إلى مجموع احتمالات الأحداث البسيطة المكونة له. لذلك فإن:

$$0 \le P(A) \le 1, \quad P(\Phi) = 0, \quad \text{and} \quad P(\Omega) = 1$$

بالإضافة إلى ذلك إذا كانت $A_1, A_2, \ldots$ سلسلة من الأحداث المتنافية فإن:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

مثال 19: نرمي قطعة من النقود مرتين. ما هو احتمال ظهور الكتابة H على الأقل مرة واحدة؟

الحل:

فضاء العينة للتجربة المذكورة هو $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$. فإذا كانت قطعة النقود متّزنة فإن احتمال ظهور أي نتيجة متساوي الاحتمال، بالتالي إذا كانت القيمة ω تمثل احتمال ظهور أي عنصر من فضاء العينة فإن $4\omega = 1$، أي $\omega = 1/4$. احتمال الحدث A (احتمال ظهور الكتابة على الأقل مرة واحدة) يتم حسابه كما يلي:

$$A = \{HH, HT, TH\} \text{ and } P\left(A\right) = 1/4 + 1/4 + 1/4 = 3/4$$

تعريف 13: إذا كان لدينا تجربة عشوائية متساوية الاحتمال لأي نتيجة من نتائجه الـــ N المختلفة، وإذا كان n نتيجة منها توافق الحدث A، بالتالي فإن احتمال الحث A يساوي إلى $P(A) = n / N$.

مثال 20: يحتوي صندوق 4 كرات بيضاء و5 كرات حمراء و6 كرات صفراء، تسحب عشوائياً ثلاث كرات من الصندوق معاً. لتكن الأحداث التالية:

a) A الحصول على ثلاث كرات صفراء

b) B الحصول على ثلاث كرات لها نفس اللون

c) C الحصول على ثلاث كرات مختلفة الألوان

d) D الحصول على كرة صفراء واحدة على الأقل

احسب احتمال كل من الأحداث A, B, C, D .

الحل:

$$N = C(15,\ 3) = 455$$

a) $P(A) = \frac{n}{N} = \frac{C(6,3)}{C(15,3)} = \frac{20}{455}$

b) $P(B) = \frac{n}{N} = \frac{C(4,3)+C(5,3)+C(6,3)}{C(15,3)} = \frac{34}{455}$

c) $P(C) = \frac{n}{N} = \frac{C(4,1).C(5,1).C(6,1)}{C(15,3)} = \frac{120}{455}$

d) $P(D) = \frac{n}{N} = \frac{C(6,1).C(9,2)+C(6,2).C(9,1)+C(6,3)}{C(15,3)} = \frac{371}{455}$

مثال 21: يحتوي صندوق 6 كرات بيضاء و7 كرات سوداء وكرتان حمراوان.

a) نسحب من الصندوق كرتين على التتالي من دون إعادة، احسب احتمال أن تكون الكرتان حمراوان؟ الحدث (A).

b) نسحب من الصندوق كرتين على التتالي مع إعادة، احسب احتمال أن تكون الكرتان حمراوان؟ الحدث (B).

c) نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي دون إعادة، احسب احتمال أن تكون الكرات الثلاث المسحوبة مختلفة الألوان (كرة من كل لون)؟ (C)

d) نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي مع إعادة، احسب احتمال أن تكون الكرات الثلاث المسحوبة مختلفة الألوان (كرة من كل لون)؟ (D)

الحل:

a) $P(A) = \frac{2}{15}.\frac{1}{14} = \frac{1}{105}$

b) $P(B) = \frac{2}{15}.\frac{2}{15} = \frac{4}{225}$

c) احتمال أن تكون الكرات المسحوبة بالترتيب (بيضاء، سوداء، حمراء) يساوي $\frac{6}{15}.\frac{7}{14}.\frac{2}{13} = \frac{2}{65}$،

وبما أنه يوجد 6 = !3 تباديل ممكنة بين الألوان الثلاث بالتالي:

$$P(C) = \frac{2}{65}\text{x}(3!) = \frac{12}{65}$$

(a $P(D)=\frac{6}{15}.\frac{7}{15}.\frac{2}{15}\text{x}(3!)=\frac{56}{375}$

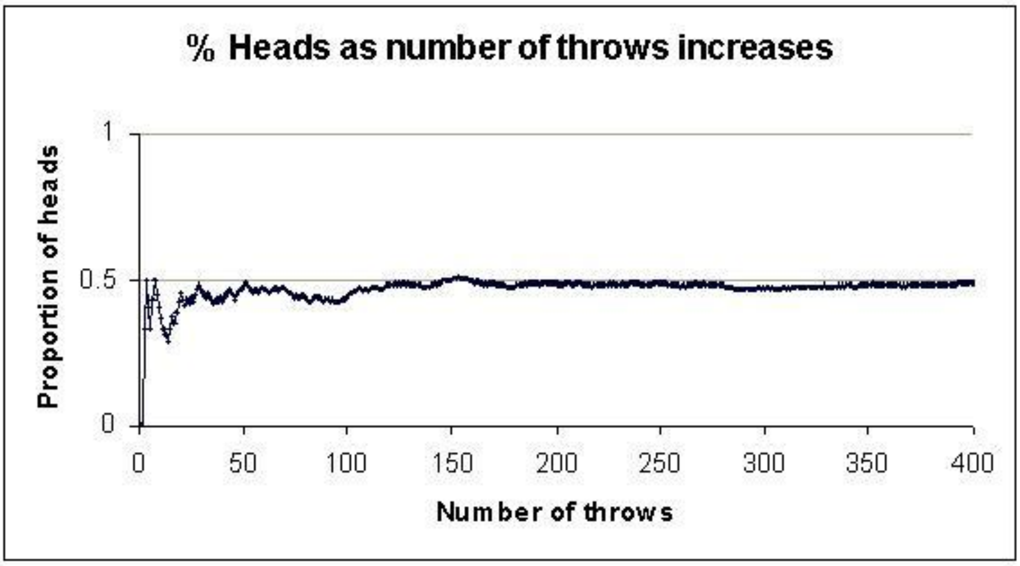
2.4. احتمال التكرار النسبي relative frequency probability:

إذا كررنا تجربة عشوائية n مرة تحت نفس الظروف وكان عدد مرات وقوع الحدث A في هذه التكرارات يساوي $r_n(A)$ فإن احتمال الحدث A يعطى بالعلاقة التالية:

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{r(A)}{n}$$

مثال 22: ليكن الحدث A حدث ظهور الكتابة في تجربة رمي قطعة النقود المتزنة. وبفرض أننا كررنا هذه التجربة n مرة وليكن $r_n(A)$ هو عدد مرات ظهور الكتابة عند المحاولة رقم n، فإن:

$$P(A)=P(H)=\lim_{n\to\infty}\frac{r(A)}{n}=\frac{1}{2}$$



3.4.مبرهنات في الاحتمال probability theorems:

مبرهنة 6: أياً كان الحدثان A, B فإن:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

نتيجة 1: إذا كان الحدثان A, B متنافيان فإن:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

مثال 23: تم استجواب أحد المهندسين للحصول على عمل من قبل شركتين A و B. احتمال أن يتم قبوله في الشركة A هو 0.8 واحتمال أن يتم قبوله في الشركة B هو 0.6 وأن احتمال أن يتم قبوله في أحد الشركتين على الأقل هو 0.9، فما هو احتمال أن تيم قبوله من قبل الشركتين معاً؟

الحل:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$0.9=0.8+0.6-P(A\cap B) \quad \Rightarrow \quad P(A\cap B)=1.4-0.9=0.5$$

مثال 24: ما هو احتمال الحصول على مجموع مقداره 7 أو 11 في تجربة رمي زوج من النرد؟

الحل:

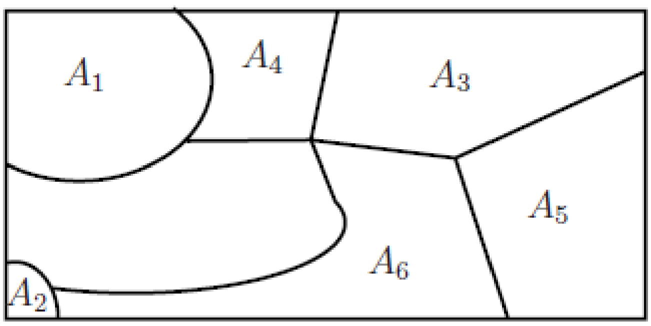
ليكن الحدث A الحصول على مجموع 7 والحدث B الحصول على مجموع 11. يُمكن الحصول على مجموع 7 بستة طرق مختلفة من أصل 36 طريقة ممكنة $\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$، بالتالي فإن $P(A)=6/36=1/6$. أما المجموع 11 فيمكن الحصول علية بطريقتين فقط $\{(5,6), (6,5)\}$، بالتالي $P(B)=2/36=1/18$. وبما أن الحدثان A و B متنافيان بالتالي:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}=\frac{2}{9}$$

نتيجة 2: إذا كان الأحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ متنافية مثنى مثنى فإن:

$$P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$$

تعريف 14: نقول عن الأحداث (غير الخالية) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ من فضاء العينة Ω أنها تشكل تجزئة partition لـــ Ω إذا كانت متنافية مثنى مثنى وأن $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n=\Omega$. يبين الشكل التالي تجزئة لفضاء العينة مكون من 6 أحداث.



مثال 25: في تجربة رمي قطعة النرد مرة واحدة، يشكل الحدثان $A=\{1,3,5\}$ (ظهور عدد فردي) و $B=\{2,4,6\}$ (ظهور عدد زوجي) تجزئة لفضاء العينة لأن:

$$A \cap B = \Phi$$
$$A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\} = \Omega$$

نتيجة 3: إذا كان الأحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ تشكل تجزئة ل Ω فإن:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = P(\Omega) = 1$$

يُمكن تعميم النظرية 6 على ثلاث مجموعات لتصبح كما يلي:

مبرهنة 7: أياً كانت الأحداث A, B, C فإن:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$
$$- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

مبرهنة 8: أياً الحدث A فإن:

$$P(A) + P(A') = 1$$

مثال 26: إذا كانت احتمالات ميكانيكي سيارات أن يخدم في أي يوم 3, 4, 5, 6, 7, 8, or more سيارة هي على الترتيب $0.12,\ 0.19,\ 0.28,\ 0.24,\ 0.10,$ and 0.07، فما هو احتمال أن يخدّم 5 سيارات على الأقل؟

الحل:

ليكن E حدث تخديم 5 سيارات على الأقل فيكون الحدث E' تخديم أقل من 5 سيارات. وبما أن: $P(E') = 0.12 + 0.19 = 0.31$، بالتالي:

$$P(E) = 1 - P(E') = 1 - 0.31 = 0.69$$

مثال 27: يحتوي صندوق 4 كرات بيضاء و5 كرات حمراء و6 كرات صفراء، تسحب عشوائياً ثلاث كرات من الصندوق معاً. ما هو احتمال الحصول على كرة صفراء واحدة على الأقل؟

الحل:

ليكن A حدث الحصول على كرة صفراء واحدة على الأقل فيكون A' حدث عدم الحصول على أية كرة صفراء:

$$P(A) = \frac{n}{N} = \frac{C(9,3)}{C(15,3)} = \frac{84}{455}$$

بالتالي:

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{84}{455} = \frac{371}{455}$$

مبرهنة 9: أياً كان الحدثان A, B فإن:

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

مثال 28: إذا كان احتمال نجاح فادي في أحد الاختبارات يساوي 0.7 واحتمال نجاح فادي ولما معاً هو 0.2 فما هو احتمال نجاح فادي ورسوب لما؟

الحل:

ليكن الحدث A نجاح فادي في الاختبار والحدث B نجاح لما في الاختبار، بالتالي فالحدث نجاح فادي ورسوب لما هو $A \cap B'$ ، ولما كان $A \setminus B = A \cap B'$ ، بالتالي:

$$P(A \cap B') = P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = 0.7 - 0.2 = 0.5$$

5. الاحتمال الشرطي conditional probability:

من المسائل المهمة في حساب الاحتمال دراسة العلاقات الاحتمالية ما بين الاحداث، فإذا كان A, B حدثين متعلقين بتجربة معينة فإن وقوع أحد هذين الحدثين قد يؤثر على احتمال وقوع الحدث الآخر.

مثال 29: لتكن تجربة رمي قطعة النرد مرة واحدة، نعلم أن فضاء العينة هو $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. وليكن لدينا الحدثان التاليان: الحدث A ظهور الرقم 3، والحدث B ظهور عدد فردي. من الواضح أن $P(A) = 1/6$ وأن $P(B) = 1/2$.

بفرض الآن أن قطعة النرد قد رميت مرة واحدة، وأن هناك من أخبرنا عن وقوع الحدث B (ظهور عدد فردي) بدون أن يعلمنا عن نتيجة التجربة. عندئذ يصبح فضاء العينة الجديد هو $\{1, 3, 5\}$، ويصبح احتمال وقوع الحدث A علماً أن الحدث B قد وقع يساوي $1/3$.

تعريف 15: ليكن لدينا الحدثين A, B المعرفين على نفس فضاء العينة Ω، بحيث أن $P(B) \neq 0$. الاحتمال الشرطي للحدث A علماً بأن الحدث B قد وقع، ونرمز له بالرمز $P(A|B)$ أو $P_B(A)$، والمعرف كما يلي:

$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

مثال 30: احتمال اقلاع (مغادرة) رحلة طيران نظامية في الوقت المحدد لها هو $P(D) = 0.83$، واحتمال أن تصل في الوقت المحدد لها هو $P(A) = 0.82$، كما أن احتمال المغادرة والوصول في الوقت المحدد لها هو $P(A \cap D) = 0.78$. أوجد احتمال أن تكون طائرة:

a) تصل في الوقت المحدد علماً أنها أقلعت في الوقت المحدد.

b) تقلع في الوقت المحدد علماً أنها وصلت في الوقت المحدد.

c) تصل في الوقت المحدد علماً أنها لم تقلع في الوقت المحدد.

الحل:

a) $$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.78}{0.83} = 0.94$$

b) $$P(D|A) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} = \frac{0.78}{0.82} = 0.95$$

c) $$P(A|D') = \frac{P(A \cap D')}{P(D')} = \frac{P(A) - P(A \cap D)}{1 - P(D)}$$

$$P(A|D') = \frac{0.82 - 0.78}{1 - 0.83} = \frac{0.04}{0.17} = 0.24$$

مثال 31: لدى عائلة طفلان، ما هو احتمال كونهما ذكرين إذا علمت أن أحدهما ذكر؟

الحل:

يُمكن لأي من الطفلين أن يكون ذكراً B أو أنثى G. بالتالي يُمكن لفضاء العينة أن يكون على النحو التالي: $\Omega = \{BB, BG, GB, GG\}$، ونعرف قانون الاحتمال كما يلي:

$$P(BB) = P(BG) = P(GB) = P(GG) = 1/4$$

والحدث A أحد الطفلين ذكر هو: $\mathrm{A} = \{\mathrm{BB, BG, GB}\}$، والاحتمال المطلوب هو:

$$P(BB|A) = \frac{P(\{BB\} \cap \{BB, BG, GB\})}{P(\{BB, BG, GB\})} = \frac{P(\{BB\})}{P(\{BB, BG, GB\})} = \frac{1}{3}$$

نتيجة 4:

- $P(A'|B) = 1 - P(A|B)$
- $P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 \cap A_2)$
- بفرض أن $P(A) \neq 0$ و $P(B) \neq 0$ فإن:

$$P(A \cap B) = P(B).P(A|B)$$
$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A)$$

- يُمكن تعميم الخاصة الأخيرة على عدد منته من الأحداث، فمثلاً ليكن لدينا الأحداث A, B, C، وكان $P(A) \neq 0$ و $P(A \cap B) \neq 0$ فإن:

$$P(A \cap B \cap C) = P\big((A \cap B) \cap C)\big) = P(A \cap B).P(C|A \cap B)$$
$$= P(A).P(B|A).P(C|A \cap B)$$

- في حالة النتائج متساوية الاحتمال لدينا:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

حيث $n(X)$ تمثل عدد عناصر X.

مثال 32: صندوق يحوي خمس كرات حمراء مرقمة بالأرقام 1 ,1 ,1 ,1 ,2 وثلاث كرات صفر مرقمة بالأرقام 1 ,1 ,2. نسحب من الصندوق كرتين بالتتالي من دون إعادة.

a) احسب احتمال الحصول على كرتين مجموع رقميهما يساوي 2.

b) احسب احتمال الحصول على كرتين حمراوين مجموع رقميهما يساوي 2.

c) إذا علمت أن الكرتين المسحوبتين حمراوان، احسب احتمال أن يكون مجموع رقميهما يساوي 2.

d) إذا علمت أن مجموع رقمي الكرتين يساوي 2، فما احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان حمراوين.

الحل:

a) ليكن الحدث A : الحصول على كرة تحمل الرقم 1 بنتيجة السحب الأول، والحدث B : الحصول على كرة تحمل الرقم 1 بنتيجة السحب الثاني. عندئذ الحدث المطلوب هو: $C = A \cap B$.

$$P(C) = P(A \cap B) = P(A).P\left(B \mid A\right) = \frac{4}{8}.\frac{3}{7} = \frac{3}{14}$$

b) ليكن الحدث E : الحصول على كرة حمراء تحمل الرقم 1 بنتيجة السحب الأول، والحدث F: الحصول على كرة حمراء تحمل الرقم 1 بنتيجة السحب الثاني. عندئذ الحدث المطلوب هو: $D = E \cap F$.

$$P(D) = P(E \cap F) = P(E).P(F \mid E) = \frac{6}{8}.\frac{5}{7} = \frac{15}{28}$$

c) ليكن الحدث R : الحصول على كرتين حمراوين، بالتالي $P(R) = \frac{5}{8}.\frac{4}{7} = \frac{5}{14}$. الحصول على كرتين مجموعهما يساوي 2 هو الحدث C، بالتالي المطوب هو حساب $P(C \mid R)$

$$P(C \mid R) = \frac{P(R \cap C)}{P(R)} = \frac{P(D)}{P(R)} = \frac{3/14}{5/14} = \frac{3}{5}$$

d) المطوب هو حساب $P(R \mid C)$

$$P(R \mid C) = \frac{P(R \cap C)}{P(C)} = \frac{P(D)}{P(C)} = \frac{3/14}{15/28} = \frac{2}{5}$$

1.5. الأحداث المستقلة independent events:

وجدنا في مثال سابق أن احتمال اقلاع رحلة طيران نظامية في الوقت المحدد لها هو $P(D) = 0.83$، واحتمال أن تقلع في الوقت المحدد علماً أنها وصلت في الوقت المحدد $P(D \mid A) = 0.95$. أي $P(D \mid A) \neq P(D)$، وهذا يعني أن الحدث D يعتمد على الحدث A.

ولكن في بعض الحالات يكون احتمال حدوث حادثة معينة A لا يتأثر مطلقًا بحدوث أو عدم حدوث حادثة أخرى. أي أنه لا فرق بين احتمال الحادثة A والاحتمال الشرطي للحادثة A علماً أن B حدثت، أي أن $P(A \mid B) = P(A)$ وفي هذه الحالة نقول بأن الحادثتين A و B مستقلتان.

تعريف 16: ليكن A و B حدثين معرفين على نفس فضاء العينة Ω. نقول عن الحدثين أنها مستقلان إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين:

$$P(A \mid B) = P(A) \quad \text{or} \quad P(B \mid A) = P(B)$$

مبرهنة 10: ليكن A و B حدثين معرفين على نفس فضاء العينة Ω. نقول عن الحدثين أنها مستقلان إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

مثال 33: في تجربة رمي قطعة نقود ثلاث مرات، ليمكن الحدث A ظهور شعار وكتابة والحدث B ظهور شعار واحد على الأكثر. برهن أن الحدثين A و B مستقلين.

الحل:

$\Omega=\{$(HHH), (HHT), (HTH), (HTT), (THH), (THT), (TTH), (TTT)$\}$

$A=\{$(HHT), (HTH), (HTT), (THH), (THT), (TTH)$\}$

$B=\{$(HHH), (HHT), (HTH), (THH)$\}$

$A\cap B=\{$(HHT), (HTH), (THH)$\}$

بالتالي فإن: $P(A)=6/8=3/4$ و $P(B)=4/8=1/2$ و $P(A\cap B)=3/8$

وأن: $P(A\cap B)=P(A).P(B)=3/8$ والحدثان مستقلان.

مثال 34: في تجربة إلقاء قطعة النرد مرة واحدة، ليكن A الحدث الموافق لظهور عدد زوجي وليكن B الحدث الموافق لظهور عدد يكون مربع لعدد صحيح، برهن أن الحدثين A و B مستقلين.

الحل:

$$A=\{2,4,6\}\quad B=\{1,4\}\qquad A\cap B=\{4\}$$

بالتالي:

$$P(A)=1/2 \text{ و } P(B)=1/3 \text{ و } P(A\cap B)=1/6$$

من الواضح أن $P(A\cap B)=P(A).P(B)=1/6$ والحدثان مستقلان.

مثال 35: في تجربة إلقاء قطعة النرد مرة واحدة، ليكن A الحدث الموافق لظهور عدد زوجي وليكن B الحدث الموافق لظهور عدد أولي، برهن أن الحدثين A و B غير مستقلين.

الحل:

$$A=\{2,4,6\}\quad B=\{2,3,5\}\qquad A\cap B=\{2\}$$

بالتالي:

$$P(A)=1/2 \text{ و } P(B)=1/2 \text{ و } P(A\cap B)=1/6$$

من الواضح أن $P(A).P(B)=1/4 \neq P(A\cap B)=1/6$ والحدثان غير مستقلان.

مبرهنة 11: ليكن A و B حدثين معرفين على نفس فضاء العينة Ω. إذا كان الحدثان A و B مستقلين كان الحدثان A و B' مستقلين أيضاً.

نتيجة 5:

- إذا كان الحدثان A و B مستقلين كان الحدثان A' و B مستقلين أيضاً.
- إذا كان الحدثان A و B مستقلين كان الحدثان A' و B' مستقلين أيضاً.

مثال 36: يصوب راميان، كلّ على حده، طلقة واحدة على هدف. احتمال إصابة الهدف من قبل الرامي الأول يساوي 0.7 (الحدث A)، واحتمال احتمال إصابة الهدف من قبل الرامي الثاني يساوي 0.8 (الحدث B).

a) ما هو احتمال إصابة الهدف من قبل الراميان معاً؟
b) ما هو احتمال إصابة الهدف من قبل أحدهما على الأقل؟
c) ما هو احتمال عدم إصابة الهدف؟
d) ما هو احتمال أن يصيب أحدهما الهدف فقط؟
e) إذا علمت أن أحدهما على الأقل أصاب الهدف، فما احتمال أن يكون هو الرامي الأول فقط؟

الحل:

a) الحدثان A و B مستقلان لأن احتمال إصابة أحدهما للهدف لا يؤثر على احتمال إصابته من قبل الآخر، بالتالي: $P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{7}{10}.\frac{8}{10}=\frac{14}{25}$

b) احتمال إصابة الهدف من قبل أحدهما على الأقل هو احتمال الحدث $A\cup B$:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{7}{10}+\frac{8}{10}-\frac{14}{25}=\frac{47}{50}$$

c) عدم إصابة الهدف هو احتمال الحدث $(A\cup B)'$:

$$P\big((A\cup B)'\big)=1-P(A\cup B)=1-\frac{47}{50}=\frac{3}{50}$$

يُمكن إيجاد النتيجة بطريقة أخرى: $(A\cup B)'=A'\cap B'$، حسب قانون دومرغان، والحدثان A' و B' مستقلان خطياً، بالتالي:

$$P(A'\cap B') \ = \ P(A').P(B')=\frac{3}{10}.\frac{2}{10}=\frac{3}{50}$$

d) ليكن الحدث C الموافق لإصابة أحدهما الهدف فقط: $C=(A\cap B')\cup(A'\cap B)$، وبما أن الحدثان A و B' مستقلان وكذلك الأمر بالنسبة للحدثان A' و B، بالتالي:

$$P(C)=P(A\cap B')+P(A'\cap B)=P(A).P(B')+P(A').P(B)$$

$$P(C)=\frac{7}{10}.\frac{2}{10}+\frac{3}{10}.\frac{8}{10}=\frac{19}{50}$$

e) الحدث الموافق لإصابة الرامي الأول فقط هو $A_1=A\cap B'$ ، وبما أن الحدثان A و B' مستقلان، بالتالي:

$$P(A_1)=P(A\cap B')=P(A).P\left(B'\right)=\frac{7}{10}.\frac{2}{10}=\frac{7}{50}$$

والاحتمال المطلوب هو $P\left(A_1|(A\cup B)\right)$:

$$P\left(A_1|(A\cup B)\right)=\frac{P((A\cup B)\cap A_1)}{P(A\cup B)}=\frac{P(A_1)}{P(A\cup B)}=\frac{7/50}{47/50}=\frac{7}{47}$$

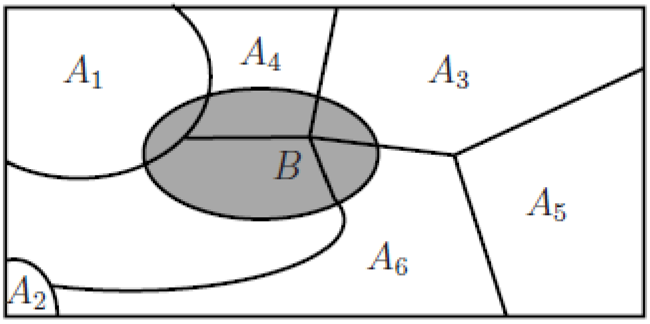
6. مبرهنة (قاعدة) بايز Bayes' theorem:

الإحصاء البايزي عبارة عن مجموعة من الأدوات التي يتم استخدامها في الاحصاء الاستدلالي والذي يُطبق في تحليل المعطيات التجريبية في العلوم والهندسة. تُعتبر قاعدة بايز واحدة من أهم القواعد في نظرية الاحتمالات.

1.6. قانون الاحتمال الكلي total probability law:

لتكن الأحداث $A_1, A_2, \dots, A_n$ من فضاء العينة Ω والتي تشكل تجزئة لـ Ω. وليكن الحدث B من Ω، بالتالي يُمكن كتابته بالشكل التالي:

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)$$



بما أن الأحداث $(B \cap A_1),\ (B \cap A_2), \dots, (B \cap A_n)$ هي أحداث متنافية بالتالي:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$$

يُمكن كتابة كل حد من حدود الطرف اليميني للمعادلة السابقة على شكل احتمال شرطي:

$$P(B \cap A_i) = P(B | A_i) P(A_i) \qquad 1 \le i \le n$$

باستخدام تلك التعابير في حساب $P(B)$، نحصل على ما نسميه قانون الاحتمال الكلي:

$$P(B) = P(B | A_1) P(A_1) + P(B | A_2) P(A_2) + \dots + P(B | A_n) P(A_n)$$

مبرهنة 12: لتكن الأحداث $A_1, A_2, \dots, A_n$ من فضاء العينة Ω والتي تشكل تجزئة لـ Ω، بحيث $P(A_i) \neq 0$ من أجل $i = 1,\ 2,\ \dots,\ n$. من أجل أي حدث B من Ω، لدينا:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B | A_i) P(A_i)$$

مثال 37: في أحد مصانع التجميع يتم إنتاج منتج بواسطة إحدى ثلاث آلات. تقوم الأولى B_1 بإنتاج 30% من الإنتاج الكلي للمصنع، وتقوم الثانية B_2 بإنتاج 45% من الإنتاج الكلي للمصنع، وتقوم الثالثة B_3 بإنتاج

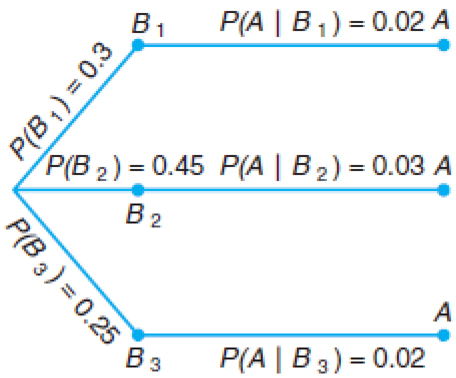
25% من الإنتاج الكلي للمصنع. إذا علمنا أن نسبة المنتجات التالفة للآلات هي: 2% للأولى و 3% للثانية و 2% للثالثة.

a) نأخذ منتج واحد بشكل عشوائي ما هو احتمال أن يكون تالف؟

b) إذا علمنا أن المنتج كان تالفاً، فما هو احتمال أن يكون قد أنتج من الآلة الأولى، الثانية، الثالثة؟

الحل:

a) لنعرف الأحداث التالية: A المنتج تالف، B_1 المنتج مصنع من قبل الآلة B_1، B_2 المنتج مصنع من قبل الآلة B_2، B_3 المنتج مصنع من قبل الآلة B_3. بتطبيق قانون الاحتمال الكلي:



$$P(A|B_1)P(B_1) = (0.02)(0.3) = 0.006$$
$$P(A|B_2)P(B_2) = (0.03)(0.45) = 0.0135$$
$$P(A|B_3)P(B_3) = (0.02)(0.25) = 0.005$$
$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A|B_i)P(B_i) = 0.006 + 0.0135 + 0.005 = 0.0245$$

بالتالي احتمال أن يكون المنتج تالف هو 0.0245

b) إذا علمنا أن المنتج كان تالفاً، فإن احتمال أين يكون قد أنتج من الآلة الأولى هو:

$$P(B_1 | A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1)P(B_2)}{P(A)} = \frac{(0.02)(0.3)}{0.0245} = 0.245$$

واحتمال أين يكون قد أنتج من الآلة الثانية هو:

$$P(B_2 | A) = \frac{P(A \cap B_2)}{P(A)} = \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A)} = \frac{(0.03)(0.45)}{0.0245} = 0.551$$

واحتمال أين يكون قد أنتج من الآلة الثالثة هو:

$$P(B_2 | A) = \frac{P(A \cap B_3)}{P(A)} = \frac{P(A|B_3)P(B_3)}{P(A)} = \frac{(0.02)(0.25)}{0.0245} = 0.204$$

حالة خاصة من قانون الاحتمال الكلي

نعلم جيداً أن الحدثان A و A' تشكلان تجزئة لفضاء العينة Ω، بالتالي يصبح قانون الاحتمال الكلي في هذه الحالة كما يلي:

$$P(B)=P(B\,|\,A)P(A)+P(B\,|\,A')P(A')$$

مثال 38: احتمال أن تتلج غداً هو 1/3. إذا أثلجت احتمال أن يذهب فادي إلى العمل 1/5، وإذا لم تتلج فاحتمال أن يذهب فادي إلى العمل 8/9. أوجد احتمال أن يذهب فادي إلى العمل غداً.

الحل:

ليكن A الحدث غداً سوف تتلج، والحدث B فادي سيذهب إلى العمل غداً. بالتالي: $P(A)= 1\,/$ و $P(A')=2/3$ و $P(B\,|\,A)=1/5$ و $P(B\,|\,A')=8/9$.

$$P(B)=\frac{1}{5}.\frac{1}{3}+\frac{8}{9}.\frac{2}{3}=\frac{89}{135}$$

مثال 39: لدينا عينة من 100 عنصر 20 منها معطل، نختار من هذه العينة عنصران واحد تلو الآخر بدون إعادة. احسب:

a) العنصر الأول معطل.

b) العنصران معطلان.

c) العنصر الثاني معطل.

الحل:

ليكن الحدث A العنصر الأول المسحوب معطل والحدث B العنصر الثاني المسحوب معطل

a) $P(A)=\dfrac{20}{100}=\dfrac{1}{5}$

b) $P(A\cap B)=P(A\,|\,B)P(A)=\dfrac{19}{99}.\dfrac{20}{100}=\dfrac{19}{495}$

c) $P(B)=P(B\,|\,A)P(A)+P(B\,|\,A')P(A')$

$$=\frac{19}{99}.\frac{20}{100}+\frac{20}{99}.\frac{80}{100}=\frac{198}{990}=\frac{1}{5}$$

مبرهنة 13 (بايز): لتكن الأحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ من فضاء العينة Ω والتي تشكل تجزئة لـ Ω، بحيث $P(A_i)\neq 0$ من أجل $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. من أجل أي حدث A من Ω، لدينا:

$$P(A_i\,|\,B)=\frac{P(B\,|\,A_i)P(A_i)}{P(B)}=\frac{P(B\,|\,A_i)P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(B\,|\,A_k)P(A_k)}$$

حالة خاصة من مبرهنة بايز

بتطبيق مبرهنة بايز على A و A' اللذان يشكلان تجزئة لفضاء العينة Ω، يصبح قانون الاحتمال الكلي في هذه الحالة كما يلي:

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|A')P(A')}$$

مثال 40: لدينا صندوقين يحوي الصندوق الأول على 4 كرات بيضاء و 6 كرات سوداء، بينما يحوي الصندوق الثاني على 8 كرات بيضاء و8 كرات سوداء. اخترنا صندوق من هاذين الصندوقين بشكل عشوائي ثم سحبنا منه كرة واحدة بشكل عشوائي:

a) احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة سوداء.

b) إذا علمنا أن الكرة المسحوبة سوداء، فما احتمال أن تكون من الصندوق الثاني.

الحل:

لنعرف الحوادث التالية: B الكرة المسحوبة سوداء، A_1 الصندوق المختار هو الصندوق الأول، A_2 الصندوق المختار هو الصندوق الثاني.

a)

$$P(A_1)=P(A_2)=1/2$$
$$P(B|A_1)=6/10$$
$$P(B|A_2)=5/10$$
$$P(B)=P(B|A_1)P(A_1)P(B|A_2)P(A_2)$$
$$=(0.5)(0.6)+(0.5)(0.5)=0.55=11/20$$

b) لنعرف الحوادث التالية: B الكرة المسحوبة سوداء، A_1 الصندوق المختار هو الصندوق الأول، A_2 الصندوق المختار هو الصندوق الثاني، بالتالي:

$$P(A_2|B)=\frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)}$$

$$P(A_2|B)=\frac{(0.5)(0.5)}{0.55}=\frac{5}{11}$$

مثال 41: في أحد الجامعات، 6% من الذكور أطوالهم أكثر من 180 سم و 1% من الإناث أطوالهن أكثر من 180 سم. نسبة الإناث إلى الذكور في هذه الجامعة هي 3:2 (لصالح الإناث). نختار أحد الطلاب بشكل عشوائي من بين الذين أطوالهم أكثر من 180 سم، ما هو احتمال أن يكون الطالب المختار أنثى؟

الحل:

ليكن لدينا الأحداث التالية: M الطالب ذكر، F الطالب أنثى، T طول الطالب أكثر من 180 سم.

من الملاحظ أن الحدثان M و F يشكلان تجزئة لفضاء العينة (الطلاب والطالبات). وأن $P(M)=2/5$ ، $P(F)=3/5$ ، $P(T|M)=6/100$ ، $P(T|F)=1/100$.

المطلوب هو حساب $P(F|T)$. بالاعتماد على نظرية بايز لدينا:

$$P(F|T)=\frac{P(T|F)P(F)}{P(T|F)P(F)+P(T|M)P(M)}$$

$$P(F|T)=\frac{(0.01)(0.6)}{(0.01)(0.6)+(0.06)(0.4)}=\frac{1}{5}$$

تمارين

1. احتمال إصابة شخص ما بالمرض A هو $1/4$ واحتمال أن يصاب بالمرض B هو $1/3$ واحتمال أن يصاب بأحد المرضين A أو B هو $1/2$. ماهو احتمال أن يصاب الشخص بالمرضين A و B معاً؟

2. صندوق يحوي 8 كرات بيضاء و4 كرات سوداء، نسحب عشوائيًا خمس كرات، ما احتمال أن يكون لدينا في العينة المسحوبة كرتان بيضاوان؟

3. إذا كان عدد أوراق يانصيب 30 ورقة من بينها 5 أوراق رابحة. اشترى شخص ثماني أوراق. المطلوب:
   a) ما هو احتمال ألا يربح المشتري أي جائزة.
   b) ما احتمال أن يربح ثلاثة جوائز.
   c) ما احتمال أن يربح جائزة على الأقل.

4. إذا علمت أن للهواتف أرقام مؤلفة من سبعة خانات عشرية وأن المنزلة الأخيرة هي 5 أو 6
   a) ما هو عدد أرقام الهواتف الممكنة؟
   b) ما احتمال أن يكون رقم هاتفك 5656565؟

5. ثلاثة رماة A, B, C احتمال إصابة كل منهم للهدف هي $2/3$, $3/4$, $4/5$ على الترتيب. إذا صوب كل منهم طلقة واحدة نحو الهدف ذاته فما هو احتمال
   a) إصابة الهدف.
   b) إصابة الهدف بطلقة واحدة.
   c) عدم إصابة الهدف.

6. دراسة لعينة من 800 شخص تتعلق بالقدرة على تذكر الإعلانات التلفزيونية بالنسبة لمنتج معين وتأثير الإعلان على شراء المنتج:

	يتذكر الإعلان	لا يتذكر الإعلان	المجموع
اشترى المنتج	160	80	240
لم يشتري المنتج	240	320	560
المجموع	400	400	800

بفرض أن T حدث تذكر الشخص للإعلان وأن B حدث شراء المنتج. المطلوب:

a) أوجد احتمال كل من الأحداث التالية: $P(T),\ P(B),\ P(T\cap B)$.

b) هل الحدثان T و B مستقلان؟

c) إذا تذكر شخص ما الإعلان، ما هو احتمال أن يشتري المنتج؟

7. تستخدم شركة تصنيع ثلاث خطط تحليلية لتصميم وتطوير منتج محدد. لأسباب اقتصادية تستخدم الخطط الثلاثة في أوقات مختلفة. في الواقع يتم استخدام الخطط $1,\ 2,\ 3$ بنسبة $30\%,\ 20\%,\ 50\%$ على الترتيب، معدل العيب يختلف للإجرائيات الثلاث كما يلي:

$$P(D/P_1)=0.01,\quad P(D/P_2)=0.03,\quad P(D/P_3)=0.02$$

حيث أن $P(D/P_j)$ هي احتمال أن يكون المنتج معيب علماً أنه تم استخدام المخطط j. إذا تم رصد منتج ووجد أنه معيب، ما هي الخطة الأكثر احتمالاً أن تكون مستخدمة وبالتالي مسؤولة عن العيب.

العلامة العظمى: 100 **علامة النجاح: 50** **المدة: ساعة واحدة**

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة **(80) درجة**

1. رمينا قطعة من النقود المتزنة 4 مرات. إذا أظهرت الثلاث رميات الأولى كتابة، احتمال أن تظهر الرمية الرابعة كتابة أيضاً هو:

a) 0
b) 1/16
c) 1/2
d) 1/8

2. سحبنا ورقتان من أوراق اللعب ال 52 بدون إعادة. احتمال الحصول على 7 يليها ملك هو:

a) 4/51
b) 4/52
c) 4/256
d) 4/663

3. عدد الكلمات المختلفة ذات ثلاثة الأحرف الممكن تكوينها من حروف كلمة PROBA هو:

a) 60
b) 125
c) 10
d) لا شيء مما سبق

4. عدد الأرقام المختلفة المؤلفة من 3 خانات والتي يمكن تشكيلها من الخانات 0, 2, 4, 6 هو:

a) 27
b) 18
c) 24
d) لا شيء مما سبق

–

5. عدد الأرقام الصحيحة التي تقع في المجال [500, 999] التي لا تحوي خانات مكررة هو:

a) 360

b) 500

c) 450

d) لا شيء مما سبق

6. رمينا 3 قطع من النقود المتزنة مرة واحدة. احتمال الحصول عل كتابتين على الأكثر هو:

a) 3/4

b) 1/4

c) 3/8

d) 7/8

7. صندوق يحوي على طابتين حمر، 3 طابات خضر وطابتين زرق. سحبنا طابتين عشوائياً، احتمال ألا تكون ولا واحدة زرقاء هو:

a) 11/21

b) 2/7

c) 10/21

d) 5/7

8. رمينا زوج من النرد مرة واحدة. احتمال الحصول على عددين حاصل ضربهما عدد زوجي هو:

a) 1/2

b) 3/8

c) 3/4

d) 5/1

9. حدثان متنافيان X, Y بحيث $P(Y)=0.35$ و $P(X \cup Y)=0.8$. قيمة $P(X)$ هي:

a) 0.65

b) 0.2

c) 0.45

d) لا شيء ما سبق

10. حدثان A, B بحيث $P(A)=2/3$ و $P(B)=x$ و $P(A\cup B)=11/12$. قيمة x التي تجعل الحدثين A, B مستقلين هي:

a) $3/4$

b) $1/3$

c) $1/4$

d) لا شيء ما سبق

11. حدثان A, B بحيث $P(A)=1/3$ و $P(B)=2/7$ و $P(A\cup B)=3/7$. قيمة $P(A|B)$ هي:

a) $5/7$

b) $2/3$

c) $4/7$

d) لا شيء مما سبق

12. حدثان A, B بحيث $P(A)=2/5$ و $P(B|A)=1/3$. قيمة $P(A\cap B')$ هي:

a) $1/15$

b) $2/15$

c) $4/15$

d) لا شيء مما سبق

13. سحبنا ورقتان من أوراق اللعب الــ 52 بدون إعادة. احتمال الحصول على ورقة سباتي وأخرى كبة هو:

a) $3/20$

b) $29/34$

c) $47/100$

d) $13/102$

14. ثلاثة أحداث مستقلة A, B, C بحيث $P(A)=0.5$ و $P(B)=0.2$ و $P(C)=0.3$. احتمال وقوع حدث واحد على الأقل من بين A, B, C هو:

a) 0.28

b) 0.72

c) 1

d) لا شيء مما سبق

15. زار رجل يحمل مظلة 3 مخازن، احتمال أن ينسى المظلة في أي مخزن هو $1/4$. بعد الزيارة وجد الرجل أنه نسي المظلة. احتمال أن يكون قد نسيها في المخزن الثاني هو:

a) $3/16$

b) $7/16$

c) $12/37$

d) لا شيء مما سبق

16. حدثان C, D بحيث $P(C)=\dfrac{9}{20}$ و $P(C\,|\,D')=\dfrac{3}{7}$ و $P(C\cap D)=\dfrac{6}{13}$. قيمة $P(D)$ هي:

a) $13/20$

b) $5/7$

c) $11/20$

d) لا شيء مما سبق

السؤال الثاني: **(20) درجة**

عينة من الجامعة الافتراضية حجمها 200 شخص من بينهم 90 أنثى. وجد أن 60 شخص من العينة يدخن من بينهم 40 ذكر.

a) استخدم المعلومات السابقة لملء الجدول التالي:

	ذكر	أنثى	المجموع
مدخن			
غير مدخن			
المجموع			

b) نختار شخص بشكل عشوائي. أوجد احتمال أن يكون هذا الشخص:

i. أنثى غير مدخنة

ii. ذكر علماً بأن الشخص المختار غير مدخن

c) يتم اختيار شخصان بشكل عشوائي، احسب احتمال أن يكون كليهما أنثيان غير مدخنتان

الحل:

a)

	ذكر	أنثى	المجموع
مدخن	40	20	60
غير مدخن	70	70	140
المجموع	110	90	200

b)

i. احتمال أن يكون الشخص أنثى غير مدخنة هو $\frac{70}{200}=\frac{7}{20}$

ii. احتمال أن يكون الشخص ذكر علماً بأن الشخص المختار غير مدخن هو $\frac{70}{140}=\frac{1}{2}$

c) $\frac{70}{200}\frac{69}{199}=\frac{483}{3980}\approx 0.121$

توجيه في حال الخطأ: راجع الفقرة 4 و5

ISSN: 2617-989X

السؤال الأول	الإجابة الصحيحة	توجيه في حال الخطأ
1	c	الفقرة 4
2	d	الفقرتين 3 و4
3	a	الفقرة 3
4	b	الفقرة 3
5	a	الفقرة 3
6	d	الفقرة 2 و3
7	c	الفقرة 4
8	c	الفقرة 2 و4
9	c	الفقرة 1 و2
10	a	الفقرة 1 و5
11	b	الفقرة 2 و4
12	c	الفقرة 2 و4
13	d	الفقرة 3 و4
14	b	الفقرة 4
15	c	الفقرة 5
16	a	الفقرة 4 و5

الفصل الثالث: المتحولات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

الكلمات المفتاحية:

متحول عشوائي، متحول عشوائي متقطع، متحول عشوائي مستمر، التوزيع الاحتمالي، تابع التوزيع الاحتمالي، تابع التوزيع التراكمي، التوزيع الاحتمالي المشترك، التوزيع الاحتمالي الهامشي، التوزيعات الاحتمالية الشرطية، التوقع الرياضي، التشتت، الانحراف المعياري، التغاير، معامل الترابط، سيرورة عشوائية.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على مفهوم المتحول العشوائي المتقطع والمستمر. بالإضافة إلى تابع التوزيع الاحتمالي والتراكمي في الحالة المتقطعة والمستمرة، والصفات الرئيسية لكل منهما. وكذلك الأمر بالنسبة للتوزيع المشترك لمتحولين عشوائيين، متقطعين ومستمرين، والتعرف على مفهوم الاستقلالية بينهما. ويتم التطرق إلى مفاهيم كل من التوقع الرياضي (متوسط المتحول العشوائي) والتشتت للمتحول العشوائي ودراسة خصائص كل منهما.

الأهداف تعليمية:

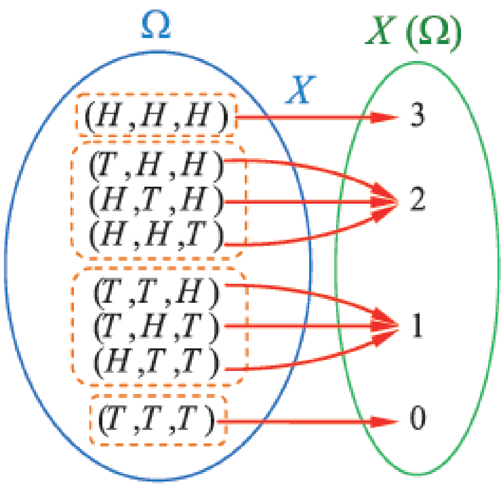
يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- المتحول العشوائي المتقطع والمستمر.
- التوزيعات الاحتمالية المتقطعة: تابعي التوزيع الاحتمالي والتراكمي.
- التوزيعات الاحتمالية المستمرة: تابعي التوزيع الاحتمالي والتراكمي.
- التوزيعات الاحتمالية المشتركة، الهامشية، الشرطية، الاستقلالية.
- التوقع الرياضي.
- تشتت المتحول العشوائي.

1. المتحول العشوائي random variable:

في كثير من الأحيان نرغب في التعامل مع قيم عددية مرتبطة بنقاط العينة للتجربة العشوائية بدلاً من التعامل مع نقاط العينة نفسها إذ أن نقاط العينة أو النتائج الممكنة للتجربة العشوائية تكون في بعض الأحيان عبارة عن صفات يصعب التعامل معها رياضياً. في هذه الحالة فإننا نقوم بتحويل هذه القيم الوصفية إلى قيم عددية حقيقية تسمى قيم المتحول العشوائي، وبالتالي فإن هذا التحويل يساعد في تسهيل الدراسة واستقراء النتائج وذلك باستخدام الطرق الحسابية والرياضية.

على سبيل المثال في تجربة إلقاء قطعة نقود متزنة ثلاث مرات، وكان اهتمامنا فقط على عدد ظهور الكتابة H، نكون عندها عرفنا متحولاً عشوائياً X يأخذ إحدى القيم التالية $0, 1, 2, 3$. أي نكون بذلك عرفنا على فضاء العينة $\Omega = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$ تابعاً عددياً $X : \Omega \to \{0, 1, 2, 3\}$، يعطي لكل عنصر من عناصر فضاء العينة Ω قيمة عددية تمثل عدد مرات ظهور الكتابة. فمثلاً يأخذ المتحول X القيمة 0 $(X = 0)$، أي عدم ظهور الكتابة ولا مرة) من أجل الحدث البسيط $\{TTT\}$، كما يأخذ القيمة 2 $(X = 2)$، ظهور الكتابة مرتين) من أجل الحدث $\{HHT, HTH, THH\}$.



عدد حوادث المرور في مدينة دمشق في يوم ما هو قياس كمي، أما ولادة ذكر أو أنثى فهي ملاحظة وصفية (كيفية).

إذا رمزنا بـ X لعدد الحوادث المرورية في مدينة دمشق ولحالة الولادة بـ Y فمع نهاية كل يوم سنحصل على قيمة للمتحول X ومع كل حالة ولادة سنحصل على قيمة للمتحول Y.

ومن الطبيعي أن نقول عن متحول مثل X أو Y على أنه متحول عشوائي، لأن القيم التي يأخذها كل منهما مرتبطة بتجربة عشوائية.

ليكن على سبيل المثال لدى أسرة طفلان، لنرمز للذكر بالرمز B وللأنثى بالرمز G. بالتالي فإن فضاء العينة هو: $\Omega = \{GG, GB, BG, BB\}$، وليكن X متحول يمثل عدد الأطفال الذكور عند هذه العائلة. بالتالي فإن X هو متحول عشوائي يمكن أن تكون قيمه إما 0 (GG) أو 1 (BG, GB) أو 2 (BB).

تعريف 1: ليكن لدينا Ω فضاء العينة لتجربة عشوائية. المتحول العشوائي عبارة عن تابع حقيقي يُلحق بكل عنصر من عناصر فضاء العينة Ω قيمة حقيقية. نرمز عادة للمتحول العشوائي بحرف كبير $X, Y, \ldots$، كما نرمز للقيم التي يأخذها بأحرف صغيرة $x, y, \ldots$.
تُقسم المتحولات العشوائية إلى نوعين أساسيين هما:

المتحولات العشوائية المتقطعة discrete random variables: إذا كانت مجموعة القيم الممكنة لتلك المتحولات مجموعة منتهية (كما هو الحال في تجربة رمي قطع نقدية ثلاث مرات) أو لا نهائية قابلة للعد (كما هو الحال بالنسبة لعدد الحوادث المرورية التي تقع يومياً).

المتحولات العشوائية المستمرة continuous random variables: إذا كانت مجموعة القيم الممكنة لتلك المتحولات مجموعة غير منتهية وغير قابلة للعد. بكلام أخر، مجموعة قيمها هي مجال من المحور الحقيقي (كما هو الحال في تجربة قياس طول الأشخاص).

مثال 1: مصنع لتصنيع عناصر (الكترونية، ميكانيكية، ...)، تلك العناصر يمكن تصنيفها على أنها معيبة defective أو غير معيبة not defective. نعرف المتحول العشوائي المتقطع X، على سبيل المثال بـــ: $X = 1$ إذا كان العنصر معيب، و $X = 0$ إذا كان العنصر غير معيب.

مثال 2: في الإحصاء نستخدم مفهوم أخذ العينات من أجل قبول أو رفض دفعات من مادة معينة (لمبات، عناصر الكترونية، ...). على سبيل المثال نأخذ عينة من 10 عناصر بشكل عشوائي من أصل 100 عنصر تحوي على 12 عنصر معيب. ليكن X المتحول العشوائي المتقطع المعرف على أنه عدد العناصر المعيبة في العينة المختارة. في هذه الحالة يمكن للمتحول العشوائي أن يأخذ أحد القيم الصحيحة المحصورة بين 0 و 10.

مثال 3: ليكن X المتحول العشوائي المستمر المعرف على أنه الزمن، مقدراً بالدقائق، اللازم لتخديم (تسديد فاتورة، شراء خط...) زبون في مركز خدمات الزبائن للهواتف الجوالة. في هذه الحالة يمكن للمتحول العشوائي أن يأخذ أي قيمة حقيقية x بحيث $x > 0$.

ISSN: 2617-989X

مثال 4: ليكن X المتحول العشوائي المستمر المعرف على أنه نسبة الأشخاص الذين يتم شفاءهم من مرض خطير (السرطان، الإيدز، ...). في هذه الحالة يمكن للمتحول العشوائي أن يأخذ أي قيمة حقيقية x تنتمي إلى المجال [0, 1] $(0 \leq x \leq 1)$.

2. التوزيعات الاحتمالية المتقطعة discrete probability distributions:

1.2. المتحول العشوائي المتقطع discrete random variables:

تعريف 2: يكون المتحول العشوائي $X:\Omega \to R$ متحول عشوائي متقطع إذا كانت مجموعة القيم الممكنة لـــ $X(\Omega)$ هي مجموعة منتهية أو قابلة للعد، أي أنها من الشكل $X(\Omega)=\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}$ أو من الشكل $X(\Omega)=\{x_1,\ x_2,\ \ldots\}$.

إذا كانت x إحدى القيم التي يأخذها المتحول العشوائي X، نعرف الحدث $\{X = x\}$ على أنه مجموعة الأحداث البسيطة التي يأخذ عندها المتحول العشوائي X القيمة x.

مثال 5: في تجربة إلقاء زوج من النرد مرة واحدة. ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على مجموع أرقام الوجهين الظاهرين.

a) أوجد مجموعة قيم المتحول العشوائي.

b) ما هو الحدث $\{X=4\}$؟ وما هو احتمال وقوعه؟

c) ما هو الحدث $\{X=6\}$؟ وما هو احتمال وقوعه؟

الحل:

a) $X(\Omega)=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\}$.

b) $\{X=4\}=\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$، واحتمال وقوع هذا الحدث هو $3/36=1/12$.

c) $\{X=6\}=\{(1,5),(2,4),(3,3),,(4,2),(5,1)\}$، واحتمال وقوع هذا الحدث هو $5/36$.

مثال 6: في تجربة إلقاء قطعة نقود متزنة مرتين متتاليتين. ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد المرات التي تظهر فيها الكتابة H.

a) فضاء العينة.

b) أوجد مجموعة قيم المتحول العشوائي.

c) عبر عن الحوادث التالية: $\{(H,H),(H,T),(T,H)\}$, $\{(H,T),(T,H)\}$.

d) عبر عن الحوادث التالية: $\{X \geq$ … $\}$, $\{X = 2\}$, $\{X = 1\}$, $\{X = 0\}$؟ وما هو احتمال وقوع كل منها؟

الحل:

a) $\Omega=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$.

b) $X(\Omega)=\{0,\ 1,\ 2\}$.

c) $\{(H,T),(T,H)\}=\{X=1\}$

$\{(H,H),(H,T),(T,H)\}=\{X\geq 1\}$

d) $\{X=0\}=\{(T,T)\}$، احتمال حدوثها هو $1/4$

$\{X=1\}=\{(H,T),(T,H)\}$، احتمال حدوثها هو $1/2$

$\{X=2\}=\{(H,H)\}$، احتمال حدوثها هو $1/4$

$\{X\le 2\}=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$، احتمال حدوثها هو 1

F$\{X>3\}=\{\}=\Phi$، احتمال حدوثها هو 0

مثال 7: في تجربة إلقاء قطعة نقود متزنة ثلاث مرات متتالية. أوجد مجموعة القيم الممكنة للمتحولات العشوائية التالية:

a) المتحول العشوائي X الذي يمثل عدد ظهور الكتابات H.

b) المتحول العشوائي Y الذي يمثل مربع عدد ظهور الكتابات H.

c) المتحول العشوائي Z الذي يمثل عدد ظهور الكتابات H مطروحاً منه عدد ظهور الشعارات T.

الحل:

a) $X(\Omega)=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

b) $Y(\Omega)=\{0,\ 1,\ 4,\ 9\}$

c) $Z(\Omega)=\{-3,\ -1,\ 1,\ 3\}$

2.2. تابع التوزيع الاحتمالي probability distribution function:

تعريف 3: ليكن X متحول عشوائي متقطع على فضاء العينة Ω مجموعة قيمه منتهية من الشكل $X(\Omega)=\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}$. أو غير منتهيه. $X(\Omega)=\{x_1,\ x_2,\ \ldots\}$ نسمي التابع التالي:

$$f_X(x): X(\Omega)\to R: x\mapsto f_X(x)=P\left(X=x\right)$$

(اختصاراً $f(x)$) تابع التوزيع الاحتمالي أو تابع الكتلة الاحتمالي probability mass function للمتحول العشوائي X.

يحقق التابع $f_X(x)$ الخاصتين التاليتين:

a) $0\le f_X(x)\le 1$

b) $\sum_x f_X(x)=\sum_x P(X=x)=1$

مثال 8: في تجربة إلقاء قطعة نقود متزنة ثلاث مرات متتالية. ليكن X المتحول العشوائي الذي يعطي عدد المرات التي تظهر فيها الكتابة H. أوجد تابع التوزيع الاحتمالي للمتحول X.

الحل:

وجدنا سابقاً أن فضاء العينة هو:

$$\Omega=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$$

بالتالي فإن قيم المتحول X هي $X(\Omega)=\{0, 1, 2, 3\}$. كما وجدنا أن $P(X=0)=1/8$ و $P(X=1)=P(X=2)=3/8$ وأخيراً $P(X=3)=1/8$. بالتالي فإن تابع التوزيع الاحتمالي للمتحول X هو:

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

مثال 9: في تجربة إلقاء زوج من النرد المتزن مرة واحدة. ليكن Y المتحول العشوائي الذي يدل على مجموع أرقام الوجهين الظاهرين. أوجد تابع التوزيع الاحتمالي للمتحول Y.

الحل:

وجدنا سابقاً أن $Y(\Omega)=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

$\{Y=2\}=\{(1,1)\}$، بالتالي $P(Y=2)=1/36$.

$\{Y=3\}=\{(1, 2), (1, 2)\}$، بالتالي $P(Y=3)=2/36$.

$\{Y=4\}=\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$، بالتالي $P(Y=4)=3/36$.

$\{Y=5\}=\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$، بالتالي $P(Y=5)=4/36$.

وهكذا وبنفس طريقة الحساب، نحصل أخيراً على جدول التوزيع الاحتمالي التالي:

y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(Y=y)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

مثال 10: شحنة مؤلفة من 20 جهاز كمبيوتر محمول معدة لبيع بالتقسيط تحوي على 3 منها معيبة. اشترت إحدى المدارس جهازين منها تم اختيارها بشكل عشوائي. أوجد تابع التوزيع الاحتمالي لعدد الأجهزة المعيبة.

الحل:

بفرض X المتحول العشوائي الذي يشير إلى عدد الأجهزة المعيبة الموجودة في العينة التي اشترتها المدرسة، بالتالي القيم الممكنة لهذا المتحول هي $0, 1, 2$.

$$P(X=0)=\frac{C(3,0)C(17,2)}{C(20,2)}=\frac{68}{95}$$

$$P(X=1)=\frac{C(3,1)C(17,1)}{C(20,2)}=\frac{51}{190}$$

$$P(X=2)=\frac{C(3,2)C(17,0)}{C(20,2)}=\frac{3}{190}$$

بالتالي جدول التوزيع الاحتمالي هو التالي:

x	**0**	**1**	**2**
$P(X=x)$	$\frac{136}{190}$	$\frac{51}{190}$	$\frac{3}{190}$

3.2. تابع التوزيع التراكمي cumulative distribution function:

تعريف 4: نعرف تابع التوزيع التراكمي $F_X(x)$ (اختصاراً $F(x)$) لمتحول عشوائي متقطع X له تابع التوزيع الاحتمالي $f_X(x)$ كما يلي:

$$F_X(x)=P(X\le x)=\sum_{t\le x} f_X(t), \quad x\in R$$

مثال 11: في تجربة إلقاء زوج من النرد المتزن مرة واحدة (المثال رقم 9 السابق). أوجد تابع التوزيع التراكمي للمتحول العشوائي X (مجموع أرقام الوجهين الظاهرين).

الحل:

$$\mathrm{F_X(x)}=P(X\le x)=0, \quad for\ x<2$$

$$\mathrm{F_X}(2)=P(X\le 2)=P(X=2)=1/36, \quad for\ 2\le x<3$$

$$\mathrm{F_X}(3)=P(X\le 3)=P(X=2)+P(X=3)=1/12, \quad for\ 3\le x<4$$

$$\mathrm{F_X}(4)=P(X\le 4)=1/6, \quad for\ 4\le x<5$$

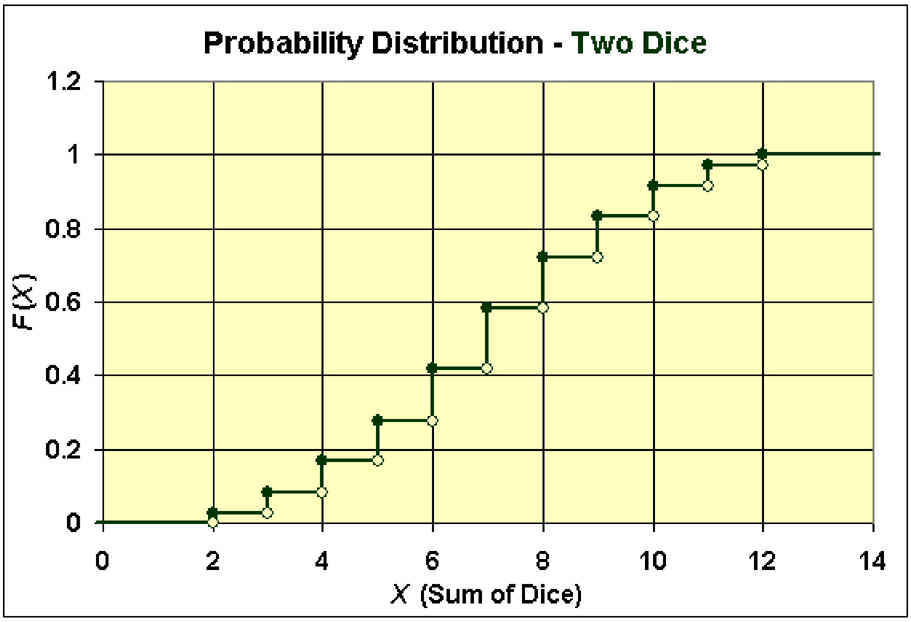
$$\mathrm{F_X}(5)=P(X\le 5)=5/18, \quad for\ 5\le x<6$$

$$\mathrm{F_X}(6)=P(X\le 6)=5/12, \quad for\ 6\le x<7$$

$$\mathrm{F_X}(7)=P(X\le 7)=7/12, \quad for\ 7\le x<8$$

$$\mathrm{F_X}(8)=P(X\le 8)=13/36, \quad for\ 8\le x<9$$

$$F_X(9)=P(X\le 9)=5/6,\quad for\ 9\le x<10$$
$$F_X(10)=P(X\le 10)=11/12,\quad for\ 10\le x<11$$
$$F_X(11)=P(X\le 11)=35/36,\quad for\ 11\le x<12$$
$$F_X(12)=P(X\le 12)=1,\quad for\ x\ge 12$$



ملاحظة 1: يُمكن استخدام تابع التوزيع التراكمي $F_X(x)$ في حساب تابع التوزيع الاحتمالي، وذلك بملاحظة أن: $P(X=x)=F_X(x)-F_X(x-1)$. على سبيل المثال إذا أردنا حساب $P(X=5)$ في المثال السابق نجد:

$$P(X=5)=F_X(5)-F_X(4)=\frac{5}{18}-\frac{1}{6}=\frac{1}{9}$$

3.التوزيعات الاحتمالية المستمرة continuous probability distributions:

1.3. المتحول العشوائي المستمر continuous random variables:

تعريف 5: يكون المتحول العشوائي $X:\Omega \to R$ متحول عشوائي مستمر إذا كانت مجموعة القيم الممكنة لـــ $X(\Omega)$ هي مجموعة غير منتهية وغير قابلة للعد، أي أنها عبارة عن مجال من المحور الحقيقي أو اتحاد عدة مجالات.

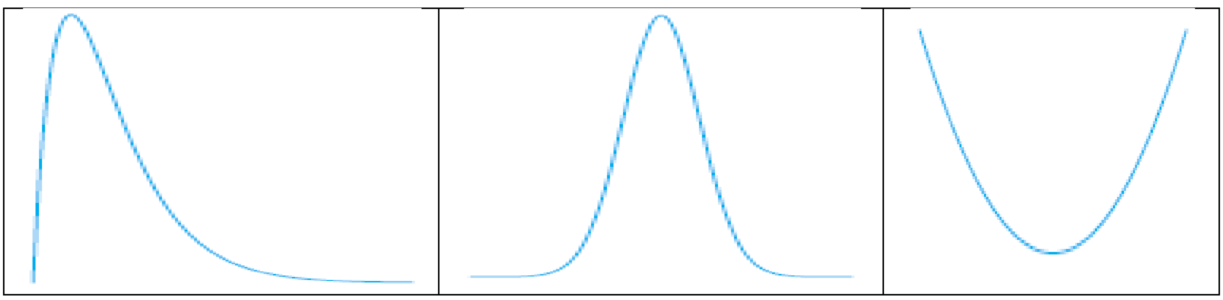
من الأمثلة عن الكميات التي يمكن تمثيلها بواسطة متحولات عشوائية مستمرة: درجة حرارة تفاعل كيميائي معين، نسبة تركيز مركب ما ضمن محلول كيميائي، طول الشخص، المسافة المقطوعة لجسم معين خلال وحدة الزمن.

ملاحظة 2: ينتج من التعريف أنه لا يمكن تمثيل التوزيع الاحتمالي لمتحول مستمر بواسطة جدول توزيع احتمالي.

لنفرض أننا نهتم بمعرفة أطوال مجموعة من الطلاب، من أجل أية قيمتين 163.5 سم و164.5 سم على سبيل المثال، فإنّه يوجد عدد غير منته. كما أن اختيار طالب طوله تماماً 164 سم هو أمر مستحيل ويمكن القول بأنه حدث احتماله صفر.لكن الأمر مختلف تماماً عندما نريد حساب احتمال اختيار طالب طوله على الأقل 163 سم وبما لا يتجاوز ال 165 سم. إذاً في هذه الحالة نتعامل مع مجالات عوضاً عن نقاط. أي أننا نقوم بحساب احتمالات من الشكل $P(a<X<b)$ أو $P(Y\geq c)$ أو $P(W<e)$ ...

على الرغم من أننا لا نستطيع جدولة التوزيع الاحتمالي للمتحول المستمر (كما هو الحال بالنسبة للمتحول العشوائي المتقطع) إلا أننا نستطيع التعبير عنه بعلاقة رياضية. هذه العلاقة هي عبارة عن تابع عددي حقيقي غير سالب، ندعوه تابع الكثافة الاحتمالي، من خلاله نستطيع إيجاد احتمالات الأحداث المعبر عنها بواسطة المتحول العشوائي.

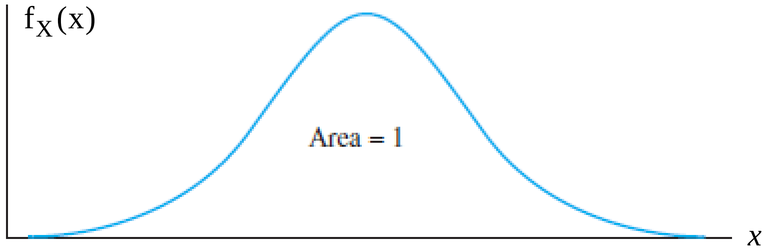
معظم توابع التوزيع الاحتمالية المستخدمة في التطبيقات الإحصائية هي توابع مستمرة تأخذ أشكال متعددة (بعضاً منها يبينه الشكل التالي). بما أن المساحات ستستخدم لحساب الاحتمالات، والاحتمالات هي قيم موجبة، بالتالي تقع هذه التوابع كلها فوق المحور x.

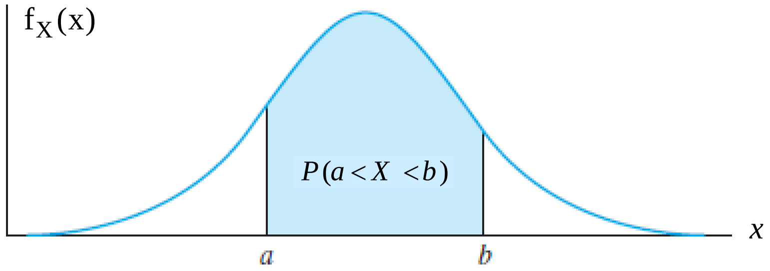


2.3. تابع الكثافة الاحتمالي probability density function:

تعريف 6: يكون التابع $f_X(x)$ تابع كثافة احتمالي probability density function (pdf) للمتحول العشوائي المستمر X، والمعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية، إذا تحقق ما يلي:

1. $f_X(x) \geq 0, \quad x \in R$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$
3. $P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$





ملاحظة 3: أياً كان المتحول العشوائي المستمر X لدينا:

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b)$$

3.3. تابع التوزيع التراكمي cumulative distribution function:

تعريف 7: نعرف تابع التوزيع التراكمي $F_X(x)$ (اختصاراً $F(x)$) لمتحول عشوائي مستمر X، حيث تابع كثافته الاحتمالي هو $f_X(x)$ كما يلي:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt, \quad -\infty < x < \infty$$

نتيجة 1: ينتج مباشرة من التعريف السابق النتيجتين التاليتين:

- $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$
- $f_X(x) = \dfrac{dF(x)}{dx} = F'(x)$، في حال وجود المشتق.

ISSN: 2617-989X

مثال 12: ليكن المتحول العشوائي المستمر X وتابع كثافته الاحتمالي هو التالي (حيث c ثابت موجب):

$$f_X(x)=\begin{cases} ce^{-x} & x\geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

a) أوجد قيمة الثابت c.

b) أوجد تابع التوزيع التراكمي $F_X(x)$.

c) أوجد $P(1<X<3)$.

الحل:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\,dt=1=\int_0^{\infty} ce^{-t}\,dt=c\left[-e^{-t}\right]_0^{\infty}=c$

بالتالي لدينا $c=1$.

b) $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt,$

من أجل $x<0$، نحصل على $F_X(x)=0$. أما من أجل $x\geq 0$، لدينا:

$$F_X(x)=\int_0^{x} f_X(t)\,dt=\int_0^{x} e^{-t}\,dt=1-e^{-x}$$

بالتالي:

$$F_X(x)=\begin{cases} 1-e^{-x} & x\geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

يمكننا التأكد من أن مشتق التابع $F_X(x)$ يُنتج $f_X(x)$.

$$P(1<X<3)=F_X(3)-F_X(1)=[1-e^{-3}]-[1-e^{-1}]=e^{-1}-e^{-3}$$

أو أنه يمكن حسابه بطريقة ثانية:

$$P(1<X<3)=\int_1^{3} f_X(t)\,dt=\int_1^{3} e^{-t}\,dt=e^{-1}-e^{-3}$$

مثال 13: وزارة الطاقة تطرح مشاريع مناقصة وعادة تقدر قيمة المناقصة المعقولة على أنها القيمة b.
حددت الوزارة بأن تابع الكثافة الاحتمالي لربح المناقصة هو التالي:

$$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{5}{8b}, & \frac{2}{5}b\leq y\leq 2b \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

أوجد تابع التوزيع التراكمي $F_Y(y)$ واستخدامه في حساب احتمال أن يكون ربح المناقصة هو أقل من القيمة الأولية المقدرة b.

الحل:

من أجل $2b/5\leq y\leq 2b$ لدينا:

$$F_Y(y) = \int_{2b/5}^{y} \frac{5}{8b} dy = \left[\frac{5y}{8b}\right]_{2b/5}^{y} = \frac{5y}{8b} - \frac{1}{4}$$

بالتالي فإن:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 2b/5 \\ \dfrac{5y}{8b} - \dfrac{1}{4} & 2b/5 \le y < 2b \\ 1 & y \ge 2b \end{cases}$$

لحساب احتمال أن يكون ربح المناقصة هو أقل من القيمة الأولية المقدرة b:

$$P(Y \le b) = F_Y(b) = 5/8 - 1/4 = 3/8$$

4. التوزيعات الاحتمالية المشتركة joint probability distributions:

نحتاج في كثير من الحالات عند وصف تجربة عشوائية لأكثر من متحول عشوائي، فعندما نلقي زوج من النرد مرة واحدة يمكن أن نرمز لمجموع رقمي الوجهين الظاهرين بـــالمتحول العشوائي X ونرمز للقيمة العظمى لهذين الرقمين بـــالمتحول العشوائي Y، فمجموعة نتائج هذه التجربة يمكن أن ندلّ عليها بوساطة الثنائيات (الأزواج) (x, y) حيث يدل المسقط الأول على نتيجة X والمسقط الثاني يدل على نتيجة Y.

وعند سؤالنا مجموعة من الأشخاص عن أوزانهم وأطوالهم فيمكن أن نرمز بــ X على طول الشخص وبــ Y على وزن الشخص وبالتالي من أجل كل شخص ستكون ثنائية (x, y) حيث x هو طول الشخص و y هو وزنه.

ليكن X, Y متحولان عشوائيان، التوزيع الاحتمالي لوقوعهما في آن واحد يمكن تمثيله بتابع $f(x, y)$ لكل زوج (x, y) ضمن نطاق المتحولين العشوائيين X, Y. نشير إلى هذا التابع بالتوزيع الاحتمالي المشترك للمتحولين X, Y.

1.4. التوزيع المشترك لمتحولين joint probability distribution of two variables:

تعريف 8: ندعو الشعاع (X, Y) شعاعاً عشوائياً إذا كانت كل من مركبتيه X و Y متحولاً عشوائياً. كما نقول إن الشعاع العشوائي (X, Y) متقطع إذا كانت مجموع القيم التي يأخذها مجموعة منتهية أو غير منتهية قابلة للعد. ونقول إن الشعاع العشوائي مستمراً إذا كانت مجموع القيم التي يأخذها مجموعة غير منتهية وغير قابلة للعد.

كما ذكرنا سابقاً فإن قيم الشعاع العشوائي (X, Y) هي ثنائيات (x, y)، وبالتالي يمكن مقابلة كل نتيجة للتجربة بنقطة (x, y) من R^2 (المستوي Oxy).

1.1.4. المتحول العشوائي متقطع:

ليكن X و Y متحولين عشوائيين متقطعين معرفين على فضاء العينة Ω و $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots\}$ (مجموعة قيم المتحول X) و $X(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots\}$ (مجموعة قيم المتحول Y)، عندئذ تكون مجموعة قيم الشعاع العشوائي (X, Y) هي: $\{(x_i, y_j); i, j > 1\}$.

يقع الحدث $\{X = x_i, Y = y_j\}$ إذا وقع كل من الحدثين $\{X = x_i\}$ و $\{Y = y_j\}$ معاً، ونرمز لاحتمال وقوعه بالتابع $f_{X,Y}(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$ (أو اختصاراً $f(x_i, y_j)$) من أجل $i, j = 1, 2, \ldots$.

تعريف 9: نقول عن التابع $f_{X,Y}(x, y)$ أنه تابع التوزيع الاحتمالي المشترك للمتحولين العشوائيين المتقطعين X, Y إذا تحققت الشروط التالية:

1. $0 \le f_{X,Y}(x, y) \le 1$

2. $\sum_x \sum_y f_{X,Y}(x,y)=1$

3. $P(X=x,Y=y)=f_{X,Y}(x,y)$

ومن أجل أية منطقة A من المستوي الحقيقي فإن: $P[(X,Y)\in A]=\sum\sum_A f_{X,Y}(x,y)$

مثال 14: يحوي صندوق 8 كرات، منها 3 كرات زرقاء وكرتين حمراء و3 كرات خضراء. سحبنا عشوائياً كرتين معاً من الصندوق. ليكن المتحول العشوائي X الذي يمثل عدد الكرات الزرقاء المسحوبة و Y عدد الكرات الحمراء المسحوبة، أوجد:

a) تابع التوزيع الاحتمالي المشترك $f_{X,Y}(x,y)$.

b) أوجد $P(X=0,Y\le 1)$.

c) أوجد $P[(X,Y)\in A]$، حيث A تمثل المنطقة $\{(x,y)\,|\,x+y\le 1\}$.

الحل:

من الواضح أن قيم الثنائيات الممكنة هي:

$$(0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (0,\ 2),\ (1,\ 0),\ (1,\ 1),\ (2,\ 0)$$

a) لنحسب على سبيل المثال القيمة $f_{X,Y}(0,1)$: وهي تمثل عدم الحصول على كرة زرقاء والحصول على كرة حمراء أي الحصول على كرة خضراء وأخرى حمراء، بالتالي قيمة الاحتمال هي:

$$\frac{2}{8}.\frac{3}{7}+\frac{3}{8}.\frac{2}{7}=\frac{3}{14}$$

ولحساب القيمة $f_{X,Y}(0,0)$: وهي تمثل عدم الحصول لا على زرقاء ولا على حمراء، أي الحصول على كرتين خضراوين، بالتالي قيمة الاحتمال هي:

$$\frac{3}{8}.\frac{2}{7}=\frac{6}{56}=\frac{3}{28}$$

لحساب القيمة $f_{X,Y}(1,2)$: وهي تمثل الحصول على كرة زرقاء وكرتين حمراوين، وهذا الاحتمال لا يمكن أن يحدث لأن السحب فقط كرتين، بالتالي قيمة الاحتمال هي الصفر.

حسابات مختلفة تقودنا إلى الجدول التالي:

$X \setminus Y$	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	المجموع
$X=0$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{5}{14}$
$X=1$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{14}$	0	$\frac{15}{28}$
$X=2$	$\frac{3}{28}$	0	0	$\frac{3}{28}$
المجموع	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{28}$	1

$$P(X=0, Y\leq 1)=f_{X,Y}(0,0)+f_{X,Y}(0,1)=\frac{3}{28}+\frac{3}{14}=\frac{9}{28} \quad \text{(b}$$

$$P[(X,Y)\in A]=P(X+Y\leq 1)= \quad \text{(c}$$

$$=f_{X,Y}(0,0)+f_{X,Y}(0,1)+f_{X,Y}(1,0)=\frac{3}{28}+\frac{3}{14}+\frac{9}{28}=\frac{9}{14}$$

مثال 15: في تجربة إلقاء زوج من النرد مرة واحدة، ليكن X متحول عشوائي يدل على أصغر عدد ظهر و Y متحول عشوائي يدل على مجموع العددين الناتجين. أوجد تابع التوزيع الاحتمالي المشترك.

الحل:

من الواضح أن قيم الثنائيات الممكنة هي:

(1, 2), (1, 3), …, (1, 11), (1, 12)

(2, 2), (2, 3), …, (2, 11), (2, 12)

….

(6, 2), (6, 3), …, (6, 11), (6, 12)

لنحسب على سبيل المثال القيمة $f_{X,Y}(1,2)$ والتي تمثل الحصول على واحد وواحد، بالتالي قيمة الاحتمال هي 1/36 (حالة واحدة من أصل 36 حالة ممكنة). ولحساب القيمة $f_{X,Y}(1,5)$ التي تمثل الحصول على واحد وأربعة، بالتالي قيمة الاحتمال هي 2/36 (حالتان من أصل 36 حالة ممكنة). أما لحساب القيمة $f_{X,Y}(1,9)$ والتي لا يمكن الحصول عليها بوجود القيمة 1 لأحد القطعتين، بالتالي قيمة الاحتمال هي 0.

حسابات مختلفة تقودنا إلى الجدول التالي:

$X \setminus Y$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	المجموع
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	0	$\mathbf{\frac{11}{36}}$
2	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	$\mathbf{\frac{9}{36}}$
3	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	$\mathbf{\frac{7}{36}}$
4	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	$\mathbf{\frac{5}{36}}$
5	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\mathbf{\frac{3}{36}}$
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\mathbf{\frac{1}{36}}$
المجموع	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	**1**

2.1.4. المتحول العشوائي مستمر:

تعريف 9: نقول عن التابع $f_{X,Y}(x,y)$ أنه تابع التوزيع الاحتمالي المشترك للمتحولين العشوائيين المستمرين X,Y إذا تحققت الشروط التالية:

$$0 \le f_{X,Y}(x,y) \le 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = 1$$

من أجل أية منطقة A من المستوي الحقيقي فإن:

$$P[(X,Y)\in A] = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dxdy \; .$$

مثال 16: ليكن لدينا المتحولان العشوائيان المستمران X,Y ، وحيث تابع التوزيع الاحتمالي المشترك لهما $f_{X,Y}(x,y)$ هو:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x + cy^2 & 0 \le x, y \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

a) أوجد الثابت c

b) أوجد $P(0 \le X \le \frac{1}{2}, 0 \le Y \le \frac{1}{2})$

الحل:

a)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = 1$$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = \int_0^1\int_0^1 (x + cy^2)\,dxdy$$

$$1 = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2 + cy^2 x\right]_{x=0}^{x=1} dy$$

$$1 = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} + cy^2\right] dy$$

$$1 = \left[\frac{1}{2}y + cy^3\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}c$$

بالتالي فإن: $c = 3/2$

(b

$$P(0\le X\le\frac{1}{2},0\le Y\le\frac{1}{2})=\int_0^{1/2}\int_0^{1/2}(x+\frac{3}{2}y^2)\,dxdy$$

$$=\int_0^{1/2}\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}y^2x\right]dy$$

$$=\int_0^{1/2}\left[\frac{1}{8}+\frac{3}{4}y^2\right]dy=\frac{3}{32}$$

2.4. التوزيعات الهامشية marginal distribution:

تعريف 10: ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً تابعه الاحتمالي $f_{X,Y}(x,y)$ عندئذ التوزيع الاحتمالي الهامشي لكل من X و Yهما على الترتيب من أجل الحالة المتقطعة:

$$f_X(x)=\sum_y f_{X,Y}(x,y)$$

$$f_Y(y)=\sum_x f_{X,Y}(x,y)$$

ومن أجل الحالة المستمرة:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

مثال 17: أوجد تابع التوزيع الاحتمالي الهامشي لكل من المتحولين العشوائيين X و Y للمثال 14 السابق.

الحل:

لنحسب على سبيل المثال $f_X(0)$ ، من التعريف ينتج:

$$f_X(0)=f_{X,Y}(0,0)+f_{X,Y}(0,1)+f_{X,Y}(0,2)=\frac{3}{28}+\frac{3}{14}+\frac{1}{28}=\frac{5}{14}$$

حسابات مختلفة تقودنا إلى الجدولين التاليين:

y	0	1	2
$f_Y(y)$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{28}$

x	0	1	2
$f_X(x)$	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

مثال 18: أوجد تابع التوزيع الاحتمالي الهامشي لكل من X و Y للمثال 16 السابق.

الحل:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy=\int_0^1 (x+\frac{3}{2}y^2)\,dy=\left[xy+\frac{1}{2}y^3\right]_0^1=x+\frac{1}{2}$$

بالتالي:

$$f_X(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{2}, & 0\le x\le 1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

$$=\int_0^1 (x+\frac{3}{2}y^2)\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}y^2x\right]_0^1=\frac{3}{2}y^2+\frac{1}{2}$$

بالتالي:

$$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{3}{2}y^2+\frac{1}{2}, & 0\le y\le 1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

3.4.التوزيعات الشرطية conditional distributions:

ليكن X, Y متحولين عشوائيين متقطعين أو مستمرين معرفين على الفضاء Ω وليكن $A=\{X=x\}$ و $B=\{Y=y\}$ حدثين من Ω عندئذ:

$$P(A|B)=P(X=x|Y=y)=\frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

تعريف 11: ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً تابعه الاحتمالي $f_{X,Y}(x,y)$ عندئذ التوزيع الاحتمالي الشرطي للمتحول العشوائي X علماً أن $Y=y$ هو:

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

وبنفس الطريقة نعرف التوزيع الاحتمالي الشرطي للمتحول العشوائي Y علماً أن $X=x$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

مثال 19: أوجد تابع التوزيع الاحتمالي الشرطي للمتحول العشوائي X علماً أن $Y=1$ للمثال 14 السابق. استخدمه في إيجاد $P(X=0|Y=1)$.

الحل:

من أجل حساب $f_{X|Y}(x|y)$ علينا بداية حساب $f_Y(1)$:

$$f_Y(1)=f_{X,Y}(0,1)+f_{X,Y}(1,1)+f_{X,Y}(2,1)=\frac{3}{14}+\frac{3}{14}+0=\frac{3}{7}$$

بالتالي:

$$f_{X|Y}(x|1)=\frac{f_{X,Y}(x,1)}{f_Y(1)}=\frac{7}{3}f_{X,Y}(x,1),\quad x=0,1,2$$

$$f_{X|Y}(0|1)=\frac{7}{3}f_{X,Y}(0,1)=\frac{7}{3}.\frac{3}{14}=\frac{1}{2}$$

$$f_{X|Y}(1|1)=\frac{7}{3}f_{X,Y}(1,1)=\frac{7}{3}.\frac{3}{14}=\frac{1}{2}$$

$$f_{X|Y}(2|1)=\frac{7}{3}f_{X,Y}(2,1)=\frac{7}{3}.0=0$$

وتابع التوزيع الاحتمالي الشرطي للمتحول العشوائي X علماً أن $Y=1$ هو:

x	**0**	**1**	**2**
$f_X(x\|1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

أخيراً، $P(X=0|Y=1)=f_{X|Y}(0|1)=\frac{1}{2}$. أي أنه إذا علمنا أن واحدة من الكرتين المسحوبتين حمراء فإن احتمال أن تكون الكرة الأخرى زرقاء هو 1/2.

مثال 20: أوجد تابع التوزيع الاحتمالي الشرطي $f_{Y|X}(y|x)$ للمثال 16 السابق. استخدمه في إيجاد $P(X>1/2|Y=1/2)$.

الحل:

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{x+\frac{3}{2}y^2}{x+\frac{1}{2}}=\frac{2x+3y^2}{2x+1},$$

$$0 \le x, y \le 1$$

$$P(X > 1/2 \,|\, Y = 1/2) = \int_{1/2}^{1} f_{Y|X}(y \,|\, x = \frac{1}{2})\, dy$$

$$= \int_{1/2}^{1} (\frac{1}{2} + \frac{3}{2} y^2)\, dy = \left[\frac{1}{2} y + \frac{1}{2} y^3\right]_{1/2}^{1} = \frac{11}{16}$$

4.4.استقلالية المتحولات العشوائية independence of random variables:

تعريف 12: ليكن (X, Y) شعاعاً عشوائياً متقطعاً أو مستمراً تابعه الاحتمالي $f_{X,Y}(x, y)$ وتوزيعهما الاحتماليان الهامشيان هما $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ على الترتيب. المتحولان العشوائيان X و Y مستقلان إذا وفقط إذا كان:

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x).f_Y(y)$$

من أجل كل الثنائيات (x, y).

مثال 21: برهن أن المتحولين العشوائيين X, Y في المثال 14 السابق غير مستقلين.

الحل:

لتكن النقطة (1 ,0)، ولنوجد الاحتمالات التالية: $f_{X,Y}(0,1)$ و $f_X(0)$ و $f_Y(1)$

$$f_{X,Y}(0,1) = \frac{3}{14}$$

$$f_X(0) = f_{X,Y}(0,0) + f_{X,Y}(0,1) + f_{X,Y}(0,2) = \frac{3}{28} + \frac{3}{14} + \frac{1}{28} = \frac{5}{14}$$

$$f_Y(1) = f_{X,Y}(0,1) + f_{X,Y}(1,1) + f_{X,Y}(2,1) = \frac{3}{14} + \frac{3}{14} + 0 = \frac{3}{7}$$

من الواضح أن $f_{X,Y}(0,1) \ne f_X(0).f_Y(1)$. وبالتالي فإن المتحولين العشوائيين X و Y غير مستقلين.

5. التوقع الرياضي mathematical expectation:

ناقشنا في الفصل الأول متوسط عينة، والذي كان عبارة عن المتوسط الحسابي للمعطيات. الآن لنرمي قطعتين من النقود 16 مرة وليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد مرات ظهور الكتابة H في الرمية الواحدة، بالتالي فإن قيم X هي $0, 1, 2$. لنفرض أن التجربة أعطتنا 4 مرات ولا كتابة، 7 مرات كتابة واحدة و5 مرات كتابتين. العدد الوسطي لظهور الكتابة في الرمية الواحدة لقطعتي النقود بالتالي:

$$\frac{0(4)+1(7)+2(5)}{16}=1.06$$

يمكن إعادة كتابة الحساب السابق على النحو المكافئ التالي:

$$0(\frac{4}{16})+1(\frac{7}{16})+2(\frac{5}{16})=1.06$$

تمثل الأعداد $4/16, 7/16, 5/16$ التكرار النسبي relative frequency لقيم X المختلفة $(0, 1, 2)$. في الحقيقة، إذن، يمكن حساب متوسط عينة من المعطيات من خلال معرفة القيم المختلفة التي تحدث وكذلك تكرارها النسبي، بدون معرفة العدد الكلي لمعطيات العينة. بالتالي إذا كان $4/16$ من الرميات يُنتج من دون كتابة، و $7/16$ من الرميات يُنتج كتابة واحدة، و $5/16$ من الرميات يُنتج كتابتين، فإن العدد الوسطي لظهور الكتابة في الرمية الواحدة سيكون 1.06 بغض النظر عن العدد الكلي للرميات أكان 16 أو 1000 أو حتى 10000.

تُستخدم طريقة التكرار النسبي هذه في حساب العدد الوسطي للكتابة في الرمية الواحدة لقطعتي النقود التي نتوقعها على المدى الطويل (أي إذا كررنا عملية الرمي عدد كبير جداً من المرات). وسوف نشير إلى هذا العدد الوسطي على أنه المتوسط للمتحول العشوائي X mean of the random variable (أو القيمة المتوقعة expected value $E(X)$، أو التوقع الرياضي mathematical expectation للمتحول العشوائي)، ونرمز له بالرمز μ_X.

لنرجع إلى مثال رمي قطعتين من النقود المتزنة مرة واحدة، فضاء العينة هو:

$$\Omega=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$$

ينتج من ذلك أن:

$$P(X=0)=1/4,\quad P(X=1)=1/2,\quad P(X=2)=1/4$$

تمثل هذه الاحتمالات التكرار النسبي للأحداث الموافقة لها على المدى الطويل. لذلك:

$$\mu_X=E(X)=0.(\frac{1}{4})+1.(\frac{1}{2})+2.(\frac{1}{4})=1$$

تعني هذه النتيجة بأنه عندما يتم رمي قطعتين من النقود المتزنة عدد كبير وكبير جداً من المرات سنحصل، بشكل وسطي، على كتابة H واحدة بالرمية الواحدة.

ISSN: 2617-989X

تعريف 13: التوقع الرياضي أو (المتوسط) لمتحول عشوائي متقطع X تابعه الاحتمالي $f_X(x)$ هو المقدار:

$$\mu_X = E(X) = \sum_x x.\, f_X(x)$$

والتوقع الرياضي لمتحول عشوائي مستمر X تابع كثافته الاحتمالية $f_X(x)$ هو المقدار:

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.\, f_X(x)\, dx$$

مثال 22: في تجربة إلقاء قطعة نقود متزنة ثلاث مرات متتالية. ليكن X المتحول العشوائي الذي يعطي عدد المرات التي تظهر فيها الكتابة H. احسب التوقع الرياضي للمتحول X.

الحل:

وجدنا سابقاً أن $X(\Omega) = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ وأن جدول التوزيع الاحتمالي هو:

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

بالتالي فإن التوقع الرياضي:

$$\mu_X = E(X) = \sum_{x=0}^{3} x.\, f_X(x) = 0.(\frac{1}{8}) + 1.(\frac{3}{8}) + 2.(\frac{3}{8}) + 3.(\frac{1}{8}) = \frac{3}{2}$$

مثال 23: يطلق رامٍ طلقتين على هدف. احتمال إصابته الهدف بالطلقة الأولى (الحدث A) 6/10، واحتمال إصابته الهدف بالطلقة الثانية (الحدث B) 9/10. إذا أصاب الرامي الهدف بالطلقة الأولى يربح 8 نقاط وإن لم يصبها يخسر 6 نقاط، وإذا أصاب الرامي الهدف بالطلقة الثانية يربح 3 نقاط وإن لم يصبها يخسر 8 نقاط. ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد النقاط التي ينالها الرامي في نهاية المباراة، ما هو توقعه الرياضي.

الحل:

إذا أصاب الرامي الهدف في الرميتين نال 11 = 3 + 8 نقطة.

وإن لم يصيب في الرمية الأولى، لكن أصاب في الرمية الثانية نال: 3− = 3 + 6− نقطة.

وإن أصاب في الرمية الأولى، لكنه لم يصيب في الرمية الثانية نال: 0 = 8 − 8 نقطة.

وإن لم يصيب الرامي الهدف في الرميتين نال 14− = 8 − 6− نقطة.

بالتالي فإن قيم المتحول العشوائي هي:

$$X(\Omega)=\{-14,\ -3,\ 0,\ 11\}$$

الحدثان A, B مستقلان، بالتالي لدينا:

$$f_X(-14)=P(X=-14)=P(A'\cap B')=P(A').P(B')=\frac{4}{10}.\frac{1}{10}=\frac{4}{100}$$

$$f_X(-3)=P(X=-3)=P(A'\cap B)=P(A').P(B)=\frac{4}{10}.\frac{9}{10}=\frac{36}{100}$$

$$f_X(0)=P(X=0)=P(A\cap B')=P(A).P(B')=\frac{6}{10}.\frac{1}{10}=\frac{6}{100}$$

$$f_X(11)=P(X=11)=P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{6}{10}.\frac{9}{10}=\frac{54}{100}$$

جدول التوزيع الاحتمالي هو:

x	-14	-3	0	11
$P(X=x)$	$\frac{4}{100}$	$\frac{36}{100}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{54}{100}$

بالتالي فإن التوقع الرياضي:

$$E(X)=-14.(\frac{4}{100})-3.(\frac{36}{100})+0.(\frac{6}{100})+11.(\frac{54}{100})=\frac{430}{100}=4.3$$

مثال 24: في لعبة يرمي لاعب قطعتي نقود إحداهما متزنة والأخرى غير متزنة. إذا كان احتمال الحصول على الشعار في القطعة غير المتزنة هو 1/4 واحتمال الحصول على الكتابة هو 3/4. إذا كانت النتيجة شعارين يربح n ل.س وإذا كانت شعار وكتابة يربح 40 ل.س وخلاف ذلك يخسر 100 ل.س. المطلوب: احسب توقع ربح هذا اللاعب بدلالة n وبين متى تكون اللعبة رابحة بالنسبة للاعب.

الحل:

ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على مقدار ربح اللاعب: إذا كانت النتيجة TT فإنه يربح n ل.س، وإذا كانت TH أو HT فإنه يربح 40 ل.س، أما إذا كانت النتيجة HH فإنه يخسر 100 ل.س.

بالتالي فإن قيم المتحول العشوائي هي: $X(\Omega)=\{-100,\ 40,\ n\}$

$$P(X=n)=\frac{1}{4}.\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

$$P(X=-100)=\frac{3}{4}.\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

$$P\ \ X\ =\ 40\ \ =P(X=40)=\frac{1}{2}$$

جدول التوزيع الاحتمالي هو:

x	-100	40	n
$P(X=x)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

بالتالي فإن التوقع الرياضي:

$$E(X)=-100.(\frac{3}{8})+40.(\frac{1}{2})+n.(\frac{1}{8})=\frac{n-140}{8}$$

من أجل $n=140$ اللعبة لا رابحة ولا خاسرة ($E(X)=0$)، أما من أجل $n>140$ فإن اللعبة رابحة ($E(X)>0$)، وأخيراً من أجل $n<140$ فإن اللعبة خاسرة ($E(X)<0$).

مثال 25: ليكن X متحول عشوائي يشير إلى فترة حياة جهاز الكتروني مقدرا بالساعات. تابع الكثافة الاحتمالي هو التالي:

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{20000}{x^3}, & x>100\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

أوجد فترة الحياة المتوقعة لهذا الجهاز الالكتروني.

الحل:

$$\mu=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x.f_X(x)dx=\int_{100}^{\infty}x.\frac{20000}{x^3}dx=200$$

1.5.خواص التوقع الرياضي properties of mathematical expectation:

ليكن لدينا المتحول العشوائي X، وليكن a,b أعداد حقيقية.

مبرهنة 1: ليكن لدينا متحول عشوائي X، فإنه لدينا العلاقة التالية:

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

نتيجة 1: بوضع $a=0$ في العلاقة السابقة ينتج، $E(b)=b$.

نتيجة 2: بوضع $b=0$ في العلاقة السابقة ينتج، $E(aX)=aE(X)$.

مبرهنة 2: ليكن لدينا متحول عشوائي X تابعه الاحتمالي $f_X(x)$ ، وليكن التابع $g(x)$. التوقع الرياضي للتابع $g(X)$ في الحالة المتقطعة هو المقدار:

$$E[g(X)] = \sum_x g(x).\, f_X(x)$$

وفي الحالة المستمرة هو المقدار:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x).\, f_X(x)\,dx$$

مثال 26: في تجربة إلقاء قطعة نقود متزنة ثلاث مرات متتالية. جدول التوزيع الاحتمالي هو:

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

أوجد التوقع الرياضي للتابع $g(X)$ في الحالتين:

$g(X) = 2X - 1$ و $g(X) = X^2$

الحل:

وجدنا سابقاً أن $E(X) = 3/2$ ، بالتالي فإن:

$$E(2X-1) = 2(3/2) - 1 = 2$$

أما من أجل $g(X) = X^2$ فإن التوقع الرياضي للتابع X^2 هو:

$$E[X^2] = \sum_x x^2.\, f_X(x)$$

$$= 0^2(\frac{1}{8}) + 1^2(\frac{3}{8}) + 2^2(\frac{3}{8}) + 3^2(\frac{1}{8}) = \frac{24}{8} = 3$$

مثال 27: ليكن لدينا متحول عشوائي X تابعه الاحتمالي:

$$f_X(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & 0 \le x \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

أوجد $E[X^2]$

الحل:

ISSN: 2617-989X

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2.\,f_X(x)\,dx=\int_0^1 x^2.(x+\frac{1}{2})\,dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{6}\right]_0^1=\frac{5}{12}$$

تعريف 14: ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً، تابع التوزيع الاحتمالي المشترك لهما هو $f_{X,Y}(x,y)$ ، عندئذ التوقع الرياضي للمتحول العشوائي $g(X,Y)$ ، من أجل الحالة المتقطعة هو :

$$E[g(X,Y)]=\sum_x\sum_y g(x,y).\,f_{X,Y}(x,y)$$

ومن أجل الحالة المستمرة:

$$E[g(X,Y)]=\int_{\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y).\,f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

مثال 28: ليكن لدينا X,Y متحولين عشوائيين لهما تابع التوزيع الاحتمالي المشترك كما هو مبين في الجدول التالي:

$X \setminus Y$	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	المجموع
$X=0$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{5}{14}$
$X=1$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{14}$	0	$\frac{15}{28}$
$X=2$	$\frac{3}{28}$	0	0	$\frac{3}{28}$
المجموع	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{28}$	1

أوجد التوقع الرياضي للتابع $g(X,Y)=XY$.

الحل:

$$E[XY]=\sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} xy.\,f_{X,Y}(x,y)=(1)(1)\,f_{X,Y}(1,1)=\frac{3}{14}$$

مبرهنة 2: ليكن X,Y متحولين عشوائيين مستقلين حيث التوقع الرياضي لكل منهما موجود، عندئذ لدينا العلاقة التالية:

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

مثال 29: هل المتحولين العشوائيين X,Y في المثال السابق مستقلين؟

الحل:

$$E(X)=\mu_X=\sum_{x=0}^{2}x.f_X(x)=0(\frac{5}{14})+1(\frac{15}{28})+2(\frac{3}{28})=\frac{3}{4}$$

$$E(Y)=\mu_Y=\sum_{y=0}^{2}y.f_Y(y)=0(\frac{15}{28})+1(\frac{3}{7})+2(\frac{1}{28})=\frac{1}{2}$$

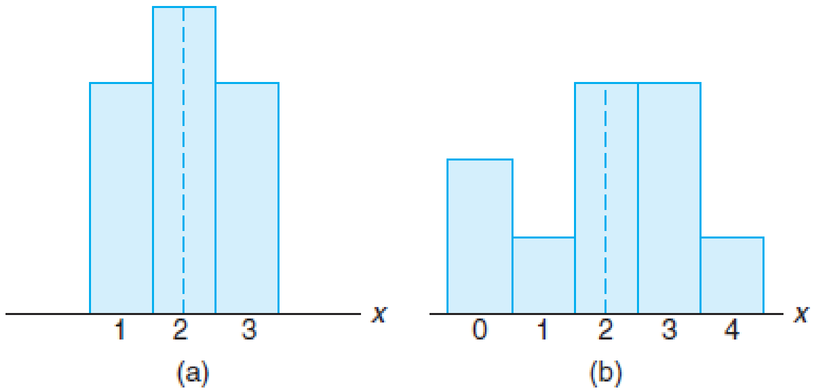
من الواضح أن:

$$\frac{3}{4}.\frac{1}{2}=\frac{3}{8}\neq\frac{3}{14}$$

أي أن: $E(XY)\neq E(X)E(Y)$ والمتحولين العشوائيين X,Y مرتبطين.

6. تشتت متحول عشوائي variance of a random variable:

إن التوقع الرياضي لمتحول عشوائي X له أهمية خاصة في الإحصاء لأنه يصف أين يتركز التوزيع الاحتمالي، لكنه لا يعطي توصيفاً كافياً عن شكل التوزيع. بالتالي نحن بحاجة إلى توصيف كيفية التغيير في التوزيع، يبين الشكل التالي المدرج التكراري لمتحولين عشوائيين متقطعين لهما نفس التوقع الرياضي (المتوسط)، $\mu = 2$ ، ولكنهما يختلفان إلى حد كبير في تشتت العناصر حول هذا المتوسط.



تعريف 13: ليكن لدينا متحول عشوائي X تابعه الاحتمالي $f_X(x)$ وتوقعه الرياضي μ_X ، نعرف تشتت المتحول العشوائي X ، ونرمز له بالرمز $Var(X)$ أو σ_X^2 ، في الحالة المتقطعة، المقدار:

$$\sigma_X^2 = Var(X) = E[(X-\mu_X)^2] = \sum_x (x-\mu_X)^2 . f_X(x)$$

وفي الحالة المستمرة، المقدار:

$$\sigma_X^2 = Var(X) = E[(X-\mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 . f_X(x)\, dx$$

نسمي المقدار σ_X بالانحراف المعياري للمتحول العشوائي X .

مثال 30: في تجربة إلقاء قطعة نقود متزنة ثلاث مرات متتالية. جدول التوزيع الاحتمالي هو التالي:

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

أوجد تشتت المتحول X .

الحل:

وجدنا سابقاً أن $\mu_X = 3/2$ ، بالتالي:

$$\sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)^2] = \sum_{x=0}^{3}(x-\frac{3}{2})^2 . f_X(x)$$

$$= (0-\frac{3}{2})^2.(\frac{1}{8}) + (1-\frac{3}{2})^2.(\frac{3}{8}) + (2-\frac{3}{2})^2.(\frac{3}{8}) + (3-\frac{3}{2})^2.(\frac{1}{8}) = \frac{3}{4}$$

مثال 31: ليكن لدينا متحول عشوائي X تابعه الاحتمالي:

$$f_X(x) = \begin{cases} x+\frac{1}{2}, & 0 \le x \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

أوجد تشتت المتحول X .

الحل:

علينا أولاً إيجاد μ_X

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x. f_X(x)\,dx = \int_0^1 x.(x+\frac{1}{2})\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{7}{12}$$

بالتالي فإن:

$$\sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\frac{7}{12})^2.(x+\frac{1}{2})\,dx = \frac{11}{144}$$

مبرهنة 3: تشتت المتحول العشوائي X هو:

$$.\sigma_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2$$

مثال 32: لنأخذ تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية، وجدنا أن $E(X) = 3/2$ وأن $E(X^2) = 3$. بالتالي فإن:

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2 = 3 - (\frac{3}{2})^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها من التعريف مباشرة.

1.6. خواص التشتت variance properties:

ليكن لدينا المتحول العشوائي X ، وليكن a, b أعداد حقيقية، فإنه لدينا الخواص التالية:

- $Var(a)=0$
- $Var(X \pm b)=Var(X)$
- $Var(aX)=a^2Var(X)$
- $Var(aX \pm b)=a^2Var(X)$

مبرهنة 4: ليكن لدينا متحول عشوائي X تابعه الاحتمالي $f_X(x)$ ، تشتت المتحول العشوائي $g(X)$ في الحالة المتقطعة هو:

$$\sigma_{g(X)}^2 = E\{[g(X)-\mu_{g(X)}]^2\} = \sum_x [g(x)-\mu_{g(X)}]^2 . f_X(x)$$

وفي الحالة المستمرة:

$$\sigma_X^2 = E\{[g(X)-\mu_{g(X)}]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} [g(x)-\mu_{g(X)}]^2 . f_X(x)dx$$

مثال 33: في تجربة إلقاء قطعة نقود متزنة ثلاث مرات متتالية. وجدنا أن تشتت المتحول العشوائي X يساوي 3/4. أوجد التشتت للتابع: $g(X)=2X-1$.

الحل:

$$Var(2X-1)=2^2Var(X)=4(3/4)=3$$

2.6.التغاير covariance:

تعريف 14: ليكن X, Y متحولين عشوائيين تابع التوزيع الاحتمالي المشترك لهما $f_{X,Y}(x,y)$. نعرف تغاير covariance المتحولين X, Y في الحالة المتقطعة بـــ:

$$\sigma_{X,Y} = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \sum_x \sum_y (x-\mu_X)(y-\mu_Y). f_{X,Y}(x,y)$$

وفي الحالة المستمرة، المقدار:

$$\sigma_{X,Y} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)(y-\mu_Y). f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

مبرهنة 5: تغاير متحولين عشوائيين X, Y لهما التوقعان الرياضيان μ_X و μ_Y على الترتيب، تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sigma_{X,Y} = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

نتيجة 2: ليكن X,Y متحولين عشوائيين مستقلين، بالتالي لدينا:

$$\sigma_{X,Y}=0$$

ملاحظة 4: إذا كان $\sigma_{X,Y}=0$ فليس بالضرورة أن يكون X,Y مستقلان كما يبينه المثال التالي:

مثال 34: ليكن لدينا متحول عشوائي X تابعه الاحتمالي:

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1\le x\le 1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

وليكن $Y=X^2$. عندئذ:

$$E(X)=\int_{-1}^{1}x.\,f_X(x)\,dx=\int_{-1}^{1}x(\frac{1}{2})\,dx=\left[\frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{1}=0$$

$$E(Y)=E(X^2)=\int_{-1}^{1}x^2.\,f_X(x)\,dx=\int_{-1}^{1}x^2(\frac{1}{2})\,dx=\left[\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{3}$$

$$E(XY)=E(X^3)=\int_{-1}^{1}x^2.\,f_X(x)\,dx=\int_{-1}^{1}x^3(\frac{1}{2})\,dx=\left[\frac{x^4}{8}\right]_{-1}^{1}=0$$

بالتالي:

$$\sigma_{X,Y}=E(XY)-\mu_X\mu_Y=0-0(1/3)=0$$

لكن التابع Y هو تابع لـــ X ، بالتالي X,Y غير مستقلان (مرتبطان).

مثال 35: X,Y متحولين عشوائيين لهما تابع التوزيع الاحتمالي المشترك المبين في الجدول التالي (المثال 14):

$X\setminus Y$	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	المجموع
$X=0$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{5}{14}$
$X=1$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{14}$	0	$\frac{15}{28}$
$X=2$	$\frac{3}{28}$	0	0	$\frac{3}{28}$
المجموع	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{28}$	1

أوجد تغاير المتحولين العشوائيين X,Y .

الحل:

وجدنا سابقاً أن:

$E(XY)=3/14$ و $\mu_X=3/4$ و $\mu_Y=1/2$

بالتالي فإن:

$$\sigma_{X,Y}=E(XY)-\mu_X\mu_Y=\frac{3}{14}-\frac{3}{4}.\frac{1}{2}=-\frac{9}{56}$$

مثال 36: ليكن المتحولين العشوائيين المستمرين X,Y ، حيث تابع التوزيع الاحتمالي المشترك لهما:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} x+\frac{3}{2}y^2 & 0\le x,y\le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

أوجد تغاير المتحولين العشوائيين X,Y

الحل:

وجدنا سابقاً أن تابعي التوزيع الاحتماليين الهامشيين لكل من X و Yهما:

$$f_X(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{2}, & 0\le x\le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{3}{2}y^2+\frac{1}{2}, & 0\le y\le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$\mu_X=\int_{-\infty}^{\infty}x.\,f_X(x)\,dx=\int_0^1 x.(x+\frac{1}{2})\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}\right]_0^1=\frac{7}{12}$$

$$\mu_Y=\int_{-\infty}^{\infty}y.\,f_Y(y)\,dy=\int_0^1 y.(\frac{3}{2}y^2+\frac{1}{2})\,dy=\left[\frac{3y^4}{8}+\frac{y^2}{4}\right]_0^1=\frac{5}{8}$$

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^1 xy(x+\frac{3}{2}y^2)\,dxdy=\frac{17}{48}$$

بالتالي:

$$\sigma_{X,Y}=E(XY)-\mu_X\mu_Y=\frac{17}{48}-\frac{7}{12}.\frac{5}{8}=-\frac{1}{96}$$

مثال 37: النسبة X للذكور والنسبة Y للإناث الذين يشاركون في الماراتون ويكملوا السباق حتى النهاية، وحيث تابع التوزيع الاحتمالي المشترك لهما:

$$\mathrm{f}_{\mathrm{X,Y}}(\mathrm{x,y}) = \begin{cases} 8xy, & 0 \le y \le x \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

أوجد تغاير المتحولين العشوائيين X, Y

الحل:

أولاً علينا إيجاد توابع التوزيع الاحتمالية الهامشية:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dy = \int_0^x 8xy\, dy = 8x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x = 4x^3$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3, & 0 \le x \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dx = \int_y^1 8xy\, dx = 8y\left[\frac{x^2}{2}\right]_y^1 = 4y(1-y^2)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 4y(1-y^2), & 0 \le y \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

ثانياً، من توابع التوزيع الاحتمالية الهامشية نحسب التوقع الرياضي

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x.\, f_X(x)\, dx = \int_0^1 4x^4\, dx = \left[\frac{4x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{5}$$

$$\mu_Y = \int_{-\infty}^{\infty} y.\, f_Y(y)\, dy = \int_0^1 4y^2(1-y^2)\, dy = 4\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \frac{8}{15}$$

ثالثاً، من تابع التوزيع الاحتمالي المشترك نحسب $E(XY)$

$$E(XY) = \int_0^1 \int_y^1 8x^2y^2\, dxdy = \frac{4}{9}$$

بالتالي:

$$\sigma_{X,Y} = E(XY) - \mu_X \mu_Y = \frac{4}{9} - \frac{4}{5}.\frac{8}{15} = \frac{4}{225}$$

لا يوفر التغاير بين متحولين عشوائيين معلومات فيما يتعلق بطبيعة العلاقة بين هذين المتحولين، حيث لا تُشير طويلة magnitude التغاير إلى أي شيء بخصوص هذه العلاقة، لطالما أن التغاير ليست بدون واحدة scale−free. فطويلتها تعتمد على الواحدة المستخدمة في قياس كل من X و Y. لذلك سنعرف نسخة بدون واحدة من التغاير ندعوها معامل الترابط.

3.6.معامل الترابط correlation coefficient:

تعريف 15: ليكن X,Y متحولين عشوائيين لهما التغاير $\sigma_{X,Y}$ والتوقعان الرياضيان μ_X و μ_Y على الترتيب. نعرف معامل الترابط correlation coefficient للمتحولين العشوائيين X و Y، ونرمز له بالرمز $\rho_{X,Y}$:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \, \sigma_Y}$$

ملاحظة 5: يعبّر معامل الترابط $\rho_{X,Y}$ على مدى الترابط بين المتحولين العشوائيين X و Y وقيمته تحقق العلاقة التالية:

$$-1 \le \rho_{X,Y} \le 1$$

يأخذ معامل الترابط القيمة 0 $(\rho_{X,Y} = 0)$ عندما يكون $\sigma_{X,Y}$ أي عندما يكون المتحولين العشوائيين X و Y مستقلين (لا يوجد أي علاقة ترابط بينهما). ولكن عندما يكون بين المتحولين تماماً علاقة ارتباط خطي $Y \equiv a + bX$، فإن معامل الترابط يأخذ القيمة 1 $(\rho_{X,Y} = 1)$ عندما يكون $b > 0$ ويأخذ القيمة 1- $(\rho_{X,Y} = -1)$ عندما يكون $b < 0$.

مثال 38: ليكن X,Y متحولين عشوائيين لهما تابع التوزيع الاحتمالي المشترك المبين في المثال 34 السابق. أوجد معامل الترابط بين المتحولين العشوائيين X و Y.

الحل:

وجدنا سابقاً أن:

$\mu_X = 3/4$ و $\mu_Y = 1/2$ و $\sigma_{X,Y} = -9/56$

ولنحسب الآن المقادير التالية:

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{2} x^2 . f_X(x) = 0^2(\frac{5}{14}) + 1^2(\frac{15}{28}) + 2^2(\frac{3}{28}) = \frac{27}{28}$$

$$E(Y^2) = \sum_{y=0}^{2} y^2 . f_Y(y) = 0^2(\frac{15}{28}) + 1^2(\frac{3}{7}) + 2^2(\frac{1}{28}) = \frac{4}{7}$$

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2 = \frac{27}{28} - (\frac{3}{4})^2 = \frac{45}{112}$$

$$\sigma_Y^2 = E(Y^2) - \mu_Y^2 = \frac{4}{7} - (\frac{1}{2})^2 = \frac{9}{28}$$

$$\rho_{X,Y} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \, \sigma_Y} = \frac{-9/56}{\sqrt{45/112}\sqrt{9/28}} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

مثال 39: ليكن المتحولين العشوائيين المستمرين X,Y، حيث تابع التوزيع الاحتمالي المشترك لهما المبين في المثال 36. أوجد معامل الترابط بين المتحولين العشوائيين X و Y.

ISSN: 2617-989X

الحل:

وجدنا سابقاً أن:

$$\mu_X = \frac{7}{12} \text{ و } \mu_Y = \frac{5}{8} \text{ و } \sigma_{X,Y} = -\frac{1}{96} \text{ و } E(X^2) = \frac{5}{12} \text{ و } \sigma_X^2 = \frac{11}{144}$$

ولنحسب الآن المقادير التالية:

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 . f_Y(y)\, dy = \int_0^1 y^2 .(\frac{3}{2}y^2 + \frac{1}{2})\, dy = \left[\frac{3y^5}{10} + \frac{y^3}{6}\right]_0^1 = \frac{7}{15}$$

$$\sigma_Y^2 = E(Y^2) - \mu_Y^2 = \frac{7}{15} - (\frac{5}{8})^2 = \frac{73}{960}$$

$$\rho_{X,Y} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X\, \sigma_Y} = \frac{-1/96}{\sqrt{11/144}\sqrt{73/960}} = \frac{-\sqrt{960}}{8\sqrt{803}}$$

مبرهنة 6: ليكن المتحولين العشوائيين X, Y وليكن a, b, c أعداد حقيقية، فإنه لدينا العلاقة التالية:

$$Var(aX + bY + c) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2ab\sigma_{X,Y}$$

نتيجة 3: ليكن X, Y متحولين عشوائيين مستقلين و a, b عددان حقيقيان، بالتالي:

$$Var(aX \pm bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y)$$

نتيجة 4: وبشكل عام ليكن لدينا المتحولات العشوائية المستقلة $X_1, X_2, \ldots, X_n$ والأعداد الحقيقية $a_1, a_2, \ldots, a_n$، بالتالي:

$$\begin{aligned} &Var\left(a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n\right) = \\ &\quad = Var\left(a_1X_1\right) + Var\left(a_2X_2\right) + \ldots + Var\left(a_nX_n\right) \\ &\quad = a_1^2 Var(X_1) + a_2^2 Var(X_2) + \ldots + a_n^2 Var(X_n) \end{aligned}$$

مثال 40: ليكن المتحولين العشوائيين X, Y، بحيث $Var(X) = 2$ و $Var(Y) = 4$ و $\sigma_{X,Y} = -2$.

أوجد $Var(Z)$، حيث $Z = 3X - 4Y + 8$.

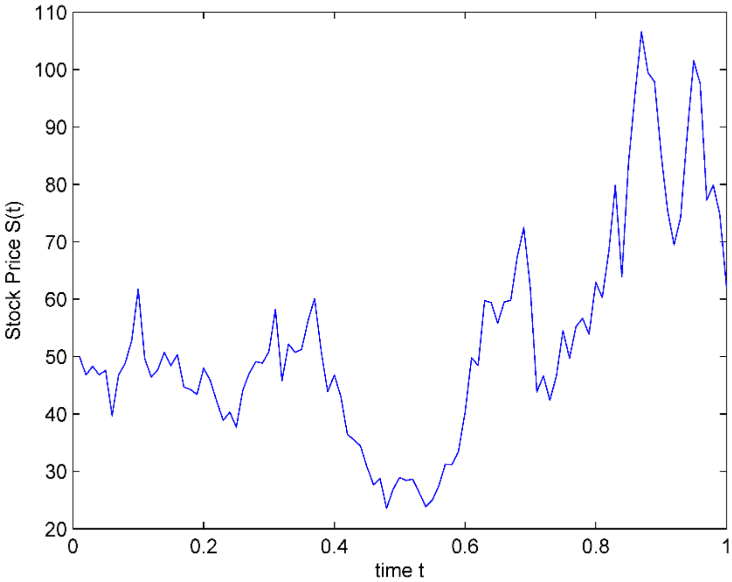
الحل:

$$Var(Z) = Var(3X - 4Y + 8) = 3^2 Var(X) + 4^2 Var(Y) + 2(3)(-4)\sigma_{X,Y}$$

$$Var(Z) = 3^2(2) + 4^2(4) + 2(3)(-4)(-2) = 130$$

7. السيرورة العشوائية random process:

في الكثير من تطبيقات الحياة العملية، نهتم بمراقبة قيم متحول عشوائي عبر فترة من الزمن. على سبيل المثال مراقبة سعر السهم $S(t)$ لشركة ما خلال الأشهر القليلة المقبلة، كما يبينه الشكل التالي:



من الملاحظ أنه من أجل قيمة محددة ل $t_1 \in [0,\infty[$، فإن $S(t_1)$ هو متحول عشوائي له تابع كثافة احتمالي، ومن أجل قيمة أخرى $t_2 \in [0,\infty[$، فإن $S(t_2)$ هو متحول عشوائي آخر ومن الممكن أن يكون له تابع كثافة احتمالي آخر. ويمكن القول بأن السيرورة العشوائية $S(t)$ تتألف من عدد غير قابل للعد من المتحولات العشوائية.

عندما نعتبر قيم التابع $S(t)$ من أجل قيم الزمن $t \in [0,\infty[$، نقول عنها عن $S(t)$ أنه سيرورة عشوائية random process أو stochastic process، ويعبر عنه كما يلي: $\{S(t), t \in [0,\infty[\}$. هذا ويمكن القول بأن السيرورة العشوائية هي تابع عشوائي للزمن. وبما أن الزمن t هو عدد حقيقي بالتالي فإن السيرورة العشوائية مستمرة الزمن continuous–time random process.

من الأمثلة المألوفة والشائعة عن السيرورات العشوائية بالإضافة إلى أسواق الأسهم المالية: تبدلات أسعار الصرف، والإشارات مثل الكلام، الصوت، والصورة، والبيانات الطبية كمخطط ورسومات التخطيط القلبي، وكذلك ضغط الدم، وتغيرات درجات الحرارة في الجو أو في جسم الإنسان أو الكائن الحي خلال فترة من الزمن. وتستخدم السيرورات العشوائية في مجال هندسة الاتصالات في دراسة الضجيج الذي يظهر في الدارات الإلكترونية.

ليكن أيضاً على سبيل المثال $N(t)$ عدد الزبائن التي تراجع بنك ما من الساعة $t=9$ صباحاً وحتى الرابعة بعد الظهر $t=16$، أي أن t متحول حقيقي $t \in [9,16]$. من الواضح أن $N(t) \in \{0,1,2,\ldots\}$ من أجل

ISSN: 2617-989X

أي قيمة ل $t \in [9,16]$، كما أنه من الواضح أيضاً أنه من أجل أي قيمة t_1 فإن $N(t_1)$ هو متحول عشوائي متقطع. بالتالي يمكن القول على أن $N(t)$ هي سيرورة عشوائية متقطعة القيمة، وفي نفس الوقت سيرورة عشوائية مستمرة الزمن.

بالمقابل يمكن الحصول على سيرورة عشوائية متقطعة الزمن discrete−time من الشكل $\{S(t), t \in J\}$، حيث $J = \{t_1, t_2, \ldots\}$. وعادة نعرف $X(t_n) = X(n)$ أو $X(t_n) = X_n$، وذلك من أجل $n = 1, 2, \ldots$. بالتالي فإن السيرورة عشوائية متقطعة الزمن هي سلسلة sequence من المتحولات العشوائية، والتي نشير إليها أحياناً بالسلاسل العشوائية random sequences:

$\{X_n,\ n \in N\}$ or $\{\mathrm{X}_\mathrm{n},\ \mathrm{n} \in Z\}$

من أشهر وأهم السلاسل العشوائية هي سلاسل ماركوف Markov، والتي يطلق عليها السلاسل عديمة الذاكرة، فهي تتكهن بالمستقبل انطلاقاً من الحاضر ولا تحتاج إلى معرفة الماضي. بمعنى آخر نقول عن السلسلة $\{\mathrm{X}_\mathrm{n},\ \mathrm{n} \in N\}$ أنها سلسلة ماركوف، إذا تحقق ما يلي:

$$P(X_{n+1} = x \mid X_0,\ X_1,\ \ldots,\ X_n) = P(X_{n+1} = x \mid X_n)$$

مثال 41: لتكن السيرورة العشوائية $X(t)$ المعرفة كما يلي:

$$\{X(t) = A + Bt,\ t \in [0, \infty[\}$$

حيث A, B متحولان طبيعيان مستقلان بمتوسط 1 وانحراف معياري 1، أي أن:

$$f(x) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2} \right. ,\quad -\infty < x < \infty$$

المطلوب:

a) عرف المتحول العشوائي $Y = X(1)$. أوجد تابع الكثافة الاحتمالي له.

b) ليكن $Z = X(2)$، أوجد $E(YZ)$.

الحل:

a) لدينا: $Y = X(1) = A +$ ، وبما أن A, B مستقلان ويخضعان للتوزيع الطبيعي، بالتالي فالمتحول $Y = A + B$ هو طبيعي أيضاً:

$$E(Y) = E(A) + E(B) = 1 + 1 = 2$$

$$Var(Y) = Var(A+B) = Var(A) + Var(B) = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$f_Y(y) = \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{4}(x-2)^2} \right. ,\quad -\infty < y < \infty$$

$$E(YZ) = E[(A+B)(A+2B)] = E(A^2 + 3AB + 2B^2)$$
$$= E(A^2) + 3E(AB) + 2E(B^2)$$

لكن لدينا $Var(A) = E(A^2) - E^2(A)$، بالتالي: $E(A^2) = E(B^2) = 2$، كما أن $E(AB) = E(A)E(B)$. مما سبق ينتج أن:

$$E(YZ) = 2 + 3(1) + 2(2) = 9$$

تمارين

1. خمس بطاقات تحمل الأرقام $1, 2, 3, 4, 5$ نسحب ثلاث بطاقات منها بشكل عشوائي ومن دون إعادة. ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على مجموع الأرقام المسحوبة، المطلوب كتابة جدول التوزيع الاحتمالي للمتحول X.

2. ليكن X متحول عشوائي تابع الكثافة الاحتمالي له معرف بالعلاقة:

$$f_X(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < c \\ 2 - x & c \le x < 2 \end{cases}$$

والمطلوب:

a) عين قيمة الثابت c.

b) أوجد تابع التوزيع التراكمي $F(X)$.

c) احسب $P(X > 1/2)$.

d) احسب التوقع الرياضي والتشتت للمتحول X.

3. ليكن لدينا التابع $f_{X,Y}(x, y)$ التالي:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} x + y & 0 \le x, y \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

a) تأكد من أن $f_{X,Y}(x, y)$ هو تابع كثافة احتمالي مشترك للمتحولين العشوائيين المشتركين X, Y

b) أوجد الكثافة الهامشية لكل من X و Y.

c) احسب $P(0 < X < 0.5, Y > 0)$.

4. ليكن لدينا تابع كثافة احتمالي مشترك للمتحولين العشوائيين المشتركين X, Y:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x-2y} & 0 < x, y < \infty \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

أوجد قيمة كل من الاحتمالات التالية:

$$P(X > 1, Y < 1), \quad P(X < Y), \quad P(X < a)$$

5. ليكن لدينا تابع كثافة احتمالي مشترك للمتحولين العشوائيين المشتركين X, Y :

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}10xy^2 & 0<x<y<1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

a) أوجد الكثافة الهامشية لكل من X و Y والكثافة الشرطية $P(Y\,|\,X)$.

b) احسب الاحتمال $P(Y>1/2,\ X=1/4)$.

6. يحوي صندوق أربع بطاقات تحمل الأرقام 4 ,3 ,2 ,1. نسحب عشوائياً من الصندوق بطاقتين ومن دون إعادة. ليكن X يدل على مجموع الرقمين و Y على اكبر الرقمين المسحوبين. المطلوب:

a) كتابة جدول التوزيع الاحتمالي المشترك لـــ X, Y.

b) إيجاد عامل الارتباط $\rho_{X,Y}$ وبين فيما إذا كان المتحولان مستقلان أم لا.

العلامة العظمى: 100 **علامة النجاح: 50** **المدة: ساعة واحدة**

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة **(80) درجة**

1. تابع التوزيع التراكمي $F_X(x)$ لمتحول عشوائي X له تابع التوزيع الاحتمالي $f_X(x)$ هو بالتعريف

a) $F_X(x) = P(X \le x)$

b) $F_X(x) = P(X \ge x)$

c) $F_X(x) = P(X = x)$

d) لا شيء مما سبق

2. التوقع الرياضي $E(X) = \mu_X$ للمتحول العشوائي X الدال على العدد الظاهر في تجربة إلقاء حجر النرد (6 أوجه) مرة واحدة هو

a) 21

b) 1/6

c) 3.5

d) 1/8

3. تشتت $Var(X) = \sigma_X^2$ للمتحول العشوائي X الدال على العدد الظاهر في تجربة إلقاء حجر النرد (6 أوجه) مرة واحدة هو

a) 91/12

b) 35/6

c) 91/6

d) 35/12

خمس بطاقات تحمل الأرقام 1,2,3,4,5 نسحب ثلاث بطاقات منها بشكل عشوائي (من دون إعادة) وليكن X المتحول العشوائي الدال على مجموع أرقام البطاقات المسحوبة (معطيات الأسئلة 4, 5, 6)

4. مجموعة قيم المتحول العشوائي هي

a) $X(\Omega)=\{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

b) $X(\Omega) = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

c) $X(\Omega) = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

d) $X(\Omega) = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

5. الاحتمال $P(X=6)$ هو
a) $2/7$
b) $1/7$
c) $1/5$
d) $1/10$

6. الاحتمال $P(X\leq 8)$ هو
a) $3/5$
b) $1/10$
c) $2/5$
d) $1/5$

7. المتحول العشوائي X بحيث $\mu_X=1$ و $\sigma_X^2=4$، المتحول العشوائي $Y=2-3X$، بالتالي:
a) μ_Y=-1, σ_Y=6
b) $\mu_Y=-3,\ \sigma_Y=6$
c) $\mu_Y=-1,\ \sigma_Y=36$
d) $\mu_Y=-3,\ \sigma_Y=12$

8. المتحولان العشوائيان X,Y بحيث $\mu_X=10,\ \mu_Y=15$ و $\sigma_X^2=9,\ \sigma_Y^2=16$، المتحول العشوائي $Z=X-Y$، بالتالي:
a) $\mu_Z=5,\ \sigma_Z=5$
b) $\mu_Z=-5,\ \sigma_Z=25$
c) μ_Z=-5, σ_Z=5
d) $\mu_Z=-5,\ \sigma_Z=25$

9. المتحولان العشوائيان X,Y بحيث $\mu_X = 1/2,\ \mu_Y = 1/3$ و $E(XY) = 1/8$ ، تغاير المتحولين العشوائيين X,Y $(\sigma_{X,Y})$ هو

a) $1/24$

b) $-1/24$

c) $7/24$

d) لا شيء مما سبق

10. المتحولان العشوائيان X,Y بحيث $Y = 2X - 1$. معامل الترابط لهما هو

a) 1

b) -1

c) 0

d) $1/2$

11. ليكن المتحول العشوائي المستمر X تابع كثافته الاحتمالي هو التالي (حيث c ثابت موجب):

$$f_X(x) = \begin{cases} cx & 0 \le x \le 2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

قيمة c هي

a) $1/4$

b) $1/2$

c) 1

d) 2

ليكن المتحول العشوائي المستمر X تابع كثافته الاحتمالي هو التالي (معطيات الأسئلة 15 ,14 ,13 ,12):

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

12. التوقع الرياضي $E(X) = \mu_X$ للمتحول X هو:

a) $1/2$

b) $1/3$

c) $2/3$

d) لا شيء ما سبق

13. $E[X^2]$ هو:

a) $1/2$

b) $1/3$

c) $2/3$

d) لا شيء ما سبق

14. التشتت $Var(X)=\sigma_X^2$ للمتحول X هو:

a) $1/2$

b) $1/3$

c) $1/18$

d) لا شيء ما سبق

15. قيمة الاحتمال $P(1/4<X<1/2)$ هي:

a) $3/16$

b) $3/4$

c) $1/4$

d) لا شيء ما سبق

16. المتحولان العشوائيان X,Y، بحيث $Var(X)=2$ و $Var(Y)=3$ و $\sigma_{X,Y}=-2$. $Z=2X-3Y+5$. $Var(Z)$ هو:

a) 35

b) 59

c) 11

d) لا شيء مما سبق

ISSN: 2617-989X

السؤال الثاني: (20) درجة

صندوق يحوي 6 بطاقات تحمل الأرقام $1, 2, 3, 4, 5, 6$. نسحب عشوائياً بطاقتين من الصندوق من دون إعادة، نعرف المتحول العشوائي X الذي يدل على مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين

a) عين مجموعة قيم المتحول X.

b) أوجد جدول التوزيع الاحتمالي للمتحول X.

c) أوجد التوقع الرياضي للمتحول X.

d) أوجد تشتت المتحول X.

الحل:

a) $X(\Omega) = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

توجيه في حال الخطأ: الفقرة 2

b)

x	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$P(X=x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

توجيه في حال الخطأ: الفقرة 2

c) $$\mu_X = E(X) = \sum_{x=3}^{11} x.\, f_X(x) = 7$$

توجيه في حال الخطأ: الفقرة 5

d) $$E(X^2) = \sum_{x=3}^{11} x^2.\, f_X(x) = \frac{805}{15} = \frac{161}{3}$$

$$Var(X) = \sigma_X^2 = E(X^2) - E^2(X) = \frac{161}{3} - 7^2 = \frac{14}{3}$$

توجيه في حال الخطأ: الفقرة 6

السؤال الأول	الإجابة الصحيحة	توجيه في حال الخطأ
1	a	الفقرة 2.3
2	c	الفقرة 5
3	d	الفقرة 6
4	a	الفقرة 2
5	d	الفقرة 2
6	c	الفقرة 2
7	a	الفقرة 5 و6
8	c	الفقرة 5 و6
9	b	الفقرة 6.2
10	a	الفقرة 6.3
11	b	الفقرة 3.2
12	c	الفقرة 5
13	a	الفقرة 4 و5
14	c	الفقرة 6
15	a	الفقرة 3
16	b	الفقرة 6

الفصل الرابع: التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

الكلمات المفتاحية:

التوزيع الثنائي، توزيع برنولي، التوزيع ثنائي الحد، التوزيع الهندسي، التوزيع فوق الهندسي، توزيع بواسون.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على بعض المبادئ والتعاريف الأساسية المتعلقة بالتوزيعات المتقطعة والتي من ضمنها (توزيع برنولي، توزيع ثنائي الحد، التوزيع الهندسي، التوزيع فوق الهندسي، وتوزيع بواسون). كما يهدف إلى معرفة كيفية استخراج المتوسط والتشتت لكل من التوزيعات آنفة الذكر.

الأهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- التوزيع الثنائي أو توزيع برنولي
- التوزيع ثنائي الحد
- التوزيع الهندسي
- التوزيع فوق الهندسي
- توزيع بواسون

ترتبط أهم التوزيعات الاحتمالية ارتباطاً وثيقاً بالتجارب الثنائية النتائج، وحياتنا اليومية زاخرة بهذا النوع من التجارب نظراً لأهميتها التطبيقية في مجالات العلوم المختلفة. فعندما نقوم برمي قطعة من النقود فإن أمامنا احتمالين فقط إما ظهور الكتابة H أو ظهور الشعار T.

أثناء الرمي في اتجاه هدف معين فإما تكون النتيجة إصابة الهدف أو عدم إصابته. قد يكون الشخص مدخناً أو لا يكون مدخناً. الدواء الجديد مفيد لمعالجة مرض معين أو غير مفيد. إذا اخترنا عشوائياً قطعة من إنتاج مصنع معين فإما أن تكون القطعة خالية من أي عيب صناعي أو تكون معيبة صناعياً. على الرغم من تنوع هذه التجارب إلا أنها جميعاً لها خصائص التجربة الثنائية أو (البرنولية Bernoulli) وميزاتها.

1. التوزيع الثنائي أو توزيع برنولي Bernoulli's distribution:

التجربة الثنائية:

التجربة الثنائية هي تجربة تتصف بالخواص التالية:

1. تتألف التجربة من عدد من التكرارات المتماثلة تماماً (n تكرار).
2. ينتج عن كل تكرار إحدى نتيجتين فإما أن تكون النتيجة: "نجاحاً success" أي وقوع الحدث المعني بالدراسة وسنرمز لهذه النتيجة بـ s ولاحتمال وقوعها بـ p ، أو تكون النتيجة الأخرى "فشلاً failure" وسنرمز لهذه النتيجة بـ f ولاحتمال وقوعها بـ q حيث: $p+q=1$.
3. احتمال النجاح p يبقى ثابتاً من تكرار إلى آخر وكذلك يكون احتمال الفشل وهذا يعني أن التكرارات تكون مستقلة بعضها عن بعض.
4. نهتم بعدد النجاحات التي نحصل عليها خلال التكرارات المستقلة الـ n وسنرمز لهذا العدد بـ X .

عندما نجري التجربة مرة واحدة أي في الحالة $n=1$ فإن قيمة X إما أن تكون 0 (أي النتيجة f)، أو مساوية 1 (أي النتيجة p) ونعلم أن $P(f)=q$ و $P(s)=p$ ، أي أن $P(X=1)=p$ و $P(X=0)=q$. ويكون جدول التوزيع الاحتمالي المطلوب:

x	0	1
$P(X=x)$	$q=1-p$	p

يُدعى التوزيع الاحتمالي في هذه الحالة ب التوزيع الثنائي أو توزيع برنولي.

تعريف 1: نقول عن متحول عشوائي X أنه يتبع توزيع برنولي وسيطه p إذا كان له تابع الاحتمال:

$$f_X(x)=P(X=x)=\begin{cases} p^x q^{1-x}; & x=0,1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

مبرهنة 1: إذا كان X متحول عشوائي يتبع توزيع برنولي وسيطه p فإن:

$$\mu_X=E(X)=p$$
$$\sigma_X^2=Var(X)=pq$$

البرهان:

$$\mu_X=E(X)=\sum_{x=0}^{1} x.\,f_X(x)=0.(q)+1.(p)=p$$

$$\sigma_X^2=E(X^2)-\mu_X^2=\sum_{x=0}^{1} x^2.\,f_X(x)-\mu_X^2$$
$$=0^2.(q)+1^2.(p)-p^2=p-p^2=p(1-p)=pq$$

2. التوزيع ثنائي الحد binomial distribution:

نعرف المتحول العشوائي X في توزيع ثنائي الحد على أنه عدد مرات النجاح عند تكرار محاولة برنولي عدد من المرات مقداره n مرة وفق الشرط التالي: المحاولات مستقلة (نتيجة أي محاولة لا يؤثر ولا يتأثر بنتائج المحاولات الأخرى)، وأن احتمال النجاح p ثابت لجميع المحاولات.

نسمي في هذه الحالة تابع التوزيع للمتحول العشوائي المتقطع X بتابع التوزيع الاحتمالي ثنائي الحد، ونرمز له بـ $b(x;\ n,\ p)$. من الواضح أن مجموعة القيم الممكنة لهذا المتحول هي $X(\Omega)=\{0,1,\ldots,n\}$.

لنبحث الآن عن صيغة عامة ل $b(x;\ n,\ p)$، ولنحسب الاحتمالات الموافقة للقيم $x=0,1,\ldots,n$. وبملاحظة أن الحدث $\{X=x\}$ يوافق حدوث x نجاحاً و $n-x$ فشلاً. لنبدأ أولاً بحساب احتمال x نجاحاً و $n-x$ فشلاً ضمن ترتيب محدد، وبما أن كافة المحاولات مستقلة فإن ناتج الاحتمال هو حاصل ضرب الاحتمالات الموافقة للنواتج المختلفة أي $p^x q^{n-x}$. والآن علينا تحديد العدد الكلي لنقاط العينة في التجربة والتي لديها x نجاح و $n-x$ فشل وهو يساوي عدد التبديلات الممكنة لمجموعة تحوي n عنصراً منها x عنصراً متماثلاً من النوع s و $n-x$ عنصراً متماثلاً من النوع f وهو يساوي $C(n,x)$. وباستخدام قانون جمع الاحتمالات نحصل على:

$$b(x;\ n,\ p)=C(n,\ x)\,p^x q^{n-x},\ x=0,\ 1,\ \ldots,\ n$$

تعريف 2: نقول عن متحول عشوائي X أنه يتبع توزيع ثنائي الحد بوسيطين $n,\ p$ ونكتب باختصار $X\sim b(x;\ n,\ p)$ إذا كان له تابع الاحتمال (تابع الكثافة الاحتمالية) التالي:

$$P\left(X=x\right)=b(x;\ n,\ p)=C(n,\ x)\,p^x q^{n-x},\ x=\ 0,\ 1,\ \ldots,\ n$$

وحيث أيضاً: $0<p<1$ و $q=1-p$.

يمكن ملاحظة أن:

- $b(x;\ n,\ p)=C(n,\ x)\,p^x q^{n-x}\geq 0$
- حسب منشور نيوتن فإن:

$$\sum_{x=0}^{n} b(x;n,\ p)=\sum_{x=0}^{n} C(n,x)\,p^x q^{n-x}=(p+q)^n=1$$

مثال 1: لدينا قطعة نقود غير متزنة بحيث $P(H)=1/3$ و $P(T)=2/3$. رمينا هذه القطعة 3 مرات، ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد مرات ظهور الكتابة في الرميات الثلاث. أوجد احتمال:

a) الحصول على كتابتين.

b) الحصول على كتابتين على الأقل.

c) الحصول على صورة واحدة على الأكثر.

d) الحصول على 3 شعارات.

الحل:

نتيجة النجاح تساوي ظهور الكتابة، بالتالي احتمال النجاح $p=1/3$. أما نتيجة الفشل تساوي ظهور الشعار، بالتالي احتمال الفشل $q=2/3$. المتغير العشوائي X يتبع توزيع ثنائي الحد بوسيطين $p=1/3$ و $n=3$، أي $X\sim b(x;\ 3,\ 1/3)$.

$$P(X=x)=f_X(x)=C(3,x)(\frac{1}{3})^x(\frac{2}{3})^{3-x};\quad x=0,1,2,3$$

$$P(X=0)=C(3,0)(\frac{1}{3})^0(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}$$

$$P(X=1)=C(3,1)(\frac{1}{3})^1(\frac{2}{3})^2=\frac{12}{27}=\frac{4}{9}$$

$$P(X=2)=C(3,2)(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^1=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$$

$$P(X=3)=C(3,3)(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^0=\frac{1}{27}$$

a) الحصول على كتابتين: $P(X=2)=2/9$

b) الحصول على كتابتين على الأقل:

$$P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)=6/27+1/27=7/27$$

c) الحصول على صورة واحدة على الأكثر:

$$P(X\leq 1)=P(X=0)+P(X=1)=8/27+12/27=20/27$$

d) الحصول على 3 شعارات: $P(X=0)=8/27$

مثال 2: نسبة القطع التالفة لأحد مصانع الأجهزة الخليوية هي 10%. لنأخذ عينة من 5 أجهزة بشكل عشوائي من أنتاج هذا المصنع، ما هو احتمال الحصول على:

a) جهاز خليوي واحد تالف.

b) جميع الأجهزة عاطلة.

c) جميع الأجهزة غير عاطلة (تعمل).

d) جهاز واحد على الأقل تالف.

الحل:

ليكن المتحول X الذي يدل على عدد الأجهزة الخلوية التالفة. نتيجة النجاح تعني الحصول على جهاز خليوي عاطل، بالتالي احتمال النجاح $p=0.1$. أما نتيجة الفشل فهي الحصول على جهاز خليوي سليم، بالتالي احتمال الفشل $q=0.9$. المتغير العشوائي X يتبع إذن توزيع ثنائي الحد بوسيطين $p=0.1$ و $n=5$ أي $X\sim b(x;\ 5,\ 0.1)$.

$$P(X=x)=f_X(x)=C(5,x)(0.1)^x(0.9)^{5-x};\quad x=0,1,\ldots,5$$

a) $P(X=1)=C(5,1)(0.1)^1(0.9)^4=0.32805$

b) $P(X=5)=C(5,5)(0.1)^5(0.9)^0=0.00001$

c) $P(X=0)=C(5,0)(0.1)^0(0.9)^9=0.59049$

d) $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-0.59049=0.40951$

مثال 3: احتمال أن يتعافى مريض من مرض نادر في الدم هو 0.4. إذا كان 15 شخص مصابون بهذا المرض، ما هو احتمال:

a) 10 أشخاص على الأقل يبقون على قيد الحياة.

b) من 3 إلى 8 أشخاص يبقون على قيد الحياة.

c) 5 أشخاص يبقون على قيد الحياة.

الحل:

ليكن المتحول X الذي يدل على عدد الأشخاص الذين يبقون على قيد الحياة. نتيجة النجاح تعني البقاء، بالتالي احتمال النجاح $p=0.4$. أما نتيجة الفشل فهي عدم البقاء على قيد الحياة (الموت)، بالتالي احتمال الفشل $q=0.6$. المتغير العشوائي X يتبع إذن توزيع ثنائي الحد بوسيطين $p=0.4$ و $n=15$، أي $X\sim b(x;\ 15,\ 0.4)$.

$$P(X=x)=f_X(x)=C(15,x)(0.4)^x(0.6)^{15-x};\quad x=0,1,\ldots,15$$

a) $P(X\geq 10)=\sum_{x=10}^{15}C(15,x)(0.4)^x(0.6)^{15-x}=0.0338$

b) $P(3\leq X\leq 8)=\sum_{x=3}^{8}C(15,x)(0.4)^x(0.6)^{15-x}=0.8779$

c) $P(X=5)=C(15,5)(0.4)^5(0.6)^{10}=0.1859$

1.2. التوقع الرياضي والتشتت expected value and variance:

مبرهنة 2: إذا كان X متحول عشوائي يتبع توزيع ثنائي الحد بوسيطين $n,\ p$ أي $X\sim b(x;\ n,\ p)$، فإن:

$$\mu_X=E(X)=np$$

$$\sigma_X^2=Var(X)=npq$$

مثال 4: أوجد التوقع الرياضي والتشتت للمثال السابق، ومن ثم استخدم متراجحة (نظرية) تشيبيشيف لتفسير المجال $\mu_X\pm 2\sigma_X$.

ISSN: 2617-989X

الحل:

$$\mu_X = np = 15(0.4) = 6$$

$$\sigma_X^2 = npq = 15(0.4)(0.6) = 3.6$$

$$\sigma_X = \sqrt{3.6} = 1.90$$

تقول نظرية تشيبيشيف بأن عينة من المعطيات متوسطها μ_X وانحرافها المعياري σ_X تكون نسبة المعطيات الواقعة ضمن المجال $[\mu_X - k\sigma_X , \mu_X + k\sigma_X]$ لا تقل عن $\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

المجال المطلوب هو: $[2.21, 9.79] = (1.90)2 \pm 6$، والنسبة هي: $\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = 1-\frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$.

أي أن عدد المرضى القابلين للشفاء من بين 15 مصاب بمرض نادر في الدم باحتمال مقداره 3/4 يقع في المجال [2.21, 9.79]، وبما أن المعطيات منفصلة، ضمن المجال [2, 10].

3. التوزيع الهندسي geometric distribution:

التوزيع الهندسي هو جزء من التوزيع الاحتمالي المتعلق بتجارب برنولي. وهو عدد التكرارات للتجربة للحصول على نجاح واحد فقط من تلك التجربة. فإذا كان المتغير العشوائي X يشير إلى عدد مرات تكرار التجربة و p يشير إلى احتمال نجاح التجربة و $q = 1 - p$ هو احتمال فشل التجربة وبالتالي فإن التابع الاحتمالي لهذا التوزيع هو: $g(x;\ p) = pq^{x-1},\ x = 1,\ 2,\ \ldots$.

تعريف 3: نقول عن متحول عشوائي X أنه يتبع توزيع هندسي بوسيط p ونكتب باختصار $X \sim g(x;\ p)$ إذا كان له تابع الاحتمال (تابع الكثافة الاحتمالية) التالي:

$$P(X = x) = g(x;\ p) = pq^{x-1},\ x = 1,\ 2,\ \ldots$$

وحيث أيضاً: $0 < p < 1$ و $q = 1 - p$.

يمكن ملاحظة أن:

- $g(x;\ p) = pq^{x-1} \geq 0$
- $\sum_{x=0}^{\infty} g(x;\ p) = \sum_{x=0}^{\infty} pq^{x-1} = p\dfrac{1}{1-q} = 1$

مثال 5: ليكن لدينا قطعة نرد متزنة، ما هو احتمال ظهور الرقم 6 بعد 7 محاولات لإلقاء النرد؟

الحل:

الاحتمال الناجح (ظهور الرقم 6) هو: $p = 1/6$. الاحتمالات الخاطئة (عدم ظهور الرقم 6) هو: $q = 5/6$

ظهور الحدث المطلوب يكون بعد 7 محاولات أي في المحاولة الثامنة وبالتالي فإن $x = 8$:

$$P(X = 8) = g(x;\ p) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^7 = \frac{5^7}{6^8} = 0.04651$$

مثال 6: منتجات آلة ما لديها 3% منها تالفة defective. ما هو احتمال:

a) أن يكون أول منتج تالف يظهر في البند الخامس المفحوص

b) أن يكون أول منتج تالف يظهر في البنود الخمسة الأوائل المفحوصة

الحل:

a) $P(X = 5) = (0.03)(0.97)^{5-1} = 0.02656$

b) $P(X \leq 5) = 1 - P(\text{First 5 non defective}) = 1 - 0.97^5 = 0.14127$

1.3. تابع التوزيع التراكمي cumulative distribution function:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \le x) = P(X=1) + P(X=2) + \ldots + P(X=x) \\ &= p + pq + pq^2 + \ldots + pq^{x-1} \\ &= p(1 + q + q^2 + \ldots + q^{x-1}) \\ &= p\frac{1-q^x}{1-q} = p\frac{1-q^x}{p} = 1 - q^x \end{aligned}$$

2.3. التوقع الرياضي والتشتت expected value and variance:

مبرهنة 3: إذا كان X متحول عشوائي يتبع التوزيع الهندسي بوسيط p أي $X \sim g(x; p)$ ، فإن:

$$\mu_X = E(X) = \frac{1}{p}$$

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

مثال 5: إذا كان احتمال ولادة ذكر في أي ولادة تمرّ بها سيده هو $1/3$ أوجد:

a) تابع التوزيع الاحتمالي لعدد مرات الوضع قبل أن ترزق هذه السيدة بذكر.

b) أوجد متوسط عدد مرات الوضع قبل أن ترزق السيدة بأول ذكر.

c) ما هو احتمال أن تضع ذكرا لأول مرة بعد ولادتين.

d) ما هو احتمال أن تضع السيدة ذكراً لأول مرة بعد ثلاث ولادات على الأكثر.

الحل:

احتمال ولادة ذكر $p = 1/3$ ، ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد مرات الوضع قبل أن ترزق السيدة بأول ذكر.

a) X يتبع توزيعا هندسياً بوسيط $p = 1/3$ ، بالتالي يكون تابع التوزيع الاحتمالي هو:

$$P(X=x) = f_X(x) = (\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^{x-1}; \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

b) متوسط عدد مرات الوضع قبل أن ترزق السيدة بأول ذكر هو μ_X حيث:

$$\mu_X = E(X) = \frac{1}{1/3} = 3$$

c) احتمال أن تضع السيدة ذكراً لأول مرة بعد ولادتين هو $P(X=2)$ حيث:

$$P(X=2) = (\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^{2-1} = \frac{2}{9}$$

d) احتمال أن تضع السيدة ذكراً لأول مرة بعد ثلاث ولادات على الأكثر هو:

$$P(X=2)=(\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^{2-1}=\frac{2}{9}$$

$$P(X\leq 3)=F(3)=1-q^{3}=1-(\frac{2}{3})^{3}=\frac{19}{27}=0.7$$

4. التوزيع فوق الهندسي hypergeometric distribution:

تشبه أنواع تطبيقات التوزيع فوق الهندسي لأنواع تطبيقات توزيع ثنائي الحد، حيث في كلا الحالتين نهتم بحساب احتمال وقوع عدد معين من المشاهدات ضمن فئة محددة. ولكن في حالة التوزيع ثنائي الحد فإن الاستقلالية بين التكرارات مطلوبة، ونتيجة لذلك عندما نطبق هذا التوزيع، على سبيل المثال عند أخذ العينات (أوراق اللعب cards، دفعة من عناصر منتجة)، وجب علينا السحب مع الإعادة with replacement وذلك بعد المشاهدة. أما في حالة التوزيع فوق الهندسي فإن الاستقلالية بين التكرارات غير مطلوبة وتعتمد على السحب من دون إعادة without replacement. ليكن المثال التوضيحي التالي باستخدام أوراق اللعب.

مثال 6: إذا أردنا إيجاد احتمال وجود 3 بطاقات حمراء من بين 5 بطاقات مسحوبة من أوراق اللعب العادية ال 52. من الملاحظ أنه لا يمكن تطبيق توزيع ثنائي الحد إلا إذا تم إعادة كل بطاقة مسحوبة ومن ثم خلط الأوراق قبل عملية السحب التالية. ولأجل حل مسالة أخذ العينات من دون إعادة، دعونا نطرح المسألة بشكل آخر. إذا تم سحب 5 بطاقات عشوائياً، نقوم بحساب احتمال اختيار 3 بطاقات حمراء من بين ال 26 بطاقة متاحة (باللون الأحمر) ومن ثم اختيار بطاقتين سوداوين من بين الـــ 26 بطاقة متاحة (باللون الأسود). بالتأكيد يوجد $C(26,3)$ طريقة مختلفة لاختيار 3 بطاقات حمراء، ومن أجل كل طريقة من هذه الطرق نستطيع اختيار بطاقتين سوداوين بـــ $C(26,2)$ طريقة، بالتالي فإن العدد الكلي من أجل اختيار 3 بطاقات حمراء وبطاقتين سوداوين هو $C(26,3)\mathrm{x}C(26,2)$. وأن عدد الطرق المختلفة لسحب 5 بطاقات من بين 52 بطاقة هو $C(52,5)$. وأخيراً فإن احتمال سحب 5 بطاقات من بين 52 بطاقة من دون إعادة حيث 3 منها حمراء واثنتان سوداوان هو:

$$\frac{C(26,3)\,C(26,2)}{C(52,5)} = 0.325$$

وبشكل عام، نهتم بحساب احتمال اختيار x نجاح من بين k عنصر مصنفة على أنها ناجحة واختيار $n-x$ فشل من بين $N-k$ عنصر مصنفة على أنها فاشلة وذلك عندما نأخذ (نختار) عينة مكونة من n من بين N عنصر. نسمي هذه العملية بالتجربة فوق الهندسية hypergeometric experiment. تمتاز هذه العملية بالخاصتين التاليتين:

نختار عينة عشوائية حجمها n بدون إعادة من مجتمع مكون من N عنصر.

من بين الـــ N عنصر k منها مصنفة ناجحة و $N-k$ مصنفة فاشلة.

تعريف 4: نقول عن متحول عشوائي X أنه يتبع توزيع فوق هندسي، حيث يمثل X عدد حالات النجاح في عينة عشوائية حجمها n تم اختيارها من مجتمع مكون من N عنصر من بينها k عنصر مصنفة على أنها ناجحة و $N-k$ مصنفة على أنها فاشلة، ونكتب باختصار $X \sim h(x;\ N,\ n,\ k)$، إذا كان له تابع الاحتمال (تابع الكثافة الاحتمالية) التالي:

$$P(X=x)=h\left(x;N,n,k\right)=\frac{C(k,x)C(N-k,n-x)}{C(N,n)},$$
$$\max\{0,n-(N-k)\}\le x\le\min\{n,k\}$$

مثال 7: نسحب 6 أوراق من أوراق اللعب ال 52 وبدون إعادة. ما هو احتمال الحصول على ورقتي قلب؟

الحل:

لدينا $k=13,\ N=52,\ n=6$ ، بالتالي:

$$P(2\ hearts)=\frac{C(13,2)C(39,4)}{C(52,6)}=\frac{6415578}{20358520}=0.315$$

مثال 8: يحوي معرض للسيارات 48 سيارة منها 8 سيارات معيبة. تم اختيار عينة عشوائية مكونة من 5 سيارات، أوجد احتمال:

a) العينة كلها سليمة
b) سيارة واحدة معيبة
c) سيارتين على الأقل معيبة

الحل:

ليكن المتحول العشوائي X الذي يمثل عدد السيارات المعيبة في العينة المختارة، $k=8$ عدد السيارات المعيبة في المجتمع و $N=48$ و $n=5$. بالتالي $X\sim h(x;\ 48,\ 5,\ 8)$

$$P(X=x)=h\left(x;48,5,8\right)=\frac{C(8,x)C(40,5-x)}{C(48,5)},\quad x=0,1,2,3,4,5$$

العينة كلها سليمة $P(X=0)$

$$P(X=0)=\frac{C(8,0)C(40,5)}{C(48,5)}=\frac{658008}{1712304}=0.384$$

سيارة واحدة معيبة $P(X=1)$

$$P(X=1)=\frac{C(8,1)C(40,4)}{C(48,5)}=\frac{731120}{1712304}=0.427$$

سيارتين على الأقل معيبة $P(X\ge 2)$

$$P(X\ge 2)=1-[P(X=0)+P(X=1)]=1-(0.384+0.427)=0.189$$

1.4. التوقع الرياضي والتشتت expected value and variance:

مبرهنة 4: إذا كان X متحول عشوائي يتبع التوزيع فوق الهندسي $X\sim h(x;\ N,\ n,\ k)$ ، فإن:

$$\mu_X = E(X) = \frac{nk}{N}$$
$$\sigma_X^2 = Var(X) = \frac{N-n}{N-1}.n.\frac{k}{N}(1-\frac{k}{N})$$

مثال 9: صناديق من المصابيح يحوي كل منها 40 مصباح، يتم رفض الصندوق الواحد إذا كان يحوي 3 مصابيح أو أكثر معيبة. تقوم إجرائية قبول الصندوق على اختيار عينة مكونة من 5 مصابيح بشكل عشوائي ويتم رفض الصندوق إذا وجد فيه مصابيح معيبة. بفرض أن عدد المصابيح المعيبة في الصندوق الواحد هو 3 مصابيح. أوجد:

a) احتمال وجود مصباح واحد فقط معيب في العينة.

b) أوجد التوقع الرياضي والتشتت، ومن ثم استخدم متراجحة تشيبيشيف لتفسير المجال $\mu_X \pm 2\sigma_X$.

الحل:

ليكن المتحول العشوائي X الذي يمثل عدد المصابيح المعيبة في الصندوق المختار، $k=3$ عدد المصابيح المعيبة في الصندوق و $N=40$ و $n=5$، بالتالي $X \sim h(x;\ 40,\ 5,\ 3)$

a) $P(X=1) = \frac{C(3,1)C(37,4)}{C(40,5)} = \frac{198135}{658008} = 0.3011$

b) $\mu_X = E(X) = \frac{5(3)}{40} = \frac{3}{8} = 0.375$

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \frac{35}{39}.5.\frac{3}{40}(1-\frac{3}{40}) = 0.3113$$
$$\sigma_X = \sqrt{0.3113} = 0.558$$

المجال المطلوب هو: $0.375 \pm 2(0.558) = [-0.741,\ 1.491]$، والنسبة هي: $1-\frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$.

نظرية تشيبيشف تقول إن عدد القطع المعيبة في 5 مصابيح تم اختيارها عشوائياً من صندوق مكون من 40 مصباح بينهم 3 مصابيح معيبة لها احتمال على الأقل 3/4 أن تقع ضمن المجال $[-0.741,\ 1.491]$. بمعنى آخر ثلاثة أرباع الحالات المصابيح الخمسة تحوي أقل من مصباحين معيبين.

ملاحظة 1: عندما تكون قيمة n صغيرة مقارنة بقيمة N، عندئذ يمكن استخدام توزيع ثنائي الحد كتقريب للتوزيع فوق الهندسي. في الحقيقة ومن حكم التجربة يمكن اعتبار هذا التقريب جيداً من أجل $n/N \le 0.05$ بالتالي فإن الكمية k/N تلعب دور الوسيط p في ثنائي الحد. ونتيجة لذلك يمكن توزيع اعتبار ثنائي الحد كإصدار مجتمع واسع large–population version من التوزيع فوق الهندسي. بالتالي فإن القيمة المتوقعة والتشتت تنتج من الصيغ التالية:

$$\mu_X = np = \frac{nk}{N}$$
$$\sigma_X^2 = npq = n.\frac{k}{N}(1-\frac{k}{N})$$
بمقارنة هذه الصيغ مع صيغ المبرهنة 4، نجد أن القيمة المتوقعة هي نفسها، لكن التشتت يختلف بعامل التصحيح $\frac{N-n}{N-1}$، والذي يمكن إهماله عندما تكون n صغيرة مقارنة بـــ N.

مثال 10: يصرح مصنع دواليب سيارات أن من بين كل شحنة مكونة من 5000 دولاب يتم إرسالها إلى موزع محلي 1000 منها يحوي على عيب بسيط. إذا اشترى أحدهم من الموزع المحلي 10 دواليب اختارهم عشوائياً، ما هو احتمال أن يكون بينهم دواليب اختارهم عشوائياً، ما هو احتمال أن يكون بينهم 3 دواليب معيبة؟

الحل:
بما أن $N = 5000$ كبيرة بالنسبة لحجم العينة $n = 10$، بالتالي يمكن تقريب الاحتمال المطلوب باستخدام توزيع ثنائي الحد. احتمال الحصول على دولاب معيب هو $p = 0.2$. بالتالي احتمال الحصول على بالتالي احتمال الحصول على 3 دواليب معيبة هو:
$$h(3; 5000, 10, 1000) \approx b(3; 10, 0.2) = C(10,3)(0.2)^3(0.8)^7 = 0.2013$$
قيمة الاحتمال الصحيحة باستخدام التوزيع فوق الهندسي هو: $h(3; 5000, 10, 1000) = 0.2015$.

5. توزيع بواسون Poisson distribution:

في الحياة العملية أحياناً ما نقابل بعض الظواهر التي ينطبق عليها شروط توزيع ذي الحدين ولكن هذه الحوادث تكون نادرة الوقوع وهذا يعنى أن احتمال النجاح يكون صغير جداً يقترب من الصفر وعلية فإنه يمكن القول أن $np = \lambda$، حيث λ هي مقدار ثابت وبذلك يكون احتمال الفشل كبير أي أنه يقترب من الواحد. وبذلك تكون شروط هذا التوزيع كالآتي:

1. أن يكون احتمال النجاح p ثابت وكذلك احتمال الفشل q في كل محاولة.
2. أن يكون احتمال النجاح صغيراً ويقترب من الصفر واحتمال الفشل يقترب من الواحد الصحيح.
3. أن تكون عدد المحاولات كبيراً جداً حيث أن $np = \lambda$ مقدار ثابت.

ولتوزيع بواسون تطبيقات واسعة فهو يقدم بشكل عام نموذجاً للمعلومات الإحصائية التي تأخذ شكل تعداد لحوادث نادرة الوقوع حيث يمثل المتحول العشوائي X عدد الحوادث النادرة الملحوظة في وحدة قياس معينة زمناً كانت أم مساحة أم حجماً بينما يمثل λ معدل أو متوسط عدد مرات ظهور تلك الأحداث في واحدة القياس. توضح الأمثلة التالية الحالات التي نطبق فيها عادة توزيع بواسون:

- عدد المكالمات الهاتفية التي ترد إلى مقسم خلال فترة زمنية معينة.
- عدد الجسيمات الصادرة في الثانية عن مادة مشعة.
- عدد الأخطاء المطبعية في صفحة من صفحات كتاب معين.
- عدد حوادث المرور في مدينة كبيرة خلال يوم.
- عدد البكتريا الموجودة في ميليمتر مكعب واحد من وعاء يحتوي على سائل معين.

تعريف 5: نقول عن متحول عشوائي X أنه يتبع توزيع بواسون بوسيط λ ونكتب باختصار $X \sim p(x;\lambda)$ إذا كان له تابع الاحتمال (تابع الكثافة الاحتمالية) التالي:

$$P(X=x) = p(x;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}; \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

وحيث أن e هو العدد النيبري ويساوي .... $e = 2.71828$

يمكن ملاحظة أن:

- $p(x;\lambda) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} > 0$
- $\displaystyle\sum_{x=0}^{\infty} p(x;\lambda) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$

مثال 11: إذا كان متوسط عدد مستخدمي الصراف الآلي في أحد البنوك هو 5 اشخاص كل نصف ساعة. احسب:

a) الاحتمالات التالية لأعداد الواصلين كل نصف ساعة بأن يكون:

- 10 أشخاص
- يقل عن 3 أشخاص
- يتراوح العدد بين 4 و 8 أشخاص

b) احسب نفس الاحتمالات السابقة من أجل معدل الوصول كل ربع ساعة

c) احسب نفس الاحتمالات السابقة من أجل معدل الوصول كل ساعة

الحل:

a) معدل الوصول كل نصف ساعة

$$\lambda = 5$$

$$P(X=10) = \frac{e^{-5}5^{10}}{10!} = 0.01813$$

$$P(X<3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= \frac{e^{-5}5^{0}}{0!} + \frac{e^{-5}5^{1}}{1!} + \frac{e^{-5}5^{2}}{2!} = 0.12465$$

$$P(X>1) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)]$$

$$= 1 - (\frac{e^{-5}5^{0}}{0!} + \frac{e^{-5}5^{1}}{1!}) = 0.95957$$

$$P(4 \le X \le 8) = P(X=4) + P(X=5) + \ldots + P(X=8) = 0.66688$$

b) معدل الوصول كل ربع ساعة: نجري نفس العمليات الحسابية السابقة ولكن مع قيمة للوسيط λ مساوية إلى $\lambda = 5(1/2) = 5/2 = 2.5$.

c) معدل الوصول كل ساعة: نجري نفس العمليات الحسابية السابقة ولكن مع قيمة للوسيط λ مساوية إلى $\lambda = 5(2) = 10\lambda = 5(2) = 10$.

مثال 12: إذا كان متوسط وصول السفن إلى ميناء اللاذقية سفينتين في اليوم, أوجد احتمال وصول 3 سفن إلى هذا الميناء في أحد الأيام.

الحل:

$$\lambda = 2$$

$$P(X=3) = \frac{e^{-2}2^{3}}{3!} = 0.18045$$

1.5. التوقع الرياضي والتشتت expected value and variance:

مبرهنة 5: إذا كان X متحول عشوائي يتبع توزيع بواسون $X \sim p(x;\lambda)$، فإن:

$$\mu_X = E(X) = \lambda$$

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \lambda$$

مثال 13: إذا كان عدد الأخطاء المطبعية في كتاب يتكون من 600 صفحة هو 50 خطأ فإذا كانت الأخطاء تتوزع توزيعاً عشوائياً. فما احتمال إذا اختيرت 10 صفحات عشوائيا ألا تحتوي على أخطاء.

الحل:

بفرض أن X يمثل عدد الأخطاء في كل صفحة وأن عدد المحاولات (الصفحات) تمثل سلسلة من محاولات برنولي عددها $n = 10$. نسبة الخطأ (النجاح) هي: $p = 50/600 = 0.083$ ، وعليه فإن:

$$\lambda = np = 10(0.083) = 0.83$$

وبالتالي فإن لـــ X توزيع بواسون، وأن:

$$P(X = 0) = \frac{e^{-0.83} 0.83^0}{0!} = 0.436$$

مبرهنة 6: ليكن لدينا X متحول عشوائي يتبع توزيع ثنائي الحد $b(x;\, n,\, p)$. عندما تسعى n إلى اللانهاية ($n \to \infty$) وتسعى p إلى الصفر ($p \to 0$)، وتسعى np إلى قيمة محدودة μ عندما تسعى n إلى اللانهاية ($np \underset{n\to\infty}{\to} \mu$)، فإن: $b(x;\, n,\, p) \underset{n\to\infty}{\to} p(x; \mu)$.

قاعدة التقريب هي: $n > 30$ و $p \le 0.05$.

مثال 14: احتمال حدوث حادث في أحد الأيام هو 0.005 والحوادث مستقلة عن بعضها البعض. ما هو احتمال وجود حادث واحد في بوم ما خلال فترة 400 يوم؟

الحل:

ليكن X المتحول العشوائي لتوزيع ثنائي الحد مع $n = 400$ و $p = 0.005$ ، بالتالي $np = 2$. باستخدام تقريب بواسون:

$$P(X = 1) = \frac{e^{-2} 2^1}{1!} = 0.270671$$

باستخدام ثنائي حد نيوتن:

$$P(X = 1) = C(400, 1)(0.005)^1 (0.995)^{399} = 0.270669$$

تمارين

1. احتمال أن يصيب رامٍ الهدف 0.8 فإذا صوب الرامي نحو الهدف 5 طلقات فما هو احتمال أن:
   a) يصيب الهدف بثلاث طلقات
   b) يصيب الهدف بطلقة واحدة على الأقل

2. كم مرة يجب إلقاء حجر النرد لكي يكون احتمال الحصول على الرقم 6 أكبر من 0.75؟

3. إذا كررنا تجربة رمي زوج النرد 4 مرات متتالية فما هو احتمال أن نحصل على المجموع 5؟
   a) مرة واحدة فقط
   b) مرة واحدة على الأكثر
   c) مرتين على الأقل

4. متوسط عدد المكالمات التي يتلقاها مقسم ما بين الساعة العاشرة والساعة الحادية عشرة هو 1.5 مكالمة في الدقيقة. المطلوب حساب احتمال أن يكون لدينا بين الساعة 9h25 و 9h26:
   a) عدم وجود أي مكالمة هاتفية
   b) مكالمة هاتفية واحدة
   c) مكالمتان هاتفيتان
   d) ثلاث مكالمات هاتفية على الأقل

5. كتاب مؤلف من 500 صفحة ويحتوي على 800 خطأ مطبعي موزعة بشكل عشوائي على صفحات الكتاب فإذا فتحنا الكتاب على صفحة ما فما هو احتمال:
   a) أن يكون في الصفحة ثلاثة أخطاء مطبعية.
   b) أن تخلو الصفحة من الأخطاء المطبعية.
   c) أن يكون في الصفحة خطأ مطبعي واحد على الأقل.

6. يحتوي صندوق على 100 عنصر حيث 10% منها معيب. أوجد احتمال ألا يكون أكثر من عنصرين معيبين في عينة عشوائية حجمها 10.
   a) حالة سحب مع إعادة.
   b) حالة سحب من دون إعادة.

العلامة العظمى: 100 **علامة النجاح: 50** **المدة: ساعة واحدة**

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة **(80) درجة**

1. X متحول عشوائي يتبع توزيع ثنائي الحد بوسيطين n, p. التوقع الرياضي والانحراف المعياري هما:

a) $\mu_X = np; \quad \sigma_X = \sqrt{npq}$

b) $\mu_X = np; \quad \sigma_X = npq$

c) $\mu_X = npq; \quad \sigma_X = np$

d) $\mu_X = npq; \quad \sigma_X = \sqrt{np}$

2. X متحول عشوائي يتبع توزيع برنولي. التوقع الرياضي والتشتت هما

a) $\mu_X = p; \quad \sigma_X^2 = pq$

b) $\mu_X = pq; \quad \sigma_X^2 = p$

c) $\mu_X = p; \quad \sigma_X^2 = \sqrt{pq}$

d) $\mu_X = pq; \quad \sigma_X^2 = \sqrt{p}$

قطعة نقود غير متزنة بحيث $P(H) = 1/3$ و $P(T) = 2/3$. رمينا هذه القطعة 3 مرات، X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد مرات ظهور الكتابة H في الرميات الثلاث (معطيات الأسئلة6 ,5 ,4 ,3).

3. احتمال عدم الحصول على كتابة هو:

a) 0

b) 1/27

c) 8/27

d) 1

4. احتمال الحصول على كتابة واحدة على الأقل هو:

a) 0

b) 1

c) 26/27

d) 19/27

5. $E(X^2)$ هو:

a) $2/3$

b) $5/3$

c) 1

d) $3/5$

6. احتمال الحصول على الكتابة أول مرة بعد محاولتين (في المحاولة الثالثة) هو:

a) $4/27$

b) $1/27$

c) $4/9$

d) $1/9$

متوسط عدد المكالمات التي يتلقاها مقسم ما بين الساعة التاسعة والساعة العاشرة هو 2 مكالمة في الدقيقة.
المطلوب حساب احتمال أن يكون لدينا بين الساعة 9h15 و 9h16 (معطيات الأسئلة 9, 8 ,7).

7. عدم وجود أي مكالمة هاتفية هو:

a) 0.125

b) 0.135

c) 0.145

d) 0.155

8. مكالمة هاتفية واحدة على الأقل هو:

a) 0.875

b) 0.855

c) 0.845

d) 0.865

9. X متحول عشوائي يمثل عدد المكالمات الهاتفية في الدقيقة. الانحراف المعياري σ_X هو:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $1/2$

c) $\sqrt{2}$

d) 2

10. معدل (متوسط) الحوادث المرورية في مدينة صغيرة 3 حوادث في الأسبوع. احتمال وقوع حادث واحد على الأقل في اسبوعين هو:

a) 0.1991

b) 0.9975

c) 0.9502

d) 0.0174

11. ليكن لدينا جدول التوزيع الاحتمالي:

$$P(X=x)=C(5,\ x)(0.7)^{x}(0.3)^{5-x},\ x=0,\ 1,\ \ldots,\ 5$$

التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X:

a) 3.5

b) 35

c) 1.5

d) 0.21

12. معطيات عملية السحب sampling بدون إعادة من مجتمع محدود (عدد عناصره منته) تتبع:

a) توزيع ثنائي الحد

b) توزيع فوق الهندسي

c) توزيع بواسون

d) التوزيع الهندسي

13. متحول عشوائي X يمثل عدد الأخطاء المطبعية في صفحة من صفحات كتاب معين يتبع:

a) توزيع ثنائي الحد

b) توزيع فوق الهندسي

c) توزيع بواسون

d) التوزيع الهندسي

14. احتمال إصابة شخص بأحد الأمراض هو 0.001. عينة عشوائية من 1000 شخص. احتمال إصابة 3 أشخاص بهذا المرض هو:

a) 0.06131

b) 0.61310

c) 0.00613

d) لا شيء ما سبق

15. التجربة الثنائية هي تجربة تتصف بالخواص التالية:

a) تتألف من عدد من التكرارات المتماثلة تماماً

b) ينتج عن كل تكرار إحدى نتيجتين نجاح أو فشل

c) احتمال النجاح يبقى ثابتاً من تكرار إلى آخر

d) كل ما سبق

16. عدد المرات التي يجب إلقاء قطعة نقود متزنة لكي يكون احتمال الحصول على الكتابة H أكبر من 0.9:

a) 4

b) 3

c) 5

d) 2

السؤال الثاني: **(20) درجة**

نرمي قطعة نقود متزنة خمس مرات متتالية وليكن X المتحول العشوائي الدال على ظهور الكتابة H والمطلوب:

a) عين مجموعة قيم المتحول X.

b) أوجد جدول التوزيع الاحتمالي للمتحول X.

c) أوجد الاحتمال $P(1 \le X \le 3)$.

d) أوجد التوقع الرياضي والتشتت للمتحول X.

الحل:

a) $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

b) $P(X = x) = C(5, x)(0.5)^x (0.5)^{5-x}, \ x = 0, 1, \ldots, 5$

$$P(X = x) = C(5, x)\left(\frac{1}{2}\right)^5, \ x = 0, 1, \ldots, 5$$

$$P(X = x) = \frac{C(5, x)}{32}, \ x = 0, 1, \ldots, 5$$

x	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

c) $P(1 \le X \le 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

$$= \frac{5}{32} + \frac{10}{32} + \frac{10}{32} = \frac{25}{32}$$

d) $\mu_X = np = 5(1/2) = 5/2$

$$\sigma_X^2 = npq = 5(1/2)(1/2) = 5/4$$

توجيه في حال الخطأ: الفقرة 2

السؤال الأول	الإجابة الصحيحة	توجيه في حال الخطأ
1	a	الفقرة 2
2	a	الفقرة 1
3	c	الفقرة 2
4	d	الفقرة 2
5	b	الفقرة 2
6	a	الفقرة 3
7	b	الفقرة 5
8	d	الفقرة 5
9	c	الفقرة 5
10	b	الفقرة 5
11	a	الفقرة 2
12	b	الفقرة 4
13	c	الفقرة 5
14	a	الفقرة 2 و5
15	d	الفقرة 1
16	a	الفقرة 2

الفصل الخامس: التوزيعات الاحتمالية المستمرة

الكلمات المفتاحية:

التوزيع المنتظم، التوزيع الطبيعي، التوزيع الطبيعي القياسي، تابع الخطأ، توزيع غاما، التوزيع الأسي، توزيع مربع كاي، التوزيع الطبيعي اللوغاريتمي، توزيع ويبل، توزيع رايلي، معدل الفشل، توزيع رايس.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على بعض المبادئ والتعاريف الأساسية المتعلقة بالتوزيعات المستمرة والتي من ضمنها (التوزيع المنتظم، التوزيع الطبيعي، توزيع غاما، التوزيع الأسي، توزيع مربع كاي، التوزيع الطبيعي اللوغاريتمي، توزيع ويبل، توزيع رايلي، وتوزيع رايس) بالإضافة إلى مجالات استخدام كل منها. كما يهدف إلى معرفة كيفية استخراج المتوسط والتشتت لكل من التوزيعات آنفة الذكر.

الأهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

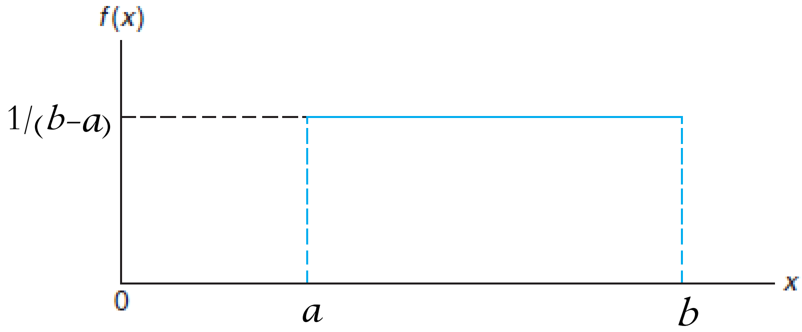
- التوزيع المنتظم
- التوزيع الطبيعي
- توزيع غاما والتوزيع الأسي
- توزيع مربع كاي
- التوزيع الطبيعي اللوغاريتمي
- التوزيع ويبل
- توزيع رايس

1. التوزيع المنتظم uniform distribution:

يعتبر التوزيع المنتظم من أبسط التوزيعات المستمرة في الاحصاء، حيث الاحتمال فيه منتظم (متساوٍ) على مجال مغلق، لنسميه $[a,b]$،

تعريف 1: نقول عن متحول عشوائي مستمر X أنه يتبع توزيع منتظم على المجال $[a,b]$، إذا كان له تابع الاحتمال (سنرمز لتابع الاحتمال $f(x)$ بدلاً من $f_X(x)$ لسهولة الكتابة):

$$f(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0 & otherwise\end{cases}$$



يأخذ تابع الكثافة الاحتمالي شكل مستطيل قاعدته $b-a$ وارتفاع ثابت يساوي $1/(b-a)$. بالتالي فإنه من الواضح رؤية أن مساحة هذا المستطيل تساوي الواحد.

مثال 1: بفرض أن طول فترة حجز صالة مؤتمرات مقدراً بالساعات يخضع لتوزيع منتظم على المجال $[0,4]$

a) أوجد تابع الكثافة الاحتمالي.

b) ما هو احتمال أن يدوم مؤتمر ما مؤتمر ما 3 ساعات على الأقل؟

الحل:

a) تابع الكثافة الاحتمالي هو التالي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & 0\le x\le 4\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

b) $P(X\ge 3)$

$$P(X\ge 3)=\int_3^4 \frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}$$

1.1. التوقع الرياضي والتشتت expected value and variance:

مبرهنة 1: إذا كان X متحول عشوائي يتبع توزيع منتظم على المجال $[a,b]$، فإن:

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \text{ و } \mu = E(X) = \frac{a+b}{2}$$

1.2. تابع التوزيع التراكمي cumulative distribution function

تابع التوزيع التراكمي لمتحول عشوائي يتبع توزيع منتظم على المجال $[a,b]$، هو التابع التالي:

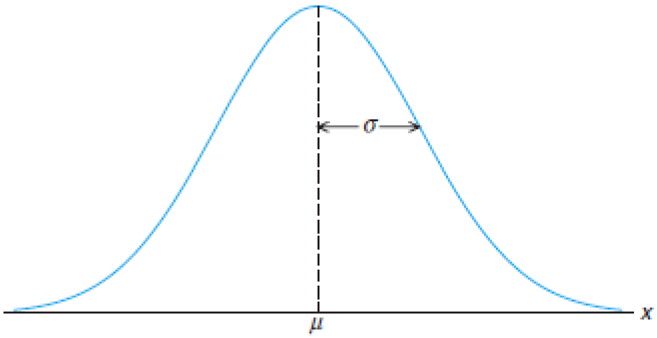
$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a}(x-a) & x \in [a,b] \\ 0 & x \ge b \end{cases}$$

2. التوزيع الطبيعي normal distribution:

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات المستمرة وذلك لأن كثير من الظواهر الطبيعية تخضع لهذا التوزيع. كما أن كثير من الظواهر الطبيعية التي لا تخضع لهذا التوزيع يمكن أن يقرب توزيعها بالتوزيع الطبيعي.

تعريف 2: نقول عن متحول عشوائي مستمر X أنه يتبع توزيع طبيعي بمتوسط μ وتشتت σ^2 ونكتب باختصار $X \sim N(x;\mu,\sigma)$ إذا كان له تابع الاحتمال (تابع الكثافة الاحتمالية) التالي:

$$f(x;\mu,\sigma)=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\right. ,\quad -\infty<x<\infty$$



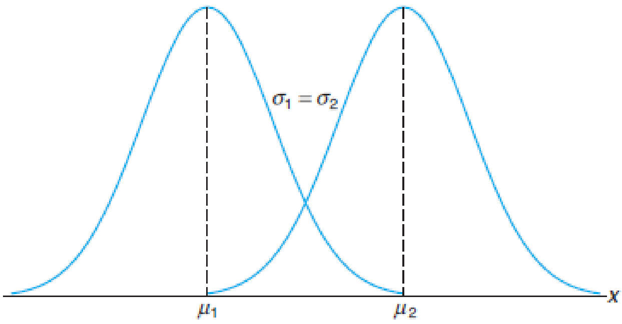
ملاحظات 1:

- منحني تابع الكثافة الاحتمالي للتوزيع الطبيعي $N(x;\mu,\sigma)$ متناظر حول المتوسط μ.
- المساحة الكلية تحت منحنى تابع الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي $f(x;\mu,\sigma)$ تساوي الواحد.

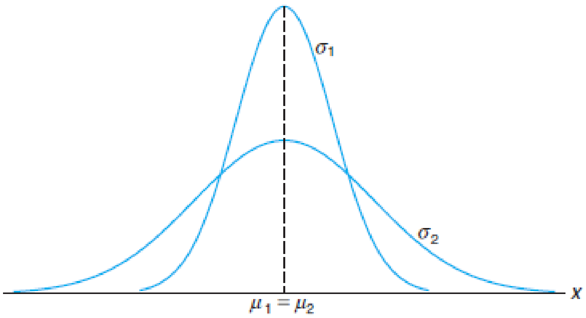
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\mu,\sigma)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\,dx=1$$

- في التوزيع الطبيعي لدينا المتوسط = الوسيط = المنوال = μ.
- يعتمد تابع الكثافة الاحتمالي للتوزيع الطبيعي $N(x;\mu,\sigma)$ على وسيطين هما المتوسط μ (تحدد موضع التوزيع) والتشتت σ^2 (تحدد شكل التوزيع)، لذلك نكتب $N(x;\mu,\sigma)$.

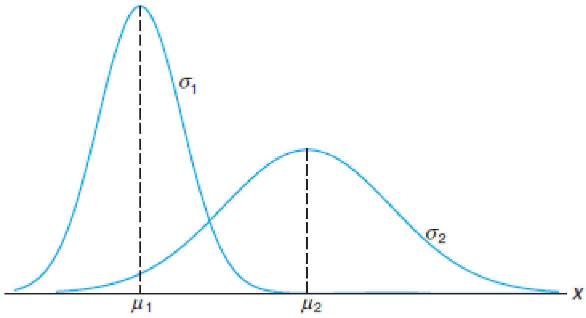
تبين الأشكال التالية تأثير الوسطاء μ و σ على شكل تابع الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي بفرض أنه لدينا توزيعين طبيعيين $N(x;\mu_1,\sigma_1)$ و $N(x;\mu_2,\sigma_2)$.



$\mu_1 < \mu_2$ and $\sigma_1 = \sigma_2$



$\mu_1 = \mu_2$ and $\sigma_1 < \sigma_2$



$\mu_1 < \mu_2$ and $\sigma_1 < \sigma_2$

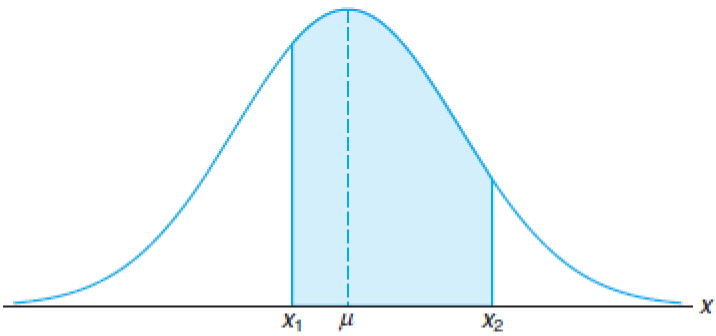
1.2. التوقع الرياضي والتشتت expected value and variance:

مبرهنة 2: ليكن X متحول عشوائي يتبع توزيع طبيعي بوسيطين μ و σ أي $X \sim N(x;\mu,\sigma)$ ، فإن المتوسط هو μ والتشتت هو σ^2 ، بالتالي الانحراف المعياري هو σ. نسمي أحياناً هذا التوزيع بالغوصي.

2.2.المساحة تحت المنحني الطبيعي areas under the normal curve:

يتم بناء أي تابع كثافة احتمالي مستمر بحيث أن المساحة تحت منحني هذا التابع المحددة بين المستقيمين $x=x_1$ و $x=x_2$ تساوي إلى احتمال أن تكون قيمة المتحول العشوائي X محصورة بين القيمتين x_1 و x_2.

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} n(x;\mu,\sigma)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\,dx$$



وهو تكامل يصعب حسابه بالطرق العادية ويلزم حسابه في كل مرة نريد حساب احتمال معين (لانهاية من توابع الكثافة الاحتمالية) ولذلك وتجنباً لتكرار المجهود يتم عمل تحويل المنحنى المتناظر حول $X=\mu$ إلى منحنى متناظر حول $Z=0$.

تتم عملية التحويل هذه باستخدام العلاقة التالية:

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

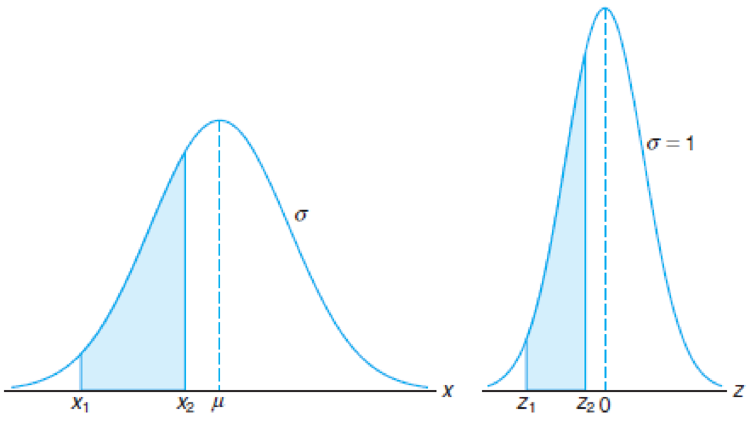
بالتالي إذا كانت قيمة المتحول العشوائي X محصورة بين القيمتين x_1 و x_2، فإن قيمة المتحول العشوائي الناتج Z ستكون محصورة بين القيمتين الموافقتين $z_1=(x_1-\mu)/\sigma$ و $z_2=(x_2-\mu)/\sigma$، بالتالي يمكننا كتابة ما يلي:

$$P(x_1<X<x_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

$$=\int_{z_1}^{z_2} N(z;0,1)\,dz=P(z_1<Z<z_2)$$

حيث Z متحول عشوائي مستمر يتبع توزيع طبيعي بمتوسط $\mu=0$ وتشتت $\sigma^2=1$ ونكتب باختصار $Z\sim N(z;0,1)$.

مبرهنة 3: نسمي التوزيع الطبيعي العشوائي الذي متوسطه $\mu=0$ وتشتته $\sigma^2=1$ بالتوزيع الطبيعي القياسي standard normal distribution.



يبين الشكل السابق تابعي التوزيع الأصلي والقياسي حيث مساحة التابع الأصلي المحصورة بين القيمتين x_1 و x_2، تساوي مساحة التابع القياسي المحصورة بين القيمتين z_1 و z_2.

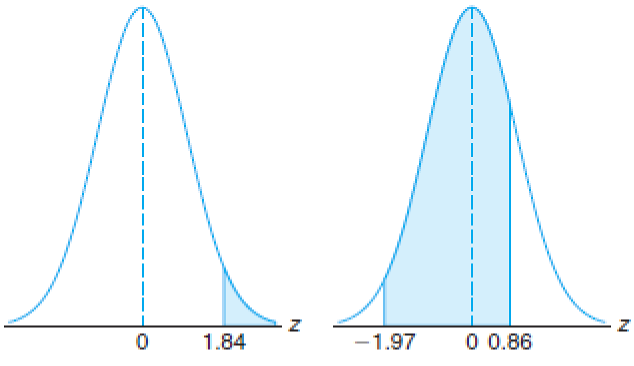
هناك جدول خاص يسمى جدول التوزيع الطبيعي القياسي لإيجاد احتمالات المتغير العشوائي الطبيعي المعياري $Z\sim N(z;0,1)$ من النوع $P(Z<z)$، من أجل $z\in R$. وهذا الجدول مبين في نهاية الفصل.

ISSN: 2617-989X

مثال 2: ليكن لدينا التوزيع الاحتمالي الطبيعي القياسي، أوجد المساحة:

a) إلى اليمين من $z = 1.84$

b) بين القيمتين $z = -1.97$ و $z = 0.86$



(a) (b)

الحل:

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9756	0.9761	0.9761	0.9767

a) يعطينا الجدول المساحة التي هي عن يسار عدد ما ($P(Z < z)$)، بالتالي فالمساحة المطلوبة هي:

$$P(Z > 1.84) = 1 - P(Z < 1.84) = 1 - 0.9671 = 0.0329$$

نحصل على القيمة $P(Z < 1.84) = 0.9671$ من جدول التوزيع الطبيعي القياسي بقراءة تقاطع السطر الذي يوافق القيمة 1.8 ($Z = 1.8$) مع العمود .04، وبالتالي نكون قد حصلنا على المساحة التي هي عن يسار القيمة $Z = 1.84$.

b) يعطينا لجدول المساحة التي هي عن يسار عدد ما ($P(Z < z)$)، بالتالي فالمساحة المطلوبة هي:

$$P(-1.97 < Z < 0.86) = P(Z < 0.86) - P(Z < -1.97)$$

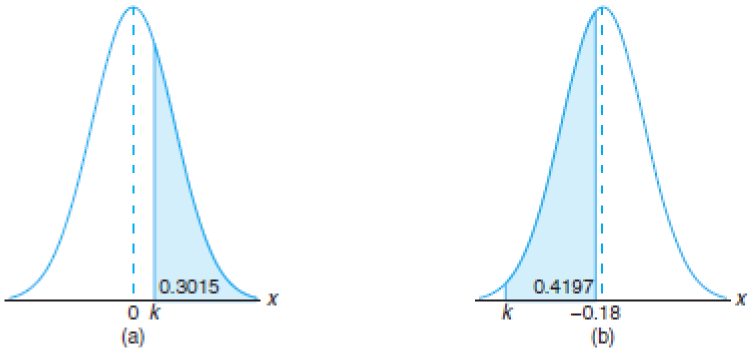
$$= 0.8051 - 0.0244 = 0.7807$$

مثال 3: ليكن لدينا التوزيع الاحتمالي الطبيعي القياسي، أوجد قيمة k:

a) $P(Z > k) = 0.3015$

b) $P(k < Z < -0.18) = 0.4197$

ISSN: 2617-989X



الحل:

a) قيمة k التي تعطينا المساحة 0.3015 عن يمينها هي نفس القيمة k التي تعطينا المساحة 0.6985 (=1 − 0.3015) عن يمينها. من الجدول نحصل على $k = 0.52$.

b) من الجدول نحصل على $P(Z < -0.18) = 0.4286$ ، ولدينا:

$$P(k < Z < -0.18) = P(Z < -0.18) - P(Z < k) = 0.4197$$

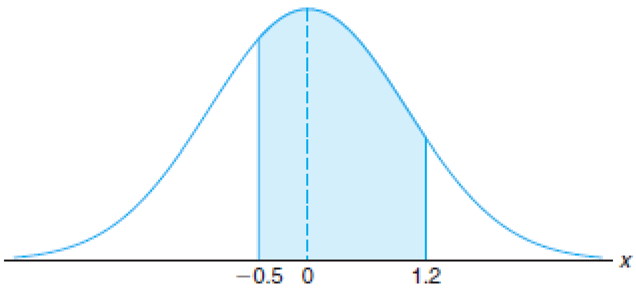
بالتالي فإن: $(Z < k) = 0.4286 - 0.4197 = 0.0089$ ، ومن الجدول نحصل على $k = -2.37$

مثال 4: ليكن لدينا المتحول العشوائي X الذي يتبع التوزيع الاحتمالي الطبيعي بمتوسط $\mu = 50$ وانحراف معياري $\sigma = 10$ ، أوجد احتمال أن يكون المتحول X بين القيمتين 45 و 62.

الحل:

علينا أولاً التحويل إلى التوزيع الطبيعي القياسي:

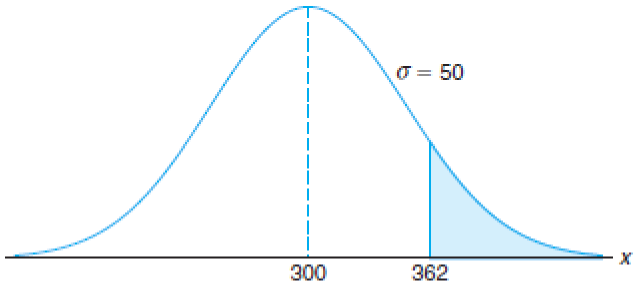
$$z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{62 - 50}{10} = 1.2 \text{ و } z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{45 - 50}{10} = -0.5$$



بالتالي:

$$P(45 < X < 62) = P(-0.5 < Z < 1.2)$$
$$= P(Z < 1.2) - P(Z < -0.5) = 0.8849 - 0.3085 = 0.5764$$

مثال 5: ليكن لدينا المتحول العشوائي X الذي يتبع التوزيع الاحتمالي الطبيعي بمتوسط $\mu = 300$ وانحراف معياري $\sigma = 50$ ، أوجد احتمال أن يكون المتحول X أكبر من 362.



الحل:

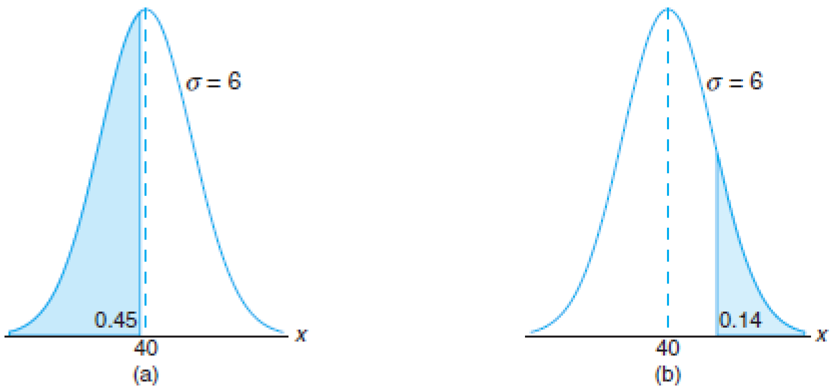
$$z=\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{362-300}{50}=1.24$$
$$P(X>362)=P(Z>1.24)=1-P(Z<1.24)=1-0.8925=0.1075$$

ملاحظة 1: يتم الرجوع من المتحول العشوائي القياسي $z=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$ إلى المتحول العشوائي الأصلي باستخدام العلاقة التالية: $x=\sigma z+\mu$.

مثال 6: ليكن لدينا المتحول العشوائي X الذي يتبع التوزيع الاحتمالي الطبيعي بمتوسط $\mu=40$ وانحراف معياري $\sigma=6$، أوجد قيمة x التي لها:

a) 45% من المساحة عن يسارها

b) 14% من المساحة عن يمينها



الحل:

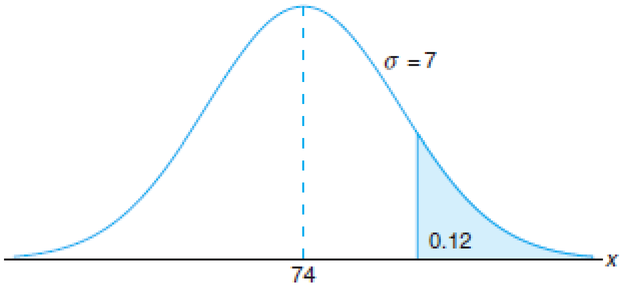
a) نبحث أولاً عن قيمة Z التي تعطي مساحة عن يسارها مقدارها 0.45، من الجداول نحصل على $P(Z<-0.13)=0.45$. بالتالي $z=-0.13$، ومن ثم بالرجوع إلى القيمة الأصلية ل x نحصل على:

$$x=\sigma z+\mu=6(-0.13)+40=39.22$$

b) نبحث أولاً عن قيمة z التي تعطي مساحة عن يمينها 0.14، أي عن يسارها 0.86 = 0.14 − 1.
من الجداول نحصل على $P(Z<1.08)=0.86$. بالتالي $z=1.08$ ، ومن ثم بالرجوع إلى القية الأصلية لـ x نحصل على:

$$x=\sigma z+\mu=6(1.08)+40=46.48$$

مثال 7: متوسط درجات امتحان تخضع لتوزيع طبيعي هي $\mu=74$ وانحراف معياري هو $\sigma=7$. إذا كان 12% من الصف أُعطوا التقييم "A". ما هو أدنى درجة لـ A ؟



الحل:

$$P(Z>z)=0.12$$
$$P(Z<z)=1-0.12=0.88$$

باستخدام الجداول نحصل على $z=1.18$. بالتالي $x=\sigma z+\mu=7(1.18)+74=82.26$. أي أن أدنى درجة للتقييم A هي 82.

3.2. تابع التوزيع التراكمي cumulative distribution function:

تابع التوزيع التراكمي للتوزيع الطبيعي القياسي، والذي نرمز له بالرمز $\Phi(x)$ ، هو تابع التكامل التالي:

$$\Phi(x)=P(Z\le z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$

حيث لا يمكن كتابته باستخدام التوابع المعروفة (أسية، كثيرات حدود، مثلثية، ...)، وهو تابع متزايد على كافة الأعداد الحقيقية ويأخذ القيمة صفر عند $-\infty$ ويأخذ القيمة واحد عند ∞، وأخيراً يأخذ القيمة 0.5 عند الصفر ($\Phi(0)=0.5$).

في الإحصاء، يرتبط هذا التابع $\Phi(x)$ بما يسمى تابع الخطأ $erf\,(x)$ المعرف على أنه احتمال أن يقع متحول عشوائي، يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط 0 وتشتت 1/2، ضمن المجال $[-x,x]$ أي:

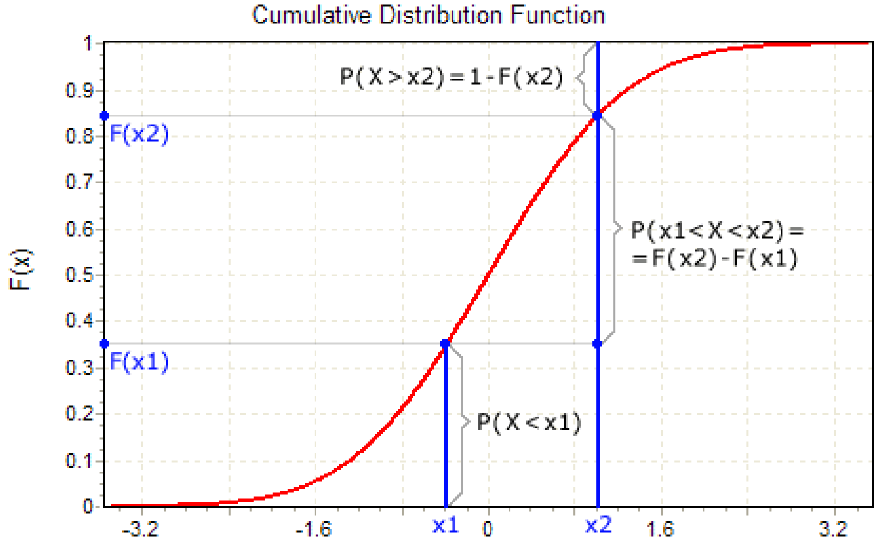
$$erf\,(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-x}^{x}e^{-t^2}\,dt$$

والعلاقة التي تربط التابعين $\Phi(x)$ و $erf\,(x)$ هي التالية:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\left[1 + erf\,(\frac{x}{\sqrt{2}})\right]$$

أما تابع التوزيع التراكمي للتوزيع الطبيعي (بمتوسط μ وانحراف معياري σ) $F(x)$، فهو التابع التالي:

$$F(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) = \frac{1}{2}\left[1 + erf\,(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}})\right]$$



4.2. التوزيع الطبيعي كتقريب لثنائي الحد normal approximation to the binomial:

يعتبر التوزيع الطبيعي تقريباً جيداً للتوزيع ثنائي الحد عندما يكون عدد عناصر العينة n كبيراً.

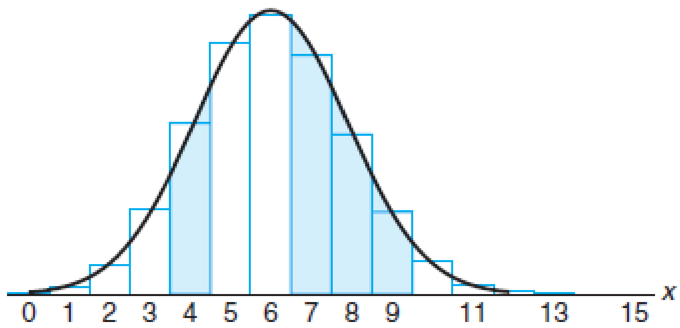
مبرهنة 4: ليكن المتحول المتقطع ثنائي الحد العشوائي X بمتوسط $\mu = np$ وبتشتت $\sigma^2 = npq$، عندها يكون توزيع المتحول المستمر $Z = \dfrac{X - np}{\sqrt{npq}}$ يتبع التوزع الطبيعي القياسي $N(z; 0, 1)$ عندما تسعى n إلى اللانهاية.

يمكن اعتبار التوزيع الطبيعي كتقريب جيد ليس فقط من أجل قيمة n كبيرة فقط و p ليست قريبة من الصفر أو الواحد، لكنها تمثل تقريباً جيداً أيضاً عندما تكون قيمة n صغيرة و p قريبة من $1/2$.

مثال 8: ليكن التوزيع ثنائي الحد $b(x; 15, 0.4)$، حيث:

$$\mu = np = 15(0.4) = 6,\;\; \sigma^2 = npq = 15(0.4)(0.6) = 3.6,\;\; \sigma = 1.897$$

ISSN: 2617-989X



لنحسب على سبيل المثال:

$$P(X=4)=b(4;15,0.4)=C(15,4)(0.4)^4(0.6)^{11}=0.1268$$

القيمة الصحيحة باستخدام ثنائي الحد هي مساحة المستطيل الذي مركز قاعدته هو 4 (المجال [3.5, 4.5]). والتي تساوي تقريباً المساحة المظللة تحت المنحني الطبيعي بين $x_1=3.5$ و $x_1=4.5$. من أجل حساب هذه المساحة نحول إلى قيم z:

$$z_2=\frac{4.5-6}{1.897}=-0.79 \text{ و } z_1=\frac{3.5-6}{1.897}=-1.32$$

$$P(-1.32<Z<-0.79)=P(Z<-0.79)-P(Z<-1.32)=0.1214$$

وهذه القيمة ليست بعيدة عن القيمة الحقيقية 0.1268 المسحوبة من ثنائي الحد.

أما إذا أردنا حساب $P(7\le X\le 9)$: القيمة الصحيحة باستخدام ثنائي الحد تساوي إلى:

$$P(7\le X\le 9)=\sum_{x=7}^{9}C(15)(0.4)^x(0.6)^{15-x}=0.3564$$

وباستخدام التقريب الطبيعي:

$$z_2=\frac{9.5-6}{1.897}=1.85 \text{ و } z_1=\frac{6.5-6}{1.897}=0.26$$

$$P(0.26<Z<1.85)=P(Z<1.85)-P(Z<0.26)=0.3652$$

مرة أخرى نحصل على قيمة قريبة من القيمة الصحيحة (0.3564).

مما سبق نستطيع القول أنه إذا كان لدينا متحول عشوائي X يخضع لتوزيع ثنائي الحد وسيطاه n و p. من أجل القيم الكبيرة لـــ n، X يقرب بشكل جيد بتوزيع طبيعي بمتوسط $\mu=np$ وبتشتت $\sigma^2=npq$، ويكون:

$$P(X\le x)=\sum_{k=0}^{x}b(k;n,p)\approx P(Z\le\frac{x+0.5-np}{\sqrt{npq}})$$

ويمكن اعتبار أن هذا التقريب جيداً إذا كان كل من np و nq أكبر أو يساوي القيمة 5.

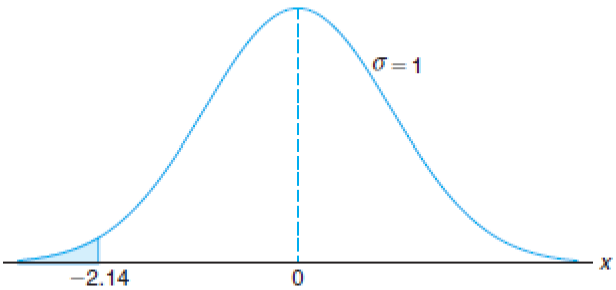
مثال 9: احتمال أن يتعافى مريض من مرض نادر في الدم هو 0.4. إذا كان 100 شخص مصابون بهذا المرض، ما هو احتمال أن يبقى أقل من 30 شخص على قيد الحياة؟

الحل:

$$\mu = np = 100(0.4) = 40$$
$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100(0.4)(0.6)} = 4.889$$

للحصول على الاحتمال المطلوب علينا حساب المساحة إلى اليسار من القيمة $x = 29.5$ ، والموافقة للقيمة القياسية:

$$. \; z = \frac{29.5 - 40}{4.899} = -2.814$$



وبالتالي فإن احتمال أن يبقى أقل من 30 شخص من أصل 100 على قيد الحياة يعطى بالمساحة المظللة في الشكل السابق:

$$P(X < 30) \approx P(Z \le -2.14) = 0.0162$$

5.2. تركيب خطي من المتحولات العشوائية المستقلة linear combinations of i.r.v.:

ليكن لدينا المتحولان العشوائيان المستقلان X, Y والعددان الحقيقيان a, b ، بالتالي:

$$E(aX \pm bY) = E(aX) \pm \; E(bY)$$
$$Var(aX \pm bY) = a^2 E(X) + \; b^2 Var(Y)$$

مبرهنة 5: ليكن لدينا المتحولان العشوائيان الطبيعيان المستقلان X, Y بحيث أن $X \sim N(x; \mu_1, \sigma_1)$ و $Y \sim N(x; \mu_2, \sigma_2)$ ، بالتالي فإن:

$$X + Y \sim N(x; \mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$$
$$X - Y \sim N(x; \mu_1 - \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

مثال 10: يذهب ابراهيم في كل يوم من أيام الأسبوع إلى المكتبة لقراءة المجلات سيراً على الأقدام. الزمن الذي يستغرقه ذهاباً وإياباً هو متحول طبيعي متوسطه 15 دقيقة وانحرافه المعياري 2 دقيقة. والزمن الذي يقضيه في المكتبة هو متحول طبيعي متوسطه 25 دقيقة وانحرافه المعياري $\sqrt{12}$ دقيقة. أوجد احتمال في أحد الأيام:

ابراهيم غائب عن البيت أكثر من 45 دقيقة.

إبراهيم يقضي زمناً في المشي أكثر منه في المكتبة.

الحل:

ليكن W المتحول الذي يعبر عن الزمن بالدقائق الذي يقضيه ابراهيم في المشي أي $W \sim N(x; 15, 2)$
و L المتحول الذي يعبر عن الزمن بالدقائق الذي يقضيه ابراهيم في المكتبة أي $L \sim N(x; 25, \sqrt{12})$.

a) $T = W + L \sim N(x; 40, 4)$

$$P(T > 45) = P\left(\frac{T-40}{4} > \frac{45-40}{4}\right) = P(Z > 1.25) = 0.1056$$

b) $\mathrm{P(W > L) \Leftrightarrow P(W - L > 0)}$

$U = W - L \sim N(x; -10, 4)$

$$P(U > 0) = P\left(\frac{U-(-10)}{4} > \frac{0-(-10)}{4}\right) = P(Z > 2.5) = 0.0062$$

وبشكل عام، كما وجدنا في الفصل الثالث، ليكن لدينا المتحولات العشوائية المستقلة $X_1, X_2, \ldots, X_n$ والأعداد الحقيقية $a_1, a_2, \ldots, a_n$، بالتالي:

$$E(a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n) = E(a_1X_1) + E(a_2X_2) \ldots + E(a_nX_n)$$
$$Var(a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n) = Var(a_1X_1) + Var(a_2X_2) \ldots + Var(a_nX_n)$$

مبرهنة 6: ليكن لدينا المتحولات العشوائية الطبيعية المستقلة $X_1, X_2, \ldots, X_n$ بحيث أن:
$X_1 \sim N(x; \mu_1, \sigma_1)$ و $X_2 \sim N(x; \mu_2, \sigma_2)$ و ... و $X_n \sim N(x; \mu_n, \sigma_n)$، بالتالي فإن:

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim N(x; \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2})$$

نتيجة 1: ليكن لدينا المتحولات العشوائية الطبيعية المستقلة $X_1, X_2, \ldots, X_n$ والتي تخضع جميعها لنفس التوزيع الطبيعي، أي أن: $X_i \sim N(x; \mu, \sigma)$ من أجل $i = 1, 2, \ldots, n$، بالتالي فإن:

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim N(x; n\mu, \sqrt{n}\sigma)$$

مثال 11: تخضع كتل مادة معينة إلى توزيع طبيعي متوسطه 20 غرام وانحرافه المعياري 2 غرام. تم اختيار عينة من 12 كتلة بشكل عشوائي، ما هو احتمال أن يكون الوزن الكلي أقل من 230 غرام؟

الحل:

ليكن $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{12}$ الوزن الكلي للعينة، بالتالي:

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{12} \sim \mathrm{N}(x; 240, 4\sqrt{3})$$

$$P(X<230)=P\left(\frac{X-240}{4\sqrt{3}}>\frac{230-240}{4\sqrt{3}}\right)=P(Z<-1.443)=0.0745$$

أخيراً ليكن لدينا المتحول العشوائي X والعدد الحقيقي n، فإن:

$$E(nX)=nE(X)$$
$$Var(nX)=n^2Var(X)$$

مبرهنة 7: ليكن لدينا المتحول العشوائي الطبيعي X بحيث أن $X\sim N(x;\mu,\sigma)$ والعدد الحقيقي n، فإن:

$$nX\sim N(x;n\mu,n\sigma)$$

ملاحظة 2: يجب التمييز بين مجموع متحولات وبين مضاعف متحول طبيعي كلها تخضع لنفس التوزيع الطبيعي $N(x;\mu,\sigma)$:

$$X_1+X_2+\ldots+X_n\sim N(x;n\mu,\sqrt{n}\sigma)$$
$$nX\sim N(x;n\mu,n\sigma)$$

ويبين المثال التالي الفرق بينهما.

مثال 12: مصنع مشروبات غازية يبيع زجاجات شراب بحجمين. كمية السائل الغازي بال ml في كل منها يخضع إلى توزيع طبيعي كما في الجدول التالي:

	Mean (ml)	Variance (ml^2)
Small	252	4
Large	1012	25

a) تم اختيار زجاجة صغيرة وأخرى كبيرة عشوائياً. أوجد احتمال أن تكون سعة الكبيرة أقل من سعة أربع زجاجات صغيرات.

b) تم اختيار زجاجة كبيرة وأربع زجاجات صغيرات عشوائياً. أوجد احتمال أن تكون سعة الكبيرة أقل من السعة الكلية للزجاجات الأربع الصغار.

الحل:

ليكن S المتحول العشوائي الذي يشير إلى سعة الزجاجة الصغيرة بالـ ml، بالتالي: $S\sim N(x;252,2)$.

و L المتحول العشوائي الذي يشير إلى سعة الزجاجة الكبيرة بالـ ml، بالتالي: $L\sim N(x;1012,5)$.

a) $P(L<4S)=P(L-4S<0)$

$$E(L-4S)=E(L)-E(4S)=E(L)-4E(S)=1012-4(252)=4$$

$$Var(L - 4S) = Var(L) + Var(4S) = Var(L) + 4^2 Var(S)$$
$$= 25 + 16(4) = 89$$
$$L - 4S \sim N(x; 4, \sqrt{89})$$
$$P(L - 4S < 0) = P\left(Z < \frac{0-4}{\sqrt{89}}\right) = P(Z < -0.424) = 0.3358$$

b) $P(L < S_1 + S_2 + S_3 + S_4) = P(L - (S_1 + S_2 + S_3 + S_4) < 0)$
$$E(L - (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)) = E(L) - E(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)$$
$$= 1012 - 4(252) = 4$$
$$Var(L - (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)) = Var(L) + Var(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)$$
$$= 25 + 4(4) = 41$$
$$L - (S_1 + S_2 + S_3 + S_4) \sim N(x; 4, \sqrt{41})$$
$$P(L - (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)) = P\left(Z < \frac{0-4}{\sqrt{41}}\right)$$
$$= P(Z < -0.625) = 0.266$$

3. توزيع غاما والتوزيع الأسي gamma and exponential distribution:

يمثل التوزيع الأسي حالة خاصة من توزيع غاما، وكلاهما يلعبان دوراً هاماً في كل من نظرية الانتظار queuing theory ومسائل الوثوقية reliability. يستخدم التوزيع الأسي عادة في مسائل متعلقة بقياس الزمن، مثال على ذلك مدة مكالمة هاتفية، مدة تفريغ باخرة شحن، مدة تصليح آلة، مدة انتظار زبون قبل الحصول على الخدمة، مدة حياة الذرات المشعة radioactive قبل أن تتفكك، ... كما أن للتوزيع الأسي علاقة بتوزيع بواسون، فإذا كان وقوع أحداث ما يتبع هذا التوزيع (بواسون)، فإن المدة بين وقوع حدثين تتبع التوزيع الأسي، كمثال على ذلك، إذا كان وصول الزبائن إلى مركز خدمة ما يتبع توزيع بواسون فإن المدة الزمنية بين وصول زبون والزبون التالي تتبع التوزيع الأسي.

تعريف 3: نعرف تابع غاما كما يلي:

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx, \quad \alpha>0$$

من بعض خصائص التابع غاما التالية:

a) $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$ من أجل $\alpha>1$.

b) $\Gamma(n)=(n-1)!$ من أجل الأعداد الصحيحة الموجبة.

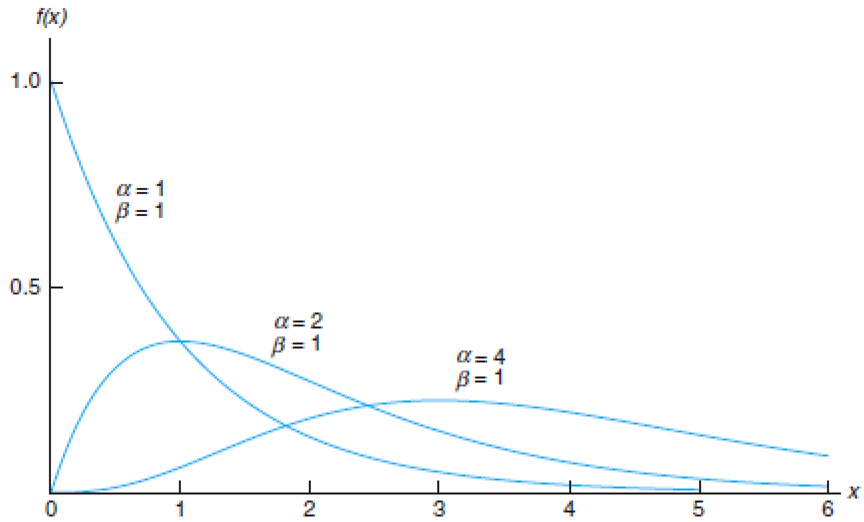
c) $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$.

تعريف 4: نقول عن متحول عشوائي مستمر X أنه يتبع توزيع غاما بوسيطين $\alpha>0$ و $\beta>0$، إذا كان له تابع الاحتمال التالي:

$$\mathrm{f}(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta} & x>0\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

يمثل الوسيط β عامل مقياس scale factor.

يمثل الوسيط α شكل المنحني ومن أجل $\alpha>1$ للمنحني قيمة عظمى عند النقطة $(\alpha-1)/\beta$.



تعريف 5: نقول عن متحول عشوائي مستمر X أنه يتبع توزيع أسي بوسيط $\beta > 0$، إذا كان له تابع الاحتمال التالي (يوافق توزيع غاما من أجل $\alpha = 1$):

$$f(x; \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} & x \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

1.3. التوقع الرياضي والتشتت expected value and variance:

مبرهنة 8: متوسط وتشتت توزيع غاما هما:

$$\mu = \alpha\beta \ \text{ and } \ \sigma^2 = \alpha\beta^2$$

نتيجة 2: متوسط وتشتت التوزيع الأسي هما:

$$\mu = \beta \ \text{ and } \ \sigma^2 = \beta^2$$

2.3. تابع التوزيع التراكمي cumulative distribution function:

تابع التوزيع التراكمي للتوزيع الأسي هو التابع التالي:

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-x/\beta}$$

مثال 13: لدينا نظام يحوي على عنصر نوع معين حيث زمن الفشل لهذا العنصر، مقدراً بالسنين، هو T. المتحول العشوائي T يخضع للتوزيع الأسي مع زمن وسطي للفشل $\beta = 5$. تم تركيب 5 من هذه العناصر في منظومات مختلفة، ما هو احتمال أن يكون على الأقل عنصرين منها لا تزال تعمل في نهاية السنة الثامنة؟

الحل:

احتمال أن يكون عنصر ما يزال يعمل بعد 8 سنوات هو:

$$P(T>8)=\frac{1}{5}\int_{8}^{\infty}e^{-t/5}dt=e^{-8/5}\approx 0.2$$

بفرض X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد العناصر التي تعمل بعد 8 سنوات. باستخدام توزيع ثنائي الحد نحصل على:

$$P(X\geq 2)=\sum_{x=2}^{5}b(x;5,0.2)=0.2627$$

مثال 14: اعتماداً على الاختبارات الشاملة، تم تحديد أن الزمن Y، مقدراً بالسنين، قبل أن يتطلب إصلاح كبير على آلة غسيل محددة، معطى بتابع التوزيع التالي:

$$f(y)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-x/4} & y\geq 0\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

يتم اعتبار صفقة الغسالة عظيمة إذا لم يتطلب إصلاح كبير على آلة غسيل قبل 6 سنوات. ما هو احتمال أن تكون الصفقة عظيمة؟ وما هو احتمال أن يتطلب إجراء إصلاح في السنة الأولى؟

الحل:

يخضع المتحول Y إلى توزيع أسي بمتوسط $\mu=4$. تابع التوزيع التراكمي هو:

$$F(y)=P(Y\leq y)=1-e^{-y/4}$$

بالتالي:

$$P(Y>6)=1-F(6)=e^{-3/2}=0.223$$

أي أن احتمال إجراء إصلاح كبير على الغسالة بعد السنة السادسة هو 0.223. بالتأكيد يمكننا استنتاج أن احتمال إجراء إصلاح كبير على الغسالة قبل السنة السادسة هو 0.777. بالتالي يمكن القول إن الغسالة ليست حقيقة صفقة عظيمة.

أما احتمال إجراء إصلاح كبير على الغسالة في السنة الأولى فهو:

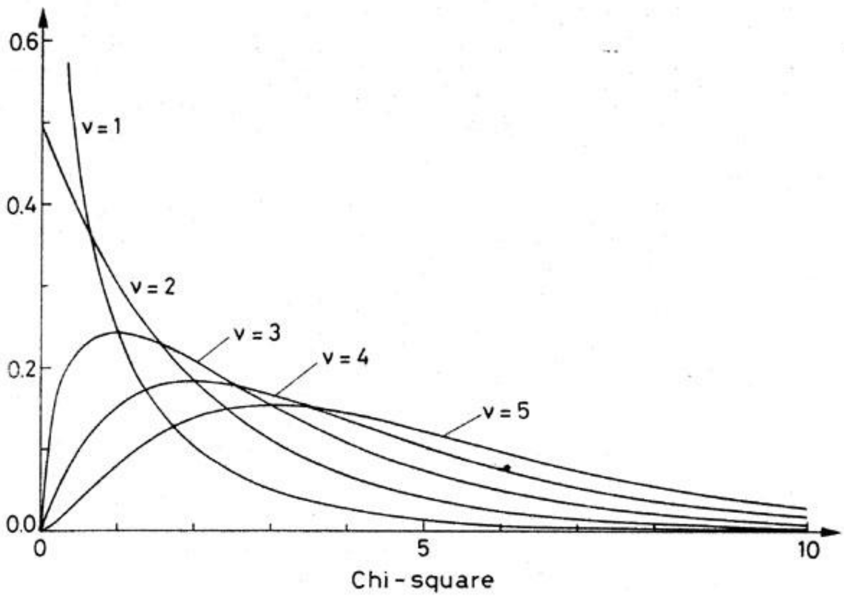
$$P(Y<1)=F(1)=1-e^{-1/4}=0.221$$

4. توزيع مربع كاي Chi−squared distribution:

توزيع مربع كاي هو من أكثر التوزيعات استخداما في مجال اختبار الفرضيات وتقديرها، ويمكن الحصول عليه من توزيع غاما بأخذ $\alpha = \nu / 2$ و $\beta = 2$.

تعريف 6: نقول عن متحول عشوائي مستمر X أنه يتبع توزيع مربع كاي بوسيط $\nu > 0$ درجة حرية، إذا كان له تابع الاحتمال التالي:

$$f(x;\nu) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} x^{\nu/2-1} e^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$



1.4. التوقع الرياضي والتشتت expected value and variance:

مبرهنة 9: متوسط وتشتت توزيع مربع كاي هما:

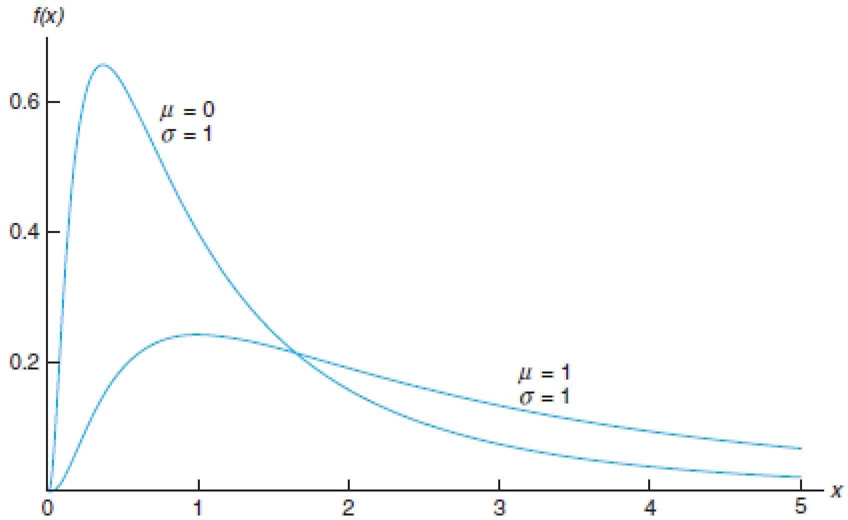
$$\mu = \nu \ \ and \ \sigma^2 = 2\nu$$

5. التوزيع الطبيعي اللوغاريتمي lognormal distribution:

للتوزيع الطبيعي اللوغاريتمي أهمية كبيرة في دراسة تابع البقاء وخاصة للمرضى المصابين بمرض السرطان والذين يخضعون لجرعات من العلاج الكيميائي، إضافة إلى ذلك له أهمية في موضوع الرقابة على جودة الإنتاج. كما أنه يستخدم أيضاً في الاتصالات الخليوية حيث أن ظاهرة الخفوت fading نتيجة العوائق، حيث أن القيم الوسطية لمقدار خفوت الحجب تتبع التوزيع الطبيعي اللوغاريتمي.

تعريف 7: نقول عن متحول عشوائي مستمر X أنه يتبع توزيع طبيعي لوغاريتمي إذا كان المتحول العشوائي $Y=\ln(X)$ يتبع توزيع طبيعي بمتوسط μ وانحراف معياري σ. بالتالي تابع الاحتمال هو التالي:

$$f(x;\mu,\sigma)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma x}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[\ln(x)-\mu]^2} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$



1.5. التوقع الرياضي والتشتت expected value and variance:

مبرهنة 10: متوسط وتشتت التوزيع الطبيعي اللوغاريتمي هما:

$$\mu=e^{\mu+\sigma^2/2}\ \ and\ \ \sigma^2=e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$$

2.5. تابع التوزيع التراكمي cumulative distribution function:

تابع التوزيع التراكمي للتوزيع الطبيعي اللوغاريتمي هو التابع التالي:

$$F(x)=P(X\leq x)=\frac{1}{2}\left[1+erf\,(\frac{\ln x-\mu}{\sigma\sqrt{2}})\right]=\Phi\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)$$

مثال 15: زمن حياة عنصر تحكم الكتروني، مقدرا بآلاف الأميال، يخضع تقريبياً لتوزيع طبيعي لوغاريتمي حيث $\mu = 5.149$ و $\sigma = 0.737$. أوجد الـــ 5% (($P(X < k) = 0.05$) من زمن الحياة لعناصر التحكم هذه.

الحل:

من الجداول نحصل على $P(Z < -1.645) = 0.05$، ليكن X زمن الحياة لعناصر التحكم، وبما أن $\ln(X)$ يخضع لتوزيع طبيعي بمتوسط $\mu = 5.149$ وانحراف معياري $\sigma = 0.737$، بالتالي:

$$\ln(x) = 5.149 + 0.737(-1.645) = 3.937$$

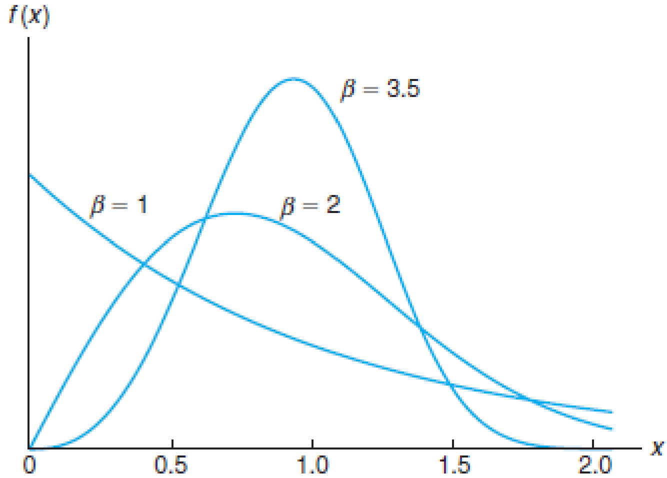
ومنه $x = 51.265$. وهذا يعني أنه فقط 5% من عناصر التحكم الالكترونية لهم زمن حياة أقل من 51.265 ميل.

6. التوزيع ويبل Weibull distribution:

إن اختيار التوزيع الأسي لفترة الحياة لحين الفشل يعتبر اختياراً كافياً، ولكن هناك بعض الحالات التي يكون فيها معدل الفشل متزايداً أو متناقصاً، عندها نستخدم توزيع ويبل. يستخدم توزيع ويبل في الكثير من الحالات، مثال على ذلك تحليل الوثوقية وحالات الإخفاق، التنبؤ بالأحوال الجوية، وفي وصف توزيع سرعة الرياح، في هندسة نظم الاتصالات: أنظمة الرادار (في تصميم نموذج لتشتت مستوى الإشارات)، في الاتصالات الخليوية لتمثيل مطال الإشارة الناتجة عن الخفوت (توزيع رايلي).

تعريف 8: نقول عن متحول عشوائي مستمر X أنه يتبع توزيع ويبل بوسيطين $\alpha, \beta > 0$ إذا كان تابع الكثافة الاحتمالي هو التالي:

$$f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\alpha\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha x^{\beta}} & x>0\\ 0 & elsewhere\end{cases}$$



ملاحظة 3: عندما تكون $\beta = 1$ في توزيع ويبل فإن هذا التوزيع يتحول إلى توزيع أسي بوسيط $\beta = 1/\alpha$

$$f(x;\alpha)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & elsewhere\end{cases}$$

تعريف 9: نقول عن متحول عشوائي مستمر X أنه يتبع توزيع رايلي Rayleigh بوسيط $\sigma > 0$، إذا كان له تابع الاحتمال التالي (يوافق توزيع ويبل من أجل $\beta = 2$، وبفرض $(\alpha = 1/(2\sigma^2)$):

$$f(x;\sigma)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}e^{-x^2/(2\sigma^2)} & x\ge 0\\ 0 & elsewhere\end{cases}$$

1.6. التوقع الرياضي والتشتت expected value and variance:

مبرهنة 11: متوسط وتشتت التوزيع ويبل هما:

$$\mu = \alpha^{-1/\beta}\Gamma(1+1/\beta)$$

$$\sigma^2 = \alpha^{-2/\beta}\{\Gamma(1+2/\beta)-[\Gamma(1+1/\beta]^2\}$$

نتيجة 3: متوسط وتشتت التوزيع رايلي هما:

$$\mu = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}} \ \ and \ \sigma^2 = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2$$

يتم الحصول على النتيجة السابقة بأخذ $\beta = 2$، وبفرض $\alpha = 1/(2\sigma^2)$، وباستخدام خواص التابع غاما الثلاث التي وجدناها سابقاً.

2.6. تابع التوزيع التراكمي cumulative distribution function:

تابع التوزيع التراكمي للتوزيع ويبل هو التابع التالي:

$$F(x) = P(X \le x) = 1 - e^{-\alpha x^{\beta}}, \quad x \ge 0$$

نتيجة 4: تابع التوزيع التراكمي للتوزيع رايلي هو:

$$F(x) = P(X \le x) = 1 - e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}, \quad x \ge 0$$

مثال 16: زمن حياة عنصر في آلة، مقدرا بالساعات، يخضع لتوزيع ويبل حيث $\alpha = 0.01$ و $\beta = 2$.
أوجد احتمال أن يفشل قبل 8 ساعات من الاستخدام؟

الحل:

$$F(8) = P(X \le 8) = 1 - e^{-0.01(8)^2} = 0.473$$

3.6. معدل الفشل failure rate:

معدل الفشل هو عدد مرات الفشل وذلك ضمن فترة زمنية محددة، ومعدل الفشل هذا يستخدم في قياس وثوقية reliability جهاز أو عنصر ما (القرص الصلب على سبيل المثال).

مبرهنة 12: معدل الفشل في اللحظة t من أجل توزيع ويبل يعطى بالعلاقة التالية:

$$Z(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}, \quad t > 0$$

معدل الفشل $Z(t)$ يعبر عن معدل التغير عبر الزمن للاحتمال الشرطي بأن العنصر يستمر (يدوم) زمن إضافي Δt علماً أنه يقي مستمراً حتى اللحظة t. يمكن التمييز بين 3 حالات مختلفة:

1. إذا كان $\beta = 1$ ، فإن معدل الفشل يساوي ثابت $Z(t) = \alpha$. وهذا يوافق الحالة الخاصة للتوزيع الأسي الذي يوصف بأنه بلا ذاكرة.
2. إذا كان $\beta > 1$ ، فإن معدل الفشل $Z(t)$ يكون تابعاً متزايداً بالنسبة للزمن t. يحدث ذلك إذا كان هناك عملية تقادم aging، أي أن العناصر تصبح أكثر عرضة للفشل مع مرور الزمن.
3. إذا كان $\beta < 1$ ، فإن معدل الفشل $Z(t)$ يكون تابعاً متناقصاً بالنسبة للزمن t. أي أن العناصر تصبح أقل عرضة للفشل مع مرور الزمن.

في المثال السابق لدينا $\beta = 1$ و $Z(t) = 0.02t$ ، بالتالي العنصر المذكور يتقادم.

ISSN: 2617-989X

7. توزيع رايس Rice distribution:

يستخدم توزيع رايس في مجال معالجة الإشارة. بشكل عام الإشارات المعدلة بالطور phase modulated والملوثة بضجيج غوصي يتبع توزيع رايس، وفي في الاتصالات الخليوية لتمثيل مطال الإشارة الناتجة عن الخفوت.

تعريف 10: نقول عن متحول عشوائي مستمر X أنه يتبع توزيع رايس بوسيطين $\nu \geq 0$ و $\sigma > 0$ إذا كان تابع الكثافة الاحتمال هو التالي:

$$f(x;\nu,\sigma) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2+\nu^2}{2\sigma^2}} I_0(\dfrac{x\nu}{\sigma^2}) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

حيث I_0 هي توابع بيسيل Bessel المعدّلة من النوع الأول ومن المرتبة 0، التي تعطى بالعلاقة التالية (مجموع):

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2}$$

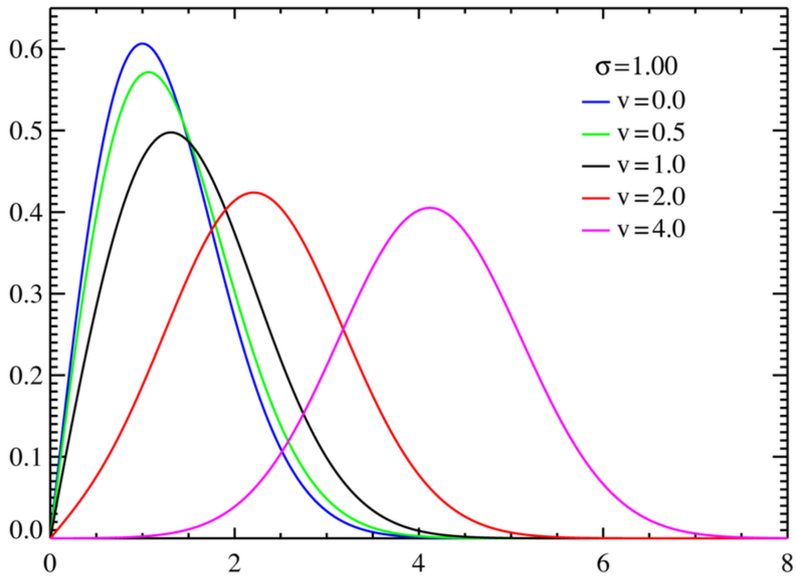
أو على شكل تكامل:

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{x\cos\theta} d\theta$$

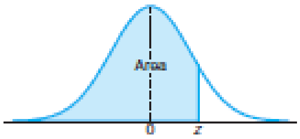
1.7 التوقع الرياضي والتشتت expected value and variance:

مبرهنة 13: متوسط وتشتت توزيع رايس هما:

$$\mu = e^{\mu+\sigma^2/2} \ and \ \sigma^2 = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$$



ملاحظة 4: يمثل توزيع رايلي حالة خاصة من توزيع رايس من أجل قيمة الوسيط $\nu = 0$. بمعنى أنه إذا كان لدينا المتحول العشوائي $X \sim Rice(z; 0, \sigma)$ ، فإن $X \sim Rayleigh(z; \sigma)$.



Areas under the Normal Curve

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
−2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

جداول التوزيع الطبيعي القياسي

ISSN: 2617-989X

(continued) Areas under the Normal Curve

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

جداول التوزيع الطبيعي القياسي

تمارين

1. ليكن X متحولاً عشوائياً له توزيع أسي بوسيط $\beta = 1/2$. المطلوب
a) إيجاد تابع الكثافة الاحتمالي وكذلك تابع الاحتمال التراكمي.
b) أوجد احتمال $P(1 < X \le 3)$ و $P(X \ge 2)$.

2. إذا X متحولاً عشوائياً له توزيع طبيعي بمتوسط 50 وتشتت 100. أوجد $P(42 < X \le 55)$.

3. إذا X متحولاً عشوائياً له توزيع طبيعي بمتوسط 40 وتشتت 36. أوجد قيمة:
a) a التي يقع عن يسارها 35% من المساحة تحت منحني تابع الكثافة.
b) b التي يقع عن يمينها 15% من المساحة تحت منحني تابع الكثافة.

4. تقدم لامتحان مقرر الإحصاء والاحتمالات 800 طالب وبعد إعلان النتائج تبين أن درجاتهم التي نالوها تتوزع وفق توزيع الطبيعي متوسطه 65 وانحرافه المعياري 10. فإذا تم تقسيم الطلاب إلى ثلاث فئات بحيث تحوي الفئة A الطلاب الذين نالوا درجات تزيد على 75 وتحوي الفئة B الطلاب الذين نالوا درجات ما بين 50 و 75 وتحوي الفئة C الطلاب الذين نالوا درجات أقل من 50 والمطلوب:
a) تعيين عدد الطلاب في كل فئة.
b) أقل علامة نالها طالب من العشرة الأوائل.

5. يتم إنتاج مسامير البرشام التي تستخدم لبرشمة صفيحة معدنية أقطار المسامير هذه تخضع لتوزيع طبيعي متوسطه 4 cm وانحرافه المعياري 0.25 cm، وبطريقة مستقلة يجري إنتاج صفائح معدنية ذات ثقوب دائرية تخضع لتوزيع طبيعي متوسطه 4.2 cm وانحرافه المعياري 0.15 cm، المطلوب:
a) ما هو احتمال أن يناسب المسمار ثقب الصفيحة؟
b) إذا اخترنا خمسة أزواج (مسمار وصفيحة) فما هو احتمال أن يكون زوجان منهما على الأقل متناسبين؟

6. في إحدى ألعاب الحظ توضع ست مغلفات متماثلة في الشكل ويوجد داخل كل منها بطاقة تدل على عدد الدولارات التي يربحها اللاعب عند سحبه للمغلف .فإذا كان كل من المغلفين الأول والثاني يحوي بطاقة تحمل الرقم 15 ويحوي المغلف الثالث بطاقة تحمل الرقم 10 ويحوي المغلف الرابع بطاقة تحمل الرقم 20 ويحوي كل من المغلفين الخامس والسادس بطاقة تحمل الرقم صفر. المطلوب:

a) إذا قام شخص ب 36 عملية سحب (مع الإعادة) فما هو احتمال أن يجمع مبلغًا يزيد على 350 دولاراً؟

b) ما هو أصغر مبلغ يمكن أن يحصل عليه باحتمال 95%؟

7. إذا قذفنا قطعة نقود متزنة 10 مرات، احسب احتمال أن نحصل على الكتابة ثلاث مرات أو أربعًا أو خمسً وذلك باستخدام التوزيع ذو الحدين من جهة والتقريب بالتوزيع الطبيعي من جهة ثانية. قارن بين النتيجتين، ماذا تستنتج؟

8. تركيز التلوث الذي تحدثه المصانع الكيماوية معروف على أنه يخضع إلى توزيع طبيعي لوغاريتمي. بفرض أن تركيز التلوث، مقدر بأجزاء من المليون parts per million، يخضع لتوزيع طبيعي لوغاريتمي حيث $\mu = 3.2$ و $\sigma = 1$. أوجد احتمال أن يتجاوز التركيز 8 أجزاء بالمليون.

العلامة العظمى: 100 **علامة النجاح: 50** **المدة: ساعة واحدة**

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة **(80) درجة**

ملاحظة: بعض الأسئلة تحتاج إلى جداول التوزيع الطبيعي موجودة في نهاية صفحات الاختبار

1. X متحول عشوائي يتبع توزيع منتظم على المجال $[2,5]$، فإن:

a) $\mu_X = 3.5; \quad \sigma_X^2 = 0.75$

b) $\mu_X = 1.5; \quad \sigma_X^2 = 0.75$

c) $\mu_X = 1.5; \quad \sigma_X^2 = 4.5$

d) $\mu_X = 3.5; \quad \sigma_X^2 = 4.5$

2. X متحول عشوائي يتبع توزيع منتظم على المجال $[2,5]$، فإن:

a) $P(3 < X < 4) = 2/3$

b) $P(3 < X < 4) = 1/3$

c) $P(3 < X < 4) = 1/2$

d) لا شيء ما سبق

3. $Z \sim N(z; 0,1)$، حيث $P(Z > 1) = 0.8413$ بالتالي فإن $P(-1 < Z < 1)$

a) 0.1587

b) 0.6826

c) 0.3413

d) لا شيء ما سبق

4. $X \sim N(x; 50, 5)$، بالتالي فإن $P(45 < X < 54)$ يساوي:

a) $P(-1 < Z < 0.8)$

b) $P(1 < Z < 1.8)$

c) $P(-1 < Z < 1.2)$

d) لا شيء ما سبق

5. $Z \sim N(z;0,1)$ ، باستخدام الجداول $P(-2<Z<2)$ هو:

a) 0.0288

b) 0.9712

c) 0.9544

d) لا شيء ما سبق

6. $Z \sim N(z;0,1)$ ، بحيث $P(Z>k)=0.2119$ باستخدام الجداول قيمة k هي:

a) 0.88

b) 0.8

c) 0.85

d) لا شيء ما سبق

7. $X \sim N(x;50,5)$ ، حيث $P(x_1<X<x_2)=P(-z<Z<z)=0.8664$ بالتالي فإن قيمة x_2 (باستخدام الجداول) هي:

a) 55

b) 57.5

c) 43.5

d) لا شيء ما سبق

8. X,Y متحولان عشوائيان مستقلان بحيث $X \sim N(x;25,4)$ و $Y \sim N(x;30,3)$ ، بالتالي فإن

a) $X+Y \sim N(x;22.5,7)$

b) $X+Y \sim N(x;55,7)$

c) $X+Y \sim N(x;22.5,5)$

d) $X+Y \sim N(x;55,5)$

9. X,Y متحولان عشوائيان مستقلان بحيث $X \sim N(x;25,4)$ و $Y \sim N(x;30,3)$ ، بالتالي فإن:

a) $X-Y \sim N(x;-5,1)$

b) $X-Y \sim N(x;-5,5)$

c) $X-Y \sim N(x;5,5)$

d) $X-Y \sim N(x;5,1)$

10. $X \sim N(x; 25, 4)$ ، بالتالي فإن

a) $2X \sim N(x; 50, 4)$

b) $2X \sim N(x; 25, 4)$

c) $2X \sim N(x; 50, 8)$

d) $2X \sim N(x; 25, 8)$

11. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متحولات عشوائية مستقلة بحيث أن: $X_i \sim N(x; \mu, \sigma)$ من أجل $i = 1, 2, \ldots, n$ ، بالتالي فإن:

a) $X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim N(x; n\mu, \sqrt{n}\sigma)$

b) $X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim N(x; n\mu, n\sigma)$

c) $X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim N(x; \mu, \sqrt{n}\sigma)$

d) $X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim N(x; \mu, n\sigma)$

12. في الاتصالات الخليوية لتمثيل مطال الإشارة الناتجة عن الخفوت نستخدم متحول عشوائي يتبع:

a) توزيع طبيعي

b) توزيع رايلي

c) توزيع مربع كاي

d) توزيع طبيعي لوغاريتمي

13. متحول عشوائي X يمثل مدة انتظار زبون في بنك قبل الحصول على الخدمة يتبع:

a) توزيع طبيعي

b) توزيع أسي

c) توزيع مربع كاي

d) توزيع طبيعي لوغاريتمي

14. أياً مما يلي لا يمكن استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لثنائي الحد؟

a) $n = 100,\ p = 0.1$

b) $n = 100,\ p = 0.01$

c) $n = 100,\ p = 0.3$

d) $n = 100,\ p = 0.51$

ISSN: 2617-989X

15. أياً من المتحولات العشوائية التالية يمكن أن يتبع توزيعاً طبيعياً؟

a) عدد مرات رمي حجر النرد لحين ظهور العدد 6.

b) عدد الأشخاص الذين على دور الانتظار ليتم تخديمهم في بنك.

c) أوزان طلاب الجامعة الافتراضية مقدراً بالكلغ.

d) عدد الحوادث المرورية في مدينة ما خلال أسبوع.

16. النسبة من المساحة الكلية تحت منحني التوزيع الطبيعي ضمن المجال $[\mu-2\sigma, \mu+2\sigma]$ هي:

a) 34%

b) 99.7%

c) 68%

d) 95%

السؤال الثاني: **(20) درجة**

X, Y, T ثلاث متحولات عشوائية مستقلة بحيث $X \sim N(x; 1, 2)$ و $Y \sim N(x; 3, 4)$ و $T \sim N(x; 4, 9)$، المطلوب:

a) أوجد الاحتمال $P(1 \le X \le 3)$.

b) أوجد الاحتمال $P(X \le Y)$.

c) أوجد الاحتمال $P(3X - 2Y > 1)$.

d) أوجد الاحتمال $P(X + Y \le 2T - 4)$.

الحل:

a) $$P(1 \le X \le 3) = P(\frac{1-1}{\sqrt{2}} \le Z \le \frac{3-1}{\sqrt{2}}) = P(0 \le X \le 0.71) = 0.2611$$

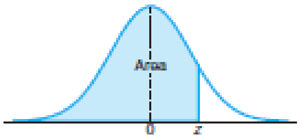
b) $$P(X \le Y) = P(X - Y \le 0)$$
$$X - Y \sim N(x; -2, \sqrt{6})$$
$$P(Z \le \frac{0-(-2)}{\sqrt{6}}) = P(Z \le 0.82) = 0.7939$$

c) $$P(3X - 2Y > 1)$$
$$E(3X - 2Y) = 3(1) - 2(3) = -3$$
$$Var(3X - 2Y) = 9(2) + 4(4) = 34$$
$$3X - 2Y \sim N(x; -3, \sqrt{34})$$
$$P(Z > \frac{1-(-3)}{\sqrt{34}}) = P(Z > 0.69) = 1 - P(Z < 0.69) = 0.2451$$

d) $$P(X + Y \le 2T - 4) = P(X + Y - 2T \le -4)$$
$$E(X + Y - 2T) = 1 + 3 - 2(4) = -4$$
$$Var(X + Y - 2T) = 2 + 4 + 4(9) = 42$$
$$X + Y - 2T \sim N(x; -4, \sqrt{42})$$
$$P(X + Y - 2T \le -4) = P(Z \le \frac{-4-(-4)}{\sqrt{42}}) = P(Z \le 0) = 0.5$$

توجيه في حال الخطأ: راجع الفقرة 2

ISSN: 2617-989X



Areas under the Normal Curve

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
−2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

جداول التوزيع الطبيعي القياسي

(continued) Areas under the Normal Curve

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

جداول التوزيع الطبيعي القياسي

السؤال الأول	الإجابة الصحيحة	توجيه في حال الخطأ
1	a	الفقرة 1
2	b	الفقرة 1
3	b	الفقرة 2
4	a	الفقرة 2
5	c	الفقرة 2
6	b	الفقرة 2
7	b	الفقرة 2
8	d	الفقرة 2
9	b	الفقرة 2
10	c	الفقرة 2
11	a	الفقرة 2
12	b	الفقرة 6
13	b	الفقرة 3
14	b	الفقرة 2
15	c	الفقرة 2
16	d	الفقرة 2

الفصل السادس: نظرية توزيع العينات والتقدير

الكلمات المفتاحية:

توزيعات العينة، أخذ العينة، توزيع متوسط العينة، النهاية المركزية، تقدير وسطاء المجتمع، تقدير النقطة، تقدير المجال، مجال الثقة، مجال الثقة ذو طرف واحد.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى معرفة التوزيع الاحتمالي لإحصائية (لاسيما متوسط العينة) والمعروف باسم توزيع العينة، كما يهدف أيضاً إلى التعرف على طرق تقدير وسطاء المجتمع لاسيما تقدير القيمة المتوسطة والانحراف المعياري وتحديد هامش الخطأ.

الأهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- توزيعات العينة: متوسط العينة.
- تقدير وسطاء المجتمع: المتوسط والتشتت.
- نظرية النهاية المركزية.

لتقدير وسطاء parameters المجتمع (متوسط μ ، تشتت σ^2 ...) ننطلق من معطيات العينة، حيث نحتاج إلى حساب وسطاء مثل متوسط العينة $\overline{X}$ ، تباين العينة S^2 ، ... بصفة عامة، نسمي كل قيمة تحسب انطلاقاً من معطيات العينة من أجل تقدير قيمة وسطاء المجتمع إحصائية العينات sampling statistic.

نسمي التوزيع الاحتمالي لإحصائية بتوزيع العينة sampling distribution.

1. توزيعات العينة sampling distributions:

1.1. متوسط العينة sample mean:

يمكن التمييز بين حالتين رئيسيتين: أخذ العينة مع إعادة وأخذ العينة من دون إعادة.

1.1.1. أخذ العينة مع إعادة sampling with replacement:

مبرهنة 1: ليكن لدينا المتحولات العشوائية المستقلة $X_1, X_2, \ldots, X_n$ والتي تمثل عينة حجمها n ومتوسطها $\overline{X}$ من مجتمع ما متوسطه μ وتشتته σ^2 ، فإن:

$$E(\overline{X}) = \mu \quad and \quad Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

مثال 1: ليكن لدينا المتحول العشوائي المتقطع X مع جدول التوزيع الاحتمالي $P(X = x)$ المبين أدناه، وحيث $E(X) = \mu = 0.7$ و $Var(X) = \sigma^2 = 0.61$:

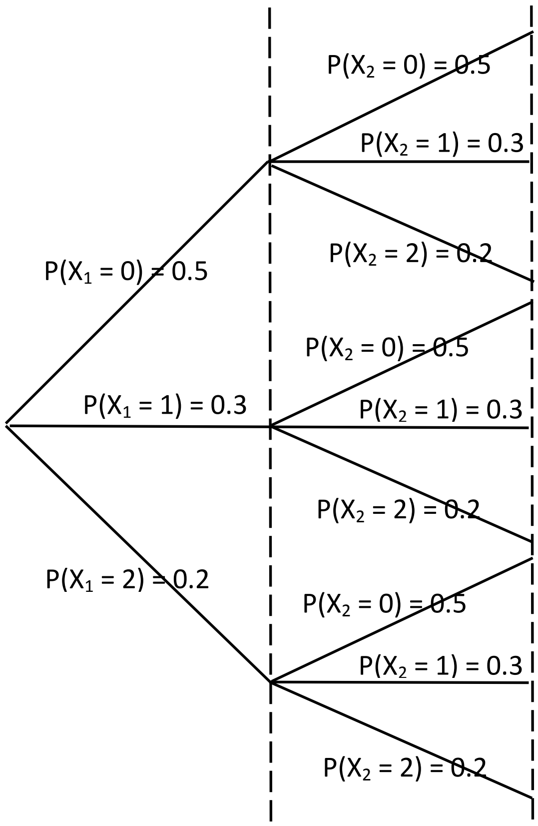
x	0	1	2
$P(X = x)$	0.5	0.3	0.2

نأخذ عينات بشكل عشوائي من هذا التوزيع حجمها 2 (مع إعادة). بأخذ كافة الاحتمالات الممكنة للعينة، أوجد جدول التوزيع الاحتمالي لـــ $\overline{X}$ (متوسط العينات). ومن ثم تحقق من صحة النظرية السابقة.

الحل:

جدول التوزيع الاحتمالي لـــ $\overline{X}$ هو التالي (من الشجرة في الشكل اللاحق):

$\overline{x}$	0	0.5	1	1.5	2
$P(X = x)$	0.25	0.3	0.29	0.12	0.04



Sample	Sample mean	Probability
0, 0	0	(0.5)(0.5) = 0.25
0, 1	0.5	(0.5)(0.3) = 0.15
0, 2	1	(0.5)(0.2) = 0.10
1, 0	0.5	(0.3)(0.5) = 0.15
1, 1	1	(0.3)(0.3) = 0.09
1, 2	1.5	(0.3)(0.2) = 0.06
2, 0	1	(0.2)(0.5) = 0.10
2, 1	1.5	(0.2)(0.3) = 0.06
2, 2	2	(0.2)(0.2) = 0.04

$$E(\overline{X}) = 0(0.25) + 0.5(0.3) + 1(0.29) + 1.5(0.12) + 2(0.04) = 0.7 = \mu$$
$$E(\overline{X}^2) = 0^2(0.25) + 0.5^2(0.3) + 1^2(0.29) + 1.5^2(0.12) + 2^2(0.04) = 0.795$$
$$Var(\overline{X}) = E(\overline{X}^2) - E^2(\overline{X}) = 0.795 - 0.7^2 = 0.305 \ = \sigma^2 / 2$$

2.1.1. أخذ العينة من دون إعادة sampling without replacement:

مبرهنة 2: ليكن لدينا المتحولات العشوائية $X_1, X_2, \ldots, X_n$ والتي تمثل عينة حجمها n، مأخوذة من دون إعادة، متوسطها $\overline{X}$ من مجتمع ما حجمه N ومتوسطه μ وتشتته σ^2، فإن:

$$E(\overline{X}) = \mu \quad and \quad Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N - n}{N - 1}\right)$$

مثال 2: أوجد متوسط μ وتشتت σ^2 المجتمع 7 ,4 ,1. ارسم جدول التوزيع للمتوسطات لكافة العينات الممكنة التي حجمها 2 والمأخوذة من دون إرجاع. ومن ثم احسب متوسط وتشتت هذا التوزيع وتحقق أيضاً من صحة المبرهنة السابقة. ماذا يحدث لما $N \to \infty$؟

الحل:

$$E(X)=\mu=1(1/3)+4(1/3)+7(1/3)=12/3=4$$
$$E(X^2)=1^2(1/3)+4^2(1/3)+7^2(1/3)=66/3=22$$
$$\sigma^2 = E(X^2)-E^2(X)=22-4^2=6$$

جدول التوزيع الاحتمالي لـــ $\overline{X}$ هو التالي:

Sample	(1, 4)	(1, 7)	(4, 1)	(4, 7)	(7, 1)	(7, 4)
$\overline{x}$	2.5	4	2.5	5.5	4	5.5

$$E(\overline{X})=(2.5+4+2.5+5.5+4+5.5)/6=24/6=4=\mu$$
$$E(\overline{X}^2)=(2.5^2+4^2+2.5^2+5.5^2+4^2+5.5^2)/6 \;=105/6 \;=17.5$$
$$Var(\overline{X})=E(X^2)-E^2(X)=17.5-4^2=1.5$$
$$\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)=\frac{6}{2}\left(\frac{3-2}{3-1}\right)=1.5=Var(\overline{X})$$

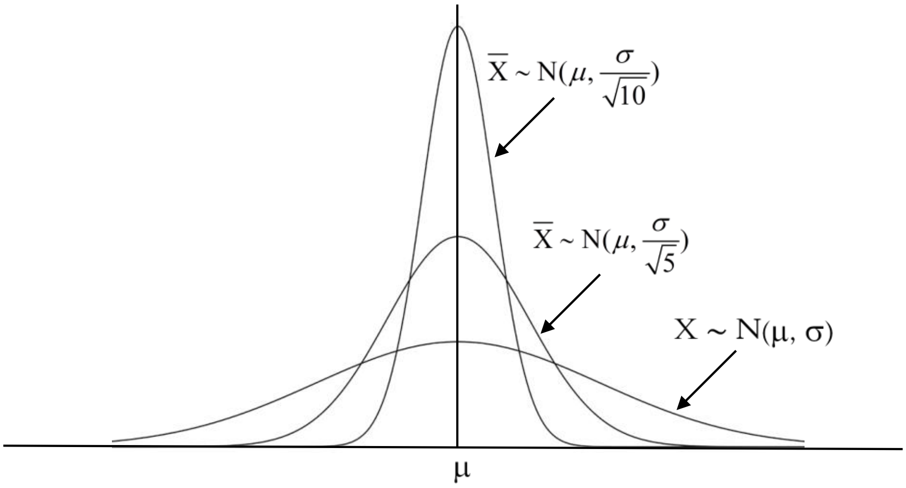
عندما $\infty \to N$ فإن $\frac{N-n}{N-1}\to 1$ ، بالتالي $Var(\overline{X})\to\frac{\sigma^2}{n}$.

2.1. توزيع متوسط العينة sample mean distribution:

1.2.1. العينات من مجتمع طبيعي sampling from a normal distribution:

مبرهنة 3: ليكن لدينا المتحولات العشوائية $X_1, X_2, \ldots, X_n$ والتي تمثل عينة حجمها n ، مأخوذة من مجتمع يخضع لتوزيع طبيعي $N(\mu,\sigma)$ ، بالتالي فإن توزيع المتوسط $\overline{X}$ هو طبيعي أيضاً:

$$\overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}),\quad \overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\ldots+X_n)$$



مثال 3: ارتفاع أحد أنواع النباتات يتبع توزيع طبيعي بمتوسط 21 سم وتشتت 90 سم. عينة عشوائية مؤلفة من 10 نباتات وتم حساب متوسط ارتفاعها. أوجد احتمال أن يكون متوسط العينة هذا محصور بين القيمتين 18 سم و27 سم.

الحل:

بفرض X المتحول العشوائي الذي يعبر عن طول النبتة، بالتالي $X \sim N(21,\sqrt{90})$، بما أن $n=10$، بالتالي فإن $\overline{X} \sim N(21,3)$ $(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{90}}{\sqrt{10}}=\sqrt{9}=3)$.

$$P(18<\overline{X}<27)=P\left(\frac{18-21}{3}<\frac{\overline{X}-21}{3}<\frac{27-21}{3}\right)$$
$$=P(-1<Z<2)=0.8185$$

مثال 4: عينة حجمها n أخذت من مجتمع يخضع لتوزيع طبيعي متحولها $X \sim N(74,6)$ وتم حساب متوسط كل عينة عشوائية. إذا كان $P(\overline{X}>72)=0.854$، قدّر حجم العينة n.

الحل:

$$\overline{X} \sim N(74,\frac{6}{\sqrt{n}})$$
$$P(\overline{X}>72)=\left(\frac{\overline{X}-74}{6/\sqrt{n}}>\frac{72-74}{6/\sqrt{n}}\right)=P\left(Z>\frac{-\sqrt{n}}{3}\right)=0.854$$
$$P(Z>-1.054)=0.854$$

بالتالي: $\sqrt{n}/3=1.054$، ومنه $n=9(1.054)^2$ أي $n=10$.

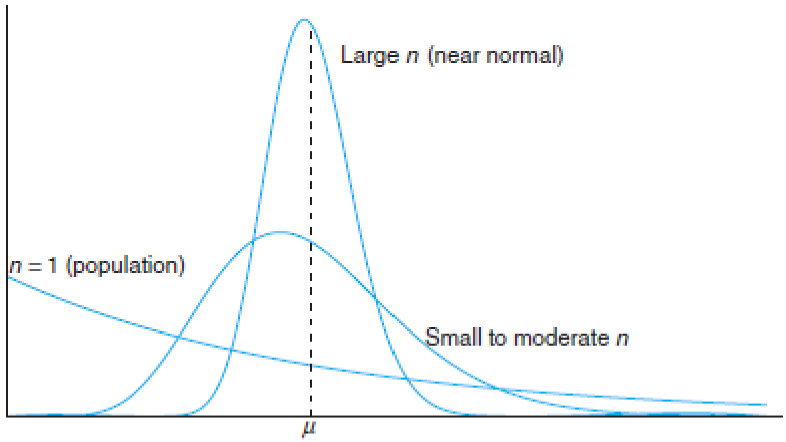
.2.2.1 العينات من أي مجتمع sampling from any distribution:

مبرهنة النهاية المركزية the central limit theorem:

تقول مبرهنة النهاية المركزية انه كلما ازداد حجم العينة n فان التوزيع لمتوسط المتغيرات العشوائية الممثلة للعينة يقترب من التوزيع الطبيعي.

مبرهنة 4: ليكن لدينا المتحولات العشوائية $X_1, X_2, \ldots, X_n$ والتي تمثل عينة حجمها n، مأخوذة من مجتمع يخضع لتوزيع ما بمتوسط μ وتشتت σ^2، بالتالي من أجل n كبيرة، فإن توزيع المتوسط $\overline{X}$ هو تقريباً توزيع طبيعي:

$$\overline{X} \sim N(\mu, \sigma/\sqrt{n}), \quad \overline{X} = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n$$



ملاحظة 1: كلما زاد حجم العينة n كلما كان التقريب أفضل.

مثال 5: عينة عشوائية بحجم 30 تم أخذها من كل من التوزيعين التاليين، أوجد من أجل كل حالة احتمال ألا يتجاوز وسط العينة 5.

a) $X \sim p(4.5)$ (توزيع بواسون)

b) $X \sim b(9, 0.5)$ (ثنائي الحد)

الحل:

a) من أجل $X \sim p(4.5)$ لدينا بالتالي:

$$\mu = \sigma^2 = \lambda = 4.5$$

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(4.5, \sqrt{0.15})$$

$$P(\overline{X} > 5) = P\left(\frac{\overline{X} - 4.5}{\sqrt{0.15}} > \frac{5 - 4.5}{\sqrt{0.15}}\right) = P(Z > 1.291) = 0.0983$$

من أجل $X \sim b(9,\ 0.5)$ لدينا بالتالي:

$$\mu = np = 9(0.5) = 4.5$$

$$\sigma^2 = npq = 9(0.5)(0.5) = 2.25$$

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(4.5, \sqrt{0.075})$$

$$P(\overline{X} > 5) = P\left(\frac{\overline{X} - 4.5}{\sqrt{0.075}} > \frac{5 - 4.5}{\sqrt{0.075}}\right) = P\left(Z > 1.826\right) = 0.034$$

2. تقدير وسطاء المجتمع estimation of population parameters:

المقصود بالتقدير estimation هو تقدير معالم المجتمع الإحصائي (أو التوزيع الاحتمالي) والتي غالباً ما تكون مجهولة ويكون المطلوب هو الحصول على تقديرات لها من معطيات العينة، ونرمز عادة لتقدير وسيط ما θ بالرمز $\hat{\theta}$. على سبيل المثال تقدير متوسط دخل الدولة أو تقدير متوسط عمر الناخب.

وهناك نوعان للتقدير يسمى النوع الأول تقدير النقطة point estimation، ويسمى الثاني تقدير المجال interval estimation.

ففي حالة تقدير النقطة نحصل على قيمة واحدة من العينة، وتستخدم هذه القيمة الواحدة كتقريب أو كتقدير لوسيط المجتمع المجهولة. فمثلاً لو أخذنا الوسط الحسابي للدخل في العينة كتقدير لمتوسط الدولة نكون قد حصلنا على تقدير نقطة لمتوسط دخل الدولة.

أما في تقدير المجال فنحصل على مجال معرف بحدين (حد أدنى وحد أعلى) نحصل عليهما من العينة. فمثلاً إذا قدرنا أن الوسط الحسابي لأعمار الناخبين يتراوح بين 40 ± 6 سنة أي يتراوح بين 34 سنة كحد أدنى و46 سنة كحد أعلى نكون قد حصلنا على تقدير مجال للوسط الحسابي لأعمار الناخبين في المجتمع.

وتتميز تقديرات المجال بأنه يمكن حساب احتمال أن يكون التقدير صحيحاً، وبالتالي فإنه يمكن معرفة مدى دقة التقديرات. لذا فإن مجالات التقدير تسمى أيضاً مجالات الثقة confidence intervals لأن هذه الفترات تعتمد في تكوينها الإحصائي على درجات أو مستويات ثقة معينة confidence levels مثل 95% أو 99 % وغيرها، بمعنى أن احتمال أن يكون مجال التقدير صحيح هو 0.95 أو 0.99.

فإذا كان متوسط أعمار الناخبين يتراوح ما بين 46 و34 سنة، ودرجة الثقة هي 95 % فإن هذا معناه أنه لو تكررت التجربة عدد كبير من المرات، فإن التقدير سيكون محصوراً بين هذين الرقمين في 95 من الحالات (أي احتمال أن يكون صحيحاً هو 95%).

1.2. التقدير النقطي point estimation:

1.1.2. متوسط المجتمع:

ليكن مجتمع ما متوسطه μ غير معلوم، نأخذ عينة عشوائية حجمها n، لنعتبر متوسط العينة $\overline{X}$، بحيث:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

فرضية 1: أفضل تقدير لمتوسط مجتمع μ، ونرمز له بالرمز $\hat{\mu}$ هو القيمة المتوسطة للعينة $\overline{X}$، أي أن:

$$\hat{\mu} = \overline{X}$$

2.1.2. تشتت المجتمع:

ليكن مجتمع ما تشتته σ^2 غير معلوم، نأخذ عينة عشوائية حجمها n، لنعتبر تشتت العينة S^2، بحيث:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{X_i^2}{n-1} - \frac{n\overline{X}^2}{n-1}$$

فرضية 2: أفضل تقدير لتشتت مجتمع σ^2، ونرمز له بالرمز $\hat{\sigma}^2$ هو تشتت العينة S^2، أي أن:

$$\hat{\sigma}^2 = S^2$$

مثال 6: أوجد أفضل تقدير لمتوسط وتشتت مجتمع من العينة المسحوبة منه بشكل عشوائي:

19.30, 19.61, 18.27, 18.90, 19.14, 19.90, 18.76, 19.10

الحل:

أفضل تقدير لمتوسط المجتمع هو:

$$\hat{\mu} = \overline{x} = \sum_{i=1}^{8}\frac{x_i}{8} = \frac{152.98}{8} = 19.12$$

وأن أفضل تقدير لتشتت المجتمع هو:

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{n-1} - \frac{n\overline{x}^2}{n-1} = \frac{2927.1}{7} - \frac{8(19.12)}{7} = 0.25$$

ليكن الآن مجتمع ما متوسطه μ غبر معلوم تشتته σ^2 غير معلوم أيضاً، لنأخذ عينتان عشوائيان:

	قيم العينة		
	الحجم	المتوسط	التشتت
العينة I	n_1	$\overline{X}_1$	S_1^2
العينة II	n_2	$\overline{X}_2$	S_2^2

فإن تقدير متوسط المجتمع يعطى بالعلاقة التالية:

$$\hat{\mu} = \frac{n_1\overline{X_1} + n_2\overline{X_2}}{n_1 + n_2}$$

وأن تقدير تشتت المجتمع يعطى بالعلاقة التالية:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

مثال 7: عينتان، بحجم 40 و50 على الترتيب، تم أخذهما من مجتمع متوسطه μ وتشتته σ^2 مجهولان. باستخدام معطيات العينتان، أوجد أفضل تقدير لمتوسط وتشتت هذا المجتمع.

العينة I

x_1	18	19	20	21	22
f	3	7	15	10	5

العينة II

x_2	18	19	20	21	22	23
f	10	21	8	6	3	2

الحل:

العينة الأولى:

$$\overline{x_1} = \frac{\sum_{i=1}^{5} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{5} f_i} = \frac{807}{40} = 20.175$$

$$s_1^2 = \sum_{i=1}^{5} \frac{f_i x_i^2}{n-1} - \frac{n\overline{x}^2}{n-1} = \frac{16329}{39} - \frac{40(20.175)^2}{39} = 1.225$$

العينة الثانية:

$$\overline{x_2} = \frac{\sum_{i=1}^{6} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{5} f_i} = \frac{977}{50} = 19.54$$

$$s_2^2 = \sum_{i=1}^{6} \frac{f_i x_i^2}{n-1} - \frac{n\overline{x}^2}{n-1} = \frac{19177}{49} - \frac{50(19.54)^2}{49} = 1.764$$

بالتالي لدينا من أجل المجتمع:

$$\hat{\mu} = \frac{n_1\overline{X_1} + n_2\overline{X_2}}{n_1 + n_2} = \frac{40(20.175) + 50(19.54)}{40 + 90} = 19.82$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{39(1.225) + 49(1.764)}{40 + 50 - 2} = 1.52$$

2.2. تقدير المجال interval estimation:

1.2.2. متوسط المجتمع:

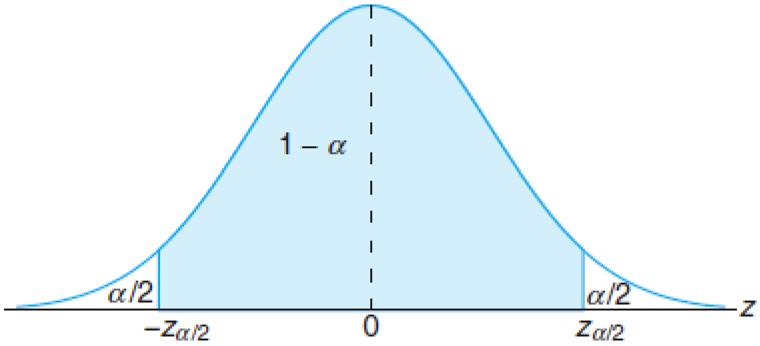
a) مجالات الثقة للمتوسط μ، تشتت المجتمع σ^2 معروف

إذا كان X يتبع توزيع طبيعي بحيث $X \sim N(\mu, \sigma)$ ، بالتالي فإن $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

وإذا لم يكن X يتبع توزيع طبيعي وكانت n كبيرة، بالتالي فإنه حسب نظرية النهاية المركزية $\overline{X}$ يتبع توزيع طبيعي $\overline{X} \sim N(\mu, \sigma / \sqrt{n})$.

بإجراء التحويل $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ حيث Z يتبع توزيع طبيعي $Z \sim N(0,1)$ ، بالتالي:

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$



نتيجة 1: إذا كان $\overline{x}$ متوسط عينة عشوائية حجمها n من مجتمع تشتته معروف σ^2 ، فإن مجال ثقة مقداره $100(1-\alpha)\%$ للمتوسط μ يعطى بالعلاقة التالية:

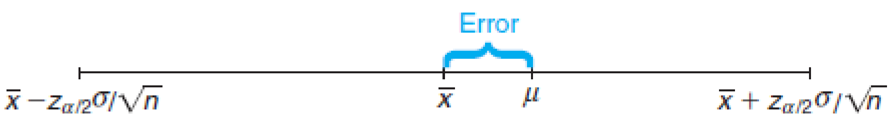
$$\overline{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

حيث $z_{\alpha/2}$ هي قيمة Z التي تترك مساحة مقدارها $\alpha/2$ إلى يمينها.

ملاحظة 1: يمكن كتابة مجال الثقة السابق على النحو التالي:

$$\mu = \overline{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

مبرهنة 5: إذا تم استخدام $\overline{x}$ متوسط عينة كتقدير لمتوسط المجتمع μ ، فإننا نكون $100(1-\alpha)\%$ واثقون بأن الخطأ لن يتجاوز $z_{\alpha/2} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.



يبين الجدول التالي مجالات الثقة الأكثر استخداماً:

99%	98%	95%
$\bar{x} \pm 2.575\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{x} \pm 2.326\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{x} \pm 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

مبرهنة 6: إذا تم استخدام $\bar{x}$ متوسط عينة كتقدير لمتوسط المجتمع μ، فإننا نكون $100(1-\alpha)\%$ واثقون بأن الخطأ لن يتجاوز قيمة محددة e إذا كان حجم العينة $n=\left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{e}\right)^2$.

مثال 8: ينتج مصنع ما صفائح فولاذية حيث أوزانها تخضع لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 2.4 kg. عينة عشوائية من 36 صفيحة فولاذية وزنها الوسطي 31.4 kg، أوجد مجال تقدير متوسط أوزان الصفائح بدرجة ثقة 95% ومن ثم 99%.

الحل:

من أجل درجة الثقة 95%:

$$31.4-1.96\frac{2.4}{\sqrt{36}}<\mu<31.4+1.96\frac{2.4}{\sqrt{36}}$$
$$30.62<\mu<32.18$$

ومن أجل درجة الثقة 99%:

$$31.4-2.575\frac{2.4}{\sqrt{36}}<\mu<31.4+2.575\frac{2.4}{\sqrt{36}}$$
$$30.37<\mu<32.43$$

مثال 9: ما هو حجم العينة في المثال السابق إذا أردنا مجال تقدير المتوسط μ بدرجة ثقة 95% بحيث لا يتجاوز الخطأ القيمة 0.6؟

الحل:

$$n=\left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{e}\right)^2=\left(\frac{1.96(2.4)}{0.6}\right)^2=61.47$$

بالتالي نحتاج إلى 62 عينة.

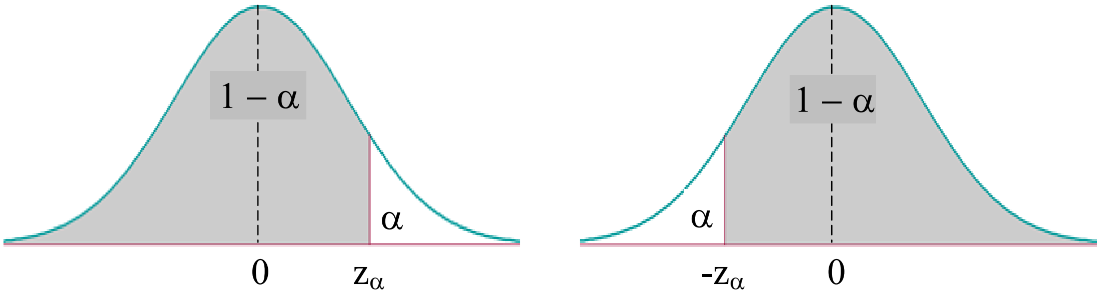
مجال الثقة ذو طرف واحد one sided confidence interval:

مجالات الثقة التي وجدناها حتى الآن تسمى ذو طرفين two sided (الحد الأدنى والحد الأعلى مطلوبان). لكن هناك الكثير من التطبيقات يطلب منها حد واحد (الأدنى أو الأعلى). نسمي في هذه الحالة مجال الثقة على أنه ذو طرف واحد، ويكون لدينا بالنسبة للشكل اليساري:

$$P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<z_{\alpha}\right)=1-\alpha \quad \Leftrightarrow \quad P\left(\mu>\overline{X}-z_{\alpha}\sigma/\sqrt{n}\right)=1-\alpha$$

ومن أجل الشكل اليميني:

$$P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}>-z_{\alpha}\right)=1-\alpha \quad \Leftrightarrow \quad P\left(\mu<\overline{X}+z_{\alpha}\sigma/\sqrt{n}\right)=1-\alpha$$



نتيجة 2: إذا كان $\overline{x}$ متوسط عينة عشوائية حجمها n من مجتمع تشتته معروف σ^2، فإن حدود مجال ثقة مقداره $100(1-\alpha)\%$ للمتوسط μ يعطى بالعلاقة التالية:

$$\overline{x}+z_{\alpha}\sigma/\sqrt{n}, \quad \text{upper one sided bound}$$

$$\overline{x}-z_{\alpha}\sigma/\sqrt{n}, \quad \text{lower one sided bound}$$

مثال 10: في تجربة تحليل نفسي، تم اختيار 25 شخصاً بشكل عشوائي وتم رصد وقياس ردة الفعل، مقدرة بالثواني، نتيجة تحريض ما. تشير التجارب السابقة إلى أن تشتت رد الفعل لهذا النوع من التحريض هو 4 s^2 وأن توزيع رد الفعل يمكن تقريبه بالطبيعي. الزمن الوسطي للعينة كان s 6.2. أوجد الحد الأعلى لمجال ثقة 95% ذو طرف واحد.

الحل:

حد مجال ثقة 95% يعطى بالعلاقة التالية:

$$\overline{x}+z_{\alpha}\sigma/\sqrt{n}=6.2+1.645\sqrt{4/25}=6.858\ s$$

b) مجالات الثقة للمتوسط μ، تشتت المجتمع σ^2 غير معروف

إذا كان X يتبع توزيع طبيعي بحيث $X\sim N(\mu,\sigma)$، وبما أن التشتت σ^2 غير معروف بالتالي نحتاج إلى تقدير له $\hat{\sigma}^2$. وكما وجدنا سابقاً بأن أفضل تقدير لتشتت المجتمع هو: $\hat{\sigma}^2=S^2$. بالتالي فإن $\overline{X}\sim N(\mu,\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}})$.

بإجراء التحويل $Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$ حيث Z يتبع توزيع طبيعي $Z\sim N(0,1)$، بالتالي:

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\overline{X}-\mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

نتيجة 3: إذا كان $\overline{x}$ متوسط عينة عشوائية حجمها n (حيث n كبيرة) من مجتمع يخضع لتوزيع طبيعي متوسطه μ غير معروف وتشتته σ^2 غير معروف أيضاً، فإن مجال ثقة مقداره $100(1-\alpha)\%$ للمتوسط μ يعطى بالعلاقة التالية:

$$\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

حيث $z_{\alpha/2}$ هي قيمة Z التي تترك مساحة مقدارها $\alpha/2$ إلى يمينها.

ملاحظة 2: يمكن كتابة مجال الثقة السابق على النحو التالي:

$$\mu = \overline{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

مبرهنة 6: إذا تم استخدام $\overline{x}$ متوسط عينة كتقدير لمتوسط المجتمع μ، فإننا نكون $100(1-\alpha)\%$ واثقون بأن الخطأ لن يتجاوز $z_{\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$.

مثال 11: تم اختبار عينة من 225 خريج من كليات الهندسة في مادة الرياضات ووجد أن متوسط العينة هو 65 وانحرافها المعياري هو 12. أوجد مجال تقدير متوسط علامات الخريجين بدرجة ثقة 99%.

الحل:

$$65 - 2.575\frac{12}{\sqrt{225}} < \mu < 65 + 2.575\frac{12}{\sqrt{225}}$$

$$62.94 < \mu < 67.06$$

مثال 12: عينة من القراءات تم أخذها من مجتمع طبيعي متوسطه μ وتشتته σ^2 مجهولان أعطت الجدول التالي:

x	17.4	17.5	17.6	17.7	17.8
f	12	16	19	23	10

عينة ثانية من نفس المجتمع أعطت ما يلي:

$$n_2 = 72, \quad \sum x = 1267.2, \quad \sum x^2 = 22536$$

أوجد أفضل تقدير لمتوسط وتشتت هذا المجتمع، ومن ثم جمع العينتين معاً وأوجد مجال تقدير μ بدرجة ثقة 90%.

الحل:

العينة الأولى:

$$\overline{x_1}=\frac{\sum_{i=1}^{5} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{5} f_i}=\frac{1408.3}{80}=17.604$$

$$s_1^2=\sum_{i=1}^{5}\frac{f_i x_i^2}{n-1}-\frac{n\overline{x}^2}{n-1}=\frac{24792.63}{79}-\frac{80(17.604)^2}{79}=0.0161$$

العينة الثانية:

$$\overline{x_2}=\frac{\sum x}{n_2}=\frac{1267.2}{72}=17.6$$

$$s_2^2=\frac{\sum x^2}{n-1}-\frac{n\overline{x}^2}{n-1}=\frac{22536}{71}-\frac{72(17.6)^2}{71}=3.286$$

بالتالي لدينا من أجل المجتمع:

$$\hat{\mu}=\frac{n_1\overline{X_1}+n_2\overline{X_2}}{n_1+n_2}=\frac{80(17.604)+72(17.6)}{80+72}=17.602$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}=\frac{79(0.0161)+71(3.286)}{80+72-2}=1.564$$

من أجل درجة الثقة 90%:

$$17.602-1.645\frac{1.564}{\sqrt{152}}<\mu<17.602+1.645\frac{1.564}{\sqrt{152}}$$

$$17.435<\mu<17.769$$

تمارين

1. ليكن لدينا المتحولات العشوائية المستقلة $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ والتي لكل منها توزيع بواسون بوسيط $\lambda = 2$، فإذ كان $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$، أوجد $P(190 < X < 210)$.

2. إذا كان متوسط الدخل الأسبوعي لمجموعة كبيرة من العمال المهرة هو 1200 ليرة سورية بانحراف معياري قدره 100 ليرة سورية. فما هو احتمال أن يكون متوسط دخل عينة حجمها $n = 64$ أكثر من 1150 ليرة سورية في الأسبوع.

4. وجد أن نسبة تركيز التوتياء المستخلصة من عينة من القياسات والمأخوذة من 36 موقع مختلف من نهر هي 2.6 g بالميلي ليتر. أوجد مجال تقدير متوسط تركيز التوتياء في النهر بدرجة ثقة 95% ومن ثم 99%، وذلك بفرض أن الانحراف المعياري للمجتمع هو 0.3 g بالميلي ليتر.

5. عينة عشوائية من 100 رجل في أحد المناطق السكانية، وجد أن مجال الثقة 95% لأطوال الرجال هو [177.22, 179.18] سم. أوجد القيمة $\bar{x}$، متوسط العينة، والانحراف المعياري σ للتوزيع الطبيعي الذي أخذت منه العينة. أوجد بدرجة ثقة 98% متوسط أطوال الرجال.

6. عينة من القراءات تم أخذها من مجتمع طبيعي متوسطه μ وتشتته σ^2 مجهولان أعطت الجدول التالي:

x	82	83	84	85	86	87
f	6	9	19	27	22	17

أوجد أفضل تقدير لمتوسط وتشتت هذا المجتمع.

عينة ثانية من نفس المجتمع أعطت ما يلي:

$$n_2 = 64, \quad \sum x = 5452.8, \quad \sum (x - \bar{x})^2 = 973.44$$

أوجد أفضل تقدير لمتوسط وتشتت هذا المجتمع.

جمع العينتين معاً وأوجد مجال تقدير المتوسط للمجتمع μ بدرجة ثقة 97%.

ISSN: 2617-989X

العلامة العظمى: 100 **علامة النجاح: 50** **المدة: 45 دقيقة**

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة **(84) درجة**

ملاحظة: بعض الأسئلة تحتاج إلى جداول التوزيع الطبيعي موجودة في نهاية صفحات الاختبار

1. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متحولات عشوائية مستقلة بحيث أن: $X_i \sim N(\mu, \sigma)$ من أجل $i = 1, 2, \ldots, n$، بالتالي فإن المتوسط $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$ يتبع:

a) $\overline{X} \sim N(\mu, \sigma / n)$

b) $\overline{X} \sim N(\mu, \sigma / \sqrt{n})$

c) $\overline{X} \sim N(\mu / n, \sigma / \sqrt{n})$

d) $\overline{X} \sim N(\mu / n, \sigma / n)$

2. عينة عشوائية حجمها 15 من توزيع $X \sim N(60, 4)$، تم حساب متوسط العينة. احتمال أن يكون هذا المتوسط أقل من 58 هو:

a) 0.0264

b) 0.9736

c) 0.5

d) لا شيء ما سبق

3. عينة حجمها n أخذت من مجتمع يخضع لتوزيع طبيعي $X \sim N(74,6)$ وتم حساب متوسط كل عينة عشوائية. إذا كان $P(\overline{X} < 76) = 0.854$، فإن حجم العينة n هو:

a) 5

b) 10

c) 15

d) لا شيء ما سبق

4. مجتمع ما متوسطه μ وتشتته σ^2. عينة عشوائية من هذا المجتمع متوسطها $\overline{X}$ وتشتتها S^2. أي من العبارات التالية صحيح

a) μ أفضل تقدير لـ $\overline{X}$ و σ^2 أفضل تقدير لـ S^2
b) μ أفضل تقدير لـ $\overline{X}$ و S^2 أفضل تقدير لـ σ^2
c) $\overline{X}$ أفضل تقدير لـ μ و σ^2 أفضل تقدير لـ S^2
d) $\overline{X}$ أفضل تقدير لـ μ و S^2 أفضل تقدير لـ σ^2

5. لدينا العينة 10 ,6 ,2 ,8 ,4 المأخوذة عشوائياً من مجتمع ما. أفضل تقدير لمتوسط وتشتت المجتمع هو:

a) متوسط 6 وتشتت 8
b) متوسط 7.5 وتشتت 10
c) متوسط 6 وتشتت 10
d) متوسط 7.5 وتشتت 8

6. لدينا العينتان 10 ,6 ,2 ,8 ,4 و7 ,3 ,5 المأخوذتان عشوائياً من مجتمع ما. أفضل تقدير لمتوسط وتشتت المجتمع هو:

a) متوسط 5.625 وتشتت 7
b) متوسط 5.625 وتشتت 8
c) متوسط 5.5 وتشتت 7
d) متوسط 5.5 وتشتت 8

7. مجال تقدير متوسط مجتمع μ تشتته σ^2 باستخدام متوسط عينة حجمها n وبدرجة ثقة 95% هو:

a) $\bar{x} \pm \sigma / \sqrt{n}$
b) $\bar{x} \pm 2.575\, \sigma / \sqrt{n}$
c) $\bar{x} \pm 2.326\, \sigma / \sqrt{n}$
d) $\bar{x} \pm 1.96\, \sigma / \sqrt{n}$

8. عند زيادة درجة الثقة فإن مجال التقدير:

a) يزداد

b) ينقص

c) يبقى على حاله

d) يمكن أن يزداد أو ينقص تبعاً للمعطيات

9. ما هو أصغر حجم عينة من أجل مجال تقدير متوسط بثقة 95% علماً أن طول المجال لا يتجاوز 1 وأن المجتمع طبيعي تشتته 9:

a) 1245

b) 34

c) 95

d) 139

10. عينة بحجم $n=121$، متوسطها 96 من مجتمع انحرافه المعياري $\sigma=14$. المجال بثقة 95%:

a) [93.41, 98.40]

b) [93.61, 98.60]

c) [93.51, 98.50]

d) [93.71, 98.70]

11. عندما يزداد حجم العينة n فإن عرض مجال الثقة لوسيط المجتمع:

a) يزداد

b) ينقص

c) لا يتغير

d) يمكن أن يزداد أو ينقص

12. عندما ينقص حجم العينة n إلى الربع $\left(\frac{1}{4}n\right)$ فإن عرض مجال الثقة لوسيط المجتمع:

a) يتضاعف

b) يتقلص إلى النصف

c) لن يتغير

d) يصبح أربعة أضعاف

السؤال الثاني: **(16) درجة**

عينة من القراءات تم أخذها من مجتمع طبيعي متوسطه μ وتشتته σ^2 مجهولان أعطت الجدول التالي:

x	16.5	17.5	18	18.5	19
f	6	10	14	12	8

عينة ثانية من نفس المجتمع أعطت ما يلي:

$$n_2 = 42, \quad \sum x = 735, \quad \sum x^2 = 12924$$

أوجد أفضل تقدير لمتوسط وتشتت هذا المجتمع، ومن ثم جمع العينتين معاً وأوجد مجال تقدير μ بدرجة ثقة .95%

الحل:

العينة الأولى:

$$\overline{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{5} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{5} f_i} = \frac{900}{50} = 18$$

$$s_1^2 = \sum_{i=1}^{5} \frac{f_i x_i^2}{n-1} - \frac{n\overline{x}^2}{n-1} = \frac{16227}{49} - \frac{50(18)^2}{49} = 0.551$$

العينة الثانية:

$$\overline{x}_2 = \frac{\sum x}{n_2} = \frac{735}{42} = 17.5$$

$$s_2^2 = \frac{\sum x^2}{n-1} - \frac{n\overline{x}^2}{n-1} = \frac{12924}{41} - \frac{42(17.5)^2}{41} = 1.5$$

بالتالي لدينا من أجل المجتمع:

$$\hat{\mu} = \frac{n_1\overline{X}_1 + n_2\overline{X}_2}{n_1 + n_2} = \frac{50(18) + 42(17.5)}{50 + 42} = 17.772$$

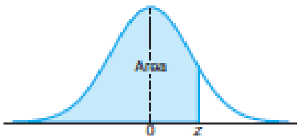
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{49(0.551) + 41(1.5)}{50 + 42 - 2} = 0.984$$

من أجل درجة الثقة 95%:

$$17.772 - 1.645\frac{0.984}{\sqrt{92}} < \mu < 17.772 + 1.645\frac{0.984}{\sqrt{92}}$$

$$17.603 < \mu < 17.941$$

توجيه في حال الخطأ: راجع الفقرة 2



Areas under the Normal Curve

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
−2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

جداول التوزيع الطبيعي القياسي

(continued) Areas under the Normal Curve

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

جداول التوزيع الطبيعي القياسي

السؤال الأول	الإجابة الصحيحة	توجيه في حال الخطأ
1	b	الفقرة 1
2	a	الفقرة 1
3	c	الفقرة 1
4	d	الفقرة 2
5	c	الفقرة 2
6	b	الفقرة 2
7	d	الفقرة 2
8	a	الفقرة 2
9	d	الفقرة 2
10	c	الفقرة 2
11	b	الفقرة 2
12	a	الفقرة 2