الجامعة الافتراضيّة السوريّة
SYRIAN VIRTUAL UNIVERSITY

اتصالات رقمية

الدكتورة أميمة دكاك

ISSN: 2617-989X

Books

اتصالات رقمية

أميمة دكاك

من منشورات الجامعة الافتراضية السورية

الجمهورية العربية السورية 2018

Digital communication

Oumayma Dakkak

Publications of the Syrian Virtual University (SVU)

Syrian Arab Republic, 2018

الفهرس

الفصل الأول:
مقدمة حول الاتصالات الرقمية

ISSN: 2617-989X

الكلمات المفتاحية:

مكونات نظم الاتصالات، خواص الاتصالات الرقمية، الحزم الترددية، نظرية المعلومات، كمية المعلومات، الأنتروبية، كمية المعلومات المتبادلة، سعة القناة، فعالية الترميز.

الملخص:

يعرض الفصل مكونات نظم الاتصالات الرقمية، ومزايا ومساوئ هذه النظم، وأنواع الحزم الترددية وآليات تحصيصها. ويعطي تذكرة حول مفهوم المعلومات وكمية المعلومات ولأنتروبية، وكمية المعلومات المتبادلة وصولاً إلى تعريف سعة القناة. ثم يعطي ملخصاً لطرق الترميز التي تسمح بتصحيح أخطاء النقل.

الأهداف التعليمية:

- تعرف مكونات نظام الاتصالات الرقمية
- تعرف خواص الاتصالات الرقمية
- تعرف مفهوم كمية المعلومات
- حساب الأنتروبية وسعة القناة
- تعرف الحزم الترددية المختلفة ونوع الانتشار فيها وتطبيقاتها

1. نظام الاتصالات

نظام الاتصالات الرقمية هو نظام ينقل المعلومات من منبع معلومات (مصدر معلومات) رقمية إلى مستقبل معيّن. أما منبع المعلومات الرقمية فهو ينتج مجموعة منتهية من الرسائل الممكنة. مثال على ذلك، نغمات لوحة مفاتيح الهاتف التي تتضمن عدداً منتهياً من المحارف (الرسائل) التي ينتجها هذا المنبع. في حين منبع المعلومات التماثلية رسائل معرفة على مجالات مستمرة، ومثال على ذلك إشارة مكرفون الهاتف.

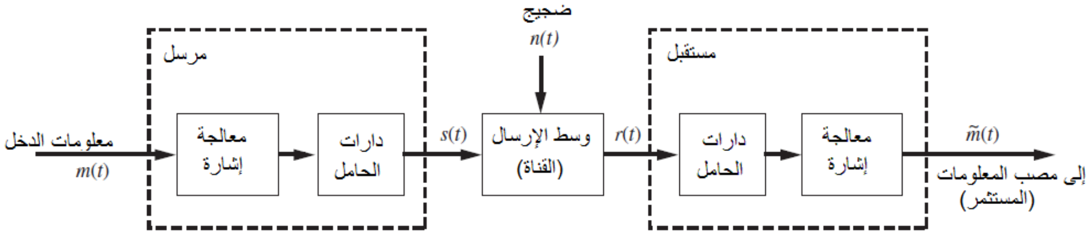
لنظم الاتصالات الرقمية فوائد عديدة نذكر منها:

- يمكن استعمال الدارات الرقمية الرخيصة الثمن نسبياً في تنجيزه
- يمكن تحقيق سرية المعلومات بتعميتها
- يمكن تحقيق مجال ديناميكي أوسع (الفرق بين أعلى قيمة وأخفض قيمة لإشارة المعلومات)
- يمكن ضم معطيات صوتية وفيديوية ومعطيات أخرى معاً وإرسالها على نظام إرسال رقمي مشترك
- في النظم البعيدة المدى لا يتراكم الضجيج من مكرّر إلى آخر
- يمكن كشف أخطاء النقل حتى بوجود كم كبير من الضجيج
- يمكن في غالب الأحيان تصحيح الأخطاء باستعمال الترميز

إلا أن لنظم الاتصالات الرقمية مساوئها أيضاً:

- تتطلب عرض حزمة أوسع من نظم الاتصالات التماثلية
- تتطلب تزامناً

تطغى حسنات نظم الاتصالات الرقمية على مساوئها، لذلك تنتشر هذه النظم على نطاق واسع.
يتكون كل نظام اتصالات من ثلاثة مكوّنات أساسية: المرسل والقناة والمستقبل.



نظام الاتصالات

قد تتضمن كتلةُ معالجة الإشارة مبدلاتٍ رقميةً–تماثلية وبالعكس، وقد تتضمن تشكيل إشارات المعلومات. تضمن دارات الحامل أن تتوافق الإشارة المرسلة على القناة مع عرض حزمة القناة. وبذلك فهي تضمن نقل الطيف إلى ما يتناسب مع طيف القناة.

ISSN: 2617-989X

يمكن أن تكون القناة سلكية (أسلاك مجدولة، خطوط هاتفية، كبال محورية، دليل موجي، ألياف ضوئية) أو لاسلكية (الهواء أو الخلاء أو ماء البحار). بوجه عام، يخمّد وسط القناة الإشارات المنقولة خلاله، ذلك أن ضجيج القناة والضجيج الناشئ عن المستقبل يجعل الإشارة على خرج المستقبل تختلف عن الإشارة المرسلة. إضافة إلى ذلك، يمكن أن تقدم القناة عدة مسارات للإشارة بين المرسل والمستقبل، قد يعاكس بعضها البعض الآخر ويحصل خفوتٌ في القناة.

يأخذ المستقبل هذه الإشارة المشوهة يعيدها إلى الحزمة الأساسية ويحاول تنظيف الإشارة من تشوهاتها ليعطيها للمستثمر.

الهدف هو تصميم نظام اتصالات يرسل المعلومات إلى المستقبل بأقل تشوه ممكن، وبما يحدد القيود المفروضة المتعلقة بالاستطاعة المرسلة المسموحة، وعرض الحزمة المتاح، والتكلفة. في النظم الرقمية يُقاس التشوه باحتمال خطأ البت أو معدل خطأ البت.

ISSN: 2617-989X

2. تحصيص الترددات

نظرياً، يمكن استخدام أي نوع من التعديل عند أي تردد إرسال؛ إلا أن القوانين الناظمة الحكومية تحدد نمط التعديل وعرض الحزمة ومقدار الاستطاعة المرسلة ونوع المعلومات التي يرسلها المستثمر للحزم الترددية المحددة.

الاتحاد الدولي للاتصالات International Telecommunication Union ITU هو وكالة دولية للأمم المتحدة متخصصة في تحصيص الترددات وتحديد المقاييس التقنية لحوالي 200 دولة. للاتحاد ثلاثة فروع:

- ITU–R للاتصالات الراديوية Radio Communication: يسند الترددات ويهتم بالاستعمال الفعال لطيف الترددات الراديوية.
- ITU–T لمعيرة الاتصالات Telecommunication Standards: يهتم بقضايا التقنية والتشغيل والتعرفة لشبكة الاتصالات الهاتفية العامة Public Telephone Network (PTN) والنظم الراديوية المتعلقة بها.
- ITU–D للتطوير Development: لتطوير الخدمات للبلدان النامية.

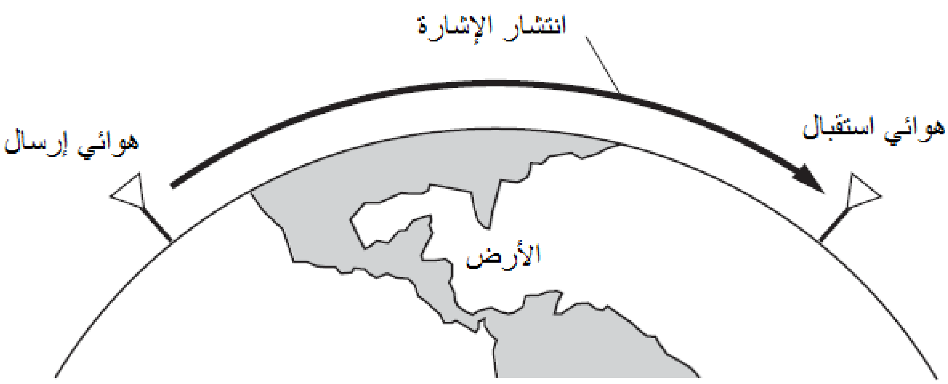
بالمقابل، ثمة إدارة وطنية للطيف الترددي على مستوى كل دولة، تدير الاتصالات داخل البلاد وخارجها، بما يتوافق مع توصيات الاتحاد الدولي للاتصالات.

يبين الجدول التالي الحزم الترددية المختلفة وخواصها واستعمالها:

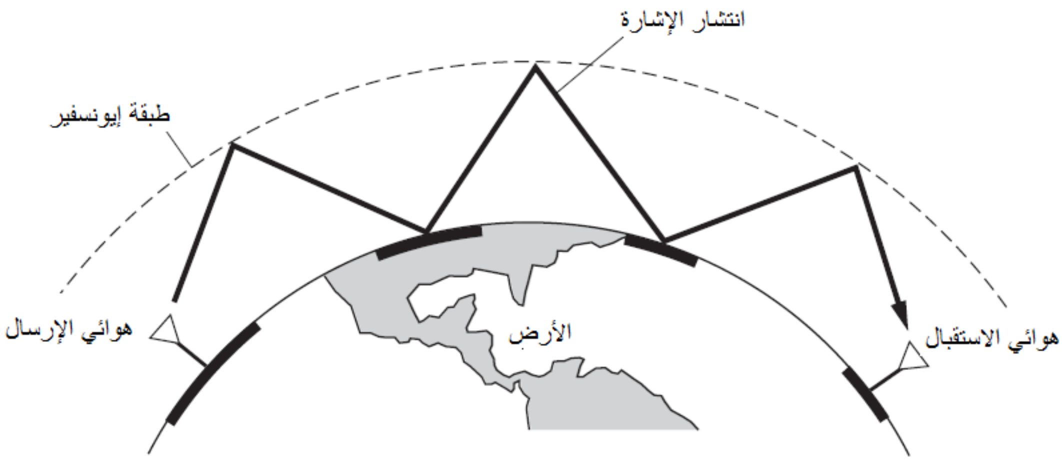
الحزمة الترددية	اسم الحزمة	خواص الانتشار فيها	الاستعمال
3-30kHz	Very Low Frequency (VLF)	أمواج أرضية؛ تخميد ضعيف ليلاً ونهاراً؛ ضجيج جوي عالٍ	ملاحة طويلة المدى، اتصالات بحرية
30-300kHz	Low Frequency (LF)	يشبه VLF ولكن أقل موثوقية؛ يعاني من الامتصاص نهاراً	ملاحة طويلة المدى، اتصالات بحرية؛ إرشاد لاسلكي.
300-3000kHz	Medium Frequency (MF)	موجة أرضية وسماوية ليلية؛ تخميد ضعيف ليلاً عالٍ نهاراً؛ ضجيج جوي	اتصالات راديوية بحرية، إيجاد الاتجاه، البث بالتعديل المطالي AM.
3-30MHz	High Frequency (HF)	انعكاسات إيونوسفير تتغير حسب الوقت يومياً وحسب الفصل والتردد. ضجيج جوي منخفض عند 30MHz	راديو الهواة؛ البث الدولي؛ الاتصالات البحرية واتصالات السفن والطائرات؛ اتصالات البرق والهاتف والفاكس.
30-300MHz	Very High Frequency (VHF)	انتشار حسب خط نظر LOS[1] ، مع تبعثر بسبب الحرارة والضجيج الكوني.	بث تلفزي VHF، راديو FM باتجاهين، اتصالات طائرات ومساعدة ملاحة.
0.3-3GHz 1.0-2.0 GHz 2.0-4.0 GHz	Ultrahigh Frequency (UHF) L S	انتشار حسب خط نظر LOS، ضجيج كوني	بث تلفزي، هاتف خلوي، مساعدة ملاحة، رادار، GPS[2]، وصلات مكروية، نظم اتصالات شخصية.

1 Line Of Sight
2 Global Positioning System

3–30 GHz 4.0–8.0 GHz 8.0–12 GHz 12–18 GHz 18–27 GHz 27–40 GHz 26.5–40GHz	Super–high freq. (SHF) C X Ku K Ka R	انتشار LOS، تخميد مطري 10Ghz وامتصاص 22.2GHz	اتصالات ساتلية، رادار، وصلة مكروية.
30–300 GHz 33–50 GHz 40–75 GHz 75–110 GHz 110–300GHz	Extremely HF (EHF) Q V W mm ملمترية	امتصاص بخار ماء عند 18.3GHz وأكسجين عند 60 و119 GHZ	رادار وسواتل وتجريبي
10^3–10^7GHz	تحت الحمراء والضوء المرئي وفوق البنفسجية	انتشار خط نظر LOS	اتصالات ضوئية



انتشار أمواج أرضية ترددات أقل من 2MHz



انتشار أمواج سماوية ترددات 2-30 MHz

انتشار خط نظر LOS ترددات أعلى من 30 MHz

3. قياس كمية المعلومات (مبادئ نظرية المعلومات)

ذكرنا أن الهدف من نظام اتصالات هو إرسال معلومات من مرسل إلى مستقبل. فما هي المعلومات؟ وكيف نقيسها؟

نعلم أن كمية المعلومات مرتبطة بالمفاجأة التي نحصل عليها عند تلقّي المعلومة. على سبيل المثال: عبارة "جرى تدمير المحيطات بانفجار نووي" تحمل معلومات أكبر بكثير من عبارة "يهطل المطر". وقد اتُّفق على أن كمية المعلومات I_j المرتبطة برسالة j تساوي لغرتم مقلوب احتمال هذه الرسالة p_j. أي إن: $I_j = \log_2(\frac{1}{p_j}) = -\frac{Ln(p_j)}{Ln(2)}$ وحين يكون اللغرتم للأساس 2 تُقاس كمية المعلومات هذه بالبت.

نلاحظ أن:

$$
\begin{array}{ll}
I(s_k) = 0 & if \quad p_k = 1 \\
I(s_k) \geq 0 & for \; 0 \leq p_k \leq 1 \\
I(s_k) > I(s_i) & for \quad p_k < p_i \\
if \quad p_k = 1/2 & I(s_k) = 1 bit \; (\; if \quad \log \quad is \quad \log_2)
\end{array}
$$

إذا كان لدينا منبعٌ رقميّ يصدر N رسالة فإن القيمة الوسطى لكمية المعلومات لهذا المنبع تسمى أنتروبية المنبع source entropy وتعطى بالعلاقة:

$$H = \sum_{j=1}^{N} p_j I_j = \sum_{j=1}^{N} p_j \log_2(\frac{1}{p_j})$$

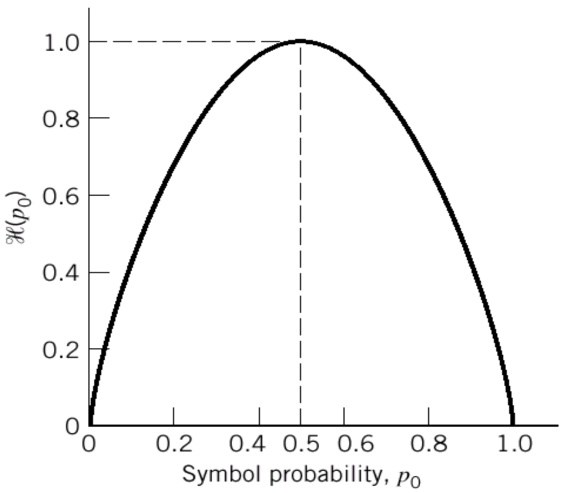
نلاحظ أن الأنتروبية تتمتع بالخواص التالية:

$$
\begin{array}{l}
0 \leq H(S) \leq \log_2 K \\
H(s) = 0 \quad iff \quad (p_k = 1 \; for \; some \; k) \; and \; (p_i = 0 \; for \; i \neq k) \\
\qquad\qquad\qquad (no \; uncertainty) \\
H(S) = \log_2 K \quad iff \quad p_k = 1/K \quad \forall k \quad (\max \; uncertainty)
\end{array}
$$

مثال: في حالة منبع اثناني binary، يصدر 0 باحتمال p_0 و 1 باحتمال $p_1 = 1 - p_0$. تعطى أنتروبية المنبع بالعلاقة

$$
\begin{aligned}
H(S) &= -p_0 \log_2(p_0) - p_1 \log_2(p_1) \\
&= -p_0 \log_2(p_0) - (1 - p_0) \log_2(1 - p_0)
\end{aligned}
$$

ويمكن رسمها بدلالة p_0 فنجد:



نلاحظ أن القيمة العظمى للأنتروبية تتحقق حين $p_0 = p_1 = 0.5$ وهي حالة الشك العظمى على المنبع، وأن قيمة الأنتروبية معدومة إذا كان $p_0 = 0$ (يستحيل ظهوره) أو $p_0 = 1$ (يتأكد ظهوره ويستحيل ظهور 1) أي حين ينعدم الشك على المنبع.

مثال محلول:

نفترض لدينا منبع يصدر رسائل من 12 رقماً كل رقم يمكن أن يأخذ باحتمالات متساوية إحدى أربع قيم. ويطلب حساب الأنتروبية.

الحل: عدد الرسائل الممكنة هو $4.4...4=4^{12}$، واحتمال كل منها $1/412$. وكمية المعلومات للرسالة الواحدة

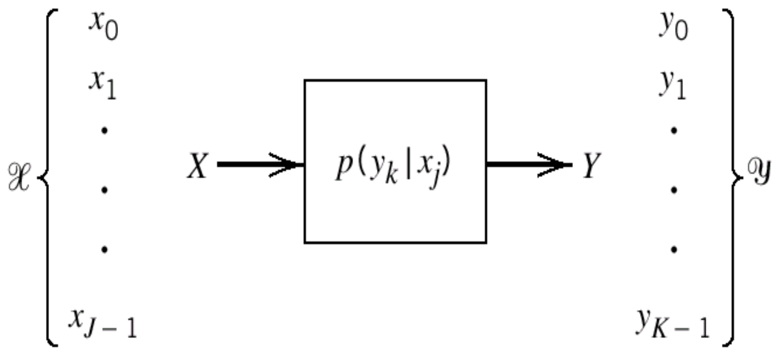
$$I_j = \log_2(\frac{1}{p_j}) = \log_2\left(\frac{1}{1/4^{12}}\right) = 12\log_2 4 = 24\,bits$$

وبما أن الرسائل متساوية الاحتمال فهذه القيمة هي نفسها القيمة الوسطى لكمية معلومات الرسائل؛ أي H=24 bits أيضاً.

فإذا كانت الرسالة الواحدة تستغرق T ثانية كان معدل إرسال المعلومات للمنبع R=H/T بتاً في الثانية.

نفترض وجود منبع X ينتج الرموز $\{x_j\},\ j = 0,1,...,J-1$ ويرسلها عبر قناة مضججة، بسبب الضجيج نستقبل مجموعة الرموز $\{y_k\},\ k = 0,1,...,K-1$. وثمة احتمالات شرطية مرتبطة بالرموز المرسَلة والرموز المستَقبَلة. كما في الشكل التالي:

ISSN: 2617-989X



يمكننا أن نكتب العلاقات التالية:

$$\sum_{k=0}^{K-1} p(y_k \mid x_j) = 1 \qquad \forall j$$

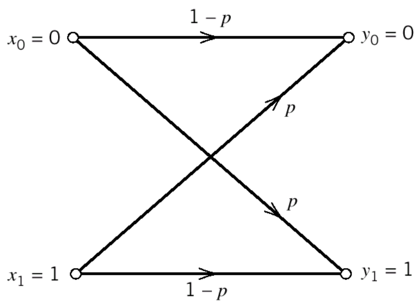
$$p(x_j, y_k) = p(y_k \mid x_j).p(x_j)$$

$$p(y_k) = \sum_{j=0}^{J-1} p(y_k \mid x_j).p(x_j) \qquad \forall k$$

نسمي $p(x_j)$ الاحتمالات المسبقة a priori، ونسمي $p(y_k)$ الاحتمالات الهامشية marginal و $p(y_k \mid x_j)$ الاحتمالات الشرطية conditional.

مثال: قناة اثنانية متناظرة

نفترض لدينا قناة اثنانية binary، ترسل الرمزين $\{0,1\}$، وتستقبل هذين الرمزين $\{0,1\}$ باحتمال خطأ p:



$p_{10} = P(y=1 \mid x=0) = P(y=0 \mid x=1) = p_{01} = p$.

ISSN: 2617-989X

إذا كانت H(x) يقيس الشك على المنبع X، فما هو الشك المتبقي على المنبع حين نستقبل Y؟ يمكننا كتابة ما يلي:

$$H(X \mid y_k) = \sum_{j=0}^{J-1} p(x_j \mid y_k) \log_2 [\frac{1}{p(x_j \mid y_k)}]$$

$$(random \quad variable \quad with \quad prob. \; p(y_k)$$

$$H(X \mid Y) = \sum_{k=0}^{K-1} H(X \mid y_k) p(y_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{J-1} p(x_j \mid y_k) p(y_k) \log_2 [\frac{1}{p(x_j \mid y_k)}]$$

$$= \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{J-1} p(x_j, y_k) \log_2 [\frac{1}{p(x_j \mid y_k)}]$$

$$conditional \quad entropy$$

نسمي H(X/Y) الأنتروبية الشرطية.

نعرف المعلومات التبادلية بين المرسل والمستقبل بالعلاقة:

$$I(X;Y) = H(X) - H(X \mid Y)$$

$$H(X) = \sum_j p(x_j) \log\left(\frac{1}{p(x_j)}\right) (\sum_k p(y_k / x_j)$$

$$= \sum_{j,k} p(x_j, y_k) \log\left(\frac{1}{p(x_j)}\right)$$

$$\Rightarrow I(X;Y) = \sum_{j,k} p(x_j, y_k) \log\left(\frac{p(x_j / y_k)}{p(x_j)}\right)$$

$$== \sum_{j,k} p(x_j, y_k) \log\left(\frac{p(y_k / x_j)}{p(y_k)}\right) = I(Y;X)$$

ما يبرهن أن هذه العلاقة تبادلية أي إذا اعتبرنا المرسل Y والمستقبل X فالمعلومات المتبادلة بينهما تبقى نفسها.

يمكننا أن نبرهن أيضاً أن:

$$I(X;Y) = H(X) - H(X \mid Y) = I(Y;X) \quad for$$

$$p(x,y) = p(y \mid x).p(x) = p(x \mid y).p(y) = p(y,x)$$

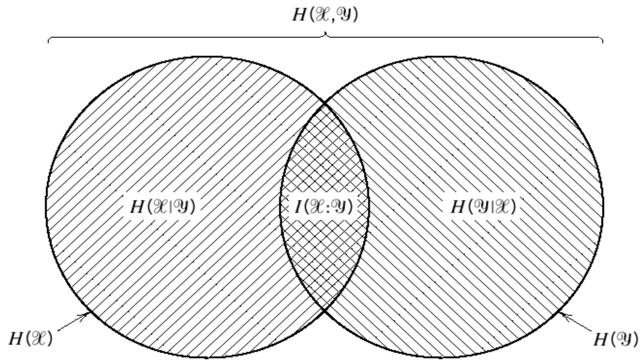
$$I(X;Y) \geq 0;$$

$$I(X;Y) = 0 \quad iff \quad p(x_j, y_k) = p(x_j).p(y_k)$$

$$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$$

$$H(X,Y) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{K-1} p(x_j, y_k).\log_2 (\frac{1}{p(x_j, y_k)})$$

يبين الشكل التالي العلاقات بين هذه الأنتروبيات:



4. سعة القناة

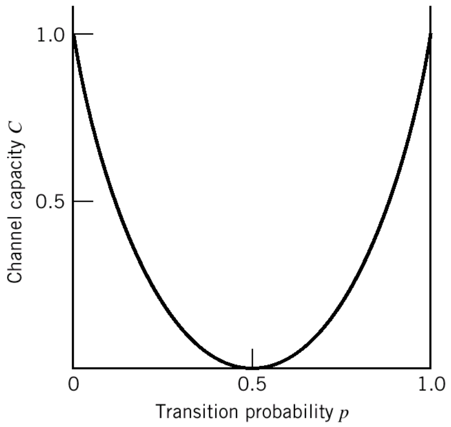
اعتماداً على المعلومات التبادلية في الفقرة السابقة يمكننا تعريف سعة القناة كما يلي:

$$C = \max_{\{p(x_j)\}} (I(X;Y))$$

في حالة القناة الاثنائية المتناظرة في المثال السابق، وبفرض احتمال إرسال الصفر يساوي احتمال الواحد يساوي 1/2:

$$\begin{aligned} C &= \max_{\{p(x_j)\}} (I(X;Y)) = I(X;Y)|_{p_0=p_1=1/2} \\ &= \sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} p(x_i, y_k) \log_2 \left[\frac{p(y_k \mid x_j)}{p(y_k)} \right] \\ &= 1 + p.\log\ p + (1-p).\log(1-p) \\ &= 1 - H(p) \end{aligned}$$

انظر الشكل التالي الذي يبين علاقة سعة القناة باحتمال الخطأ p.



نلاحظ أن السعة العظمى للقناة 1 bit وهي محققة إذا كان احتمال الخطأ 0 أو احتمال الخطأ 1. فإذا استقبلنا جميع البتات معكوسة فيمكننا استعادة الرموز المرسلة. ذلك أنه في غالب الأحيان يجري إرسال بتات معلومة في بداية الإرسال يمكن منها اكتشاف أن تكون البتات معكوسة.

من جهة أخرى، يمكن استعمال معايير عديدة لقياس فعالية نظام اتصالات ومعرفة إن كان مثالياً أو كاملاً. نظام الاتصالات الرقمية المثالي هو الذي يصغّر احتمال خطأ البت عند الخرج، آخذين بالاعتبار القيود على الطاقة المرسَلة وعرض حزمة القناة.

والسؤال الذي يمكن طرحه: هل بالإمكان اختراع نظام اتصالات بدون خطأ على خرجه حتى بوجود ضجيج على القناة؟

أجاب Claude SHANON على هذا السؤال عام 1948 حين عرّف سعة القناة للمنابع المستمرة (التي ترسل إشارات مستمرة وليس رموزاً متقطعة) بالعلاقة:

$C = B\log_2\left(1+\dfrac{S}{N}\right)$ بتاً في الثانية، حيث B عرض حزمة القناة بالهرتز، و S استطاعة الإشارة بالواط، و N استطاعة الضجيج بالواط. وقال أن الجواب على السؤال السابق "نعم" إذا كان معدل الإرسال R أقل من سعة

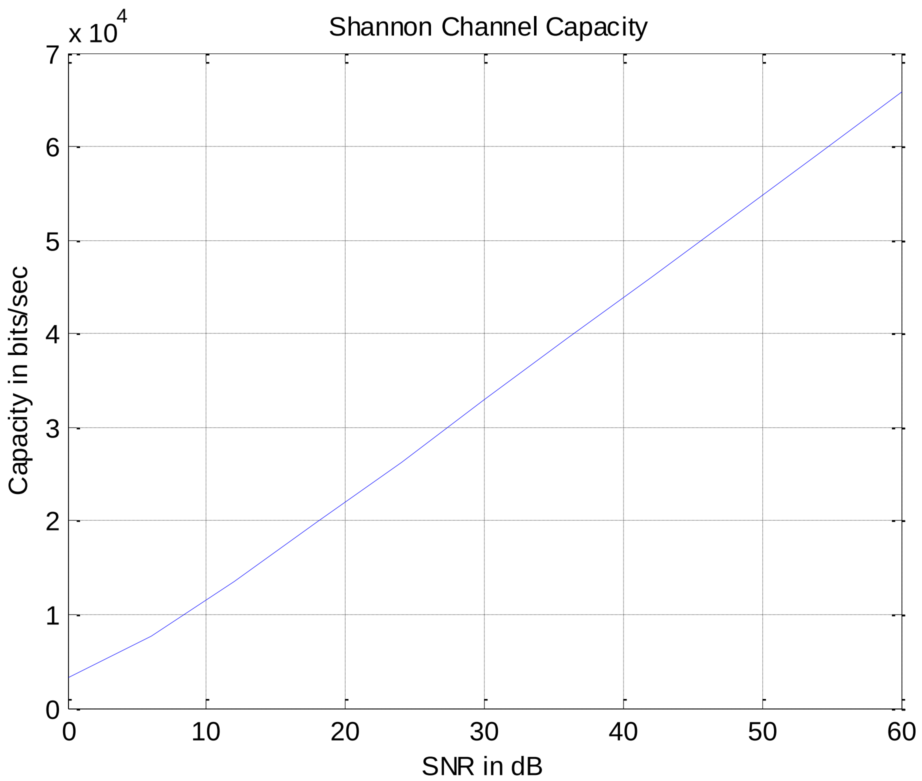
القناة C. شانون لم يبيّن كيفية بناء مثل هذا النظام ولكنه برهن على وجود هذا الحد نظرياً. كلما اقترب معدل البت من سعة القناة كان الأداء أفضل (مع غياب خطأ البت). النظم التي تقترب من هذا الحد هي نظم تعتمد تقنيات تصحيح الأخطاء.

تمرين محلول:

اكتب برنامج ماتلاب يحسب سعة خط الهاتف الذي عرض حزمته 3300 Hz بدلالة S/N التي تغطي المجال 0−60dB.

الحل:

```
% File: Example1_4.m    for Example 1-4

clear;

% B is the system bandwidth in Hz.  Note: 3300 Hz is typical
% for the bandwidth of a twisted-pair telephone line channel.
% Note: For the definition of dB, refer to Eq (2-19), where S=Pout
% and N=Pin

B = 3300;
SNRdB = 0:6:60;

SNR = zeros(length(SNRdB),1);
for (i = 1:1:length(SNRdB))
  SNR(i) = 10^(SNRdB(i)/10);
end;

C = B/log(2)*log(1 + SNR);

plot(SNRdB,C);
xlabel('SNR in dB');
ylabel('Capacity in bits/sec');
title('Shannon Channel Capacity');
grid;
```


Shannon Channel Capacity
x 10^4
7
6
5
4
3
2
1
0
Capacity in bits/sec
0
10
20
30
40
50
60
SNR in dB

5. الترميز وفعالية الترميز

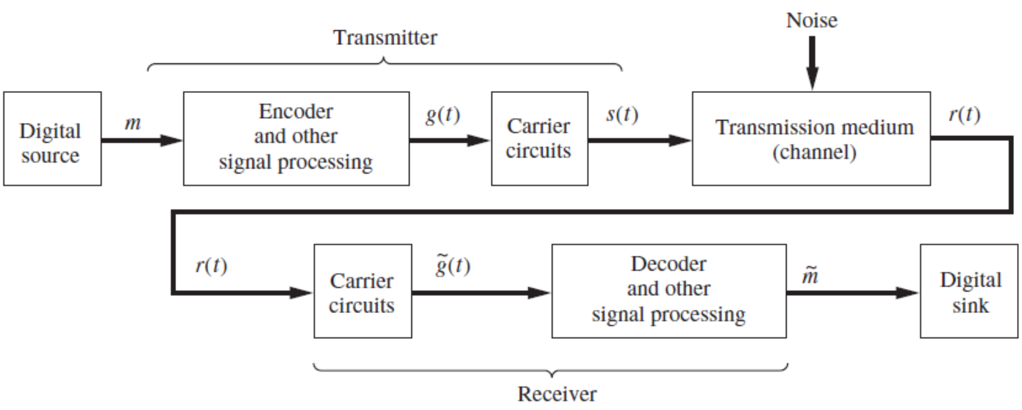
إذا تضمنت المعطيات على خرج نظام اتصالات رقمي أخطاء، وهذا ممكن جداً، يمكن خفض هذه الأخطاء باستعمال إحدى التقنيتين:

- طلب تكرار آلي (ARQ) Automatic Repeat request.
- تصحيح أخطاء أمامي(FEC) Forward Error Correction.

في النظم ARQ حين يكشف المستقبل أخطاء ندية parity في كتلة معطيات، فإنه بطلب إعادة إرسال الكتلة. في النظم FEC تُرمّز المعطيات بحيث يجري كشف الأخطاء وتصحيحها. ويسمى هذا ترميز القناة.

يعتمد الاختيار بين التقنيتين على التطبيق. فالـ ARQ يُستعمل عادةً في الاتصالات بين الحواسيب لأن تكاليف تجهيزه قليلة ولأن القناة ثنائية الاتجاه بحيث يستطيع المستقبل إرسال إقرار acknowledgement (ACK) بالمعطيات المستقبلة استقبالاً صحيحاً أو إرسال إقرار سلبي negative ACK (NAC) حين تُستقبل المعطيات مع أخطاء. أما FEC فيُستعمل لتصحيح الأخطاء على القنوات ذات الاتجاه الواحد حين لا يكون استعمال طلب إعادة الإرسال ممكناً. كذلك، في النظم التي يكون تأخير إرسالها كبيراً لأن إعادة الإرسال تتطلب تأخيراً إضافياً. لذلك فإن تصحيح الأخطاء هو المفضل في غالب الأحيان.

يبين الشكل التالي المخطط الأساسي لنظام اتصالات رقمية حيث يكون ترميز القناة وفك ترميزها ضمن كتلة الترميز وفك الترميز



الشكل العام لنظام اتصالات رقمية. التسميات من اليسار إلى اليمين:منبع رقمي، ترميز ومعالجة إشارة أخرى، دارات الحامل، وسط الإرسال (القناة)، دارات الحامل، فك الترميز ومعالجة إشارة أخرى، مصب رقمي. [1].

يتطلب الترميز إضافة بتات "حشو" إضافية إلى بتات المعطيات، بحيث يتمكن مفكك الترميز من خفض الأخطاء أو تصحيحها على خرج المستقبل. من سيئات هذا النهج زيادة معدل المعطيات (البتات في الثانية)، وهذا يتطلب بدوره زيادة عرض الحزمة اللازم للإشارة المرمزة. يمكن تصنيف الأرمزة في صفين رئيسين:

- الرماز الكتلي.
- الرماز التلفيفي.

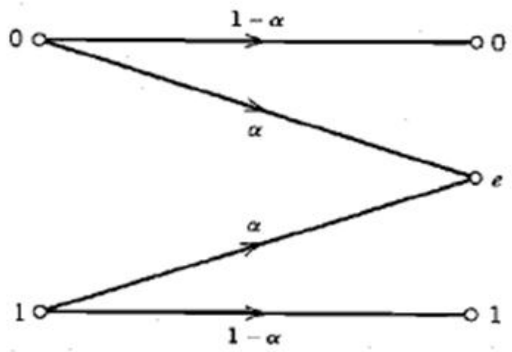
الرماز الكتلي: يجري فيه مقابلة كلٍّ دخل مكون من k بتاً بخرجٍ مكون من n بتاً n>k. بالنتيجة فإن جهاز فك الترميز بلا ذاكرة. يمكن اختيار الرماز بحيث يتضمن بتات المعطيات وبتات حشو (مثل بتات الندية parity bits)، يستعملها مفكك الترميز لكشف وتصحيح الأخطاء. نشير للرماز بالثنائية (n,k)، ونعرف معدل الرماز بـ R=k/n. تتراوح القيم العملية لـ R من 1/4 إلى 7/8. كما تتراوح قيم k من 3 إلى بضع مئات.

الرماز التلفيفي: يتطلب هذا الرماز ذاكرة. والمرمز يأخذ دخلاً k بتاً وينتج خرجاً من n بتاً، تتأثر هذه البتات ببتات الدخل و بـ v بتاً من الذاكرة v>0. يعرف معدل الرماز بـ R=k/n وهو يتراوح أيضاً من 1/4 إلى 7/8. تتراوح القيم النموذجية لـ k, n من 1 إلى 8، وتتراوح قيم v من 2 إلى 60. القيم الصغيرة لـ R يشير إلى درجة عالية من الحشو وينتج تحكماً أكثر فاعلية بالخطأ، على حساب زيادة عرض الحزمة اللازمة.

سيأتي تفصيل الأرمزة في فصول لاحقة.

تمارين للحل

1. لدينا منبع يولد أربعة رموز s_0, s_1, s_2, s_3 باحتمالات $1/2, 1/4, 1/8, 1/8$ احسب كمية المعلومات الموافقة لكل رمز ، وأنتروبية المنبع.
2. لدينا قناة دخلها يتكون من الرمزين $x_0 = 0,\ x_1 = 1$ بالاحتمالين $p_0, 1-p_0$ على التتالي، وخرجها يعطي الرموز $y_0 = 0,\ y_1 = e,\ y_2 = 1$ كما هو مبين بالشكل:



حيث α احتمال خطأ البيت. والمطلوب:

حساب الاحتمالات المشتركة $p(x_i, y_j),\ 0 \le i \le 1,\ 0 \le j \le 2$ ، ثم حساب كمية المعلومات التبادلية بين الدخل والخرج واستنتاج سعة القناة.

مذاكرة

أجب بصح أو خطأ على ما يلي:

1. من مزايا نظم الاتصالات الرقمية عرض الحزمة اللازمة للاتصال
2. من مزايا نظم الاتصالات الرقمية إمكان التعمية
3. تستعمل تقنية ARQ لتصحيح الخطأ في نظم البث
4. من مساوئ نظم الاتصالات الرقمية قلة مناعتها للضجيج
5. سعة القناة هي القيمة العظمى للمعلومات المتبادلة بين المرسل والمستقبل

سؤالان وصل

صل بين اسم الحزمة الترددية ومجالها

الحزمة الترددية	اسم الحزمة
3–30kHz	Very Low Frequency (VLF)
30–300kHz	Low Frequency (LF)
300–3000kHz	Medium Frequency (MF)
3–30MHz	High Frequency (HF)
30–300MHz	Very High Frequency (VHF)
0.3–3GHz	Ultrahigh Frequency (UHF)
3–30 GHz	Super–high freq. (SHF)
30–300 GHz	Extremely HF (EHF)
10^{3}–10^{7}GHz	تحت الحمراء والضوء المرئي وفوق البنفسجية

صل بين رمز الحزمة الترددية ومجالها

1.0–2.0 GHz 2.0–4.0 GHz	L S
4.0–8.0 GHz 8.0–12 GHz 12–18 GHz 18–27 GHz 27–40 GHz 26.5–40GHz	C X Ku K Ka R
33–50 GHz 40–75 GHz 75–110 GHz	Q V W

1. Digital and Analog Communication Systems', 8th edition, by Leon W. COUSH II, Pearson Education International, 2013

حل المذاكرة

الإجابة	رقم السؤال
خطأ	1. من مزايا نظم الاتصالات الرقمية عرض الحزمة اللازمة للاتصال
صح	2. من مزايا نظم الاتصالات الرقمية إمكان التعمية
خطأ	3. تستعمل تقنية ARQ لتصحيح الخطأ في نظم البث
خطأ	4. من مساوئ نظم الاتصالات الرقمية قلة مناعتها للضجيج
صح	5. سعة القناة هي القيمة العظمى للمعلومات المتبادلة بين المرسل والمستقبل

الفصل الثاني:
مبادئ الاحتمالات والسيرورات العشوائية

الكلمات المفتاحية:

المتحولات العشوائية، السيرورات العشوائية، التوزيعات الاحتمالية المشهورة، تابع الترابط الذاتي، الكثافة الطيفية للاستطاعة.

الملخص:

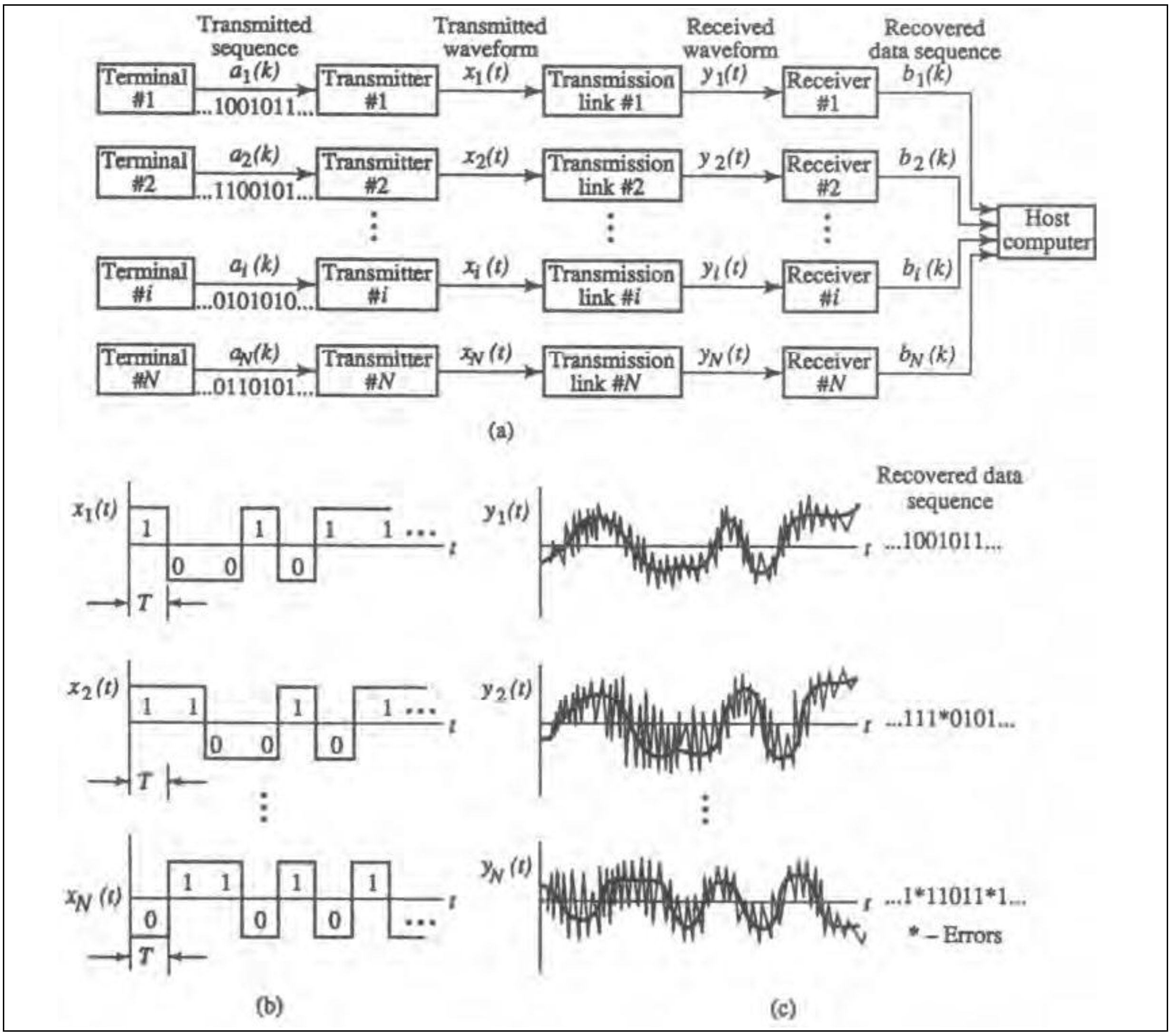
يتناول الفصل مراجعة مفاهيم الاحتمالات وتابع الكثافة الاحتمالية وتابع التوزيع، وأشهر توابع التوزيع الاحتمالية مع توابع الكثافة الاحتمالية الموافقة. ثم السيرورات العشوائية واستقرارها واستقرار خواصها الإحصائية، تابع الترابط الذاتي لسيرورة عشوائية وتابع الترابط المتعارض لسيرورتين عشوائيتين، وعلاقة الكثافة الطيفية للاستطاعة لسيرورة بتابع الترابط الذاتي لها.

الأهداف التعليمية:

- تذكر بمفاهيم الاحتمالات.
- تذكر تابع الكثافة الاحتمالية وتابع التوزيع الاحتمالي.
- تذكر توابع التوزيع الشهيرة ومعرفة العلاقات الرياضية لها ولتوابع الكثافة الاحتمالية الخاصة بها.
- تعرف مفهوم السيرورة العشوائية وتبعيتها للزمن وللحدث الإحصائي.
- تعرف العزوم الاحتمالية.
- تعرف خواص السيرورات العشوائية.
- تعرف تابع الترابط الذاتي لسيرورة عشوائية وخواصه وعلاقته بالكثافة الطيفية للاستطاعة.
- تعرف تابع الترابط المتعارض لسيرورتين وخواصه.

في النظم الكهربائية والإلكترونية تُستَعمل التيارات والفلطيات كإشارات لجمع المعلومات وإرسالها ومعالجتها، إضافة إلى استعمالها في تغذية النظم. التيارات والفلطيات توابع للزمن ويمكن أن تكون حتمية أو عشوائية. التوابع الحتمية منها هي التي يمكن وصفها بتابع رياضي للزمن، مثل التوابع الجيبية؛ أما التوابع العشوائية فلايمكننا تحديد قيمها بدقة في أي لحظة كانت إذ يوجد دائماً جزء من الشك أو العشوائية عليها.

تلعب نمذجة هذه العشوائية دوراً هاماً في تحليل نظم الاتصالات وتصميمها ومحاكاتها. على سبيل المثال، إذا كان لدينا N طرفية ترسل معطيات رقمية إلى حاسوب مركزي، على وصلات إرسال ملوثة بالضجيج، كما في الشكل التالي: على كل وصلة، يحوّل المرسل المعطيات الرقمية إلى إشارة كهربائية بمقابلة البتات إلى نبضات مطالها 1 أو -1 بحسب قيمة البت. وصلة الإرسال الملوثة بالضجيج تضيف ضجيجاً إلى الإشارات فيستقبلها المستقبل مشوهة ويحاول استعادة البتات الرقمية منها. من الواضح أن الإشارات المستقبلة لا يمكن التنبؤ بقيمها الدقيقة بسبب الضجيج العشوائي المتراكب عليها. سنحاول في هذا الفصل عرض الأسس النظرية للإشارات العشوائية والسيرورات العشوائية.



الشكل -1- مثال على سيرورات (إجرائيات) عشوائية: (a) نظام اتصالات رقمية، (b): الإشارات المرسَلة، (c): الإشارات المستقبلة [1].

التسميات (من اليسار إلى اليمين):

متتاليات مرسَلة، إشارات مرسَلة، إشارات مستقبلة، المتتاليات المٌستَعادة.

طرفية 1، مرسل1، وصلة إرسال 1، مستقبل 1....

حاسوب مضيف

متتالية المعطيات المستعادة

"*": في المعطيات المستعادة تشير إلى أخطاء.

1. الاحتمالات

تبنى النظرية الرياضية للاحتمالات على مفهوم التجربة العشوائية، وخرجها، وإسناد احتمالات لمختلف الخروج لهذه التجارب.

المتحول العشوائي X يقابل خرج التجربة العشوائية بنقاط على المحور الحقيقي. على سبيل المثال، إذا كان لدينا حجر نرد متوازن، وكانت التجربة العشوائية هي رمي حجر النرد فيمكن أن يكون خرجها إحدى القيم من 1 إلى 6. ويكون احتمال أن تكون قيمة X هي إحدى هذه القيم الست هو $1/6$. واحتمال أن تكون قيمة X أقل أو تساوي 2 هي $2/6=1/3$.

احتمال حدث A، $p(A)$ يمكن تعريفه أيضاً بدلالة التواتر النسبي لوقوع الحدث A بعد إجراء n تجربة. فإذا رمزنا لهذا التواتر بـ n_A أمكننا كتابة ما يلي:

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n_A}{n}\right)$$

فقد نرمي قطعة نقود متوازنة $n=40$ مرة، ونحصل على الطرة (Head) 19 مرة، فيكون $P(A)=\frac{19}{40}=.475$ في حين نعلم أن القيمة النظرية هي 0.5 ونحصل عليها حين تنتهي n (عدد مرات الرمي) إلى اللانهاية.

من التعريف نرى أن الاحتمال عدد موجب يحقق $0\le P(A)\le 1$. حين يكون الحدث مستحيلاً، لا يحدث إطلاقاً $(n_A=0)$ يصبح $p(A)=0$. وإذا كان الحدث أكيداً، يحدث دائماً، كان $(n_A=n)$ وكان $p(A)=1$.

لحدثين عشوائيين A و B:

- نعرف الاحتمال المشترك لهما: $P(A,B)=p(AB)=\frac{n_{AB}}{n}$، فإذا كان الحدثان متنافيين، لايمكن أن يحدثا معاً، كان الاحتمال المشترك لهما معدوماً.
- نعرف احتمال الاجتماع لهما:

$$P(A\cup B)=p(A+B)=\frac{n_A+n_B-n_{AB}}{n}=p(A)+p(B)-P(AB)$$

- الاحتمال الشرطي $P(A/B)$ هو احتمال وقوع A علماً أن B قد وقع. ويحسب من العلاقة $P(A/B)=\lim_{n_B\to\infty}\frac{n_{AB}}{n_B}$.
- ويبرهن أن $P(A,B)=p(A).p(A/B)=p(B).p(B/A)$ وتعرف بنظرية بايس Bayes.
- ونقول عن حدثين A و B أنهما مستقلان إذا تحقق $P(A)=p(A/B)$ أو $P(B)=p(B/A)$.

مثال محلول:

نفترض A وقوع حادث عند أحد التقاطعات الطرقية، B هطول مطر على هذا التقاطع. نراقب هذا التقاطع خلال فترة معينة ونلاحظ النتائج كل دقيقة خلال 10080 دقيقة فنجد أن: $n_A = 25, n_B = 300, n_{AB} = 20$.

احسب احتمالات $A, B, AB, A+B, A/B$.

الحل:

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = 0.0025$$

$$p(B) = \frac{n_B}{n} = 0.03$$

$$p(AB) = \frac{n_{AB}}{n} = 0.002$$

$$p(A+B) = p(A) + p(B) - p(AB) = 0.0025 + 0.03 - 0.002 \approx 0.03$$

$$p(A/B) = \frac{n_{AB}}{n_B} = 0.002/0.3 = 0.066$$

2. تابع الكثافة الاحتمالية وتابع التوزيع الاحتمالي

يمكن تمييز المتحول العشوائي بالقيم التي يأخذها، وبتابع التوزيع الاحتمالي الذي يعطي عند كل قيمة x احتمال أن يكون خرج التجربة العشوائية أقل أو يساوي x. أي يعطى بالعلاقة:

$$F_X(a) = P(X \le a) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n_{X \le a}}{n} \right).$$

لاحظ أننا نستخدم أحرفاً كبيرة للمتحول العشوائي وأحرفاً صغيرة لقيمه.

إذا كان للمتحول العشوائي x مجموعة قيم قابلة للعد من القيم: $x_1, x_2, ...$ ، أكانت منتهية أو غير منتهية؛ نقول إن المتحول x متقطع. ويمكن توصيف هذا المتحول بتابع كتلة احتمالي $P(X = x_i), i = 1,2,...$ ويعرف تابع التوزيع الاحتمالي له كما يلي:

$$F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i).$$

مثال:

لنفترض أننا رمينا قطعة نقود مرتين: كل رمية تنتج طرة $Head = "H"$ أو نقش $Tail = "T"$ ولنفترض أن المتحول X هو عدد المرات التي يظهر فيها طرة من المرتين:

نلاحظ أنه إذا كانت قطعة النقود متوازنة فسنحصل على HH, HT, TH, TT باحتمالات متساوية. فيكون تابع التوزيع الاحتمالي:

$$p(X = 0) = P(X = 2) = 1/4$$
$$p(X = 1) = 1/2$$
$$F_X(0) = P(X \le 0) = \sum_{x_i \le 0} P(X = x_i) = p(X = 0) = 1/4$$
$$F_X(1) = P(X \le 1) = \sum_{x_i \le 1} P(X = x_i) = p(X = 0) + p(X = 1) = 3/4$$
$$F_X(2) = P(X \le 2) = \sum_{x_i \le 2} P(X = x_i) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = 1$$

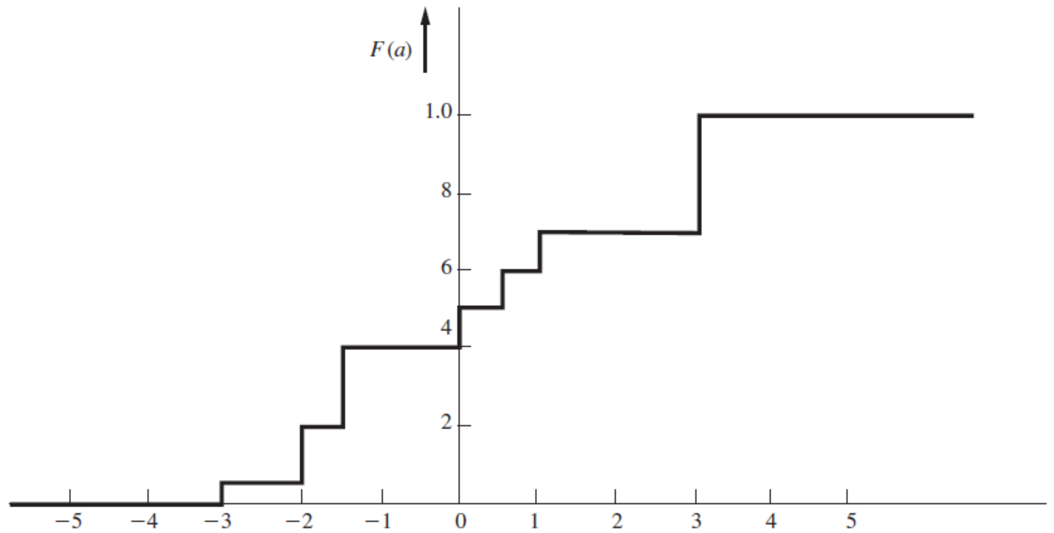
وبذلك فإن تابع التوزيع الاحتمالي، حين يكون معروفاً، يعرّف بشكل جيد التابع العشوائي؛ سواء أكان متقطعاً أو مستمراً.

مثال:

نفترض لدينا نظام يعطي في خرجه إحدى ثماني قيم حقيقية ونفترض تمثيل أحداث مستقلة مثنى $A,\ldots,H$ كل منها يوافق إحدى قيم المخارج، وكل قيمة لها احتمال مبين في الجدول التالي:

Event [·]	Value of Random Variable $x[\cdot]$	Probability of Event $P(x)$
A	0.0	0.10
B	−3.0	0.05
C	−1.5	0.20
D	−2.0	0.15
E	+0.5	0.10
F	+1.0	0.10
G	+2.0	0.00
H	+3.0	0.30
		Total = 1.00

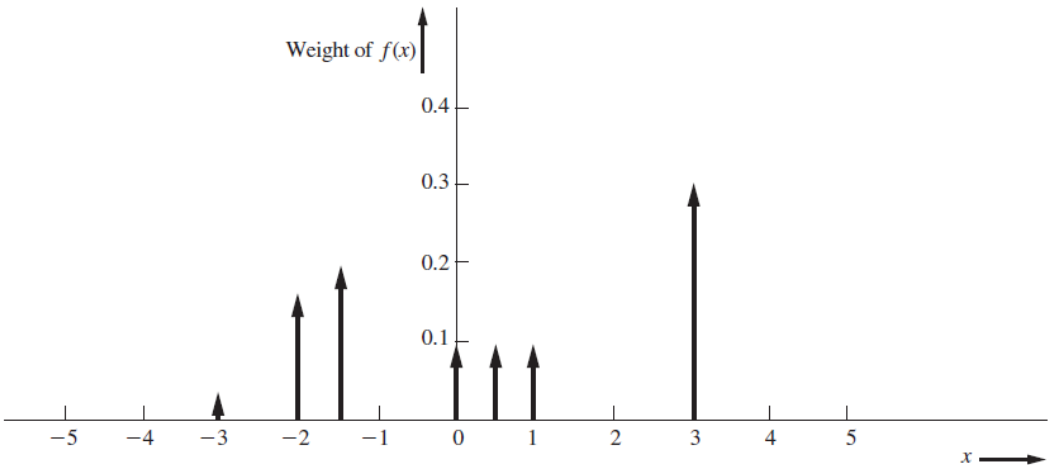
فيكون شكل تابع التوزيع الاحتمالي كما هو مبين بالشكل التالي:



خواص تابع التوزيع:

- غير متناقص ويأخذ قيمه في المجال $[0,1]$
- قيمته 0 حين ينتهي المتحول إلى $-\infty$
- قيمته 1 حين ينتهي المتحول إلى ∞.
- مستمر من اليمين: $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} F(a+\varepsilon)=F(a)$
- هو تكامل تابع الكثافة الاحتمالية: $F(a)=\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{-\infty}^{a+\varepsilon} f(x)\,dx$

جرى وضع ε لأخذ الحالة المتقطعة بالاعتبار. ففي المثال السابق، تابع الكثافة الاحتمالية متقطع يبينه الشكل التالي:



ونلاحظ أن تابع الكثافة الاحتمالية يأخذ قيماً موجبة $f(x) \geq 0$ وأن تكامله حتى ∞ يحقق العلاقة:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = F(+\infty) = 1$$

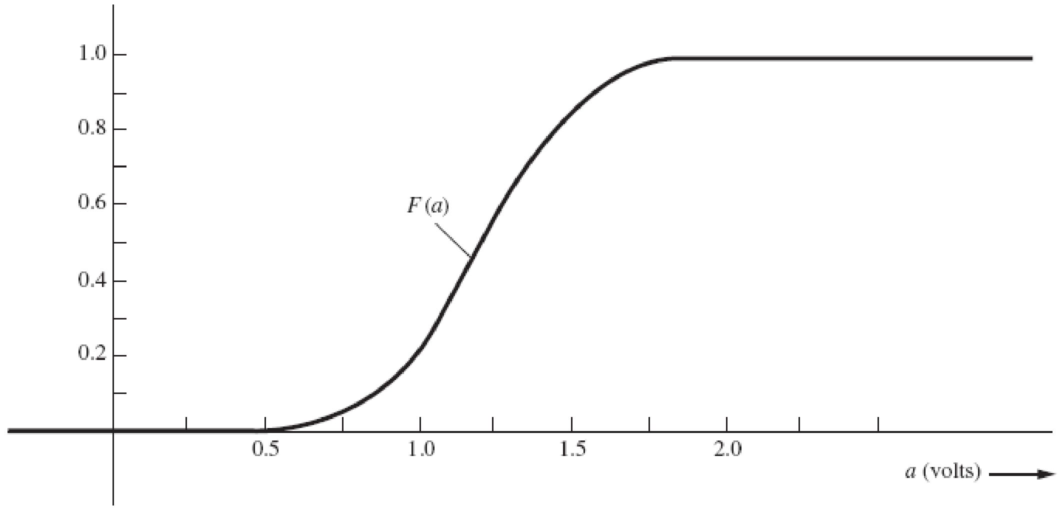
إذا لم يكن للمتحول X قيم قابلة للعد على مجموعة أو أكثر من المستقيم الحقيقي، نقول إن المتحول X متحول عشوائي مستمر، ويمكن وصفه بتابع كثافة احتمالي $f_X(x)$ بحيث:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}, \quad -\infty < x < \infty \ .$$

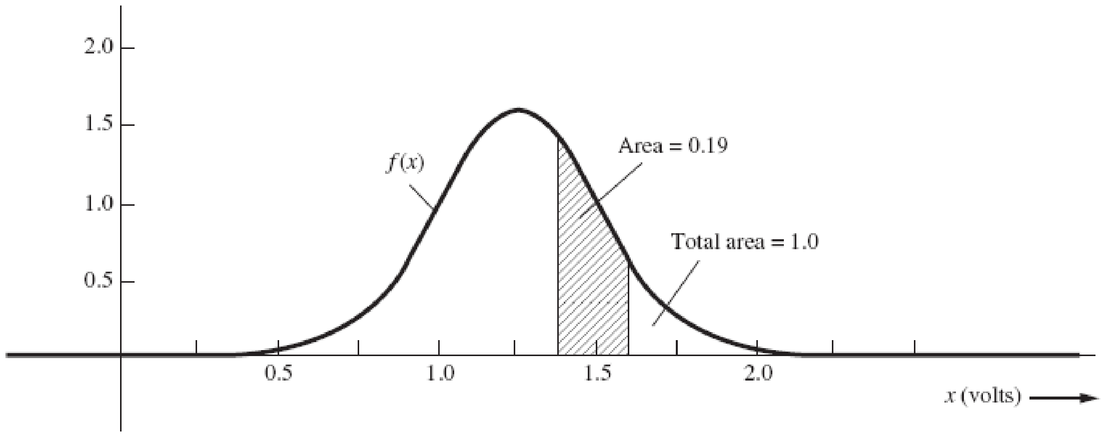
أو $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(a)\, da$.

مثال:

نفترض لدينا متحول عشوائي يقيس فلطية بطاريات نموذج $1.5V$ التي ينتجها أحد المعامل. إذا كان عدد البطاريات لا نهائي، يمكن أن نحصل على عدد لانهائي من قيم فلطية البطاريات، لأن فلطية الخرج معرفة بدقة معينة وبذلك لن تكون $1.5V$ بالضبط. ويكون كل من تابع التوزع الاحتمالي $F(a)$، وتابع الكثافة الاحتمالية $f(x)$ توابع مستمرة. انظر الشكل التالي:



تابع التوزع الاحتمالي.



تابع الكثافة الاحتمالية.

فإذا أردنا حساب احتمال ألا يتجاوز خطأ الفلطية $0.1V$ فإن هذا الاحتمال يعطى بالعلاقة:

$$p(1.4 < x \leq 1.6) = \int_{1.4}^{1.6} f(x)dx = F(1.6) - F(1.4) = 0.19$$.

3. القيمة الوسطى والعزوم

أحد أهم استعمالات نظرية الاحتمالات هو حساب القيمة الوسطى لمتحول عشوائي. يُعطى التوقع الرياضي أو القيمة الوسطى لمتحول عشوائي $h(x)$ بالعلاقة:

$\overline{h(x)} = E(h(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)dx$ حيث $f(x)$ هو تابع الكثافة الاحتمالية لـ $h(x)$ فإذا كان $h(x)$ متقطعاً بـ M نقطة أصبح التوقع الرياضي له: $\overline{h(x)} = E(h(x)) = \sum_{i=1}^{M} h(x_i).p(x_i)$.

العزم من المرتبة r لمتحول عشوائي هو القيمة الوسطى للتابع $h(x) = x^r$ ويعطى بالعلاقة $\overline{h(x)} = E(h(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx$. ويُعرف العزم المركزي من المرتبة r بأنه القيمة الوسطى للتابع $h(x) = (x - x_0)^r$ حيث x_0 هي القيمة الوسطى لـ x.

يعرف التغاير variance بأنه العزم المركزي من المرتبة الثانية: $\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f(x)dx$. ويبرهن أن $\sigma_x^2 = (\overline{x^2}) - (\bar{x})^2$.

أما الانحراف المعياري فهو جذر التغاير أي $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f(x)dx}$.

إذا كان لدينا مجموعة من المتحولات العشوائية $X_i,\ i = 1, 2, ..., m$ فيمكن تعريف تابع التوزيع الاحتمالي للمتحول العشوائي المكون من الشعاع $[X_1\ X_2 .... X_m]^T$ بالعلاقة:

$$F_{X_1,...,X_m}(x_1,...., x_m) = p\left[(X_1 \le x_1),...,(X_m \le x_m)\right]$$

كما نعرف تابع الكثافة الاحتمالية المشترك بأنه المشتق الجزئي للتابع السابق بالنسبة لمجموعة المتحولات العشوائية ونكتبه بالشكل: $f_{X_1, X_2, ..., X_m}(x_1, x_2, ..., x_m)$

ويمكن تعريف توابع كثافة احتمالية هامشية بمكاملة تابع التوزيع الاحتمالي المشترك على بقية المتحولات، ومن الأمثلة على ذلك:

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, X_2, ..., X_m}(x_1, x_2, ..., x_m)dx_2...dx_m$$
$$(m-1 \text{ int } egrals)$$

$$f_{X_1X_2}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, X_2, ..., X_m}(x_1, x_2, ..., x_m)dx_3...dx_m$$
$$(m-2 \text{ int } egrals)$$

4. توزيعات هامة

1.4. التوزيع الثنائي الحد

يستعمل في المسائل الإحصائية الاثنانيةوغيرها.حين يكون لدينا n تجربة مستقلة، احتمال النجاح في كل منها p .

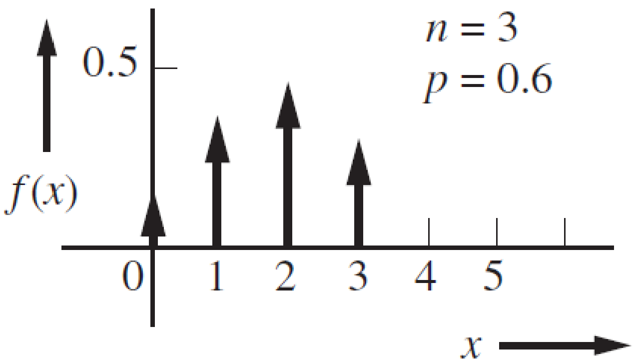
مثال:

نفترض لدينا مرسل اثناني يرسل البت 1 باحتمال p والبت 0 باحتمال $1-p$. ونريد حساب احتمال إرسال كلمة من n بتاً تتضمن k واحداً. إحدى هذه الكلمات هي كلمة تبدأ بـ k واحداً وتنتهي بـ $n-k$صفراً واحتمالها $p^k(1-p)^{n-k}$. ولكن لدينا كل التوافيق الممكنة لأماكن الوحدان وبذلك يكون الاحتمال المطلوب $p(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. فإذا عرفنا متحولاً عشوائياً $x=k$ يأخذ القيم المتقطعة $k=0,1,\ldots,n$ كان تابع الكثافة الاحتمالية له هو: $f(x)=\sum_{k=0}^{n}p(k)\delta(x-k)$

ويكون تابع التوزيع الاحتمالي: $F(a)=\sum_{\substack{k=1\\ m\le a}}^{m}p(k)$

وأتت التسمية من حساب القوة n لثنائي حد ويعطى بالعلاقة: $(p+q)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}p(k)$

يبين الشكل التالي تابع الكثافة الاحتمالية في حال $p=0.6$, $n=3$.



القيمة الوسطى $\mu=np$ والتغاير $\sigma^2=np(1-p)$.

ثمة توزيع يسمى توزيع ثنائي الحد السالب، وهو حين يكون لدينا n تجربة مستقلة واحتمال النجاح p ويكون المتحول العشوائي هو عدد المحاولات التي نجريها للحصول على r نجاحاً.

تابع الكثافة الاحتمالية المتقطع لهذا المتحول العشوائي هو:

$$p(X=x)=\binom{x-1}{r-1}p^r(1-p)^{x-r},\quad x=r,r+1,r+2,\ldots$$

القيمة الوسطى $\mu=r/p$ والتغاير $\sigma^2=r(1-p)/p^2$.

ISSN: 2617-989X

2.4.توزيع بواسون

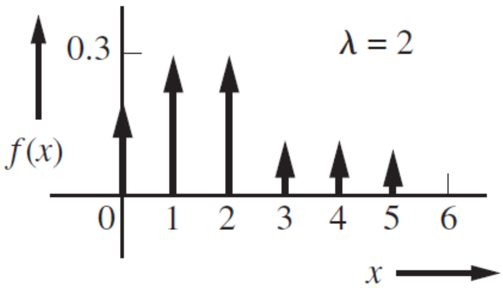
وهو تقريب للتوزيع الثنائي الحد، حين تكون n كبيرة جداً و p صغيرة جداً و $np=\lambda$. يمكن النظر أيضاً إلى هذا التوزيع على أنه لمتحول عشوائي X يمثل عدد الأحداث التي تحدث في واحدة الزمن ضمن الفرضيات التالية:

- تحدث الأحداث في أوقات متباينة.
- أي مجال منته يتضمن عدداً منتهياً من الأحداث.
- أي مجال غير منته يتضمن عدداً غير منته من الأحداث.
- لايمكن التنبؤ بوقت حدوث الأحداث.
- عدد الأحداث في مجالات غير متراكبة؛ مستقل بعضه عن بعض.

تابع الكثافة الاحتمالية $p(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}p(k).\delta(kx),$. وتابع التوزيع الاحتمالي: $F(a)=\sum_{\substack{k=1\\ m\le a}}^{m}p(k)$.القيمة الوسطى $\mu=\lambda$ والتغاير $\sigma^2=\lambda$.

يستعمل هذا التوزيع في نمذجة المرور في نظم الاتصال (عدد الرسائل التي تصل خلال زمن محدد)، وانبعاث الجسيمات كالإلكترونات والفوتونات.

يبين الشكل التالي تابع الكثافة الاحتمالية حين $\lambda=2$.

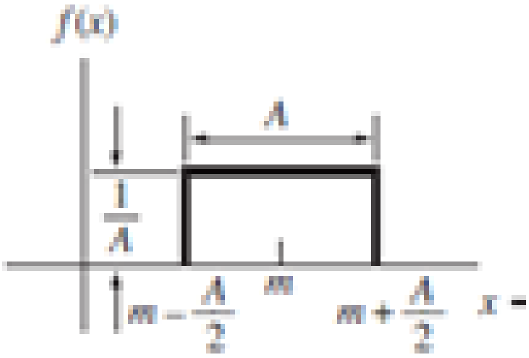


3.4. التوزيع المنتظم

وهو حين تكون القيمة الوسطى للمتحول العشوائي m ويأخذ قيماً عشوائية حول m تابع كثافتها الاحتمالية ثابتاً على مجال التغيرات $[m-A/2 \quad m+A/2]$. يبرهن أن تغاير هذا المتحول هو $\sigma^2 = A^2/12$ وقيمته الوسطى هي $\mu = m$.

الشكل التالي يبين تابع الكثافة الاحتمالية مع معادلات هذا التابع $f(x)$ ومعادلات تابع التوزيع الاحتمالي $F(a)$.

$$F(a) = \begin{cases} 0, & a < \dfrac{2m-A}{2} \\ \dfrac{1}{A}[a - \dfrac{2m-A}{2}], & |a-m| \le A/2 \\ 1, & a \ge \dfrac{2m-A}{2} \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & x < \dfrac{2m-A}{2} \\ \dfrac{1}{A}, & |x-m| \le A/2 \\ 1, & x \ge \dfrac{2m+A}{2} \end{cases}$$



يستعمل هذا التوزيع لنمذجة خطأ التكمية في المبدلات التماثلية الرقمية.

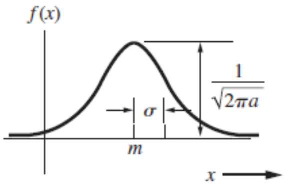
4.4. التوزيع الغوسي (الطبيعي)

وهو من أهم توابع التوزيع إن لم يكن أهمها. ويستنتج من التوزيع الثنائي الحد حين تكون n كبيرة مع الإبقاء على المتوسط $m=np$ محدوداً والتغاير $\sigma^2 = np(1-p)$ أكبر بكثير من 1. يستعمل لنمذجة الضجيج الحراري والكثير من الظواهر الفيزيائية، لذلك سمي "الطبيعي". وهو مفيد في تحليل مسائل الاتصالات و مسائل الإحصاء.

يبين الشكل التالي تابع الكثافة الاحتمالية $f(x)$ ومعادلته إضافة إلى معادلة تابع التوزيع الاحتمالي $F(a)$.
يبرهن على أن القيمة الوسطى له هي m، وأن تغايره هو σ^2.

$$F(a) = Q\left(\frac{m-a}{\sigma}\right),\ Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^{\infty} e^{-x^2/2}dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$



$$F(a) = Q\left(\frac{m-a}{\sigma}\right)$$

where

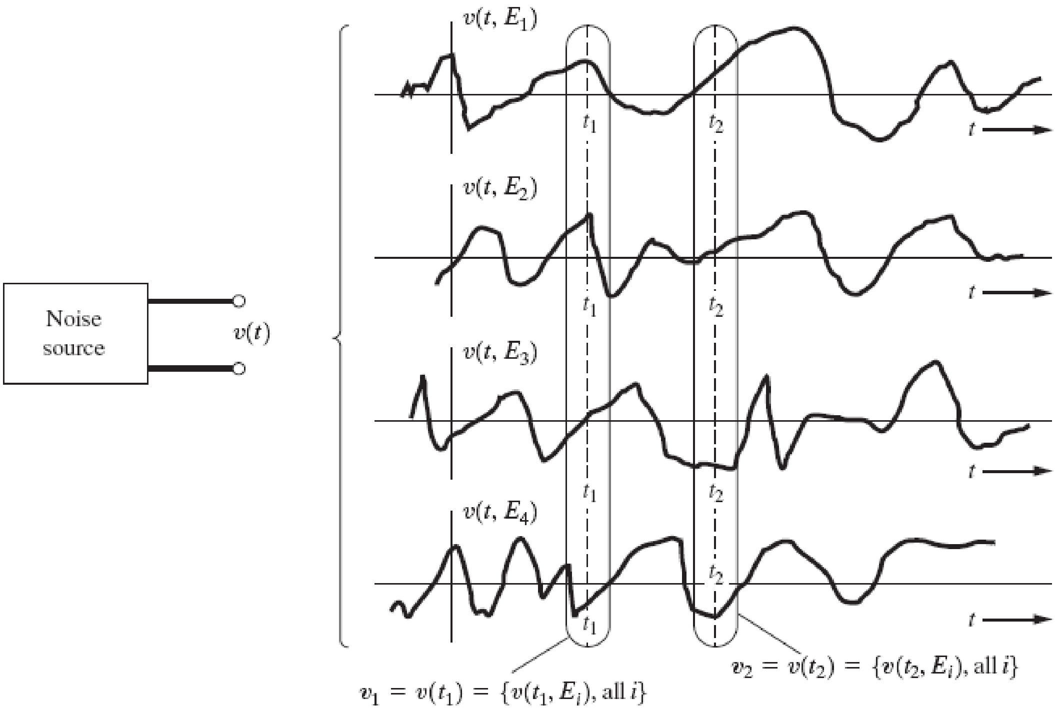
$$Q(\sigma) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\infty} e^{-x^2/2}dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-(x-m)^2/2\sigma^2\right]$$

5. السيرورات العشوائية

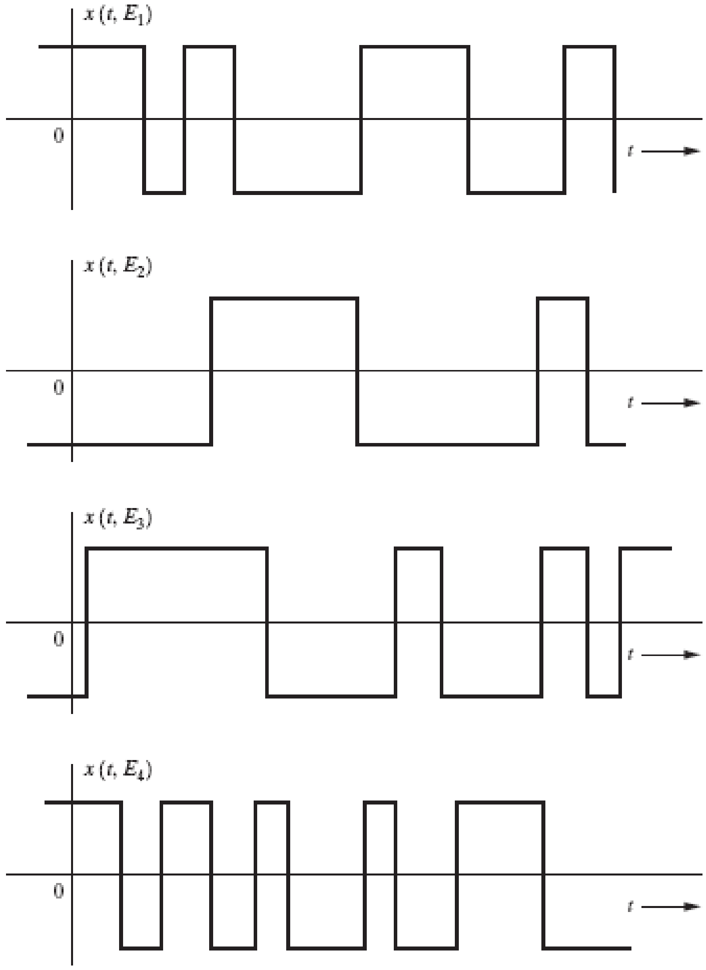
السيرورة العشوائية الحقيقية هي مجموعة مفهرسة من التوابع الحقيقية لمتحول ما (هو غالباً الزمن t)، تتمتع ببعض الخواص الإحصائية. لنأخذ فلطية الخرج لمنبع ضجيج من مجموعة منابع ضجيج متماثلة (من المصنع نفسه): كل منبع E_i هو عينة عشوائية من الفضاء العشوائي لهذه المنابع، وخرجه هو تابع للزمن يمكن أن نكتبه $v(t,E_i)$. تكوّن مجموعة التوابع $\{v(t,E_i)\}$ السيرورة العشوائية $v(t)$ لمنابع الضجيج. لاحظ أن المتحول العشوائي يقابل كل حدث عشوائي بثابت؛ أما السيرورة العشوائية فتقابل كل حدث عشوائي بتابع.

يبين الشكل التالي:



منبع ضجيج عشوائي ومجموعة من التوابع العينات $v(t,E_i)$. يمكن توصيف السيرورة العشوائية بمجموعة مفهرسة من المتحولات العشوائية $v_1, v_2, ...$ التي تظهر على الشكل. الثابت t يمثل الزمن في غالب الأحيان. لذلك فإن $v_i = v(t_i)$ هو المتحول العشوائي الذي يعطي في اللحظة t_i خرج جميع المنابع. على سبيل المثال، إذا كان لمنبع الضجيج تابع توزع احتمالي غاوسي أمكننا كتابة: $f(v_j) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} e^{-(v_j - m_j)^2/2\sigma_j^2}$. يمكن أن تعتمد القيمة الوسطى m_j والانحراف المعياري σ_j في اللحظة j.

يمكن أن تكون السيرورات العشوائية مستمرة كما في مثال منابع الضجيج السابقة، ويمكن أن تكون متقطعة حين تتكون من متحولات عشوائية متقطعة. كما في الشكل التالي:



نقول عن سيرورة أنها مستقرة stationary من الدرجة N ، حين تتكون من N متحول عشوائي ولا تتغير خواصها الإحصائية مع الزمن أي إن:

$$\forall t_1, t_2, ..., t_{N,}\ f_x(x(t_1), x(t_2), ..., x(t_N)) = f_x(x(t_1 + t_0), x(t_2 + t_0), ..., x(t_N + t_0))$$

مثال:

لتكن لدينا الإجرائية العشوائية $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta_0)$

أولاً: إذا كانت A, ω_0 ثوابتاً، وكانت θ_0 متحولاً عشوائياً موزعاً بانتظام على المجال $[-\pi \ \pi]$ كان تابع الكثافة الاحتمالية لـ $x(t)$ يعطى بالعلاقات:

$$f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}, & |x| \leq A \\ 0 & |x| > A, \end{cases}$$

وبما أنه مستقل عن الزمن كانت السيرورة مستقرة من الدرجة الأولى.

ثانياً: إذا كانت A, ω_0, θ_0 ثوابتاً، كانت قيمة $x(t)$ معروفة في كل لحظة باحتمال 1، وكان تابع الكثافة الاحتمالية لـ $x(t)$ يعطى بالعلاقة:

$$f_x(x) = \delta(x - A\cos(\omega_0 t + \theta_0))$$

وبما أنه تابع للزمن فالإجرائية غير مستقرة من الدرجة الأولى.

نقول عن سيرورة أنها إرغودية ergodic إذا كان الوسطي في أي لحظة

$$\langle[x(t)]\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t)]dt$$

يساوي التوقع الرياضي الإحصائي للسيرورة

$$\overline{[x(t)]} = \int_{-\infty}^{\infty} [x] f_x dx = m_x .$$

في هذه الحالة لا يمكن أن يكون الوسطي الزمني تابعاً للزمن. من هذه التعاريف نرى أن الإجرائية الإرغودية هي إجرائية مستقرة.

مثال:

نفترض A, ω_0 ثوابتاً، و θ_0 متحولاً عشوائياً موزعاً بانتظام على المجال $[0 \ 2\pi]$ ونحسب القيمة الوسطى والعزم من المرتبة الثانية:

$$\overline{[x]} = \int_{-\infty}^{\infty} [x(\theta)] f_\theta(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} [A\cos(\omega_0 t + \theta)] \frac{1}{2\pi} d\theta = 0$$

$$\overline{[x^2]} = \int_0^{2\pi} [A\cos(\omega_0 t + \theta)]^2 \frac{1}{2\pi} d\theta = A^2/2$$

وإذا أردنا حسابي الوسطي للسيرورة ولمربعها، بالنسبة للزمن، نجد:

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} [A\cos(\omega_0 t + \theta)] dt = 0$$

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} [A\cos(\omega_0 t + \theta)]^2 dt = A^2/2$$

نجد أن العزم من المرتبة الأولى ومن المرتبة الثانية بالنسبة للسيرورة العشوائية يساويان مقابلاتها بالنسبة للزمن. يحملنا هذا على الاعتقاد بإرغودية السيرورة ولكن البرهان عليها صعب. نستطيع فقط برهان استقرارها من المرتبة الأولى والثانية.

نعرف تابع الترابط الذاتي autocorrelation لسيرورة عشوائية حقيقية $x(t)$ على أنه:

$$R_x(t_1,t_2)=\overline{x(t_1)x(t_2)}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2\,f_x(x_1,x_2)\;dx_1dx_2$$

حيث $x_i=x(t_i),\ i=1,2$. فإذا كانت السيرورة مستقرة stationery من المرتبة الثانية كان تابع الترابط الذاتي السابق تابعاً لـ $\tau=t_1-t_2$ أي أن: $R_x(\tau)=\overline{x(t).x(t+\tau)}$

نقول عن سيرورة أنها مستقرة بالمعنى الواسع إذا تحقق الشرطان:

$$\overline{x(t)}=constant$$
$$R_x(t_1,t_2)=R_x(\tau),\ \tau=t_2-t_1$$

وبذلك تكون السيرورات المستقرة حتى المرتبة الثانية أو أعلى سيرورات مستقرة بالمعنى الواسع. العكس ليس بالضرورة صحيحاً.

خواص تابع الترابط الذاتي لسيرورة عشوائية حقيقية مستقرة بالمعنى الواسع:

$$R_x(0)=\overline{x^2(t)}$$
$$R_x(\tau)=R_x(-\tau)$$
$$R_x(0)\ge R_x(\tau)$$

الخاصتان الأولى والثانية صحيحتان من التعريف، ولبرهان الخاصة الثالثة نرى أن:

$$\overline{[x(t)\pm x(t+\tau)]^2}\ge 0$$
$$\overline{x^2(t)}\pm\overline{2x(t).x(t+\tau)}+\overline{x^2(t+\tau)}\ge 0$$
$$R_x(0)\pm 2R_x(\tau)+R_x(0)\ge 0$$

ومنه برهان هذه الخاصة.

بالمماثلة نعرف تابع الترابط المتعارض cross–correlation لسيرورتين عشوائيتين حقيقيتين $x(t),y(t)$ بالعلاقة: $R_{xy}(t_1,t_2)=\overline{x(t_1)y(t_2)}$

فإذا كانت السيرورتان مستقرتين معاً بحيث :

$$\forall t_i\ \ f_{xy}(x(t_1),x(t_2),...,x(t_N),y(t_{N+1}),y(t_{N+2}),...,y(t_{N+M}))=$$
$$f_{xy}(x(t_1+t_0),x(t_2+t_0),...,x(t_N+t_0),y(t_{N+1}+t_0),y(t_{N+2}+t_0),...,y(t_{N+M}+t_0))$$

فعندها يكون: $\tau=t_1-t_2$ $R_{xy}(t_1,t_2)=R_{xy}(\tau),$.

ومن خواص تابع الترابط المتعارض لسيرورتين x, y مستقرتين معاً:

$$R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau)$$

$$|R_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{R_x(0).R_y(0)}$$

$$|R_{xy}(\tau)| \leq \frac{1}{2}\left[R_x(0) + R_y(0)\right]$$

الخاصة الأولى من التعريف، والخاصتان الباقيتان يبرهن عليها مما يلي:

$$\overline{\left[x(t) + Ky(t+\tau)\right]^2} \geq 0$$

$$[R_x(0)| + [2R_{xy}(\tau)]K + K^2[R_y(0)] \geq 0$$

الطرف اليساري للمتراجحة الأخيرة تابع من الدرجة الثانية لـ K (قيمية حقيقية لا على التعيين)، ولكي يكون موجباً دوماً يجب أن تكون دلتا سالبة أي:

$$[2R_{xy}(\tau)]^2 - 4[R_x(0)].[R_y(0) | \leq 0$$

وهذا ينتج عنه أن: $|R_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{R_x(0).R_y(0)} \leq \frac{1}{2}\left[R_x(0) + R_y(0)\right]$

(نعلم أن المتوسط الهندسي لعددين أصغر أو يساوي المتوسط الحسابي.

نقول عن سيرورتين عشوائيتين أنهما غير مترابطتين non correlated إذا كان تابع الترابط المتعارض يساوي جداء القيمة الوسطى للأول بالقيمة الوسطى للثاني؛ أي إذا تحقق:

$$R_{xy}(\tau) = [\overline{x(t)}].[\overline{y(t+\tau)}] = m_x.m_y$$

ونقول إن السيرورتين متعامدتان إذا كان تابع الترابط المتعارض معدوماً أي:

$$R_{xy}(\tau) = 0$$

6. الكثافة الطيفية للاستطاعة

لنفترض لدينا السيرورة العشوائية $x(t)$ وأننا أخذنا منها عينةً التابع $x(t,E_i)$. نعرف نسخة مقتطَعة من هذه العينة على المجال الزمني $[-T/2 \;\; T/2]$ كما يلي:

$$x_T(t,E_i)=\begin{cases} x(t,E_i), & |t|\le \frac{1}{2}T \\ 0 & t \;\; else \end{cases}$$

نعرف تحويل فورييه لهذه النسخة المقتطعة كما يلي:

$$X_T(f,E_i)=\int_{-\infty}^{\infty} x_T(t,E_i),e^{-j2\pi ft}dt=\int_{-T/2}^{T/2} x_T(t,E_i),e^{-j2\pi ft}dt$$

للتبسيط فقط سنحذف E_i من التدوين.

طاقة السيرورة المستنظمة على المجال $[-T/2 \;\; T/2]$ تعطى بالعلاقات (بالاستفادة من بارسفال):

$$E_T=\int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} |X_T(f)|^2\,df$$

وبما ان x(t) سيرورة عشوائية فإن تحويل فورييه لها هو كذلك. والقيمة الوسطى للطاقة تحسب كما يلي:

$$\overline{E_T}=\int_{-T/2}^{T/2} \overline{x^2(t)}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} \overline{x_T^2(t)}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} \overline{|X_T(f)|^2}\,df$$

وتكون الاستطاعة المستنظمة:

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\overline{x^2(t)}\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{x_T^2(t)}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\overline{|X_T(f)|^2}]df=\overline{x^2(t)}$$

المتحول التابع للتردد الذي نكامله للحصول على الاستطاعة هو مانسميه الكثافة الطيفية للاستطاعة وهو يساوي:

$$\lim_{T\to\infty}\left(\frac{\left[\overline{|X_T(f)|^2}\right]}{T}\right)$$

حيث: $X_T(f)=\int_{-T/2}^{T/2} x(t),e^{-j2\pi ft}dt$

ويبرهن أن هذه الكثافة الطيفية للاستطاعة ما هي إلا تحويل فورييه لتابع الترابط الذاتي للسيرورة أي إنها تساوي:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\,e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau$$

من خواص تابع الكثافة الطيفية للاستطاعة:

- حقيقي دوماً.
- غير سالب.
- متناظر بالنسبة للتردد حين تكون السيرورة حقيقية.
- تكامله يعطي الاستطاعة الكلية المستنظمة.

نقول عن سيرورة عشوائية إنها ضجيج أبيض إذا كانت الكثافة الطيفية للاستطاعة ثابتة ونرمز لها بـ $N_0/2$.

وعندها يكون تابع الترابط الذاتي لها هو $R_x(\tau)=\frac{N_0}{2}\delta(\tau)$

هذه السيرورة هامة جداً لإشارات الاتصالات.

تمارين للحل

نقترض A, ω_0 ثوابتاً، و θ_0 متحولاً عشوائياً موزعاً بانتظام على المجال $[0\ \pi/2]$. احسب القيمة الوسطى والعزم من المرتبة الثانية. هل السيرورة إرغودية؟ برر إجابتك.

مذاكرة

أجب بصح أو خطأ عما يلي:

1. تابع الكثافة الاحتمالية هو تابع متزايد

2. تابع التوزيع الاحتمالي هو تابع موجب ومتزايد

3. التغاير هو العزم المركزي من الدرجة الثانية

4. القيمة الوسطى هي العزم المركزي من الدرجة الأولى

5. السيرورة العشوائية تتبع ظاهرة إحصائية وتتبع للزمن

6. السيرورة الإرغودية هي التي يكون متوسطها بالزمن يساوي متوسطها الإحصائي

7. السيرورة المستقرة هي التي لا تتغير خواصها الإحصائية مع الزمن

8. تابع الترابط الذاتي لسيرورة X مستقرة بالمعنى الواسع يحقق $R_X(-\tau) = -R_X(\tau)$

9. القيمة الصغرى لتابع الترابط الذاتي عند القيمة 0

10. القيمة العظمى لتابع الترابط الذاتي عند القيمة 0

11. تحويل فورييه لتابع الترابط الذاتي يعطي الكثافة الطيفية للاستطاعة للسيرورة

1. ‘Digital and Analog Communication Systems’, 8th edition, by Leon W. COUSH II, Pearson Education International, 2013 ch6, appendix B.
2. "simulation of communication systems", 2nd edition, by M.Jeruchim, Ph. Balaban and S. Shanmugan, Klwer academic publishers, 2002 ch6

حل المذاكرة

رقم السؤال	الإجابة
1. تابع الكثافة الاحتمالية هو تابع متزايد	خطأ
2. تابع التوزيع الاحتمالي هو تابع موجب ومتزايد	صح
3. التغاير هو العزم المركزي من الدرجة الثانية	صح
4. القيمة الوسطى هي العزم المركزي من الدرجة الأولى	خطأ
5. السيرورة العشوائية تتبع ظاهرة إحصائية وتتبع للزمن	صح
6. السيرورة الإرغودية هي التي يكون متوسطها بالزمن يساوي متوسطها الإحصائي	صح
7. السيرورة المستقرة هي التي لا تتغير خواصها الإحصائية مع الزمن	صح
8. تابع الترابط الذاتي لسيرورة X مستقرة بالمعنى الواسع يحقق $R_X(-\tau) = -R_X(\tau)$	خطأ
9. القيمة الصغرى لتابع الترابط الذاتي عند القيمة 0	خطأ
10. القيمة العظمى لتابع الترابط الذاتي عند القيمة 0	صح
11. تحويل فورييه لتابع الترابط الذاتي يعطي الكثافة الطيفية للاستطاعة للسيرورة	صح

الفصل الثالث:
تعديل الحزمة القاعدية

الكلمات المفتاحية:

أخذ العينات المثالي، التعديل النبضي، PAM، PWM، PPM، تعديل ترميز النبضة PCM، التكمية المنتظمة، التكمية اللغرتمية، الترميز التفاضلي DPCM، ADPCM، ترميز التنبؤ الخطي LPC، تراميز الخط NRZ، Diphase، B6ZS.

الملخص:

يُعدّ الفصل الحالي أساس الاتصالات الرقمي، فهو يعرض التعديل النبضي الذي يمثل نقلة من التعديل التماثلي إلى التعديل الرقمي، بأنواعه المختلفة PAM، PWM، PPM. ثم يعرض رقمنة الإشارة باستعمال تعديل ترميز النبضة PCM باستعمال التكمية المنتظمة والتكمية اللغرتمية، ويعرض أنواعاً من ترميز شكل الموجة المتقدم DPCM، ADPCM،LPC. أخيراً يعرض طرقاً لإرسال بتات ناتج الترميز على خطوط اتصالات عريضة الحزمة بما يسمى ترميز الخط.

الأهداف التعليمية:

- تعرّف طرق التعديل النبضي.
- تعرّف طرق التكمية الخطية.
- تعرف طرق رقمنة الإشارة باستعمال التعديل النبضي المطالي وتكمية المطالات للحصول على تعديل ترميز النبضة.
- تعرف بعض طرق ترميز شكل الموجة المتقدمة.
- فهم عملية إرسال المعطيات الرقمية على خطوط اتصالات عريضة الحزمة.
- تعرف تراميز الخط.
- التمييز بين مختلف طرق ترميز الخط من حيث الأداء.

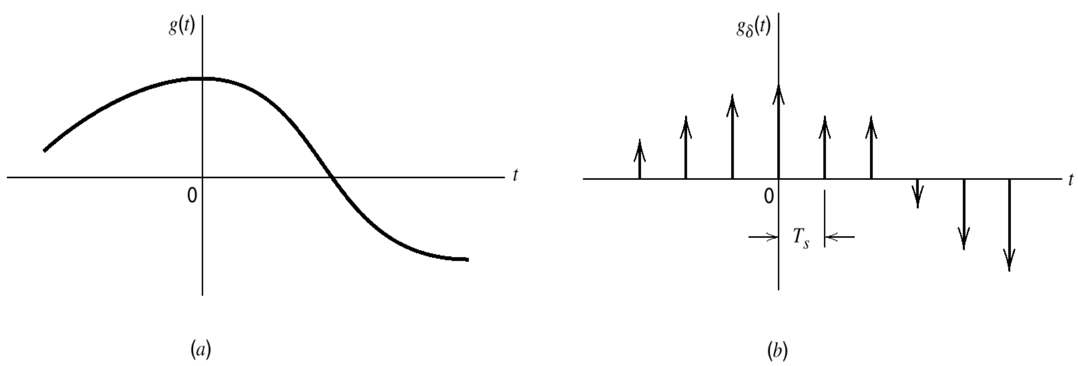
1. أنواع التعديل النبضي

في التعديل التماثلي (مقرر الاتصالات التماثلية) كنا نأخذ إشارة الحامل الجيبية ونغير مطال الحامل بحسب إشارة المعلومات في التعديل المطالي Amplitude modulation AM، أو نغير تردد الحامل بحسب إشارة المعلومات في التعديل الترددي Frequency modulation FM، أو نغير الطور في التعديل الطوري Phase modulation PM. في التعديل النبضي سنأخذ قطار نبضات دورية كإشارة حامل، ثم نغير مطال النبضة أو عرضها أو موقعها بحسب إشارة المعلومات التي سنحملها عليه. نسمي هذه العملية التعديل النبضي التماثلي، ويجري الإرسال بلحظات معينة فقط (تقطيع في الزمن)؛ فإذا قمنا بتكمية المطالات وأصبح لدينا تقطيع بالزمن وبالمطالات حصلنا على التعديل النبضي الرقمي والذي هو مدخل للاتصالات الرقمية. لذلك يُعتبر التعديل النبضي واقعاً بالوسط بين التعديل التماثلي والتعديل الرقمي.

1.1. عملية أخذ العينات والتقطيع المثالي

هي عملية تسمح بتحويل الإشارة التماثلية إلى متتالية عينات متباعدة زمنياً بانتظام. يجب أن يكون تردد أخذ العينات بحيث يمكّننا من استعادة الإشارة التماثلية على نحو وحيد. بحسب نظرية شانون (أو شرط نايكويست): يكفي أن يكون تردد أخذ العينات أعلى من ضعف أعلى تردد في الإشارة لنتمكن من استعادة الإشارة من عينات.

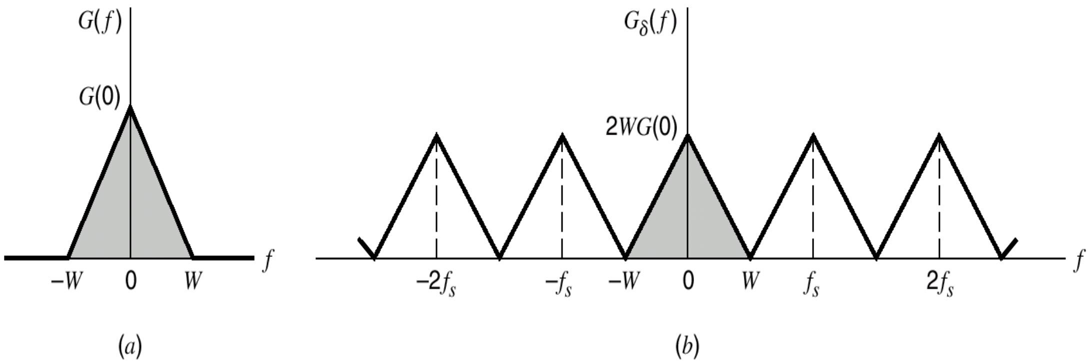
نفترض لدينا إشارة تماثلية $g(t)$، ينتج التقطيع المثالي لها من ضربها بقطار نبضات ديراك دورية بدور $T_s = 1/f_s$ حيث تردد التقطيع f_s يحقق شرط شانون. نسمي $g_\delta(t)$ ناتج التقطيع المثالي، ويُعطى بالعلاقة: $g_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s).\delta(t - nT_s)$



في الشكل السابق (a) الإشارة المستمرة و (b) ناتج التقطيع المثالي.

يعطى تحويل فورييه لناتج التقطيع المثالي بالعلاقة: $G_\delta(f)=f_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}G(f-nf_s)$. وهذا يعني أن طيف ناتج التقطيع المثالي هو دوري ودوره هو f_s. إذا كان طيف الإشارة $g(t)$ لا يتجاوز W يمكن أخذ $f_s=2W$ ومن العلاقة $g_\delta(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}g(nT_s).\delta(t-nT_s)$ نحسب تحويل فورييه لناتج التقطيع المثالي فنجد

$$
\begin{aligned}
G_\delta(f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}g(nT_s).\exp(-j2\pi nfT_s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}g(\frac{n}{2W}).\exp(-j\pi nf/W) \\
&= f_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}G(f-nf_s)=f_sG(f)+f_s\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}G(f-nf_s)
\end{aligned}
$$

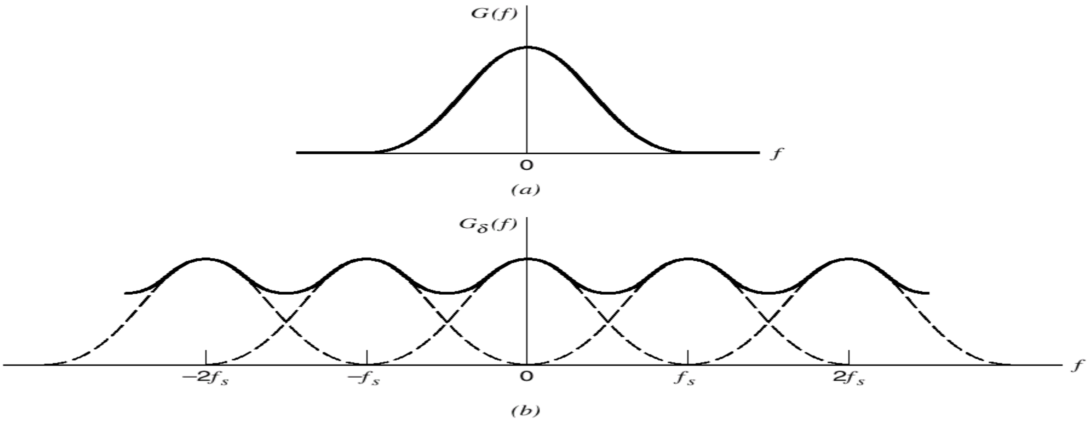


طيف الإشارة g(t) إلى اليسار (a)، وطيف ناتج التقطيع المثالي (b)

من هذه العلاقات يمكننا استنتاج G(f) من $G_\delta(f)$فنجد:

$$
\begin{aligned}
g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty}G(f)e^{j2\pi ft}df=\int_{-W}^{W}\frac{1}{2W}G_\delta(f)e^{j2\pi ft}df \\
&= \int_{-W}^{W}\frac{1}{2W}[\sum_{n=-\infty}^{\infty}g(\frac{n}{2W})\ e^{\frac{-j\pi nf}{W}}]e^{j2\pi ft}df \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}g(\frac{n}{2W}).\frac{1}{2W}\int_{-W}^{W}e^{j2\pi f(t-\frac{n}{2W})}df \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}g(\frac{n}{2W}).\frac{\sin(2\pi Wt-n\pi)}{(2\pi Wt-n\pi)} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}g(\frac{n}{2W}).\mathrm{sinc}(2Wt-n) \qquad -\infty\langle t\langle+\infty
\end{aligned}
$$

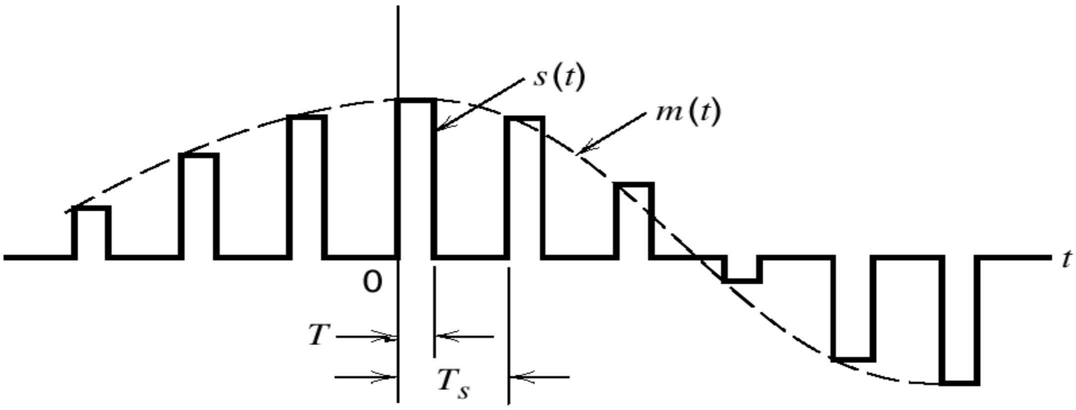
تبيّن هذه العلاقة إمكان استعادة الإشارة من عيناتها المقطعة تقطيعاً مثالياً وتوابع sinc إذا كان طيفها محدوداً وكان تردد التقطيع يحقق شرط شانون. في حال لم يحقق تردد التقطيع شرط شانون يحصل تراكب النسخ الدورية من طيف الإشارة ولا نتمكن من استعادة الإشارة.



الشكل: تراكب الطيف حين لا يحقق تردد التقطيع شرط شانون.

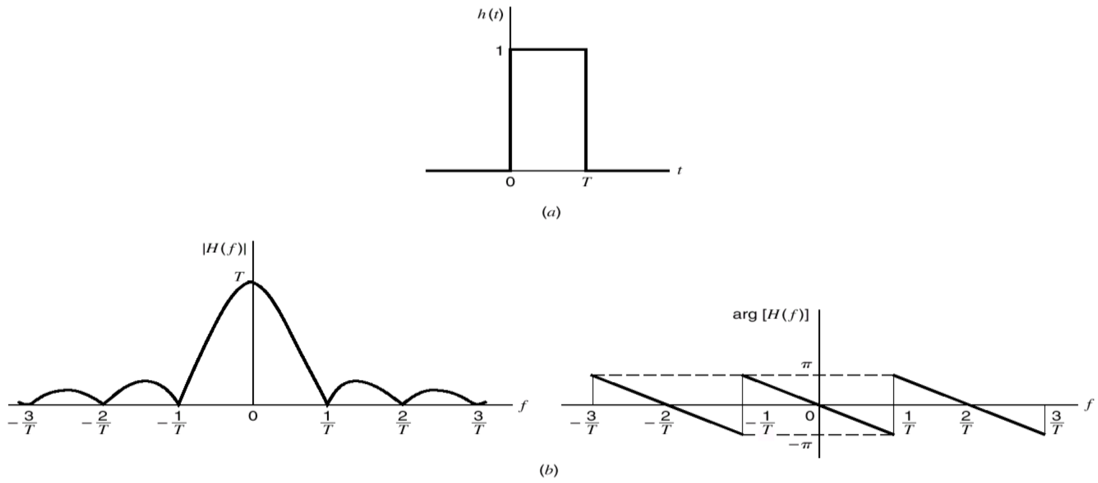
2.1. تعديل مطال النبضة PAM وتعديل عرض النبضة PWM وتعديل موضع النبضة PPM

في الحقيقة لا يمكننا تحقيق التقطيع المثالي لأنه لا يمكن الحصول فيزيائياً على نبضات ديراك. نستعيض عنها بنبضات مستطيلة دورية ضيقة أو نبضات دورية ضيقة من أي شكل آخر، فنحصل على تعديل مطال النبضة pulse amplitude modulation PAM للإشارة:



تعديل مطال النبضة بنبضات مستطيلة بدورية T_s وعرض نبضة T.

يبين الشكل التالي النبضة المستطيلة وفي الأسفل مطال طيفها إلى اليسار وطور الطيف إلى اليمين.



ويُعطى ناتج تعديل مطال النبضة بالعلاقة: $s(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} m(nT_s).h(t-nT_s)$

حيث m(t) إشارة المعلومات و h(t) إشارة النبضة. يمكننا البرهان أن ناتج تعديل النبضة يرتبط بالتقطيع المثالي للإشارة $m_\delta(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} m(nT_s).\delta(t-nT_s)$ بحيث أن $s(t)=m_\delta(t)*h(t)$. في هذه الحالة يكون طيف إشارة PAM هو طيف التقطيع المثالي مضروباً بطيف النبضة:

$$m_\delta(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} m_\delta(\tau).h(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s).\delta(\tau-nT_s)\right].h(t-\tau)d\tau$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau-nT_s).h(t-\tau)d\tau$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s).h(t-nT_s)=s(t)$$

$$\Rightarrow S(f)=M_\delta(f).H(f) \qquad \textit{Fourier Transform}$$

$$but \quad M_\delta(f)=f_s\sum_{k=-\infty}^{\infty} M(f-k.f_s)$$

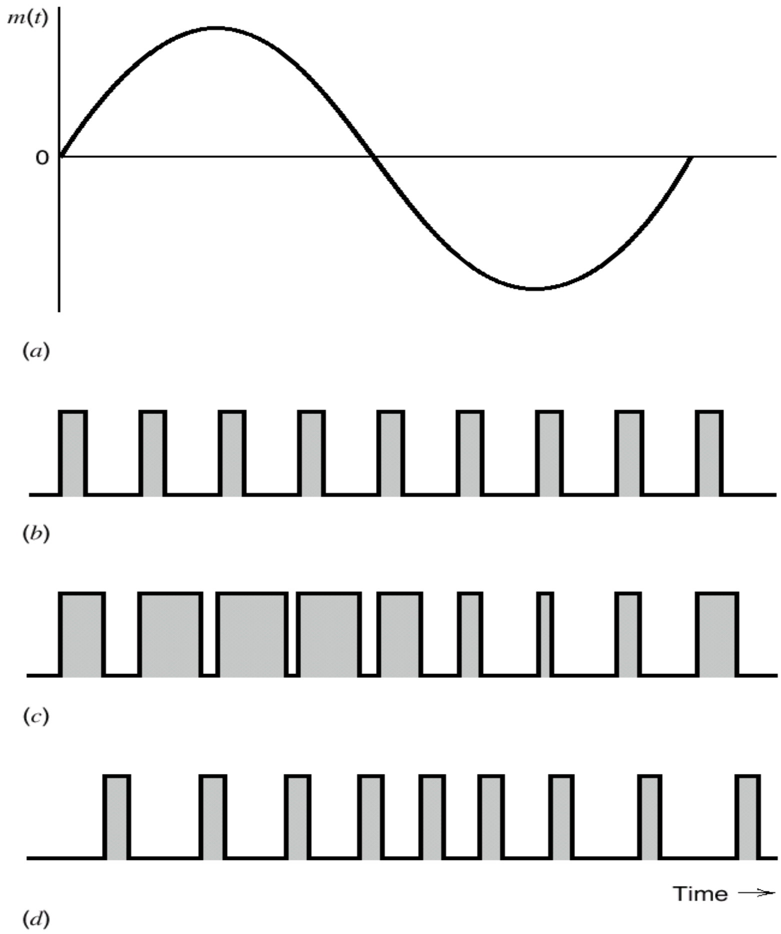
$$\Rightarrow S(f)=f_s\sum_{k=-\infty}^{\infty} M(f-k.f_s).H(f)$$

أي إن PAM تسبب تشويهاً في طيف الإشارة بحسب العلاقة في السطر الأخير. لاستعادة الإشارة الأصلية من إشارة PAM، يمكن تصحيح تشويه المطال باستعمال مسوٍّ equalizer، بضرب مطال طيف الـ PAM بـ $\frac{1}{|H(f)|}=\frac{1}{T\,\mathrm{sinc}(f\,T)}=\frac{\pi\,f}{\sin(\pi\,f\,T)}$

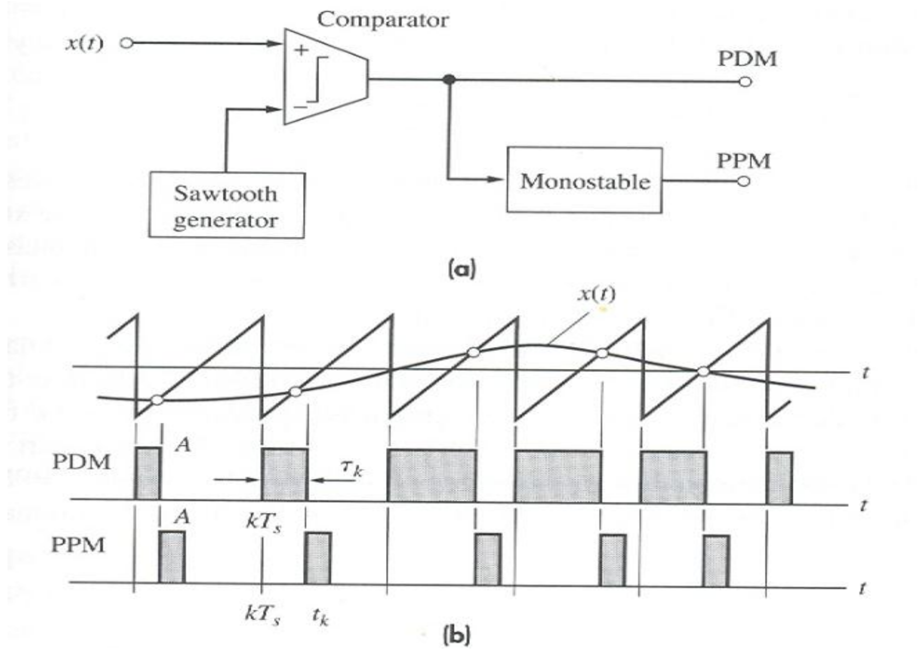
في حال كان $T/T_s\le 0.1$ كان تشويه إشارة الـ PAM أقل من 0.5%، وأمكننا حذف المسوي.

نلاحظ أن:

- في نظم التعديل PAM نزيد عرض مجال قناة الاتصال دون تحقيق ربح في الأداء.
- يمكن استغلال زيادة عرض المجال لتحقيق أداء أفضل ضد الضجيج.
- نستخدم تعديل عرض النبضة Pulse Width Modulation PWM (ويسمى أيضاً Pulse Duration Modulation PDM)، بتغيير وقوع الحافة الصاعدة أو الحافة الهابطة بحسب الإشارة المعدَّلة، مع بقاء المطال ثابتاً. في هذه الحالة، تستهلك النبضات العريضة استطاعة عالية من دون زيادة الأداء.
- نستخدم تعديل موضع النبضة Pulse Position Modulation PPM بحيث نحافظ على زمن الانتقال للنبضات ناتج تعديل عرض النبضة السابق ولكن الآن بنبضات ضيقة.

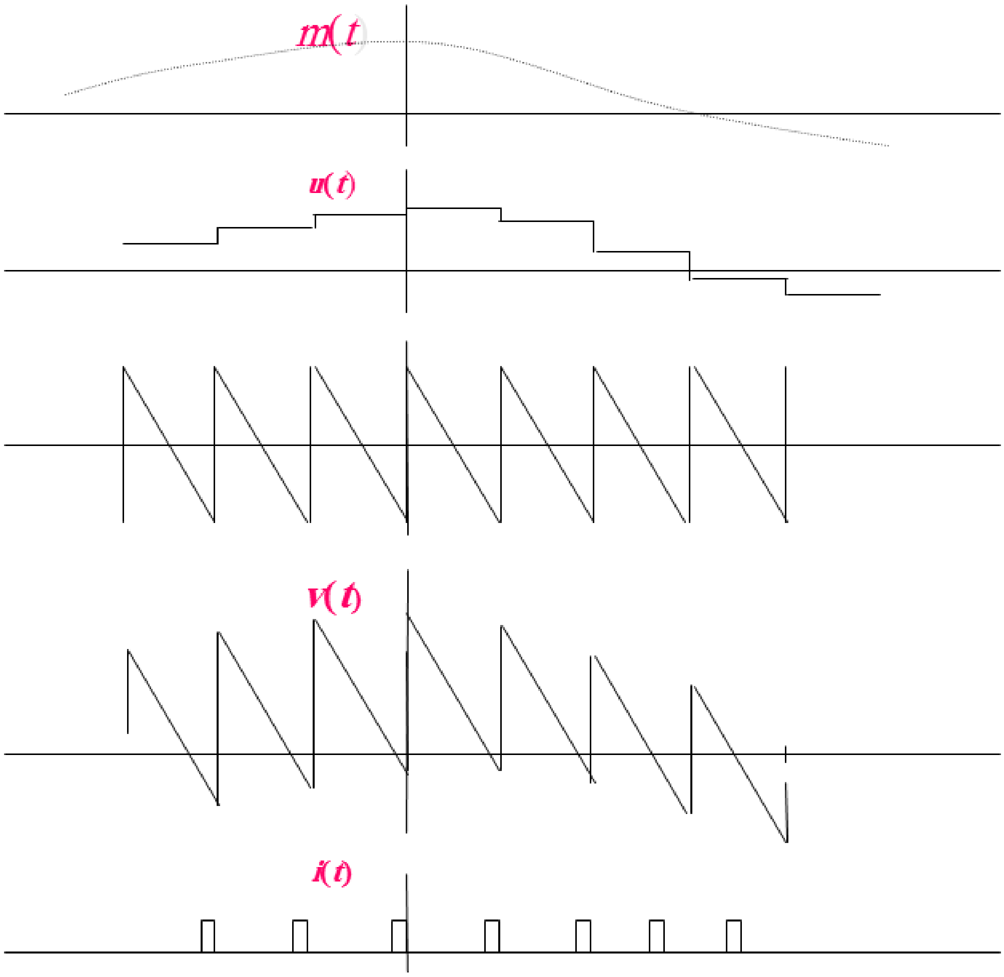


الشكل من الأعلى إلى الأسفل: إشارة المعلومات $m(t)$ قطار النبضات، ناتج تعديل عرض النبضة PWM ثم ناتج تعديل موضع النبضة PPM. نلاحظ أنه يمكن تنفيذ PWM كما في الشكل التالي:



الشكل: توليد إشارات PWM و PPM.

أو يمكن تنفيذه بجمع الإشارة مع إشارة سن منشار كما في الشكل التالي:



الشكل: طريقة ثانية لتوليد إشارة PPM، من الأعلى إلى الأسفل: إشارة المعلومات، ثم أخذ عينات منها، ثم إشارة سن المنشار، ثم ناتج جمع سن المنشار إلى الإشارة الثانية وأخيراً إشارة PPM. نبضة عند تقاطع الخط المائل لسن المنشار مع المحور الأفقي.

ملاحظة: يجب أن يكون لدينا تصور عن المطال الأعظم للإشارة، للتحكم بمطال إشارة سن المنشار بحيث يكون هناك تقاطع في كل دور منها.

لاستعادة الإشارة نستعين بنبضات الحامل وننشئ إشارة PWM من إشارة PPM، ثم بمكاملتها (نأخذ بالاعتبار أن المطال الصفري يعطي تكامل نصف قيمة عظمى للأخذ بالاعتبار المطالات السالبة) نحصل على إشارات PAM نستعيد منها الإشارة. يجب تصفير المكامل بعد كل عملية مكاملة.

يستعمل تعديل PAM كخطوة سابقة لرقمنة الإشارة، وتعديل PWM و PPM في التحكم في المحركات وتطبيقات أخرى. ثمة معالجات تأخذ الإشارة التماثلية وتنتج تعديل PWM أو PPM. الجدير بالذكر يمكن الحصول على تعديل PPM بأداء جيد بوجود الضجيج.

2. تعديل ترميز النبضة PCM

1.2. قياس التشوه

قياس التشوه هو قياس بُعد الإشارة الأصلية $s(t)$ عن الإشارة المُستعادة $\hat{s}(t)$. ثمة عدة تعاريف لهذا التشوه منها:

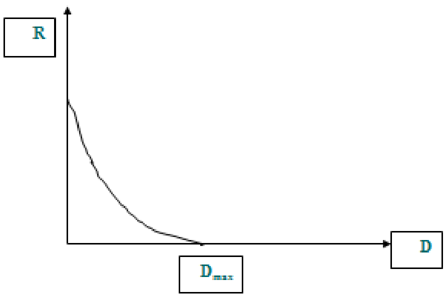
$$\max_t |s(t)-\hat{s}(t)|$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|s(t)-\hat{s}(t)|\,dt$$

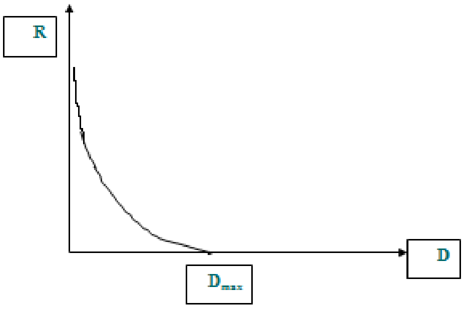
$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[s(t)-\hat{s}(t)]^2\,dt$$

فإذا كانت الإشارة الأصلية تحمل بتات اثنانية أمكننا تعريف التشوه بين المعطيات (البتات) الأصلية والمعطيات (البتات) المستعادة بالاستفادة من تشوه هامينغ للبت الواحدة $d(s,\hat{s})=1 \; iff \; s\neq\hat{s} \quad else \; =0$. فإذا كان لدينا n بتاً قسنا التشوه بالقيمة الوسطى للتشوهات المفردة للبتات: $D=E(d(s,\hat{s}))=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(d(s_i,\hat{s}_i))$ حيث يشير E إلى التوقع الرياضي أو القيمة الوسطى.

في نظام اتصالات ما، علينا أن نصمم النظام بحيث يُعاد إنتاج الإشارة عند المستقبل بأقل تشوه ممكن. رأينا سابقاً مفهوم سعة القناة، فإذا كان معدل الإرسال R أقل من سعة القناة أمكننا نقل المعطيات باحتمال خطأ صغير. أما إذا كان معدل النقل أعلى من سعة القناة فستحدث أخطاء وضياعات وعلينا أن نركز على نقل المعطيات الأكثر أهمية لاستعادة الإشارة من دون أخطاء. معدل التشوه $R(D)$ هو معدل النقل الذي يضمن ألا يزيد تشوه الإشارات المنقولة عن القيمة D.



نلاحظ أن التشوه يزداد بانخفاض معدل النقل $R(0)$ هو معدل النقل للاستعادة من دون تشوه. وهو على الأقل يساوي الأنتروبية للمنابع المنفصلة التي تنتج رموزاً منفصلة. أما في حالة المنابع المتصلة فلا يمكننا الحصول على قيمة $R(0)$ والمنحني يسعى إلى اللانهاية بجوار الصفر



في الحقيقة في حالة المنابع المتصلة نحتاج إلى أخذ عينات من المنبع ثم تكميتها لإرسالها رقمياً (تشبه عملية التحويل من تماثلي إلى رقمي)، وهذا مايسمى بمجمله تعديل ترميز النبضة. وبالحس الهندسي نرى أنه كلما كان عدد البتات أعلى كانت الإشارة المستعادة أقل تشوهاً وأقرب إلى الأصلية.

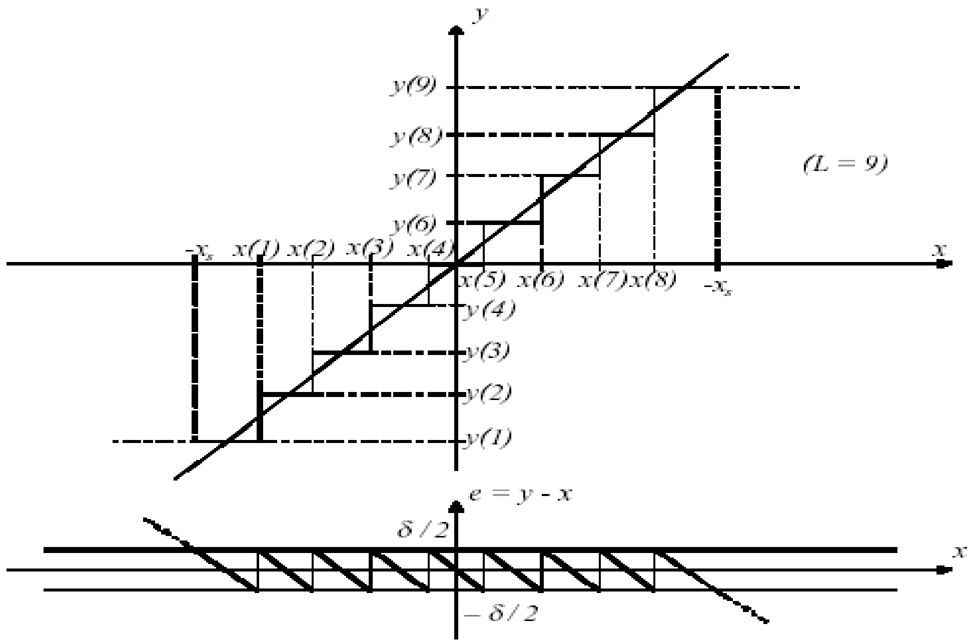
2.2. التكمية المنتظمة

نجزئ partition مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعة منتهية من المجالات N مجالاً. في كل مجال R_k حيث k بين 1 و N توجد نقطة تمثيل وحيدة x_k تنتمي إلى هذا المجال، وتكون النسخة المكماة لأي نقطة تقع ضمن هذا المجال. أي:

$$Q(x) = x_k \qquad \forall x \in R_k$$

بعد ذلك نرمز هذه القيم بسلاسل اثنانية ونرسلها. لـ N قيمة يكفي $\log_2 N$ بتاً. في المستقبل نستعيد x_k من هذه البتات. نسمي التكمية منتظمة حين تكون المجالات متساوية الطول.

مثال:



الشكل: تقسيم المستقيم الحقيقي إلى تسعة مناطق وتكمية المناطق بالقيم $y(i), i = 1,2...,9$.

إذا افترضنا الإشارة محدودة بالمجال $[-x_s \;\; x_s]$ واعتبرنا $-x_s = x(0)$ و $x_s = x(9)$ فإن المنطقة بين $x(i)$ و $x(i+1)$ تُكمّى بالقيمة $y(i+1)$. إضافة إلى ذلك، تكمى كل القيم التي هي أقل من $-x_s$ بالقيمة $y(1)$ وكل القيم التي هي أكبر من x_s بالقيمة $y(9)$. إذا كان عرض المجال $[x(i) \;\; x(i+1)]$ يساوي δ فنلاحظ أن خطأ التكمية (الشكل في الأسفل) يتوزع بانتظام على المجال $[-\delta \;\; \delta]$ حين تكون الإشارة ضمن المجال $[-x_s \;\; x_s]$ ويسمى الخطأ خطأ البرغلة granulation. أما خارج هذا المجال فيمكن أن تصبح إشارة الخطأ لا نهائية ويسمى الخطأ خطأ الإشباع saturation.

3.2. تعديل ترميز النبضة

بالعودة إلى التعديل النبضي المطالي، إذا جرت تكمية مطالات النبضات، تكمية منتظمة في غالب الأحيان، باستعمال عدد مناسب من البتات كي لا نتجاوز التشوه المسموح، أمكننا التعبير عن تعديل الإشارة بمجموعة متتالية من الكلمات الاثنانية، تشير كل منها إلى ترميز مطال النبضة الموافقة. وبذلك يُعبّر عن الإشارة بمجموعة بتات فقط، ونكون قد انتقلنا إلى الترميز الرقمي للإشارة.

في الحقيقة، يمكن النظر إلى تعديل ترميز النبضة على أنه مشابه للتبديل التماثلي الرقمي analog–to–digital conversion. الجدير بالذكر، أن التكمية المنتظمة تعطي أفضل أداء حين يكون التوزع الإحصائي للإشارة المكماة منتظماً. الإشارة الكلامية ذات توزع أسي، احتمال ورود المطالات القصيرة أكثر بكثير من احتمال ورود المطالات الطويلة. لذلك، نفضل ضغط الإشارة لغرتمياً قبل تكميتها بانتظام. الضواغط المعيارية هي A–law و µ–law التي تعطى بالعلاقات التالية:

الضاغط $\mu - law$

يعرف الضاغط $\mu - law$ بالتابع:

$$c(x) = x_{\max} \frac{\log_e \left(1 + \mu |X| / x_{\max}\right)}{\log_e (1+\mu)} sign(x)$$

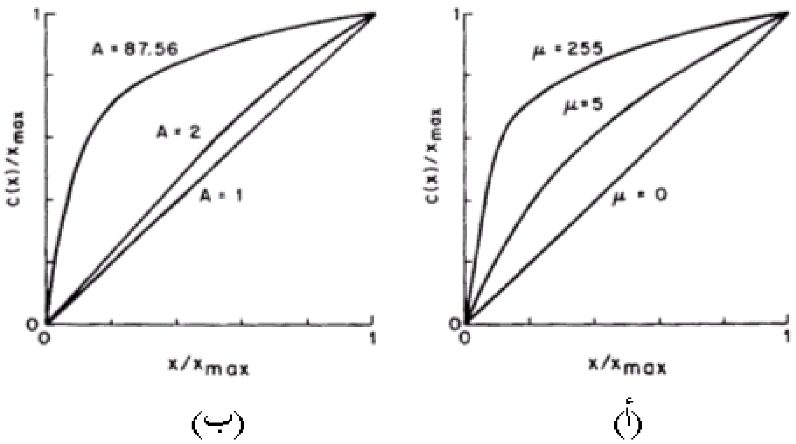
وهو خطي تقريبا في حال

x صغيرة $\left[\log(1+ax) \approx ax\right]$ ولغرتمي في حال x كبيرة $\left(\mu |x| \gg x_{\max}\right)$

الضاغط $\mu - law$

ومن الضواغط اللغرتمية الأخرى المستعملة على نطاق واسع في تكمية الإشارات الصوتية الضاغط $A - law$ ويتصف هذا الضاغط بأنه خطي قرب المبدأ $|x| \le x_{\max} / A$ ولغرتمي عند قيم أكبر :

$$c(x) = \begin{cases} \dfrac{A|x|}{1+\log_e A} sign(x) & 0 \le \dfrac{|x|}{x_{\max}} \le \dfrac{1}{A} \\ x_{\max} \dfrac{1+\log_e \left(A|x| / x_{\max}\right)}{1+\log_e A} sign(x); & \dfrac{1}{A} \le \dfrac{|x|}{x_{\max}} \le 1 \end{cases}$$



(أ) منحني الضاغط μ-law المُستنظَم، (ب) منحني الضاغط A-law المُستنظَم (للقيم الموجبة فقط).

من كتاب الاتصالات الرقمية: جامعة دمشق–كلية الهندسة المعلوماتية 2000

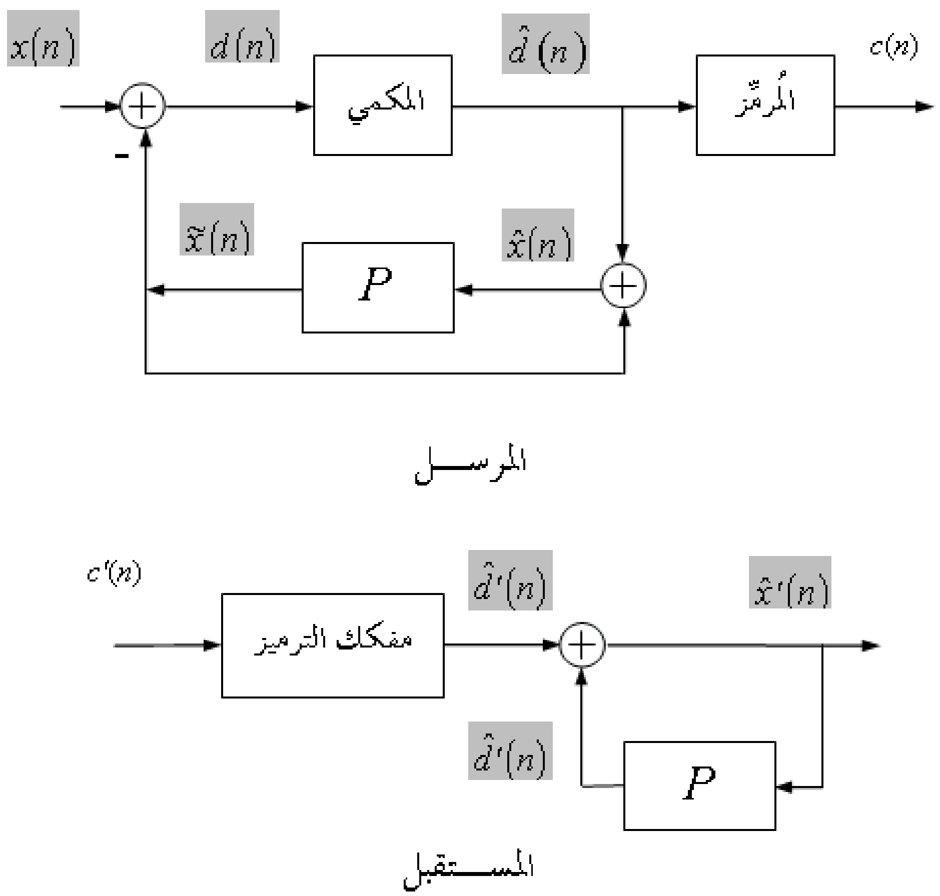
حين نستعمل أحد الضاغطين ونكمي الناتج على 8 بتات تكون جودة الإشارة عند استعادتها تكافئ التكمية المنتظمة على 12 بتاً.

3. الترميز التفاضلي وترميز التنبؤ الخطي

في التكمية السابقة، نكمي كل عينة لوحدها بقطع النظر عن قيم العينات المجاورة لها. وبما أن الإشارات بشكل عام مترابطة فإن قيم العينات المجاورة تكون عادة قريبة من العينة نفسها، لذلك أتت فكرة التكمية التفاضلية أو الترميز التفاضلي.

1.3. الترميز التفاضلي

نأخذ تقريباً للعينة ناتجاً عن قيمة نتنبأ بها من العينات السابقة، وما نكمّيه ونرسله على الخط هو إشارة الفرق بين قيمة العينة والقيمة المتنبأ بها. وبما أن المجال الديناميكي لإشارة الخطأ هذه أقل من المجال الديناميكي للإشارة الأصلية، فإننا يمكن أن نوفر في عدد البتات التي نكمي بها العينة تفاضلياً مع الحفاظ على النوعية. انظر الشكل التالي:



(أ) المخطط الصندوقي لمرمز نظام DPCM، (ب) مفكك الترميز.

في هذا الشكل الإشارة الأصلية هي $x(n)$ والإشارة المتنبأة هي $\tilde{x}(n)$ وإشارة الخطأ هي $d(n) = x(n) - \tilde{x}(n)$. يجري تكمية هذه الإشارة فنحصل على $\hat{d}(n)$ ثم نرمز هذه الإشارة برماز معين c(n). عند المستقبل نستقبل c'(n) (المطابقة لـ c(n) في غياب أخطاء النقل) ونفك الترميز ونستعيد $\hat{d}'(n)$ ثم نستعيد الإشارة $\hat{x}'(n)$.

2.3. ترميز التنبؤ الخطي

في غالب الأحيان، نتنبأ بقيمة العينة من تركيب خطي للعينات السابقة ونقول أن لدينا تنبؤ خطي Linear prediction.

$$\hat{x}(n) = \tilde{x}(n) + \hat{d}(n) = P(\hat{x}(n)) + \hat{d}(n)$$
$$= \sum_{i=1}^{p} a_i \hat{x}(n-i) + \hat{d}(n) \qquad \Rightarrow$$
$$\hat{d}(n) = \left(\hat{x}(n) - \sum_{i=1}^{p} a_i \hat{x}(n-i) \right) \quad \Rightarrow$$
$$\hat{D}(z) = \hat{X}(z).A(z) \qquad where \quad A(z) = 1 - P(z) = 1 - \sum_{i=1}^{p} a_i z^{-i}$$

تبين العلاقات التالية كيفية الترميز والاستعادة:

$$\hat{x}(-1) = \hat{x}(-2) = ... = \hat{x}(-p) = 0$$
$$d(0) = x(0) \quad \Rightarrow \hat{d}(0) = \hat{x}(0)$$
$$\tilde{x}(1) = P(\hat{x}(1)) = a_1 \hat{x}(0);$$
$$d(1) = x(1) - \tilde{x}(1); \qquad \Rightarrow \hat{d}(1)$$
$$\hat{x}(1) = \hat{d}(1) + \tilde{x}(1)$$
$$\tilde{x}(n) = P(\hat{x}(n)) = \sum_{k=1}^{p} a_i \hat{x}(n-i);$$
$$d(n) = x(n) - \tilde{x}(n); \qquad \Rightarrow \hat{d}(n)$$
$$\hat{x}(n) = \hat{d}(n) + \tilde{x}(n)$$

يتغير تباين إشارة الخطأ بتغير معاملات التنبؤ الخطي a_i ودرجة التنبؤ p. بحسب العلاقات:

$$\sigma_d^2 = E\left[d^2(n)\right] = E\left[(x(n) - \tilde{x}(n))^2\right]$$
$$= E\left[\left(x(n) - \sum_{k=1}^{p} a_k \hat{x}(n-k)\right)^2\right]$$
$$= E\left[\left(x(n) - \sum_{k=1}^{p} a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{p} a_k q(n-k)\right)^2\right]$$

حيث q(n) هو الخطأ الناتج عن التكمية أي إن: $\hat{x}(n)=x(n)+q(n)$. وبما أننا نود أن يكون خطأ التنبؤ أصغر ما يمكن (ومنه تباين إشارة الخطأ أصغر ما يمكن)، لذلك يجب أن يكون المشتق الجزئي لتباين إشارة الخطأ بالنسبة لكل معامل تنبؤ $a_i,\ i=1,2,...,p$ معدوماً. أي:

$$\frac{\partial\sigma_d^2}{\partial a_j}=-2E\left[\left(x(n)-\sum_{k=1}^{p}a_k\left(x(n-k)+q(n-k)\right)\right)\left(x(n-j)+q(n-j)\right)\right]=0;\qquad 1\le j\le p$$

$$\Rightarrow\ E\left[\left(x(n)-\sum_{k=1}^{p}a_k\left(x(n-k)+q(n-k)\right)\right)\left(x(n-j)+q(n-j)\right)\right]=0;\qquad 1\le j\le p$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow E\left[x(n-j)\,x(n)\right]+E\left[q(n-j)\,x(n)\right]&=\sum_{k=1}^{p}a_k\ E\left[x(n-j)\,x(n-k)\right]\\&+\sum_{k=1}^{p}a_k\ E\left[q(n-j)\,x(n-k)\right]\\&+\sum_{k=1}^{p}a_k\ E\left[x(n-j)\,q(n-k)\right]\\&+\sum_{k=1}^{p}a_k\ E\left[q(n-j)\,q(n-k)\right]\end{aligned}$$

بما أن إشارة خطأ التكمية عشوائية وغير مترابطة مع الإشارة التي نكمّيها، يمكننا أن نكتب ما يلي:

$$\begin{aligned}&E\left[x(n-j)\ q(n-k)\right]=0;\qquad \forall\, n,j,k\\&E\left[q(n-j)\ q(n-k)\right]=\sigma_q^2\ \delta(j-k)\\&E\left[x(n-j)\ x(n-k)\right]=\phi(j-k)\end{aligned}$$

حيث $\delta(j-k)$ يساوي 1 حين $j=k$ وإلا فهو معدوم، و $\phi(j)$ هو تابع الترابط الذاتي للإشارة x الذي يقيس مدى تشابه الإشارة مع نسخة مزاحة عنها j عينة.

مما سبق يمكننا أن نكتب:

$$\phi(j)=\sum_{k=1}^{p}a_k.\left[\phi(j-k)+\sigma_q^2\ \delta(j-k)\right],\qquad 1\le j\le p$$

تشكل العلاقة السابقة مجموعة p معادلة بـ p مجهولاً هي معاملات التنبؤ. توجد طرق تسهل حل هذه المعادلات لاستنتاج معاملات التنبؤ منها. غالباً نستعيض عن تابع الترابط الذاتي $\phi(j)$ بتابع الترابط المستنظم $\rho(j)=\frac{\phi(j)}{\phi(0)}=\frac{\phi(j)}{\sigma_x^2}$ (حين تكون القيمة الوسطى للإشارة صفر وهذا محقق لغالب الإشارات ومنا إشارة الصوت مثلاً)، ويمكننا أن نكتب العلاقة المصفوفية التالية: $\rho=C\,\alpha$ حيث،

$$\boldsymbol{\rho}=\begin{bmatrix}\rho(1)\\ \rho(2)\\ \\ \\ \rho(p)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ .\\ .\\ .\\ a_p\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}\left(1+\frac{1}{SNR}\right) & \rho(1) & \dots & \rho(p-1)\\ \rho(1) & \left(1+\frac{1}{SNR}\right) & \dots & \rho(p-2)\\ . & . & & .\\ . & . & & .\\ . & . & & .\\ \rho(p-1) & \rho(p-2) & \dots & \left(1+\frac{1}{SNR}\right)\end{bmatrix}$$

بقلب المصفوفة نحسب معاملات التنبؤ، ويكون عندها تباين إشارة الخطأ

$$\sigma_d^2=\sigma_x^2-\sum_{k=1}^{p}a_k\,\phi(k)=\sigma_x^2\left[1-\sum_{k=1}^{p}a_k\rho(k)\right].$$

ونسمي القيمة σ_x^2/σ_d^2 ربح التنبؤ وهو يساوي: $\left(G_p\right)_{opt}=\dfrac{1}{1-\sum_{k=1}^{p}a_k\rho(k)}$.

في الحقيقة كلما كانت p أكبر زاد ربح التنبؤ وقلّ تباين الخطأ، ولكن يجب المقايضة بين جودة الإشارة المستعادة وتعقيد الحسابات. بالنسبة للإشارات الكلامية أفضل درجة تنبؤ تساوي تردد تقطيع الإشارة بالكيلو هرتز مضافاً لها اثنان.

4. ترميز الخط

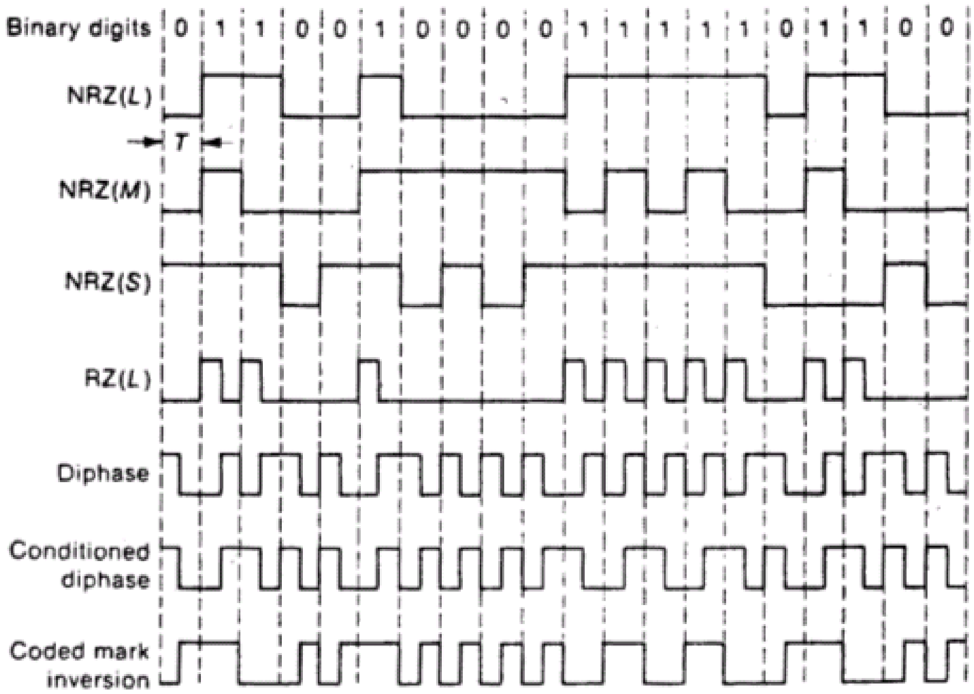
للإشارات الرقمية طيف عريض، ومعلوماتها الأساسية عند الترددات المنخفضة. يلزمنا قناة تمرير منخفض low pass channel لنقلها. يمكن ترميز الإشارات الرقمية للحصول على بعض المزايا المفيدة مثل:

- زيادة عدد التغيرات في الإشارة لتحسين تزامن البت
- إنقاص معدل الأخطاء باستعمال ترميز منيع لضجيج القناة
- إنقاص عرض طيف الإرسال باستعمال الإرسال المتعدد المستويات
- تشكيل طيف الإشارة المرسلة بالترشيح أو بالبعثرة لمواءمة خواص القناة أو لتقليل التداخل بين القنوات

تتكون المعطيات من أصفار ووحدان، تُرسَل بمعدل تدفق بتات $R\ bits/s$ حيث $T_b = 1/R$ ثا هو زمن البت. حين يكون عرض حزمة قناة الاتصال عريضاً بقدر كافٍ نرسل البتات من دون تعديل إضافي، باستعمال ما يسمى ترميز الخط، وهو يرمز المعطيات بتمثيلها كهربائياً باستخدام إشارات مناسبة للإرسال على الكوابل. غالباً نستخدم إشارتين (أو شكلين موجبين) $S_0(t)$ لإرسال البت صفر خلال زمن البت T_b، و $S_1(t)$ لإرسال البت واحد خلال الزمن نفسه.

1.4. الترامیز الأحادیة القطبیة

تأخذ فیها الإشارة الكهربائیة الممثلة للبتات إحدى قیمتین في كل لحظة. فیما یلي أنواع الترمیز (التمثیل الكهربائي) الشائعة الاستعمال في الإرسال الاثناني الوحید القطبیة:



إشارات ترمیز ثنائیة.

في ترمیز عدم العودة إلى الصفر non−return to zero NRZ مطال الإشارة ثابت خلال زمن البت وهذه القیمة هي 0 أو V. توجد عدة أنواع لـ NRZ، NRZ(L) هو النوع الأبسط والأكثر شیوعاً، وهو یعطي فلطیة معینة ثابتة للبت صفر وأخرى للبت واحد. NRZ(M) یحدث انتقال من مستوى إلى آخر عند كل ظهور للبت 1، یقابله NRZ(S) الذي یحدث الانتقالات عند كل ظهور للبت 0. النوعان الأخیران یضعفان التزامن.

في ترمیز العودة إلى الصفر RZ: یُمثل البت 1 بنبضة موجبة عرضها نصف زمن البت $T_b/2$ أما البت 0 فیمثل بمستوى منخفض دون أي تغییر.

في الترمیز الثنائي الطور Diphase ویسمى أیضاً Manchester: یُمثل البت 1 بنبضة موجبة متبوعة بنبضة سالبة لهما المطال نفسه، ویساوي زمن كل منهما $T_b/2$ وتُعكس قطبیة النبضتین في حال إرسال البت 0.

في الترميز الثنائي الطور الشرطي Conditioned diphase، يشبه السابق، يغير القطبية عند كل ورود للبت 1.

في الترميز Coded Mark inversion CMI، ترميز البت صفر ثابت منخفض عند خلال النصف الأول وعالي خلال النصف الثاني من زمن البت، أما البت 1 فيرمز بفلطية ثابتة خلال زمن البت وتتغير القطبية عند كل ورود للبت 1.

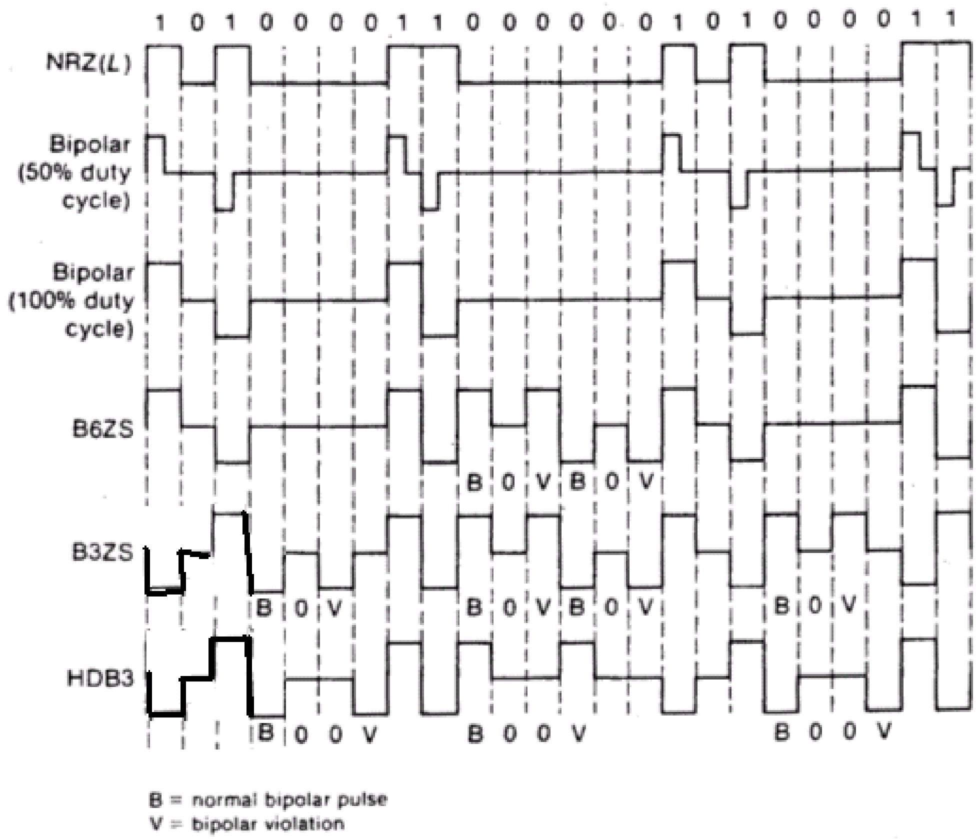
2.4. التراميز الثنائية القطبية

إذا أخذت الإشارة الممثلة للبتات NRZ إحدى القيم 0 أو $+V$ أو $-V$ كانت الإشارة ثنائية القطبية.

في الترميز الثنائي القطبية Bipolar ويسمى أيضاً قلب العلامة بالتناوب (أو عكس العلامة) Alternate−Mark−Inversion (AMI): يُمثل البت 1 إما بـ $+V$ أو $-V$ بالتناوب، أما البت 0 فيُمثل بالمستوى 0. يمكن أن يكون AMI إما NRZ بدورة 50% duty cycle أو RZ بدورة 100% حيث الدورة هي نسبة عرض النبضة إلى مدة البت.

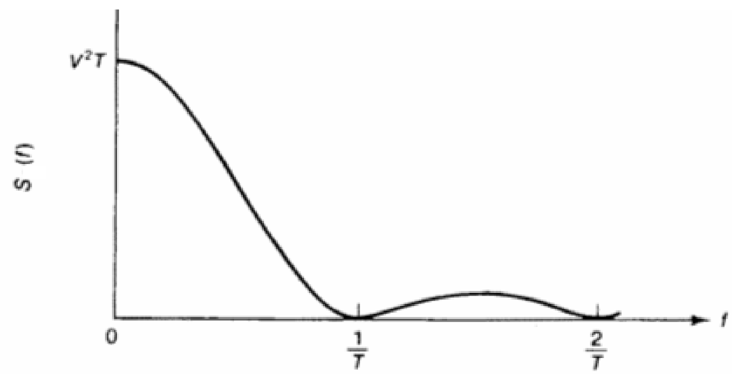
وبهدف تحسين الأداء، يمكن الاستعاضة عن تتالٍ من الأصفار (يوافق فلطية صفر خلالها) بتسلسل من تغيّر الفلطية. الشكل التالي يبيّن بالإضافة إلى bipolar NRZ بدورة عمل 50% ثم 100%، الترميز B6ZS الذي يستعيض عن كل تتالٍ من ستة أصفار بالإشارة BOVBOV حيث يشير B إلى عكس القطبية السابقة و 0 إلى القيمة صفر و V إلى الاحتفاظ بالقطبية السابقة (violation of bipolarity هتك تغيير القطبية). والترميز B3ZS الذي يستعيض عن كل تتالٍ من ثلاثة أصفار بالإشارة BOV، والترميز HDB3 الذي يستعيض عن كل تتالٍ من أربعة أصفار بالإشارة BOOV.

يُستعمل B6ZS في النظام المعياري $T2$ لمعدل تدفق $6.312\,Mb/s$، كما يُستعمل B3ZS في أمريكا الشمالية لمعدلات نقل $44.736\,Mb/s$. ويُستعمل لمعدلات نقل $139.264\,Mb/s$ في أوروبة.

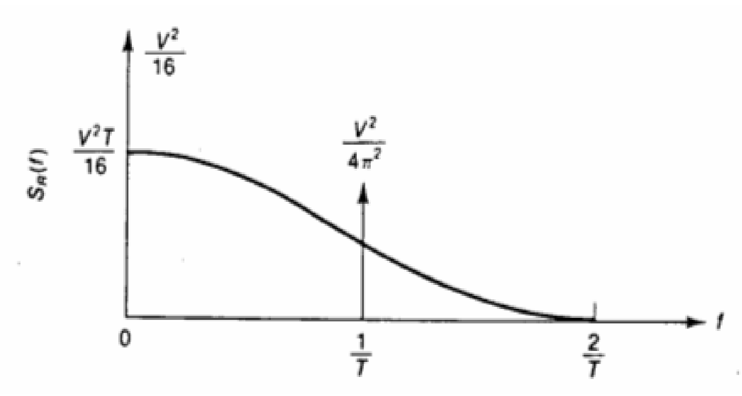


إشارات الترميز **Bipolar**.

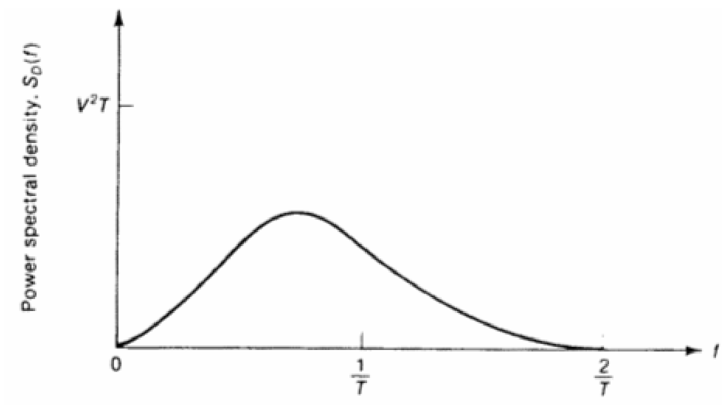
فإذا كان زمن البت T، كان الطيف الذي تشغله الإشارات الناتجة عن تراميز الخط: NRZ و RZ والثنائي الطور diphase ومجموعة تراميز ثنائية القطبية. كما يلي:



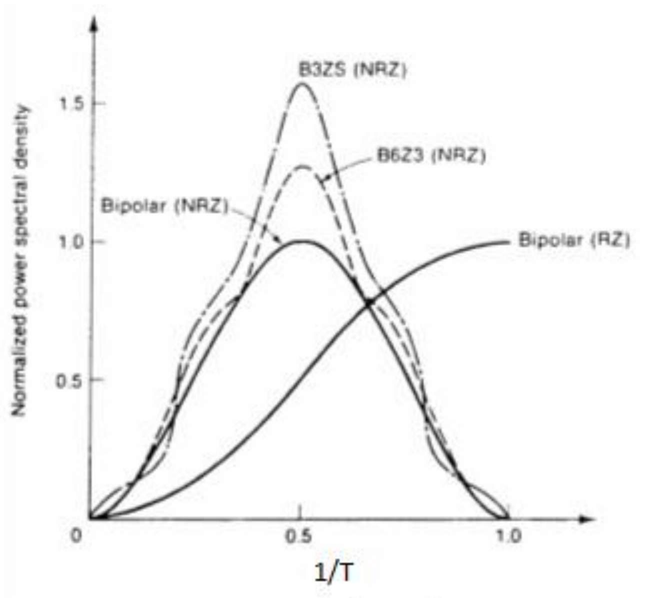
الكثافة الطيفية للاستطاعة لإشارة NRZ.



الكثافة الطيفية للاستطاعة لإشارة RZ.



تابع الكثافة الطيفية للترميز diphase.



تابع الكثافة الطيفية لترامير bipolar.

للأشكال الأربعة المحور الأفقي يشير إلى التردد f والمحور الشاقولي إلى الكثافة الطيفية المستنظمة للاستطاعة.

تظهر الأشكال السابقة أن الترامير الثنائية القطبية هي الأفضل لأنها تشغل طيفاً أضيق، ولاتنقل إشارة مستمرة (طيفها معدوم عند التردد صفر).

يجري كشف الإشارات بوضع عتبات معينة ومقارنة الإشارات بها عند منتصف زمن البت. هذه العتبات تتعلق بمستويات الإشارة من جهة وباحتمالات إرسال الصفر والواحد من جهة أخرى.

ملاحظة:

حين لا يكون عرض قناة الاتصال عريضاً بقدر كافٍ لإرسال الإشارات المرمزة بترميز الخط عليه، نضطر لاستعمال تعديل تمرير حزمة، لنوائم طيف الإشارات المرسَلة مع طيف القناة، وهذا ما سنراه في الفصل الرابع.

تمارين محلولة

.1 ارسم طيف إشارة PAM ناتجة من تعديل الإشارة $m(t)=A\cos(2\pi f_m t)$ بافتراض $f_m=0.25Hz,\ \ T_s=1s$ بنبضات مستطيلة عرضها $T=0.45s$.

الحل:

طيف M(f) نبضتان ديراك بمطال 0.5 عند الترددين $f_m=0.25Hz,\ \ -f_m=-0.25Hz$ مكرر عند المضاعفات الصحيحة للتردد $F_s=1/T_s=1Hz$ والناتج يُضرب بطيف النبضة المستطيلة وهو $\sin c(0.45f)$.

.2 لدينا إشارة x(t) القيم الثلاث الأولى للترابط الذاتي لها هي: $R_0=1,\ R_1=0.7,\ R_2=0.4,\ R_3=0.1$. ونريد استخدام متنبئ من الدرجة الثانية $\tilde{x}(n)=a_1x(n-1)+a_2x(n-2)$ احسب معاملات التنبؤ المثلى $a_i\ \ i=1,2$ ثم احسب قيمة تباين الخطأ $d(n)=x(n)-\tilde{x}(n)$ وقيمة ربح التنبؤ.

الحل:

نحسب قيم الترابط المستنظم فنجد $\rho_1=R_1/R_0=0.7,\ \ \rho_2=R_2/R_0=0.3$ ونكتب المعادلة المصفوفية:

$\begin{bmatrix}\rho_1\\ \rho_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \rho_1\\ \rho_1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}$ ونحسب منها $a_i\ \ i=1,2$.

تباين إشارة الخطأ $\sigma_d^2=\sigma_x^2-\sum_{k=1}^{2}a_k\,\phi(k)=\rho_0^2\left[1-\sum_{k=1}^{2}a_k\rho_k\right]$.

ونسمي القيمة σ_x^2/σ_d^2 ربح التنبؤ وهو يساوي: $(G_p)_{opt}=\dfrac{1}{1-\sum_{k=1}^{2}a_k\rho_k}$.

تمارين للحل

1. نأخذ تابع أخذ العينات المثالي من الإشارة $x(t)=\cos(2\pi 100\, t)+\cos(2\pi 220\, t)$ بتردد تقطيع $F_s=300Hz$. ارسم طيف هذه الإشارة. وإذا مررنا الإشارة على مرشح تمرير منخفض مثالي تردد قطعه $F_c=150Hz$. ماهي المركبات الترددية التي تظهر على خرج المرشح؟ علّق على النتيجة.
2. نطبق إشارة جيبية مطالها 3.25V على دخل مكمٍّ منتظم مستويات خرجه: $\mathbf{0,\pm 1,\pm 2,\pm 3}$. ارسم خرج المكمي لدورة كاملة من إشارة الدخل الجيبية.
3. أعد حل التمرين المحلول الثاني في حالة تنبؤ من الدرجة الثالثة.
4. نرسل ترويسة في بداية كل اتصال مكونة من تكرار للبايت 10000001 والمطلوب ارسم ترميز الخط باستعمال التراميز: NRZ ، Diphase، B6ZS.

مذاكرة

أجب بصح أو خطأ وصحح الخطأ

1. يسمح التعديل النبضي بتضمبم الإشارات بسهولة
2. التعديل المطالي النبضي ضروري لتحقيق تعديل ترميز النبضة
3. نفضل في ترميز الخط استعمال الترميز الذي يتضمن طيفه مركبة مستمرة
4. نفضل في ترميز الخط استعمال الترميز الذي يحقق أكبر ثبات في المطال
5. ترميز الخط NRZ هو الوحيد الذي يتضمن مركبة تزامن البت

1. ‘Digital and Analog Communication Systems’, 8th edition, by Leon W. COUSH II, Pearson Education International, 2013 ch3
2. ‘Digital Communications: Fundamentals and Applications", 2nd edition, by, Bernard SKLAR, Pretice Hall P T R, 2001 ch3
3. محاضرات الاتصالات الرقمية للدكتورة دكاك في المعهد العالي

حل المذاكرة

الإجابة	رقم السؤال
صح	1. يسمح التعديل النبضي بتضمبم الإشارات بسهولة
صح	2. التعديل المطالي النبضي ضروري لتحقيق تعديل ترميز النبضة
خطأ (لايتضمن مركبة مستمرة)	3. نفضل في ترميز الخط استعمال الترميز الذي يتضمن طيفه مركبة مستمرة
خطأ (يحقق أكبر قدر من النقلات في المطال لاستعادة التزامن)	4. نفضل في ترميز الخط استعمال الترميز الذي يحقق أكبر ثبات في المطال
خطأ (RZ)	5. ترميز الخط NRZ هو الوحيد الذي يتضمن مركبة تزامن البت

الفصل الرابع:
تعديل حزمة التمرير

الكلمات المفتاحية:

التعديل الرقمي، تعديل حزمة التمرير، التعديل المتعدد المستويات،OOK، ASK، BPSK، DPSK، FSK،MPSK، QAM ، التنضيد باقتسام الترددات المتعامدة OFDM .

الملخص:

يعرض هذا الفصل طرق تعديل تمرير الحزمة، حيث تكون قناة الاتصالات ضيقة الحزمة الترددية (مثل القناة الهاتفية) ويجري نقل طيف الإشارة الرقمية ليكون ضمن طيف القناة. يعرض الفصل مختلف أنواع التعديل بزحزحة المطال او الطور أو التردد أو تشكيلات منها، وينهي بالترميز الترددي المتعامد OFDM.

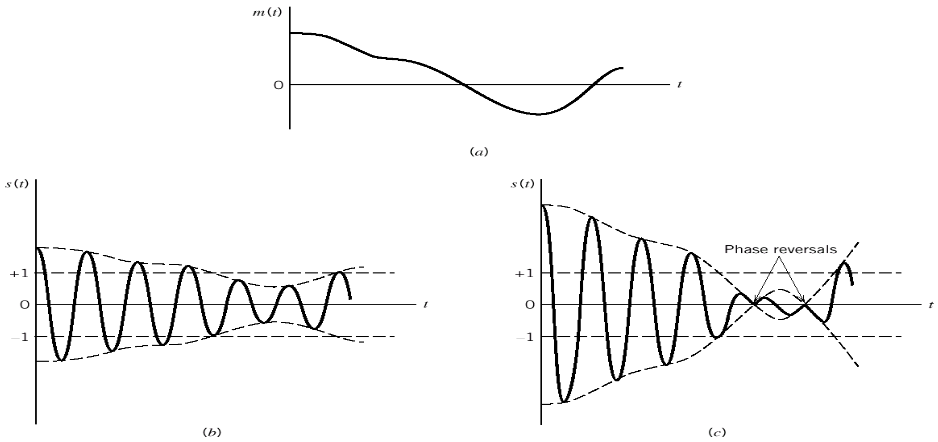
الأهداف التعليمية:

- تعرف طرق التعديل الرقمي باستعمال حزمة التمرير.
- تعرف كيف ينقل المودم الهاتفي المعطيات الرقمية.
- تعرف فوائد التعديل المتعدد المستويات وكيفية ترميز المعطيات الرقمية لخفض خطأ البت.
- أخذ فكرة عن التعديل المستعمل في الجيل الرابع للاتصالات النقالة OFDM.

1. تذكير بالتعديل التماثلي

في التعديل التماثلي، نأخذ إشارة حامل جيبية sinusoidal carrier signal يمكن أن تكون من الشكل $s(t) = a.\cos(2\pi f + \phi)$، وإشارة معلومات تماثلية $m(t)$، ونعدّل في إشارة الحامل بإحدى الأشكال التالية:

التعديل المطالي AM، نغير إشارة المطال بحسب إشارة المعلومات كأن يصبح المطال $m(t)$ عوضاً عن a أو من الشكل $1+k_a.m(t)$ حيث k_a دليل التعديل إذا أردنا أن يكون ناتج التعديل المطالي موجباً دوماً يجب أن يكون $|k_a.m(t)|<1$.



في الشكل (a) إشارة المعلومات، (b) ناتج التعديل المطالي في حالة $|k_a.m(t)|<1$، (c):ناتج التعديل المطالي في حالة $|k_a.m(t)|>1$، لا يمكن استعادة الإشارة الأصلية بسهولة في الحالة (c).

- التعديل الزاوي: نغير زاوية الإشارة الحاملة بحسب إشارة المعلومات ويكون ناتج التعديل من الشكل $a.\cos(\theta(t))$ حيث a مطال التردد الحامل، و $\theta(t)$ تتبع إشارة المعلومات $m(t)$. حين تتغير الزاوية بين لحظتين t و $t+\Delta t$ نعرف التردد الوسطي على هذه الفترة بالعلاقة $f_{\Delta t}(t) = \dfrac{\theta(t+\Delta t)-\theta(t)}{2\pi\,\Delta t}$ وحين ينتهي $\Delta t \to 0$ يكون التردد اللحظي:

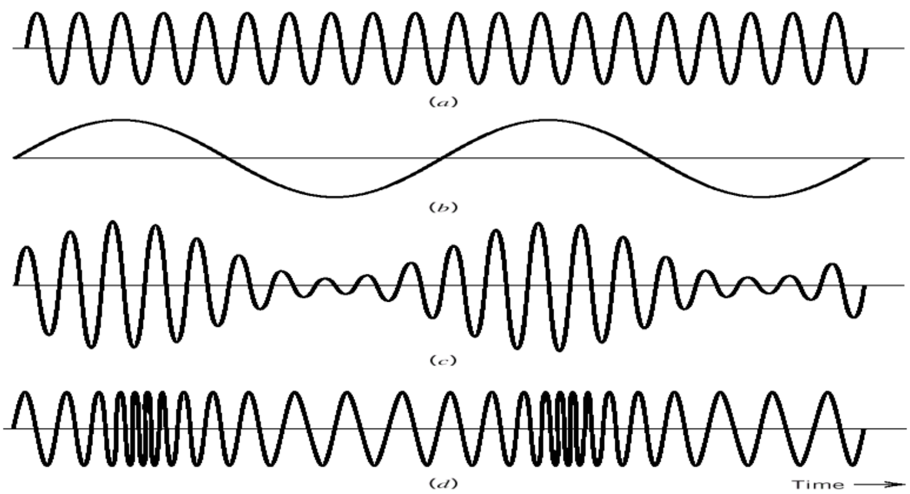
$$\begin{aligned} f_i(t) &= \lim_{\Delta t\to 0} f_{\Delta t}(t) \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\theta(t+\Delta t)-\theta(t)}{2\pi\,\Delta t}\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt} \end{aligned}$$

في غياب التعديل تكون $\theta(t) = 2\pi f_c + \phi$ ويكون التردد اللحظي ثابتاً ويساوي f_c . ثمة نوعان للتعديل الزاوي: التعديل الترددي وفيه يكون التردد اللحظي تابعاً لتغيرات إشارة المعلومات بالزمن أي:

والتعديل الطوري الذي تكون فيه الزاوية اللحظية تابعاً لإشارة المعلومات أي: $f_i(t) = f_c + k_f m(t)$

$\theta_i(t) = 2\pi\ f_c t + k_p m(t)$.

نلاحظ أنه في حالة التعديل الترددي فإن الزاوية اللحظية تعطى بالعلاقة $\theta_i(t) = 2\pi\ f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau)\,d\tau$ إذا كان الطور معدوماً في اللحظة $t = 0$. أي أن ناتج التعديل الترددي لإشارة المعلومات يساوي التعديل الطوري لإشارة تكامل إشارة المعلومات. وبذلك يمكن استنتاج خواص أحد التعديلين من الآخر.



الشكل من الأعلى إلى الأسفل: إشارة حامل جيبي، إشارة معلومات، ناتج تعديل مطالي، وناتج تعديل ترددي.

نلاحظ أن:

$$m(t) = A_m \cos(2\pi\ f_m t)$$
$$f_i(t) = f_c + k_f A_m \cos(2\pi\ f_m t)$$
$$\theta_i = 2\pi \int_0^t f_i(t)\,dt = 2\pi\ f_c t + \frac{\Delta f}{f_m}\sin(2\pi\ f_m t)$$

نسمي $\beta = \frac{\Delta f}{f_m}$ دليل التعديل، وحين يكون صغيراً نسمي التعديل ضيق الحزمة أما إذا كان كبيراً نسمي التعديل عريض الحزمة.

2. تعديل حزمة التمرير للإشارات الرقمية

إن أغلب قنوات الاتصال هي من النوع تمرير مجال bandpass، ولإرسال إشارات عبر مثل هذه القنوات، يجب إزاحة ترددات الإشارات الحاملة للمعلومات إلى المجال الترددي للقناة. في حالة النقل الرقمي على هذه القنوات، نود نقل الإشارات الكهربائية التي تمثل البتات باستعمال إحدى طرق التعديل التماثلية:

- التعديل بزحزحة المطال Amplitude Shift Keying (ASK) ويشبه التعديل المطالي AM.
- التعديل بزحزحة التردد Frequency Shift Keying (FSK) ويشبه التعديل الترددي FM.
- التعديل بزحزحة الطور Phase Shift Keying (PSK) ويشبه التعديل الطوري PM.
- ويمكن استعمال أكثر من نوع من الأنواع السابقة معاً كما في حالة Quadrature Amplitude Modulation (QAM) الذي يجمع زحزحة المطال وزحزحة الطور الذي سنراه لاحقاً.

1.2. التعديل بزحزحة المطال ASK و OOK

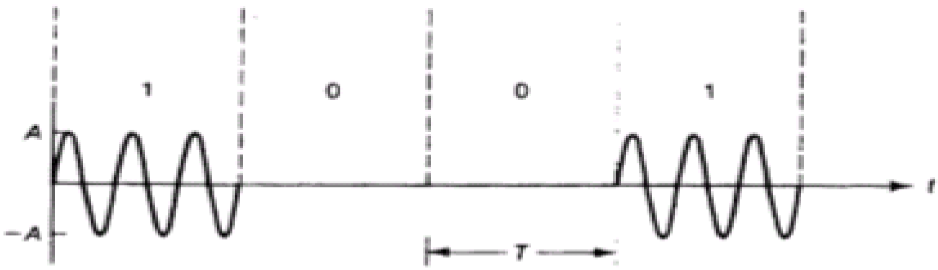
إحدى الطرق لتنفيذ ذلك: نولد إشارة المجال القاعدي كما ورد في الفصل الثالث، بتمرير المعلومات الرقمية ممثلة بنبضات ضيقة مطالاتها A_m (تعدد المستويات) عبر مرشح إرسال $g_T(t)$، ثم نضرب الإشارة الناتجة بإشارة الحامل لنحصل على $s_m(t) = A_m g_T(t)\cos(2\pi f_c t)$. في حالة نقل البتات وبهدف الاستنظام نفضل أن يكون:

$$g_T(t) = \begin{cases} \sqrt{2/T_b} & 0 \le t \le T_b \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^{T_b} s_m^2(t)dt = A_m^2$$

حيث T_b زمن البت.

في الحالة الخاصة التي يكون فيها $A_0 = 0$ و $A_1 = A$ نسمي النظام On Off Keying OOK (الإبدال بالوصل والفصل)، وكأننا نمرر الحامل عند إرسال نوع من البتات ونفصله للنوع الآخر. إرسال Morse اللاسلكي يستعمل هذا النوع من التعديل. انظر الشكل التالي الذي يبين إرسال سلسلة البتات 1001 بالتعديل OOK:



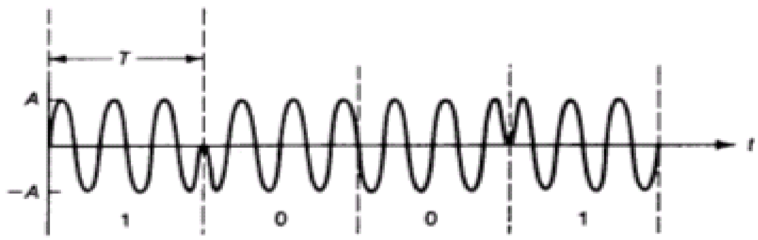
مثال على إشارة OOK.

2.2. التعديل بزحزحة الطور الثنائي (BPSK) والتعديل بزحزحة الطور التفاضلي (DPSK)

في حالة التعديل بزحزحة الطور الثنائي Binary PSK (BPSK) نرسل طورين مختلفين للبت صفر وللبت واحد.

$$s(t) = \pm A\cos(2\pi\ f_c t)$$
$$s_j(t) = A\cos(2\pi\ f_c t + \varphi_j)\ \ \varphi_j = 0\ \ or\ \ \pi$$

ويمكن أن يكون شكل الإشارة لسلسلة البتات 1001 كما يلي:



مثال على إشارات PSK الثنائية.

أما في حالة التعديل بزحزحة الطور التفاضلي Differential PSK (DPSK): فلا يتغير طور الإشارة في حال إرسال البت 1 في حين يُزاح بمقدار 180 درجة عند كل إرسال للصفر. وهذا يسهّل عملية الكشف بمقارنة الطور الحالي بطور الرمز السابق (البت السابق)، فإن تساوا فالرمز 1 وإلا فهو 0.

3.2. التعديل بزحزحة التردد FSK

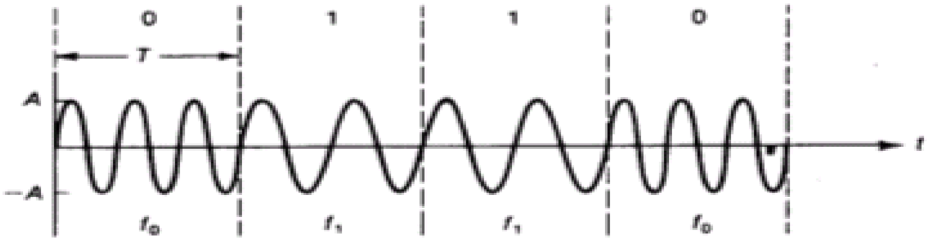
نرسل تردداً للبت صفر وتردداً مختلفاً للبت واحد خلال زمن البت:

$$s_0(t) = A\cos(2\pi\ f_0 t) = A\cos 2\pi\,(f_c - \Delta f\,)t \qquad for \quad 0$$
$$s_1(t) = A\cos(2\pi\ f_1 t) = A\cos 2\pi\,(f_c + \Delta f\,)t \qquad for \quad 1$$

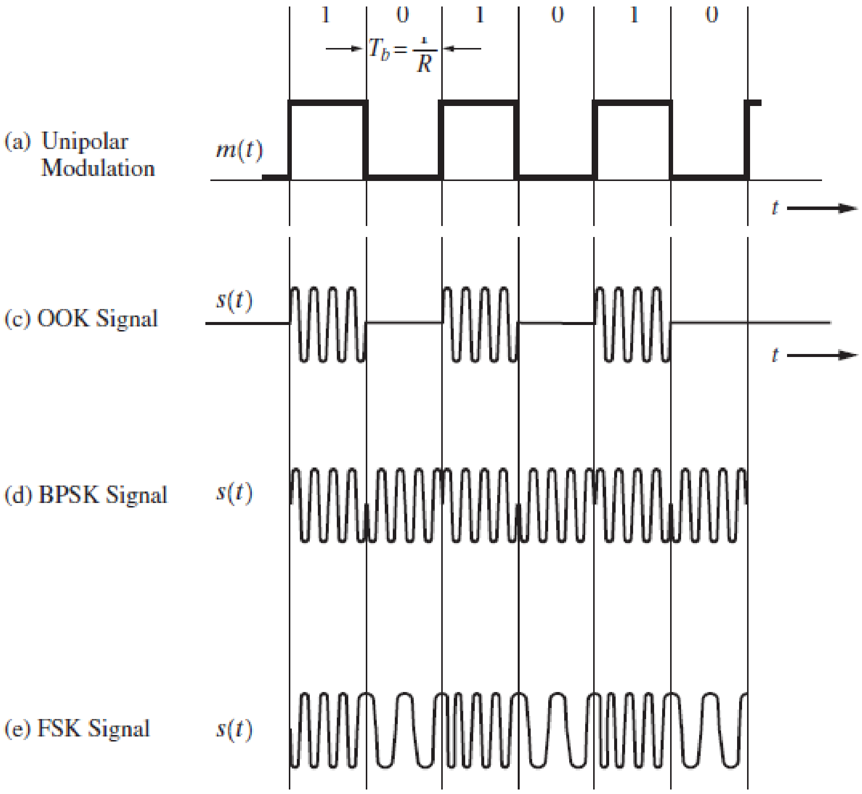
وكما في حالة التعديل الترددي التماثلي، فإن عرض المجال اللازم لإرسال هذه الإشارة هو:

$$B_T = \begin{cases} 2\Delta f & when \quad \Delta f >> B \\ 2B & when \quad \Delta f << B \end{cases}$$

يبين الشكل التالي مثالاً على إشارة ثنائية توافق سلسلة البتات 0110، معدلة FSK:



مثال على إشارات FSK الثنائية.



(شكل يمكن أن يكون بديلاً عن الأشكال الثلاثة السابقة).

3. التعديل المتعدد المستويات

ناقشنا حالة تمثيل معطيات اثنانية. ونظراً لمحدودية المجال الترددي لقنوات الإرسال، يمكن زيادة معدل تدفق البتات بزيادة عدد مستويات الإرسال.

1.3. تعديل ASK المتعدد المستويات

نفترض لدينا إشارة متعددة المطالات بـ M مستوى، يمكن أن يمثل كل منها $\log_2 M$ بتاً. يمكن أن نكتب:

$$s_m(t) = A_m.g(t), \qquad 0 \le t \le T, \quad m = 0,1,...M-1$$

$$g(t) = \begin{cases} \sqrt{1/T} & 0 \le t \le T \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

يمكن بحالة خاصة، أن تكون المستويات متباعدة تباعداً منتظماً بحيث

$$A_m = (2m - M + 1)d, \quad m = 0,1,...M-1$$

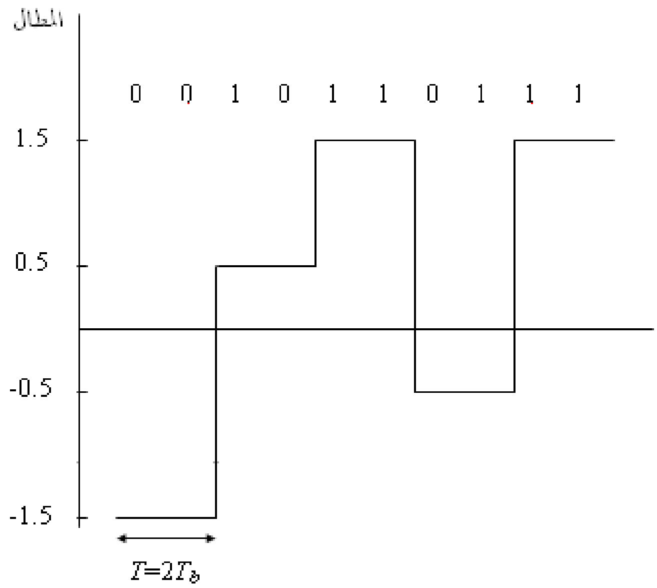
على سبيل المثال، يمكن أن نأخذ $M = 4$، وتباعداً منتظماً بين المستويات؛ فتكون المستويات الأربعة مثلاً:

$$\{A_m\} = \{-3d, -d, \ d, \ 3d\}$$

كل مستوى يمثل بتين على التتالي:

$$00 \rightarrow s_0(t)$$
$$01 \rightarrow s_1(t)$$
$$10 \rightarrow s_2(t)$$
$$11 \rightarrow s_3(t)$$

فإذا أردنا إرسال سلسلة البتات 0010110111 فهي توافق إرسال الرموز $s_0 s_2 s_3 s_1 s_3$ على التتالي ويكون لدينا:

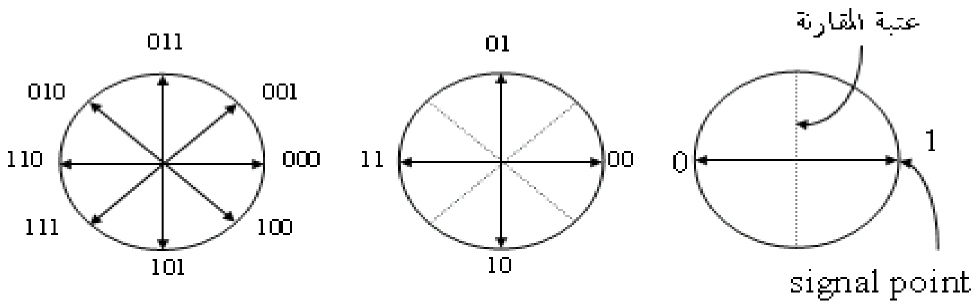


زمن الرمز يوافق ضعف زمن البت في هذه الحالة. ضرب هذه الإشارة بإشارة حامل جيببة ينتج إشارة ASK متعددة المستويات.

2.3. التعديل بزحزحة الطور المتعدد المستويات MPSK

نستعمل طوراً مختلفاً لكل مستوى (لكل رمز) $0<t<T \quad s_n(t)=A\cos(2\pi f_c t+\theta_n)$ ، نستعمل عملياً أطواراً متباعدة بانتظام بحيث:

$$\theta_n=\frac{2(n-1)\pi}{M} \qquad n=1,2,\dots M$$

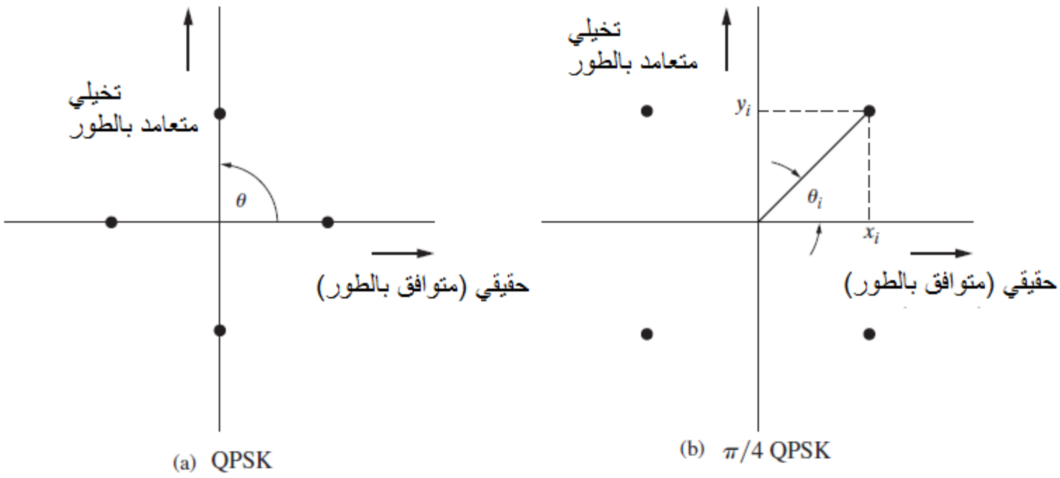


(ج) (ب) (أ)

المخطط الطوري لإشارات BPSK و 4-PSK و 8-PSK.

يبين الشكل السابق التعديل الثنائي بزحزحة الطور يليه تعديل طوري بأربعة مستويات كل مستوى يمثل بتين، ثم تعديل طوري بثمانية مستويات وكل مستوى يمثل ثلاث بتات. الجدير بالذكر أن ترميز البتات ضمن الرموز يكون بحيث يختلف كل رمزين متتاليين ببت واحد، وبذلك ينعكس خطأ الرمز حين نخطئ الكشف ونأخذ رمزاً مجاوراً بخطأ بت واحد فقط.

في حالة $M=4$ يمكن أن يكون طور الرموز $0°,90°,180°,270°$ كما يمكن إضافة $45°$ إلى كل من الأطوار الأربعة لتصبح $45°,135°,225°,315°$ هذان النظامان متكافئان ونرمز لهما بـ "تعديل بزحزحة الطور التربيعي (المتعامد) QPSK". انظر الشكل التالي



يمكن كتابة إشارات الرموز بطريقة أخرى كما يلي:

$$s_n(t) = A\cos(2\pi f_c t + \theta_n) \quad 0 < t < T$$

$$s_n(t) = A[\cos(2\pi f_c t)\cos(\theta_n) - \sin(2\pi f_c t)\sin(\theta_n)]$$

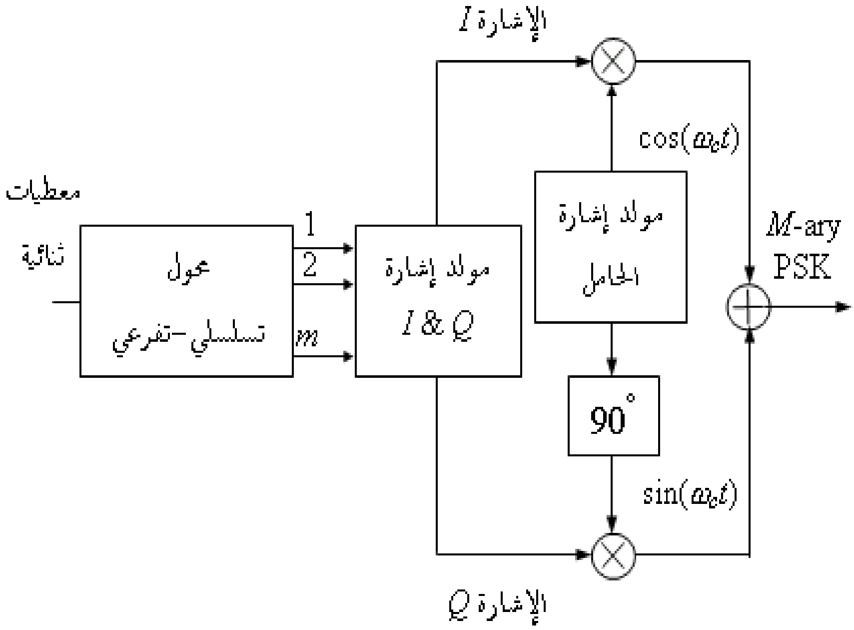
ويمكن توليد هذه الإشارات بطريقة متعامدة بحيث نولد الإشارة الحاملة $\cos(2\pi f_c t)$ والإشارة المتعامدة معها $\sin(2\pi f_c t)$ ويضرب كل منهما بالمعامل المناسب:

$$s_n(t) = A[p_n\cos(2\pi f_c t) - q_n\sin(2\pi f_c t)] \quad 0 < t < T$$

$$p_n = \cos\theta_n$$

$$q_n = \sin\theta_n$$

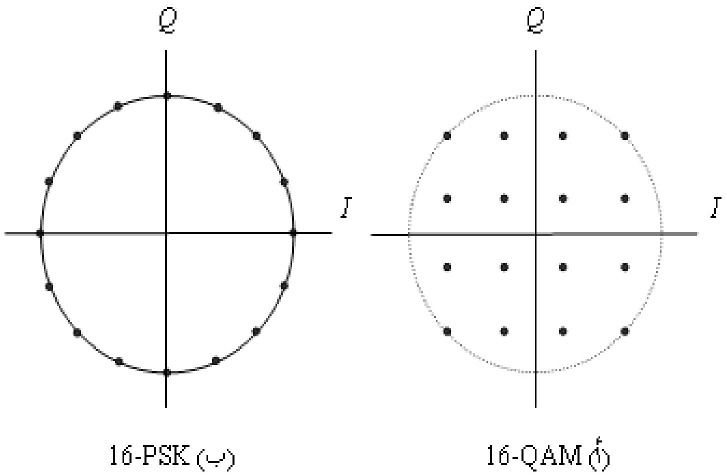
يبين الشكل التالي كيفية توليد هذه الإشارات:



المخطط الصندوقي للبنية العامة لمُعَدِل M-ary PSK.

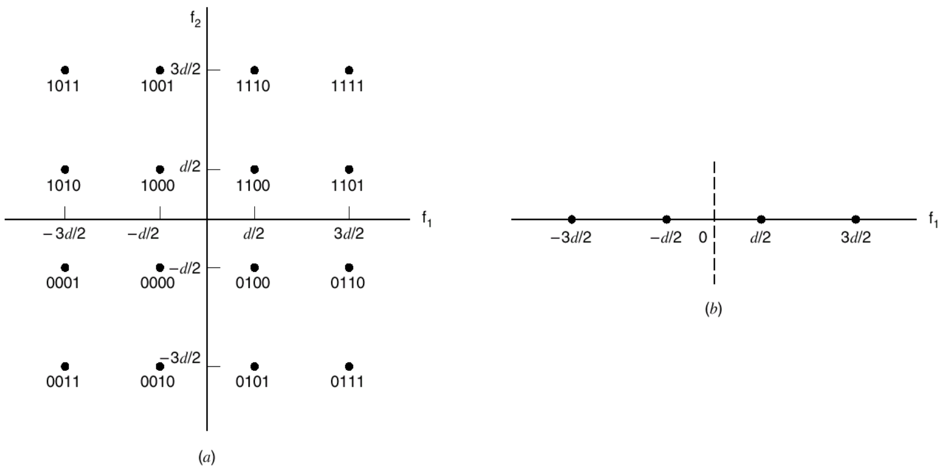
3.3. تعديل QAM المتعدد المستويات

نعمم مبدأ التعديل التعامدي (التربيعي) ليحتوي على تعديل مطالي وطوري بآن واحد Quadrature Amplitude Modulation QAM. حيث p_n و q_n لا تحققان الخاصة $p_n^2+q_n^2=1$.

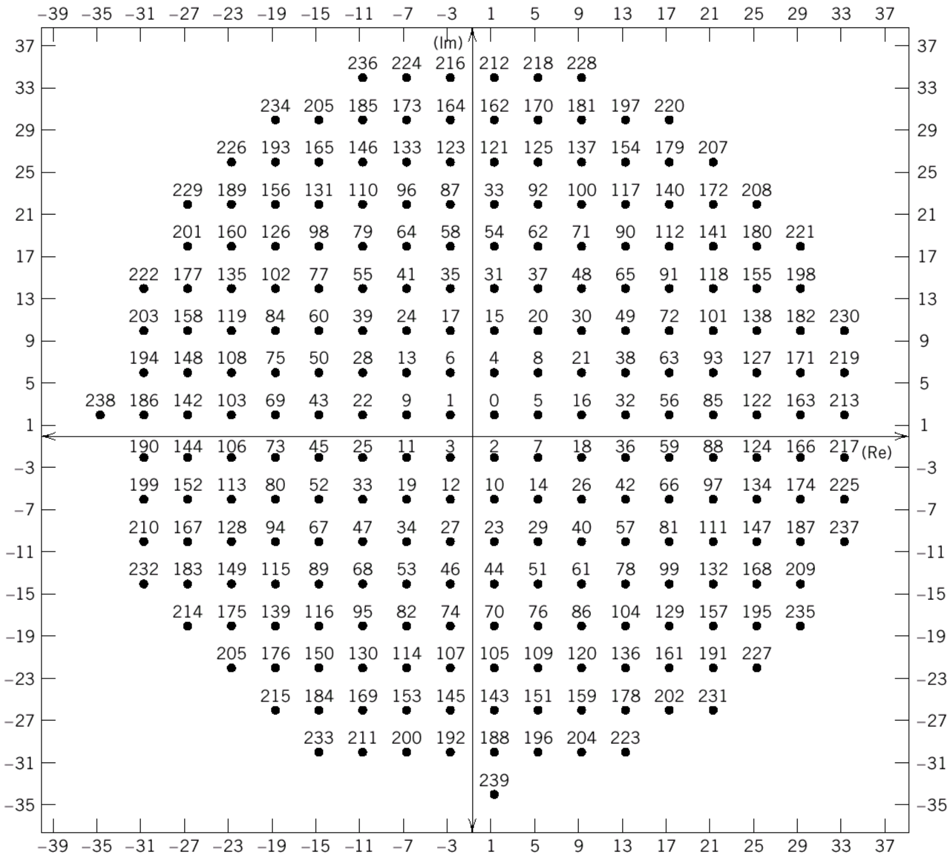


مقارنة مخطط الإشارات النقطي بين نظام 16-QAM و 16-PSK

يبين الشكل السابق ما يسمى بالمخطط النجمي constellation للترميزين $16-PSK$ و $16-QAM$ وهنا نلاحظ أن لدينا ثلاث قيم مختلفة للمطال، و12 قيمة مختلفة للطور تمثل 16 رمزاً مختلفاً وبالتالي كل رمز يمثل 4 بتات. مرة أخرى ترمز البتات ضمن الرموز بالأخذ بالاعتبار ضرورة أن يكون الاختلاف أصغرياً في بتات الرموز المتجاورة:



وهذا التعديل هو الأكثر شيوعاً. على سبيل المثال، المودم الذي ينقل 56 كيلو بت في الثانية وفق التوصية V34 للاتحاد الدولي للاتصالات ITU، يرسل 240 إشارة مختلفة، يُستعمل بعضها للتزامن. يبين الشكل التالي المخطط النجمي للإشارات، وهنا نكتب القيمة العشرية للرمز التي نستنتج منها البتات حيث تمثل رموز البتات المفيدة سبع بتات لكل رمز:



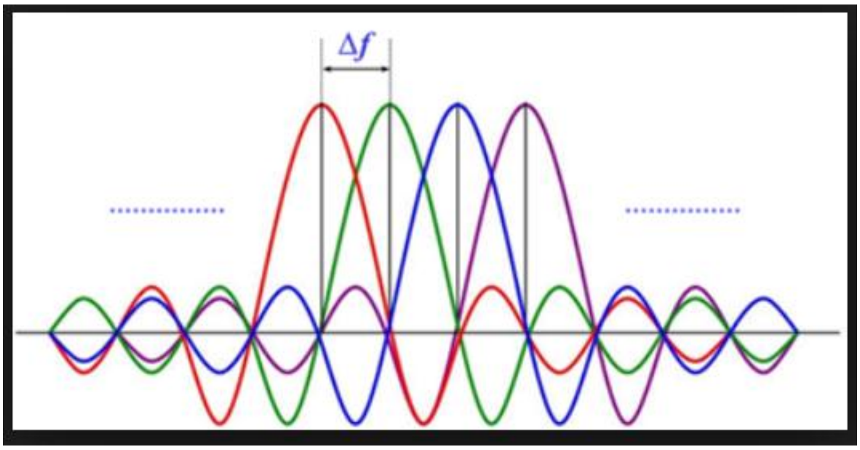
4. التنضيد باقتسام الترددات المتعامدة OFDM

هو تقنية لإرسال المعطيات على التوازي باستعمال عدد كبير من الحوامل الترددية، المتباعدة بقدر كافٍ بحيث تكون متعامدة.

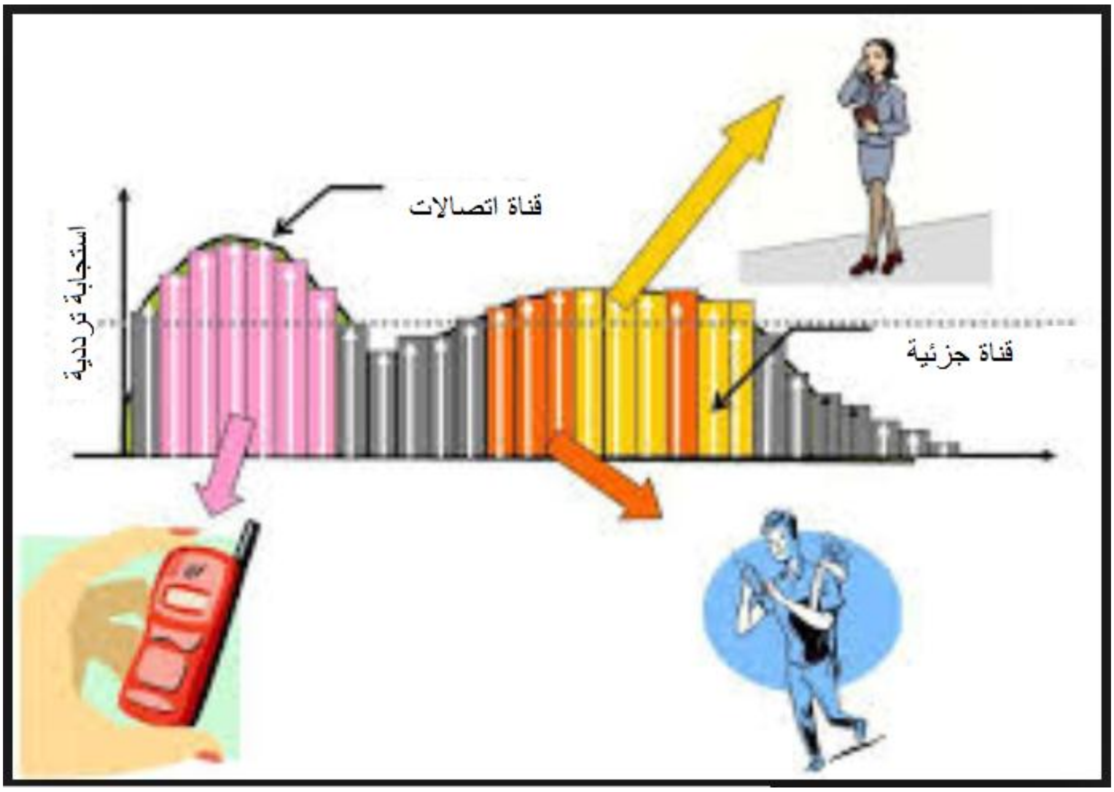
نقول عن تابعين $\varphi_n(t), \varphi_m(t)$ أنهما متعامدان على المجال $a<t<b$ إذا حققا الشرط:

$$\int_a^b \varphi_n(t)\ \varphi_m^*(t)\,dt = 0 \ \ where\ n \neq m$$

مدة رمز المعطيات T والتباعد بين أي ترددين متتاليين من ترددات الحوامل $1/T$، وهذا يضمن التعامد لهذه الحوامل. وبسبب تعامد الحوامل فإن المعطيات على أي حامل لا تتداخل مع معطيات الحوامل الأخرى. انظر الشكل الذي يبين تعامد الحوامل:



يساعد OFDM في التغلب على مشاكل قناة الاتصال ذات الاستجابة الترددية غير المنتظمة، إذ يُحمّل كل جزء من المعطيات على حامل ضيق يمكن اعتبار القناة منتظمة الاستجابة الترددية عليها.



الشكل: قناة الاتصالات وقنوات الحوامل الجزئية المختلفة.

يعبّر رياضياً عن الحامل الترددي الجزئي بإشارة عقدية من الشكل:

$$S_c(\mathrm{t}) = A_c e^{j[\omega_c t + \varphi_c(t)]} \qquad (1)$$

وتكون إشارة الحامل الحقيقية هي الجزء الحقيقي من الإشارة $S_c(\mathrm{t})$. يجري تعديل كل من مطال إشارة الحامل $A_c(t)$ وطورها $\varphi_c(t)$ تبعاً لقيمة الرمز المرسل (إشارة المعلومات المعدِّلة). ويكون هذا التغير ثابتاً على طول الفترة T_{sym} (طول رمز الـ OFDM).

أما إشارة الـ OFDM، والمؤلفة من مجموع N حاملاً ترددياً جزئياً فيُعبّر عنها بإشارة عقدية مستمرة من الشكل:

$$S_S(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} A_k(t)\, e^{j[\omega_k t + \varphi_k(t)]} \qquad (2)$$

حيث $\omega_k = \omega_0 + k.\Delta\omega$، فإذا افترضنا أن هذه الإشارة تمتد على زمن رمز واحد T_{sym} فيمكن أن نكتب:

$A_k(t) \Rightarrow A_k$ و $\varphi_k(t) \Rightarrow \varphi_k$.

بفرض $\mathrm{T} = \mathrm{T_{Sym}} / \mathrm{N}$ (حيث N هو عدد العينات المأخوذة من الإشارة خلال فترة زمن الرمز)، فإنه يمكن تمثيل الإشارة الناتجة عن أخذ عينات من الإشارة $S_S(\mathrm{t})$ بتردد تقطيع مساوٍ لـ $1/T$ بالشكل التالي:

$$S_S(nT) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} A_k \, e^{j[(\omega_0 + k\Delta\omega)nT + \varphi_k(t)]} \qquad (3)$$

بفرض $\omega_0 = 0$ فإنه يمكن تبسيط المعادلة(3) بالشكل التالي:

$$S_S(nT) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} (A_k e^{j\varphi_k}) . e^{j(k.\Delta\omega)} \qquad (4)$$

وباعتبار أنّ الشكل العام لتحويل فورييه السريع العكسي IFFT يعطى بالعلاقة التالية:

$$g(nT) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} X(k) \, e^{\frac{j2\pi nk}{N}} \qquad (5)$$

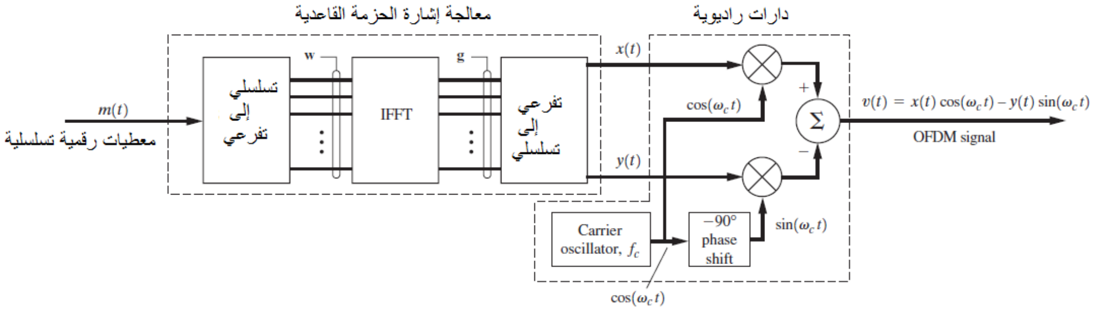
وبمقارنة العلاقة (4) مع العلاقة (5) نلاحظ أن التابع $A_k e^{j\varphi_k}$ ما هو إلا تعريف، في المجال الترددي، لإشارة المعطيات $\{X(k)\}_{k=0}^{N-1}$. وأن $S_S(nT)$ ما هو إلا التمثيل الزمني لإشارة المعطيات هذه.

تكون المعادلتان (4) و(5) متكافئتين إذا تحقق الشرط التالي:

$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{1}{NT}$$

وهو الشرط المطلوب لتحقيق التعامدية.

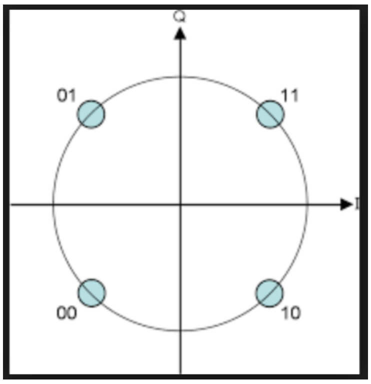
إذاً عند تحقيق التعامدية بين الحوامل الجزئية في إشارة الـ OFDM فإنه يمكن توليد إشارة الـ OFDM باستخدام إجرائيات تحويل فورييه السريع العكسيIFFT.



يستعمل OFDM في نظم البث الرقمي للإذاعة والتلفزيون في أوروبا، وفي بعض مودمات الخطوط الهاتفي (خط مشترك رقمي غير متناظر ADSL)، وفي شبكات الحواسيب اللاسلكية العريضة الحزمة $wi - fi$ و $wi - max$ ، وفي الجيل الرابع للاتصالات النقالة (الجيل المستقبلي للاتصالات النقالة).

تمرين محلول

يمكن النظر إلى التعديل QPSK الذي يعطى مخططه النجمي بالشكل التالي:



كما يلي:

$$s_1 = "11" = \cos \pi / 4 + j \sin \pi / 4$$
$$s_1 = "01" = \cos 3\pi / 4 + j \sin 3\pi / 4 = -\cos \pi / 4 + j \sin \pi / 4$$
$$s_1 = "00" = \cos 5\pi / 4 + j \sin 5\pi / 4 = -\cos \pi / 4 - j \sin \pi / 4$$
$$s_1 = "10" = \cos 7\pi / 4 + j \sin 7\pi / 4 = \cos \pi / 4 - j \sin \pi / 4$$

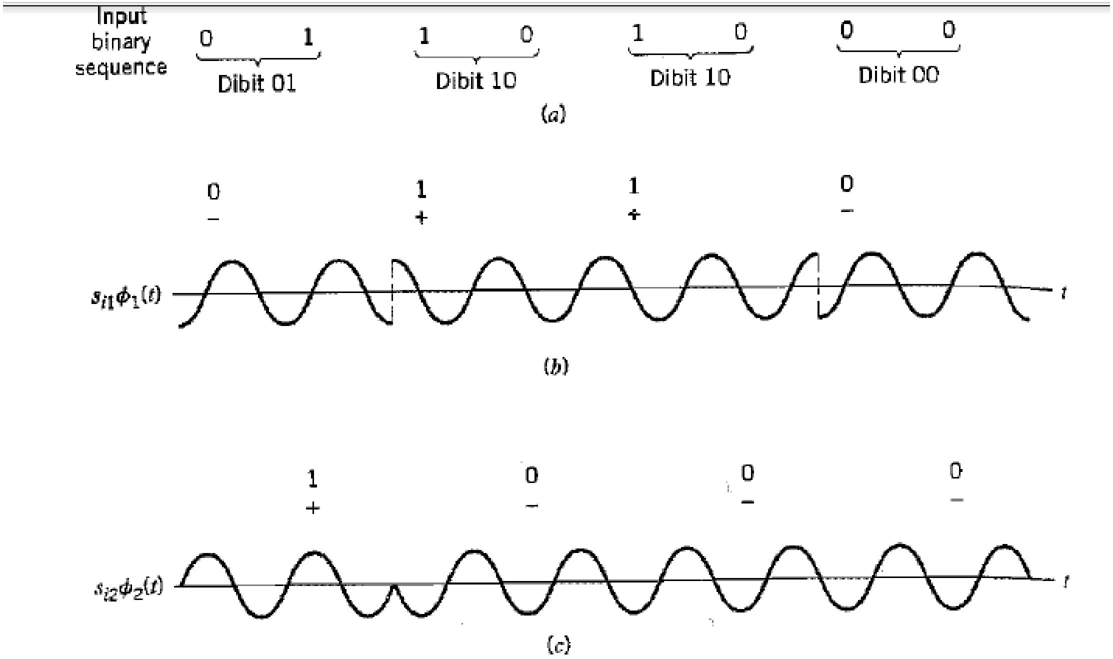
حين تكون البت الأدنى دلالة 1 يكون لدينا *cos* وحين تكون 0 يكون لدينا *cos*–

و حين تكون البت الأعلى دلالة 1 يكون لدينا *sin* وحين تكون 0 يكون لدينا *sin*–.

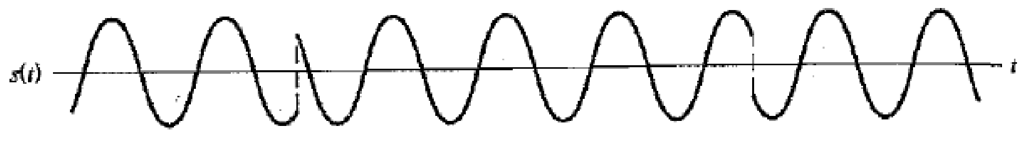
لدينا تسلسل البتات 01101000 بدءاً من اليسار أعط تسلسل الإشارات الموافقة للبت الأدنى دلالة وللبت الأعلى دلالة ثم استنتج تعديل QPSK للبتات.

الحل:

عند تقسيم سلسلة البتات إلى ثنائيات يكون لدينا 00 10 10 01 وتكون البتات الأعلى بدءاً اليسار هي البتات ذات الترتيب الزوجي وهي 0 0 0 1 والبتات الأدنى دلالة هي البتات ذات الترتيب الفردي 0 11 0 والإشارات الموافقة لها على الترتيب:



وبجمع هذه الإشارات إلى بعضها لكل رمز نحصل على إشارة QPSK المطلوبة:



(d)

الجدير بالذكر يمكن استنتاج الرسم الأخير مباشرة بضم الإشارات:

$$\cos(\omega t + \theta_i),\ \ i = 1,2,3,4$$

$$\theta_1 = 3\pi / 4$$

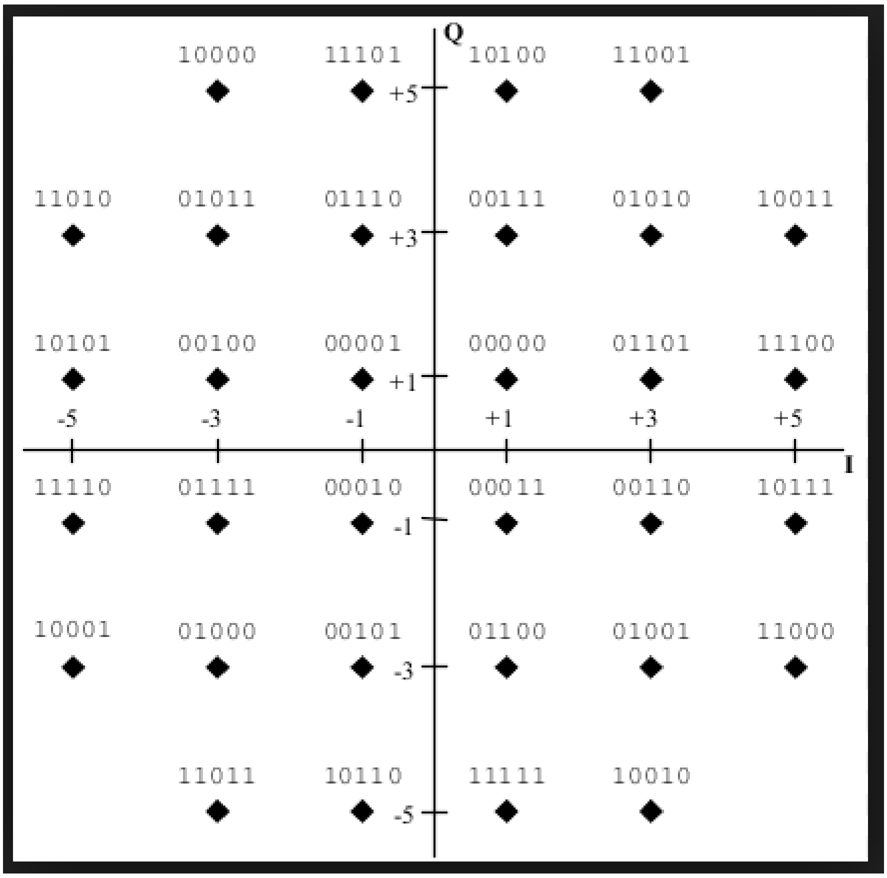
$$\theta_2 = \theta_3 = 7\pi / 4$$

$$\theta_4 = 5\pi / 4$$

تمارين للحل

نفترض أننا نرسل الإشارة الصوتية المرمزة بحيث يكون معدل النقل 4800bps باستخدام خط الهاتف.

نعدّل المعطيات الصوتية باستخدام 32 QAM بالمخطط النجمي التالي:



1. ماعدد الرموز المرسَلة بالثانية؟...استنتج عدد المطالات المختلفة والطوار المختلفة.. والترددات المختلفة في هذه الحالة؟
2. ماقيمة أصغر مطال؟..وما قيمة أطول مطال؟.
3. استقبلنا إحدى الإشارات وكان مطالها أصغرياً ولكننا لم نتمكن من كشف الطور. ما البتات التي يمكن أن تكون قد أرسلت؟...وما نسبة البتات التي أنت متأكد من كشفها بشكل صحيح والبتات التي تشك في قيمها؟

مذاكرة

أجب بصح أو خطأ وصحح الخطأ وبرر إجابتك.

1. يستعمل التعديل OFDM في الاتصالات النقالة
2. التعديل بزحزحة الطور الثنائي BPSK أكثر سهولة في الكشف من DPSK
3. التعديل بإزاحة التردد المتعدد المستويات يتطلب أكبر عرض حزمة للإرسال
4. في التعديل QAM نستعمل ترددا حاملاً وحيداً
5. التعديل QAM هو المستخدم في المودمات الهاتفية ذات السرعات العالية
6. التعديل MPSK أفضل من التعديل QAM من حيث معدل الخطأ

ISSN: 2617-989X

1. ‘Digital and Analog Communication Systems’, 8th edition, by Leon W. COUSH II, Pearson Education International, 2013 ch4
2. ‘Digital Communications: Fundamentals and Applications", 2nd edition, by, Bernard SKLAR, Pretice Hall P T R, 2001 ch4

حل المذاكرة

رقم السؤال	الإجابة
1. يستعمل التعديل OFDM في الاتصالات النقالة	صح
2. التعديل بزحزحة الطور الثنائي BPSK أكثر سهولة في الكشف من DPSK	خطأ العكس لأن الثاني لا يتطلب كشف الطور وإنما يقارن فقط بين الرمز والرمز السابق.
3. في التعديل QAM نستعمل ترددا حاملاً وحيداً	صح
4. التعديل بإزاحة التردد المتعدد المستويات يتطلب أكبر عرض حزمة للإرسال	صح
5. التعديل QAM هو المستخدم في المودمات الهاتفية ذات السرعات العالية	صح
6. التعديل MPSK أفضل من التعديل QAM من حيث معدل الخطأ	خطأ العكس لأن التعديل QAM يستفيد من كامل سطح دائرة المخطط النجمي أن MPSK فيستفيد من المحيط فقط

الفصل الخامس:
أداء نظام الاتصالات بوجود الضجيج

الكلمات المفتاحية:

الكشف المتماسك، المرشح المتوافق، الكشف غير المتوافق، أداء الكاشف، معدل الخطأ، عتبة الكشف، تداخل الرموز، تابع التجيب المرفوع.

الملخص:

يدرس الفصل أداء نظم الاتصالات الرقمية بوجود الضجيج والتشوهات الأخرى، فيعرض مفهوم احتمال الخطأ، وأسباب تداخل الرموز وعلاجها، وفعالية الطيف.

ثم يعرض طرق الكشف المتماسك للإشارات الرقمية حيث يعلم المستقبل شكل الإشارات المرسلة لكل رمز، وطرق الكشف غير المتماسك التي لا تتطلب معرفة الإشارات المرسلة تماماً وإنما خواصها فقط، وتعتمد طرق معالجة إشارة لكشف الرموز المرسلة. أخيراً يعطي مقارنة لأداء الكواشف المتماسكة وغير المتماسكة، كما يقارن الداء باختلاف مستويات التعديل (للتعديل الرقمي المتعدد المستويات).

الأهداف التعليمية:

- تحسس مفهوم احتمال الخطأ في الاتصالات الرقمية
- تعرف أسباب تشوه الإشارات الرقمية.
- تصميم المرشح المتكيف مع إشارة معينة.
- تعرف طرق الكشف المتماسك والكشف غير المتماسك للإشارات الرقمية.
- تقدير متى نستعمل الكشف المتماسك والكشف غير المتماسك.

بعد تعديل إشارات الاتصالات وإرسالها عبر قنوات الاتصالات، تتعرض هذه الإشارات إلى منغصات من ضجيج وضياعات وغيرها. نعرف إشارات الاستطاعة بأنها الإشارات التي تتضمن استطاعة محدودة، وبما أن الطاقة هي تكامل الاستطاعة فهذه الإشارات ذات طاقة لا نهائية. كما نعرف إشارات الطاقة بأنها الإشارات التي تتضمن طاقة محدودة. إشارات الاتصالات التماثلية هي إشارات استطاعة. أما في حالة إشارات الاتصالات الرقمية فإننا نستقبل رموزاً ذات طاقة وسطى محدودة نرمز لها E_s ، ونقيس أداء النظم بحسب النسبة E_b / N_0 حيث E_b هي الطاقة الوسطى للبت ووحدتها Joule و N_0 هي ضعف الكثافة الطيفية لاستطاعة الضجيج ووحدتها Watt/Hertz وبالتالي ناتج قسمتهما سيكون بلا أبعاد.

1. احتمال الخطأ في نظام اتصالات رقمي

نعدل المعطيات الرقمية فنحصل على الإشارة $s(t)$ يضاف لها الضجيج الذي يمكن اعتباره أبيض غاوسياً جمعياً، بقيمة وسطى معدومة، فنستقبل $r(t)$ التي هي ناتج ترشيح الإشارة $s(t)$ بالمرشح المكافئ لأثر القناة $h(t)$ (الاستجابة النبضية للقناة) مضاف إليه الضجيج $n(t)$. (انظر الشكل التالي).

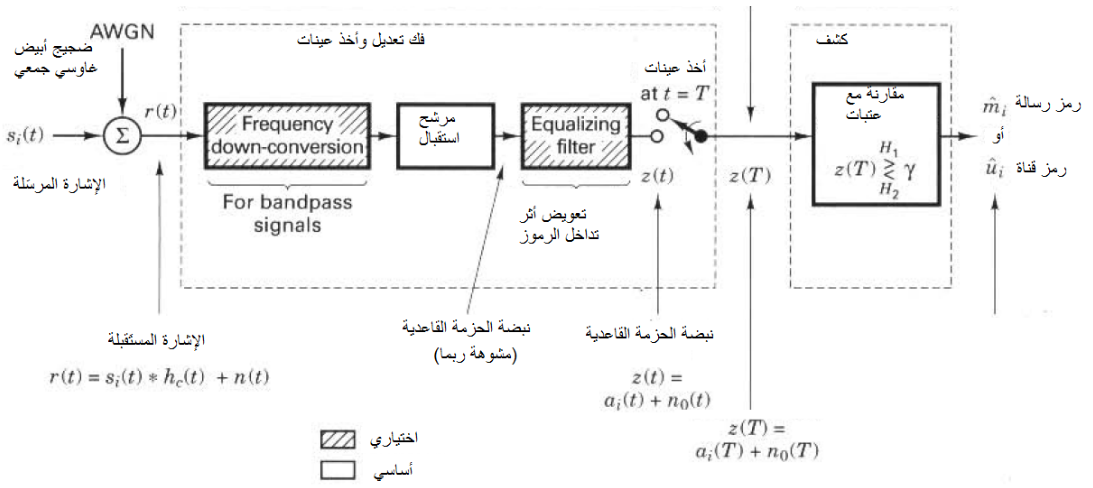
في الحالة الرقمية يمكن مثلاً اعتبار الإشارة المرسَلة $s_1(t)$ خلال زمن البت T، إذا كان البت المرسل 1. و $s_2(t)$ خلال زمن البت إذا كان البت المرسل 0.

$$s_i(t)=\begin{cases} s_1(t) & 0\le t\le T \quad for\ bit\ "1" \\ s_2(t) & 0\le t\le T \quad for\ bit\ "0" \end{cases}$$

إذا تركنا جانباً كتلة خفض التردد frequency down converter (التي تزيح –تعيد– طيف الإشارة من المجال الراديوي إلى المجال القاعدي) وكتلة المسوي equalizer (التي تزيل أثر تشويه القناة)، يبقى لدينا في المستقبل كتلة مرشح الاستقبال.

نمرر الإشارة المستقبلة على مرشح الاستقبال فيكون ناتج الترشيح هو مجموع ناتج ترشيح الإشارة المفيدة $s_i(t)$، ونرمز له بـ $a_i(t)$ إضافة إلى ناتج ترشيح الضجيج $n(t)$، ونرمز له بـ $n_0(t)$.

نأخذ عينة من هذه الإشارة عند كل رمز من الإشارة المفيدة (في نهاية زمن الرمز T مثلاً) ونقارن الناتج بعتبة ما، فإن كان أكبر من العتبة نفترض الرمز المكتشف له قيمة معينة وإلا فله قيمة أخرى.



الشكل: الخطوات الرئيسية لفك تعديل إشارة رقمية وكشفها [2]

في الحقيقة، يشير فك التعديل إلى استعادة شكل الإشارة المرسَلة، أما الكشف فيشير إلى معرفة معنى الإشارة المستقبلة. ومهمة مرشح الاستقبال استعادة الإشارة المرسَلة عند لحظة اتخاذ القرار T، بأعلى نسبة إشارة إلى الضجيج وأقل تداخل بين الرموز. المرشح الأمثل الذي يقوم بهذه المهمة يسمى المرشح

المتوافق matched filter. الإشارة المقيسة في اللحظة T هي $z(T)=a_i(T)+n_0(T)$ ، نكتبها بشكل مختصر $z=a_i+n_0$ وبما أن الضجيج أبيض غاوسي جمعي بمتوسط معدوم، فإن z متحول عشوائي بمتوسط a_1 أو a_2.

يبرهن أن المرشح المتوافق مع إشارة ما $g(t)$ هو المرشح الذي استجابته النبضية $h_{opt}(t)$ ترتبط بـ $g(t)$ بالعلاقة:

$$h_{opt}(t)=k.g(T-t)$$

حيث k ثابت و T زمن البت الذي يجري بنهايته القياس (أي يجري أخذ العينة من خرج مرشح الاستقبال لاتخاذ القرار بشأنها.

بما أن n_0 المذكورة أعلاه هي ضجيج أبيض غاوسي بمتوسط معدوم فإننا يمكن أن نكتب تابع الكثافة الاحتمالية له بالعلاقة:

$$p(n_0)=\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{n_0}{\sigma_0}\right)^2\right]$$

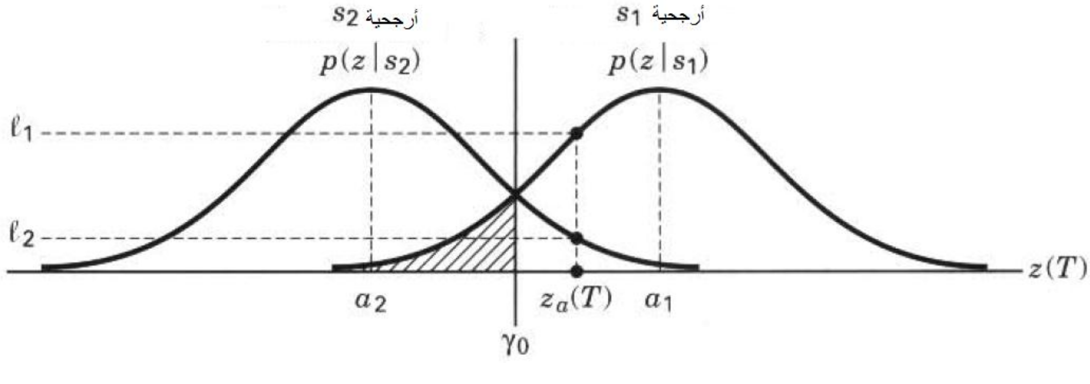
حيث σ_0^2 هو تباين الضجيج.

وبما أن $z=a_i+n_0$ فإنه يمكننا كتابة توابع الكثافة الاحتمالية للاحتمالات الشرطية $p(z/s_1),p(z/s_2)$ كما يلي:

$$p(z/s_1)=\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-a_1}{\sigma_0}\right)^2\right]$$

$$p(z/s_2)=\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-a_2}{\sigma_0}\right)^2\right]$$

الشكل التالي يبين هذه التوابع:



فإذا اعتمدنا عتبة ما γ_0 نقارن بها القيمة المقيسة z، فإن تجاوزتها اعتبرنا القيمة a_1 وإلا كانت a_2.

وبذلك يعطى احتمال الخطأ المشروط بإرسال s_1 وليكن p_{e1} واحتمال الخطأ المشروط بإرسال s_2 وليكن p_{e0} بالعلاقتين:

$$P_{e1} = P(z < \gamma_0 \mid s_1 \ sent) = \int_{-\infty}^{\gamma_0} p(z \mid s_1).dz$$

$$P_{e0} = P(z > \gamma_0 \mid s_2 \ sent) = \int_{\gamma_0}^{\infty} p(z \mid s_2).dz$$

فإذا كان p_1 احتمال إرسال s_1 وكان p_0 احتمال إرسال s_2 فإن احتمال الخطأ الكلي هو p_e ويُعطى بالعلاقة: $p_e = p_0 p_{e0} + p_1 p_{e1}$.

في الحالة الخاصة التي يكون فيها $p_0 = p_1 = 1/2$ و $\gamma_0 = (a_1 + a_2)/2$ فإن

$$p_e = p_{e0} = p_{e1} = \int_{\gamma_0}^{\infty} p(z \mid s_2).dz = \int_{(a_1+a_2)/2}^{\infty} \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-a_2}{\sigma_0}\right)^2\right].dz$$

وبإجراء تغيير المتحول $u = (z-a_2)/2\sigma_0$ يكون:

$$p_e = \int_{(a_1-a_2)/2\sigma_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}u^2\right].du = Q\left(\frac{a_1-a_2}{2\sigma_0}\right)$$

حيث Q(x) هو تابع الخطأ المتمم المعرف بالعلاقة $Q(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right].dx$ وثمة جداول تعطي قيماً لهذا التابع.

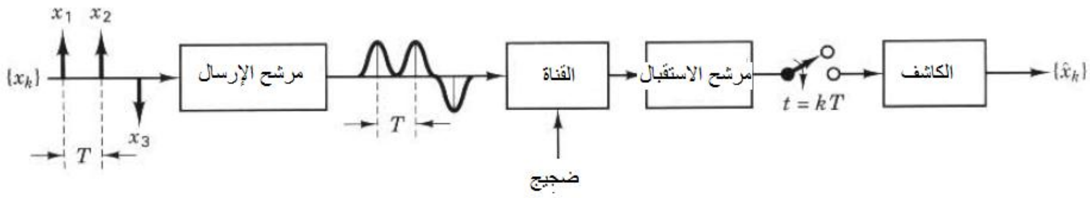
		Complementary Error Function Table											
x	erfc(x)	x	erfc(x)	x	erfc(x)	x	erfc(x)	x	erfc(x)	x	erfc(x)	x	erfc(x)
0	1.000000	0.5	0.479500	1	0.157299	1.5	0.033895	2	0.004678	2.5	0.000407	3	0.00002209
0.01	0.988717	0.51	0.470756	1.01	0.153190	1.51	0.032723	2.01	0.004475	2.51	0.000386	3.01	0.00002074
0.02	0.977435	0.52	0.462101	1.02	0.149162	1.52	0.031587	2.02	0.004281	2.52	0.000365	3.02	0.00001947
0.03	0.966159	0.53	0.453536	1.03	0.145216	1.53	0.030484	2.03	0.004094	2.53	0.000346	3.03	0.00001827
0.04	0.954889	0.54	0.445061	1.04	0.141350	1.54	0.029414	2.04	0.003914	2.54	0.000328	3.04	0.00001714
0.05	0.943628	0.55	0.436677	1.05	0.137564	1.55	0.028377	2.05	0.003742	2.55	0.000311	3.05	0.00001608
0.06	0.932378	0.56	0.428384	1.06	0.133856	1.56	0.027372	2.06	0.003577	2.56	0.000294	3.06	0.00001508
0.07	0.921142	0.57	0.420184	1.07	0.130227	1.57	0.026397	2.07	0.003418	2.57	0.000278	3.07	0.00001414
0.08	0.909922	0.58	0.412077	1.08	0.126674	1.58	0.025453	2.08	0.003266	2.58	0.000264	3.08	0.00001326
0.09	0.898719	0.59	0.404064	1.09	0.123197	1.59	0.024538	2.09	0.003120	2.59	0.000249	3.09	0.00001243
0.1	0.887537	0.6	0.396144	1.1	0.119795	1.6	0.023652	2.1	0.002979	2.6	0.000236	3.1	0.00001165
0.11	0.876377	0.61	0.388319	1.11	0.116467	1.61	0.022793	2.11	0.002845	2.61	0.000223	3.11	0.00001092
0.12	0.865242	0.62	0.380589	1.12	0.113212	1.62	0.021962	2.12	0.002716	2.62	0.000211	3.12	0.00001023
0.13	0.854133	0.63	0.372954	1.13	0.110029	1.63	0.021157	2.13	0.002593	2.63	0.000200	3.13	0.00000958
0.14	0.843053	0.64	0.365414	1.14	0.106918	1.64	0.020378	2.14	0.002475	2.64	0.000189	3.14	0.00000897
0.15	0.832004	0.65	0.357971	1.15	0.103876	1.65	0.019624	2.15	0.002361	2.65	0.000178	3.15	0.00000840
0.16	0.820988	0.66	0.350623	1.16	0.100904	1.66	0.018895	2.16	0.002253	2.66	0.000169	3.16	0.00000786
0.17	0.810008	0.67	0.343372	1.17	0.098000	1.67	0.018190	2.17	0.002149	2.67	0.000159	3.17	0.00000736
0.18	0.799064	0.68	0.336218	1.18	0.095163	1.68	0.017507	2.18	0.002049	2.68	0.000151	3.18	0.00000689
0.19	0.788160	0.69	0.329160	1.19	0.092392	1.69	0.016847	2.19	0.001954	2.69	0.000142	3.19	0.00000644
0.2	0.777297	0.7	0.322199	1.2	0.089686	1.7	0.016210	2.2	0.001863	2.7	0.000134	3.2	0.00000603
0.21	0.766478	0.71	0.315335	1.21	0.087045	1.71	0.015593	2.21	0.001776	2.71	0.000127	3.21	0.00000564
0.22	0.755704	0.72	0.308567	1.22	0.084466	1.72	0.014997	2.22	0.001692	2.72	0.000120	3.22	0.00000527
0.23	0.744977	0.73	0.301896	1.23	0.081950	1.73	0.014422	2.23	0.001612	2.73	0.000113	3.23	0.00000493
0.24	0.734300	0.74	0.295322	1.24	0.079495	1.74	0.013865	2.24	0.001536	2.74	0.000107	3.24	0.00000460
0.25	0.723674	0.75	0.288845	1.25	0.077100	1.75	0.013328	2.25	0.001463	2.75	0.000101	3.25	0.00000430
0.26	0.713100	0.76	0.282463	1.26	0.074764	1.76	0.012810	2.26	0.001393	2.76	0.000095	3.26	0.00000402
0.27	0.702582	0.77	0.276179	1.27	0.072486	1.77	0.012309	2.27	0.001326	2.77	0.000090	3.27	0.00000376
0.28	0.692120	0.78	0.269990	1.28	0.070266	1.78	0.011826	2.28	0.001262	2.78	0.000084	3.28	0.00000351
0.29	0.681717	0.79	0.263897	1.29	0.068101	1.79	0.011359	2.29	0.001201	2.79	0.000080	3.29	0.00000328
0.3	0.671373	0.8	0.257899	1.3	0.065992	1.8	0.010909	2.3	0.001143	2.8	0.000075	3.3	0.00000306
0.31	0.661092	0.81	0.251997	1.31	0.063937	1.81	0.010475	2.31	0.001088	2.81	0.000071	3.31	0.00000285
0.32	0.650874	0.82	0.246189	1.32	0.061935	1.82	0.010057	2.32	0.001034	2.82	0.000067	3.32	0.00000266
0.33	0.640721	0.83	0.240476	1.33	0.059985	1.83	0.009653	2.33	0.000984	2.83	0.000063	3.33	0.00000249
0.34	0.630635	0.84	0.234857	1.34	0.058086	1.84	0.009264	2.34	0.000935	2.84	0.000059	3.34	0.00000232
0.35	0.620618	0.85	0.229332	1.35	0.056238	1.85	0.008889	2.35	0.000889	2.85	0.000056	3.35	0.00000216
0.36	0.610670	0.86	0.223900	1.36	0.054439	1.86	0.008528	2.36	0.000845	2.86	0.000052	3.36	0.00000202
0.37	0.600794	0.87	0.218560	1.37	0.052688	1.87	0.008179	2.37	0.000803	2.87	0.000049	3.37	0.00000188
0.38	0.590991	0.88	0.213313	1.38	0.050984	1.88	0.007844	2.38	0.000763	2.88	0.000046	3.38	0.00000175
0.39	0.581261	0.89	0.208157	1.39	0.049327	1.89	0.007521	2.39	0.000725	2.89	0.000044	3.39	0.00000163
0.4	0.571608	0.9	0.203092	1.4	0.047715	1.9	0.007210	2.4	0.000689	2.9	0.000041	3.4	0.00000152
0.41	0.562031	0.91	0.198117	1.41	0.046148	1.91	0.006910	2.41	0.000654	2.91	0.000039	3.41	0.00000142
0.42	0.552532	0.92	0.193232	1.42	0.044624	1.92	0.006622	2.42	0.000621	2.92	0.000036	3.42	0.00000132
0.43	0.543113	0.93	0.188437	1.43	0.043143	1.93	0.006344	2.43	0.000589	2.93	0.000034	3.43	0.00000123
0.44	0.533775	0.94	0.183729	1.44	0.041703	1.94	0.006077	2.44	0.000559	2.94	0.000032	3.44	0.00000115
0.45	0.524518	0.95	0.179109	1.45	0.040305	1.95	0.005821	2.45	0.000531	2.95	0.000030	3.45	0.00000107
0.46	0.515345	0.96	0.174576	1.46	0.038946	1.96	0.005574	2.46	0.000503	2.96	0.000028	3.46	0.00000099
0.47	0.506255	0.97	0.170130	1.47	0.037627	1.97	0.005336	2.47	0.000477	2.97	0.000027	3.47	0.00000092
0.48	0.497250	0.98	0.165769	1.48	0.036346	1.98	0.005108	2.48	0.000453	2.98	0.000025	3.48	0.00000086
0.49	0.488332	0.99	0.161492	1.49	0.035102	1.99	0.004889	2.49	0.000429	2.99	0.000024	3.49	0.00000080

الجدول من الموقع

http://www.slideshare.net/mohanadadnan/complementary-errorfunctiontable

2. نمط العين وتداخل الرموز

إذا أردنا توصيف المرشحات filters التي تدخل في أي نظام اتصالات رقمية، فثمة أنواع متعددة من المرشحات (وعناصر دارات فعالة مثل الوشائع والمكثفات) توجد في هذا النظام: في المرسل وفي القناة وفي المستقبل، يبينها الشكل التالي:

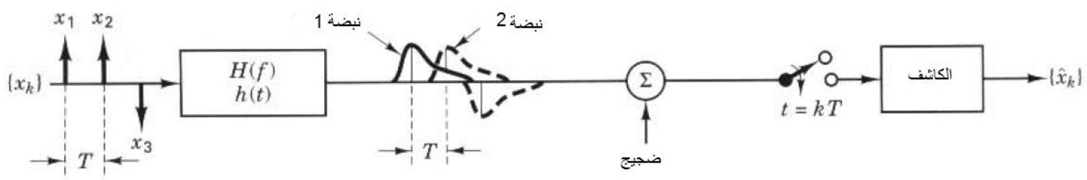


الشكل: نمذجة نظام اتصالات رقمية في الحزمة القاعدية

ففي المرسل، تكون رموز المعلومات على شكل نبضات أو مستويات فلطية، يجري تعديل هذه الإشارات لتناسب قناة الاتصال باستعمال مرشح الإرسال H_t. في حالة الاتصالات في الحزمة القاعدية، يكون لكَبل القناة عناصر فعالة موزعة تؤدي إلى تشويه هذه النبضات. وفي اتصالات تمرير الحزمة، مثل القنوات اللاسلكية يكون لبعض الظواهر الفيزيائية مثل التخميد وغيره آثار تشويهية على الإشارة، يمكن نمذجة هذه الآثار بمرشح يمثل أثر القناة H_c. على مرشح الاستقبال H_r أن يعوض أثر التشوهات الناتجة عن مرشح القناة (المسوي) ومرشح الإرسال (ترشيح متوافق)، وغالباً ما يكون مرشح الاستقبال مرشح استقبال وتسوية receiving/equalizing filter معاً. بتجميع أثر كل هذه المرشحات نحصل على المرشح المكافئ ذي الاستجابة الترددية:

$$H(f) = H_t(f)H_c(f)H_r(f)$$

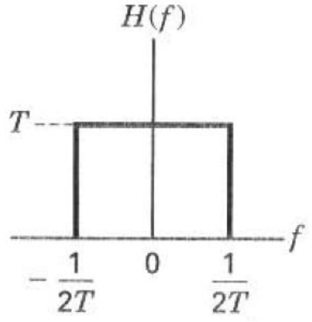
وبذلك يكون النموذج المكافئ للنظام هو المبيّن بالشكل التالي:

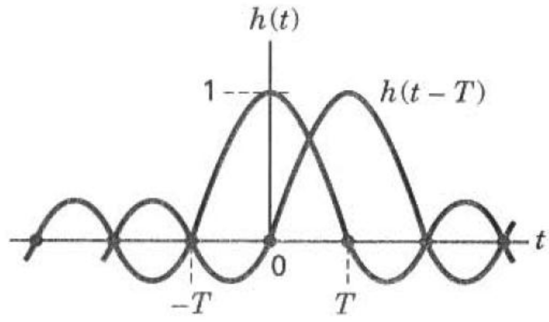


فإذا كان نظام الاتصالات الرقمي يرسل البتات بتعديل الحزمة القاعدية NRZ–L حيث يرسل نبضة موجبة للبت 1 ونبضة سالبة للبت 0. في المستقبل، تجري مقارنة النبضة المستقبلة لكل بت؛ فإذا تجاوزت عتبة معينة قرر الكاشف أن البت المستقبلة 1 وإلا فهي 0. وبسبب أثر الترشيح المكافئ للنظام، تتراكب النبضات بعضها فوق بعض، كما في الشكل السابق فنقول أنه حصل تداخل في الرموز intersymbol interference ISI. هذا التداخل يؤدي إلى تدهور الأداء ورفع معدل خطأ الكشف. في

غالب الأحيان تكون استجابة القناة مفروضة ونبحث عن أفضل مرشح إرسال H_t ومرشح استقبال H_r لجعل تداخل الرموز أصغر ما يمكن على خرج مرشح الاستقبال.

تحرّى نيكوست شكل الموجة المستَقبَلة بحيث لا يحدث تداخل رموز عند الكاشف. وبيّن أن عرض الحزمة الأصغر اللازم إرسال R_s رمزاً في الثانية من دون تداخل رموز هو $R_s/2$ هرتزاً، ويحدث هذا حين تكون الاستجابة الترددية $H(f)$ مستطيلة كما في الشكل التالي:





في هذه الحالة يكون تحويل فورييه المعاكس لها هو إشارة $\sin c(t/T)$. نلاحظ أنه لنبضتين متتاليتين $h(t)$ و $h(t-T)$، ومع أن كلا النبضتين تمتدان على مجال زمني كبير وتتداخلان، ولكن لحظة الكشف (T ومضاعفاتها الصحيحة) نبضة واحدة تكون غير معدومة. وكل النبضات الأخرى $h(t-kT),\ k=\pm 1, \pm 2,...$ تكون معدومة.

3. فعالية الطيف

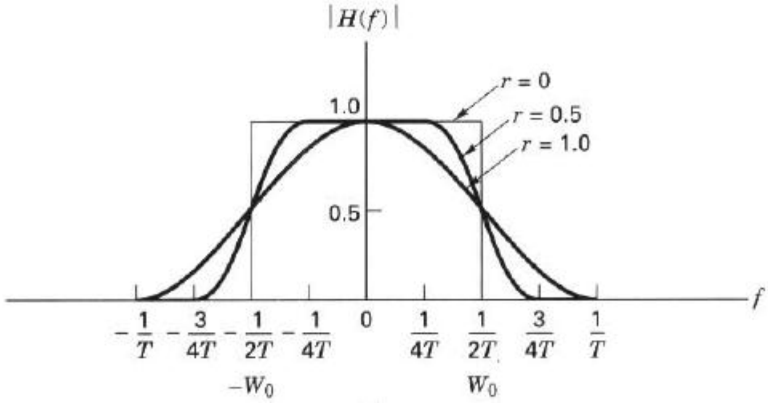
من الفقرة السابقة نجد أنه في حال توقيت كشف جيد عند اللحظات kT حيث k عدد صحيح؛ لا يحدث أي تداخل في الرموز. وهذا يعني أن علينا كشف $1/T$ نبضة في الثانية، وإذا كانت هذه النبضات مرسَلَة بتعديل حزمة قاعدية فإننا نحتاج إلى عرض حزمة طيفية يساوي $1/2T$ هرتز لنقلها. بكلمات أخرى، إذا كان عرض حزمة النظام $W = 1/2T$ فإن $W = R_s/2$ حيث R_s معدل إرسال الرموز (عدد الرموز المرسَلَة في الثانية) من دون تداخل في الرموز، وهذا يسمى قيد عرض حزمة نيكوست (Nyquist bandwidth constraint). إذن، في حالة الترشيح بشروط نيكوست، فإن الفعالية العظمى التي يمكن أن نحصل عليها هي رمزان في الثانية لكل هرتز 2symbols/s/Hz.

ولكن المرشح المذكور أعلاه (باستجابة ترددية مستطيلة ونبضة ذات زمن لا منتهي) لا يمكن تحقيقه عملياً، ونحاول فقط الحصول على تقريب له. تشير المفردات "مرشح نيكوست" و"نبضة نيكوست" إلى صف من المرشحات والنبضات –على التتالي– التي تضمن عدم وجود تداخل في الرموز عند لحظات الكشف. وبذلك، فإن مرشح نيكوست هو المرشح الذي تكون استجابته الترددية ناتج جداء التلاف لمستطيل مع أي تابع للتردد زوجي متناظر، ونبضة نيكوست هي التابع $\sin c(t/T)$ مضروباً بتابع آخر. إذن ثمة عدد لانهائي من مرشحات نيكوست والنبضات الموافقة لها. من أشهرها التجيب المرفوع raised cosine وجذر التجيب المرفوع root–raised cosine.

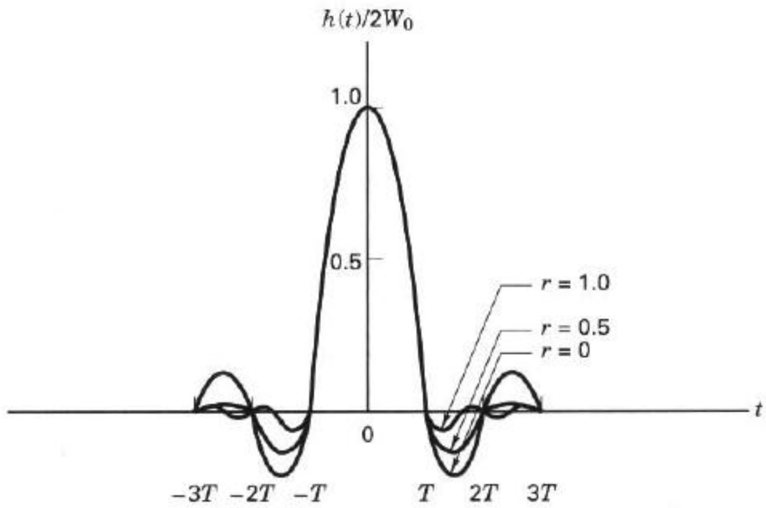
يعطى تابع النقل $H(f)$ لمرشح التجيب المرفوع بالعلاقات:

$$H(f) = \begin{cases} 1 & for \ \ |f| < 2W_0 - W \\ \cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}\dfrac{|f| + W - 2W_0}{W - W_0}\right) & for \ \ 2W_0 - W \le |f| < W \\ 0 & for \ \ |f| \ge W \end{cases}$$

في هذه العلاقات، تشير W إلى عرض حزمة الإرسال المطلق و $W_0 = 1/2T$ إلى عرض حزمة نيكوست الأصغر لطيف مستطيل، وهنا هو التردد في استجابة المرشح حيث يهبط المطال الأعظم إلى النصف $-6dB$. نسمي $W - W_0$ "الزيادة في عرض الحزمة excess bandwidth. ونسمي النسبة $r = (W - W_0)/W_0$ عامل الانحدار roll–off factor، وهو يحقق $0 \le r \le 1$ ويساوي الزيادة النسبية في عرض الحزمة. يبين الشكل التالي طيف المرشح في حالة قيم مختلفة لـ r.



كما يبين الشكل التالي النبضة الزمنية الموافقة لهذه الأطياف:



حيث تعطى النبضة الزمنية بالعلاقة:

$$h(t) = 2W_0(\sin c\, 2W_0 t)\frac{\cos[2\pi(W - W_0)t]}{1 - [4(W - W_0)t]^2}$$

ومع ذلك فهذه المرشحات غير قابلة للتحقيق لأن استجابتها النبضية غير منتهية من جهة ولأنها غير سببية (الاستجابة النبضية للمرشح السببي معدومة حين $n < 0$).

ومع ذلك، فإننا لا نهتم باستعادة الإشارات التماثلية في الاتصالات الرقمية، وإنما نهتم فقط بالكشف في غياب تداخل الرموز. باستعمال مرشحات التجيب المرفوع المذكورة آنفاً، وتعديل الحزمة القاعدية، يرتبط عرض الحزمة اللازمة بمعدل إرسال الرموز وبمعدل الانحدار بالعلاقة $W = 0.5(1+r).R_s$. وبما r محصورة بين الصفر والواحد فإن عرض الحزمة يتراوح بين $R_s/2$ و R_s. أما في حال تعديل حزمة

التمرير، وفي حال استعمال تعديل DSB ثنائي الحزمة ASK, PSK، فإن العلاقة بين عرض الحزمة ومعدل الرموز تصبح $W=(1+r).R_s$.

فعالية الطيف، أو فعالية عرض الحزمة هو R/W حيث R معدل إرسال البتات، و W عرض حزمة الإرسال ووحدة فعالية الطيف إذن هي بت/ثا/هرتز bits/s/Hz. علاقة معدل الرموز بمعدل البت يحددها نوع التعديل كما رأينا سابقاً.

4. المرشح المتوافق

عند إرسال معطيات رقمية بتعديل حزمة قاعدية، فإننا نرسل إشارة معينة $s_1(t)$ خلال زمن البت T إذا كانت البت 1 وإشارة أخر $s_2(t)$ خلال زمن البت T إذا كانت البت 0.

$$s_i(t)=\begin{cases} s_1(t) & 0\le t\le T \quad for\ bit\ "1" \\ s_2(t) & 0\le t\le T \quad for\ bit\ "0" \end{cases}$$

أما إذا كانت المعطيات معدلة بتعديل تمرير الحزمة فترسَل إشارات $s_i(t)$ خلال زمن الرمز الذي سنرمز له أيضاً بـ T، ويمكن أن يكون لدينا أكثر من رمزين. هذه الإشارة ترسل خلال القناة ويظهر أثر القناة مع مرشح الإرسال على أنه ترشيح لهذه الإشارة بالمرشح $h_c(t)$، ويمكن أن يُضاف إليها ضجيج جمعي غاوسي محيط بمتوسط معدوم $n(t)$. فتكون الإشارة على دخل مرشح الاستقبال هي:

$$r(t)=s_i(t)*h_c(t)+n(t), i=1,2,...,M$$

الهدف من مرشح الاستقبال هو استعادة نبضات الحزمة القاعدية مع نسبة إشارة إلى الضجيج SNR أفضل ما يمكن. ومن دون تداخل رموز ما أمكن. يسمى هذا المرشح مرشحاً متوافقاً matched filter.

في نهاية زمن الرمز T نأخذ العينة $z(T)$ من خرج مرشح الاستقبال.

$$z(T)=a_i(T)+n_0(T), i=1,2,...,M$$

حيث $a_i(T), i=1,2,...,M$ هي مركبة الرمز المرغوب و $n_0(T)$ هي مركبة الضجيج. $n_0(T)$ متحول عشوائي غاوسي بمتوسط معدوم وبذلك يكون $z(T)$ متحولاً عشوائياً بمتوسط $a_i(T)$. في حال مثلت الرموز البتين 1 و 0، فإنه بحسب قيمة $z(T)$ ومقارنتها بعتبة معينة نكشف إن كانت البت المرسَلة 1 أم 0.

لنفترض أن σ_0^2 تباين إشارة الضجيج n_0 على خرج مرشح الاستقبال، فتكون نسبة استطاعة الإشارة إلى استطاعة الضجيج في اللحظة T على خرج مرشح الاستقبال هي:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T=\frac{a_i^2}{\sigma_0^2}$$

نود إيجاد تابع تحويل مرشح الاستقبال $H(f)$، بحيث تكون $\left(\frac{S}{N}\right)_T$ عظمى.

نعلم أن $a_i(t)=\int_{-\infty}^{\infty}H(f).S_i(f)e^{j2\pi ft}df$

حيث $S_i(f)$ تحويل فورييه لإشارة دخل مرشح الاستقبال $s_i(t)$.

وإذا كانت الكثافة الطيفية لاستطاعة الضجيج على دخل مرشح الاستقبال $n(t)$ هي $N_0/2$، أمكننا أن نكتب:

$$\sigma_0^2 = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2\, df$$

وبذلك يكون:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T = \frac{a_i^2}{\sigma_0^2} = \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} H(f).S_i(f)e^{j2\pi ft}df\right|^2}{\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2\, df}$$

وباستعمال متراجحة شوارتز Schwartz inequality التي تنص على أن:

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x)\, dx\right]^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)|^2\, dx \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x)|^2\, dx$$

وأن المساواة تتحقق حين يكون $f_1(x) = k.f_2^*(x)$

وإذا اعتبرنا $f_1(x)$ هي $H(f)$ و $f_2(x)$ هي $S_i(f)e^{j2\pi ft}$ نستنتج أن:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} H(f).S_i(f)e^{j2\pi ft}df\right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2\, df.\int_{-\infty}^{\infty} |S_i(f)e^{j2\pi ft}|^2\, df$$

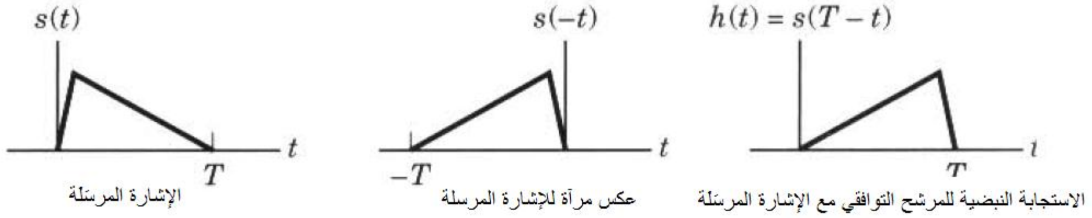
ومن هذا نستنتج أن:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T \le \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |S_i(f)|^2\, df}{\frac{N_0}{2}}$$

والقيمة العظمى له هي:

$\max\left(\frac{S}{N}\right)_T = \frac{2E}{N_0}, \quad E = \int_{-\infty}^{\infty} |S_i(f)|^2\, df$ وهذا يتحقق حين: $H(f) = k.S_i^*(f)e^{-j2\pi fT}$

وبأخذ تحويل فورييه المعاكس للطرفين نجد أن الاستجابة النبضية لمرشح الاستقبال المنشود هي: $h(t) = ks_i(T-t), \;\; 0 \le t \le T$ وصفر خارج ذلك المجال. للحصول على الاستجابة النبضية للمرشح التوافقي نأخذ إشارة النبضة المرسَلة، ونعكسها بالنسبة للزمن فنحصل على $s_i(-t)$ ثم نأخره بمقدار T ، فنحصل على مرشح سببي (استجابته النبضية معدومة للقيم السالبة للزمن t).



ترشيح الإشارة على دخل مرشح الاستقبال التوافقي $r(t)$ ببهذا المرشح يعطي إشارة الخرج:

$$z(t)=r(t)*h(t)=\int_0^t r(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

أو:

$$z(t)=r(t)*h(t)=\int_0^t r(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_0^t r(\tau)s_i[T-(t-\tau)]d\tau=\int_0^t r(\tau)s_i(T-t+\tau)d\tau$$

في لحظة الكشف T يكون:

$$z(T)=\int_0^T r(\tau)s_i(\tau)d\tau$$

نكامل هذا الجداء للإشارة $r(t)$ على دخل مرشح الاستقبال والنبضة المرسلة $s_i(t)$ خلال زمن الرمز i هو ترابط هاتين الإشارتين. يبين الشكل التالي خرج المرشح التوافقي وخرج الترابط لمثال. في اللحظة T خرج الترابط يساوي خرج المرشح التوافقي.

فإذا استقبلنا إشارة $r(t)$ وأجرينا الترابط لها مع جميع إشارات الرموز $s_i(t),\ i=1,2,...,M$ ، فالرمز الذي يعطي أعلى ترابط يكون هو الرمز المرسَل.

5. الكشف المتماسك

في الفقرة السابقة تحدثنا عن كشف الإشارات المعدلة في الحزمة القاعدية. فيما يخص الإشارات المعدلة بتعديل عرض الحزمة، يمكننا القول إن نموذج إجرائية الكشف في هذه الحالة مطابق لنموذج إجرائية الكشف في تعديل الحزمة القاعدية؛ ذلك أنه في النظم الخطية فإن نقل الإشارة إلى الحزمة القاعدية ثم كشفها مكافئ لكشفها ثم نقلها إلى الحزمة القاعدية.

لنفترض أنه لدينا M إشارة مختلفة توافق M رمزاً، وأن ما يشوّه الإشارات هو فقط إضافة ضجيج أبيض جمعي بمتوسط معدوم $n(t)$ فتكون الإشارة التي نستقبلها معطاة بالعلاقة:

$$r(t) = s_i(t) + n(t), \quad 0 \le t \le T$$
$$i = 1, 2..., M$$

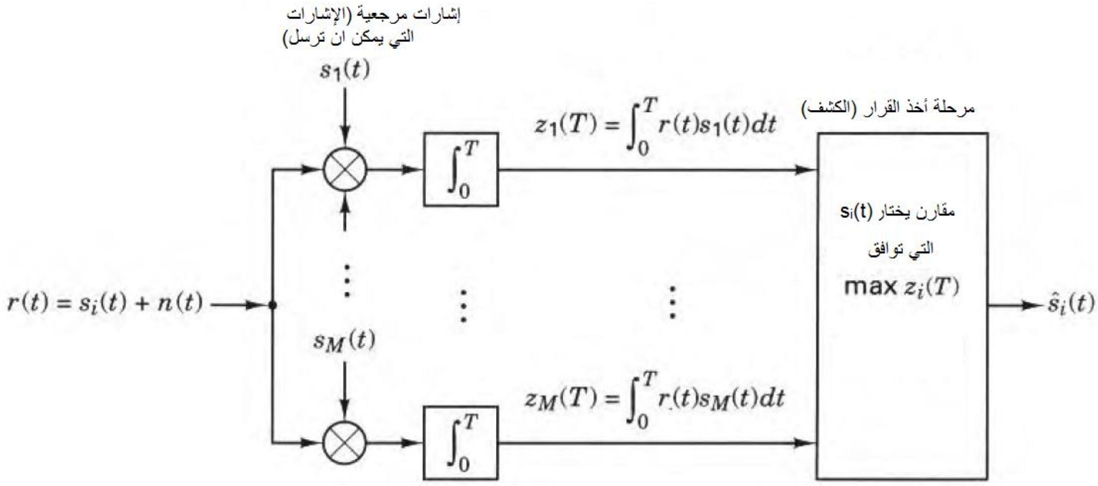
تتكون عملية الكشف من خطوتين: في الخطوة الأولى، نحول الإشارة المستَقبَلة إلى متحول عشوائي $z(T)$، (أو إلى مجموعة من المتحولات العشوائية $z_i(T), (i = 1,..., M)$ على خرج مرشحات الاستقبال المتوافقة حيث جرى أخذ عينات الخرج عند اللحظة T، (T هي مدة الرمز). وفي الخطوة الثانية، يجري أخذ القرار بشأن الرمز الذي جرى كشفه، إما بمقارنة الخرج بعتبة معينة، أو بأخذ القيمة العظمى بين القيم $z_i(T)$.

رأينا سابقاً أن المرشح المتوافق مع إشارة دخل معينة (الإشارة المرسلة لرمز معين مثل إشارات FSK, MPSK, QAM,...) يعطي نسبة إشارة إلى الضجيج عظمى في اللحظة $t = T$ حيث T هي مدة الرمز.

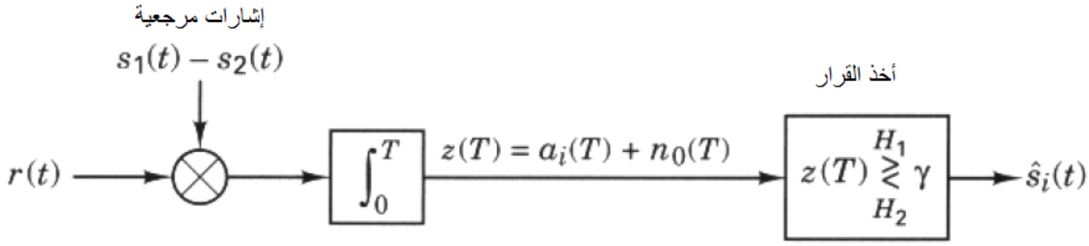
لذلك يمكن في نظم الاتصالات الرقمية، التي تستعمل تعديل عرض الحزمة، والتي يمثل الرمز فيها مجموعة من البتات، أن نضع في المستقبل مجموعة مرشحات متوافقة مع مجموعة إشارات الرموز المرسَلَة $\{s_i(t),\ i = 1, 2, ..., M\}$، ولتكن الاستجابة النبضية لهذه المرشحات هي على التتالي: $\{h_i(t),\ i = 1, 2, ..., M\}$، ونأخذ عينات من خرج هذه المرشحات في اللحظة $t = T$، أي أن: $\{y_i(T) = \left(r(t) * h_i(t)\right)|_{t=T},\ i = 1, 2, ..., M\}$، والمرشح الذي يعطي أكبر قيمة على خرجه يكون متوافقاً مع الرمز المرسّل، وبذلك نكشف الرمز المرسَل.

هذا النوع من الكشف يسمى الكشف المتماسك.

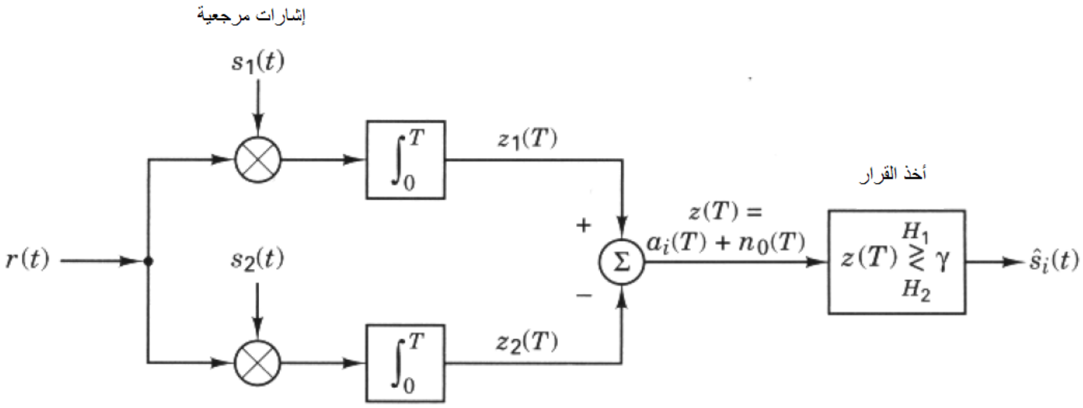
يكافئ تنفيذ هذا الترشيح مع أخذ العينات في اللحظة $t = T$، كما رأينا سابقاً، حساب ناتج الترابط بين إشارة الدخل وكل من الإشارات المرسَلة، أي حساب $z_i(T) = \int_0^T r(t).s_i(t).dt$، وبذلك يمكن تنفيذ الكشف المتماسك باستعمال حساب الترابط كما في الشكل التالي:



في حال كان لدينا رمزان فقط، رمزٌ لكل بت، فإن مرحلة أخذ القرار تُختصر إلى المقارنة مع عتبة. ويمكن أن ننفذ الكشف المتماسك باستعمال ترابط واحد أو اثنين، كما في الشكلين التاليين:



(الشكل) كشف ثنائي باستعمال ترابط وحيد



(الشكل) كشف ثنائي باستعمال ترابطين.

لحساب عتبة الكشف، رأينا في الفقرة $1-5$ أنه في حال كانت عتبة الكشف γ_0 كان احتمال كشف الصفر P_{e0}واحتمال كشف الواحد P_{e1} كما يلي:

$$P_{e1} = P(z < \gamma_0 \mid s_1 \;\; sent) = \int_{-\infty}^{\gamma_0} p(z \mid s_1).dz$$

$$P_{e0} = P(z > \gamma_0 \mid s_2 \;\; sent) = \int_{\gamma_0}^{\infty} p(z \mid s_2).dz$$

ويكون احتمال الخطأ: $p_e = p_0 p_{e0} + p_1 p_{e1}$ حيث p_0 احتمال إرسال الصفر و p_1 احتمال إرسال الواحد.

ونلاحظ أن هذا الاحتمال مرتبط بالعتبة. ولحساب أفضل عتبة تجعل p_e أصغراً، نشتق p_e بالنسبة للعتبة γ_0، ونجعل المشتق يساوي الصفر، فنجد أن عتبة الكشف تعطى بالعلاقة:

$\gamma_0 = \dfrac{a_1 + a_2}{2} = 0$ في حال $p_0 = p_1 = 1/2$ وإلا فهي $\gamma_0 = A.\log\left(\dfrac{p_0}{p_1}\right)$ حيث A ثابت يتعلق باستطاعة الضجيج ومطال النبضة المرسلة.

6. الكشف غير المتماسك

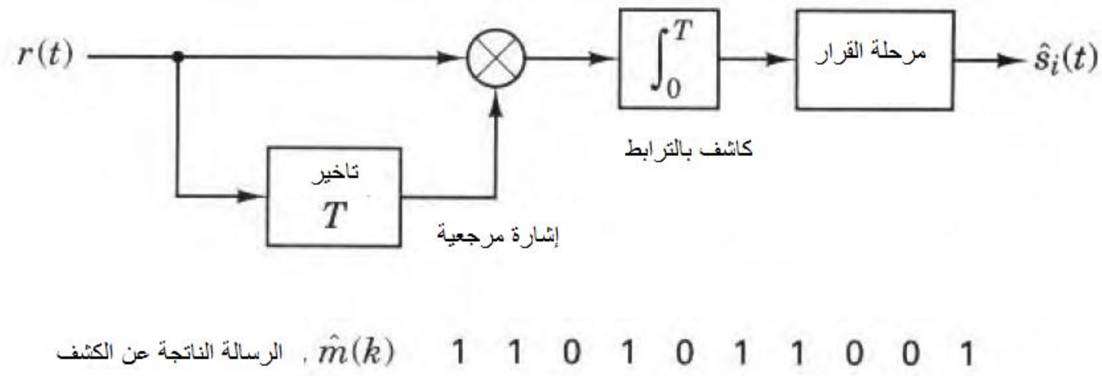
يعتمد الكشف غير المتماسك على استعمال معالجة الإشارة لكشف الإشارات، وهذا الكشف يختلف باختلاف التعديل المستعمل. سنستعرض فيما يلي بعض أنواع التعديل والكشف غير المتماسك الموافق لها.

1.6. التعديل الثنائي بزحزحة الطور التفاضلي BDPSK

لدينا إشارة أولية بطور معين، لترميز البت 1 نعيد إرسال إشارة الرمز السابق، وكل قدوم لبت 0 يؤدي إلى تغيير الطور. يمكن كشف هذا النوع من التعديل كشفاً متماسكاً بأخذ المرشح المتوافق مع الرمز السابق فإن كان متوافقاً مع إشارة الرمز الحالي جرى كشف البت 1 وإلا فالبت المكشوف هو 0. في الحقيقة يمكن خزن إشارة الرمز السابق ومقارنة إشارة الرمز الحالي معه؛ لنرى إن كان نفسه أم لا. يسمى هذا النوع ما الكشف بغير المتماسك، لأننا لا نحتاج لمعرفة الطور الحالي ويكفي أن نعرف إن كان هناك اختلاف في الطور أم لا. انظر الشكل التالي للتعديل ثم فك التعديل والكشف

رقم العينة $, k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
بت المعلومات $, m(k)$		1	1	0	1	0	1	1	0	0	1
ترميز البتات تفاضلياً البت الأولى كيفية $c(k)$	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
الصفحة الموافقة	π	π	π	0	0	π	π	π	0	π	π

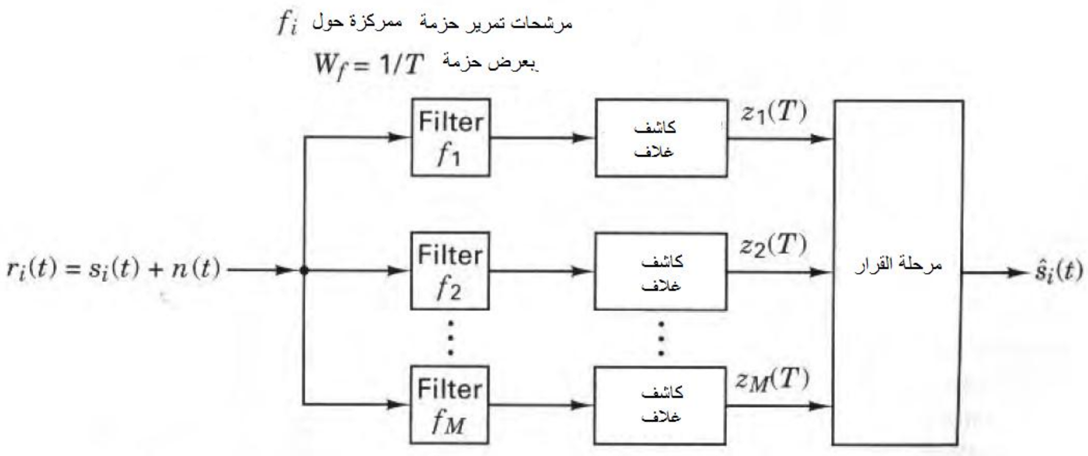
(الشكل) التعديل BDPSK.



(الشكل) فك التعديل السابق

2.6. التعديل بزحزحة التردد FSK

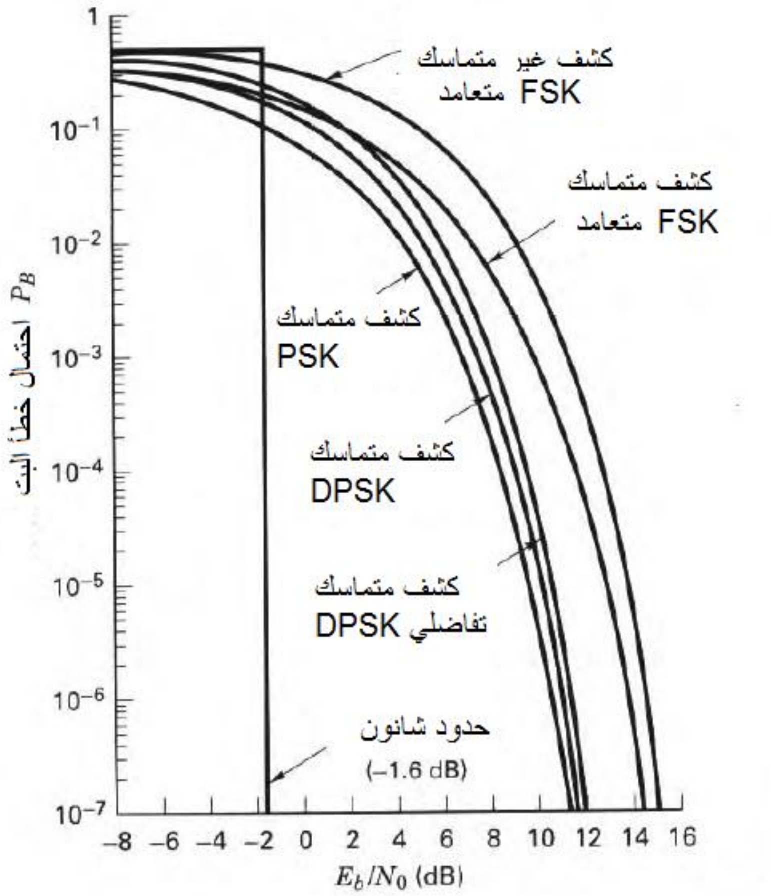
نذكر أنه في هذا التعديل يجري إرسال تردد مختلف لكل رمز، فإن كانت الرموز 0 أو 1 كان لدينا ترددان. في الكشف غير المتماسك يكفي مثلاً أن ندخل الإشارة المستقبلة إلى مجموعة مرشحات تمرير حزمة، كل مرشح يمرر أحد الترددات الموافقة للرموز، والمرشح الذي يعطى أعلى طاقة في خرجه يوافق الرمز المرسّل. انظر الشكل التالي:



(الشكل) كشف غير متماسك لإشارات MFSK.

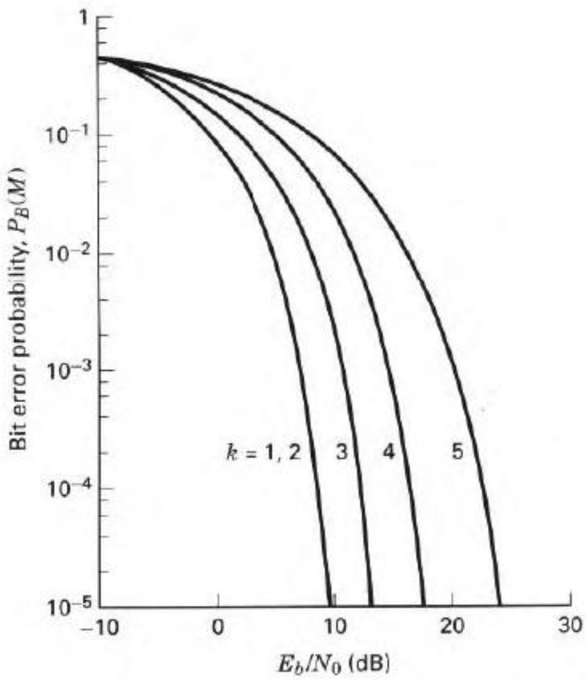
يجب أن يكون عرض حزمة كل مرشح تمرير حزمة مساوياً $1/T$ كما يجب أن يكون التباعد بين أي ترديين لا يقل عن $1/T$ حيث T مدة الرمز.

في الحقيقة، في حالة FSK وDPSK يمكن أن نفضل استعمال الكشف غير المتماسك على الكشف المتماسك، لأن تعقيد بنية الكاشف أقل والأداء ليس أقل بكثير من أداء الكشف المتماسك. تبين المنحنيات التالية أداء كواشف التعديل في حالات التعديل المختلفة:



(الشكل) مقارنة أداء كواشف التعديل في حالات التعديل المختلفة.

وفي حال استعمال الكشف المتماسك فإن استعمال التعديل المتعدد المستويات يمكن أن يؤدي إلى خطأ بت أقل، كما يوضحه الشكل التالي لكشف MPSK من أجل قيم مختلفة للمستويات k :



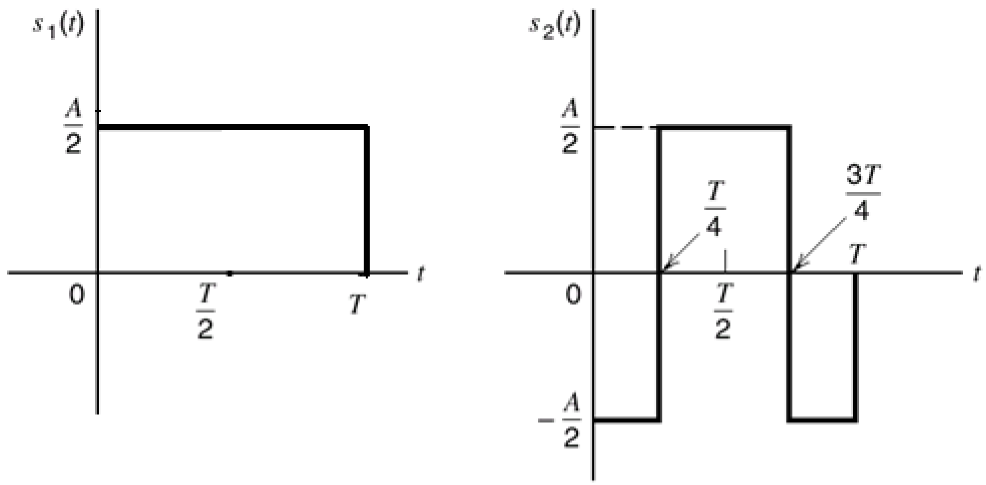
(الشكل) مقارنة أداء كواشف التعديل في حالات مستويات التعديل k المختلفة.

الجدول التالي يساعد على فهم هذه الأشكال لأنه يعطي احتمال الخطأ لمعظم حالات التعديل الرقمية المختلفة.

نوع التعديل الرقمي	احتمال الخطأ في الكشف المتماسك	احتمال الخطأ في الكشف غير المتماسك
NRZ بمطال $\pm A$ وطاقة البت $E_b = A^2 T_b$	$P_e = \frac{1}{2} erfc \ [\sqrt{E_b / N_0}]$	
MASK بـ M مستوى وطاقة بت وسطى E_{avb}	$P_M = \frac{(M-1)}{M} erfc \left(\sqrt{\frac{3.(\log_2 M) E_{avb}}{(M^2 - 1).N_0}} \right)$	
ASK بطاقة رمز نصف طاقة البت $E_s = E_b / 2$	$P_e = erfc \sqrt{\frac{E_s}{2N_0}}$	$P_e \approx \frac{1}{2} e^{-\frac{E_s}{4N_0}}$
FSK بطاقة رمز تساوي طاقة البت $E_s = E_b$	$P_e = erfc \sqrt{\frac{E_s}{N_0}} = erfc \sqrt{\frac{E_b}{N_0}}$	$P_e \approx \frac{1}{2} e^{-\frac{E_s}{2N_0}}$
FSK متعدد المستويات بـ M مستوى $E_s = E_b \log_2 M$	$P_e = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2} \left[1 - erfc \left(u + \frac{2E_s}{N_0} \right) \right]^{M-1} du$	$P_e = \sum_{k=1}^{M} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \binom{M-1}{k} e^{-\frac{kE_s}{(k+1)N_0}}$
PSK بمتوسط طاقة بت $E_s = E_b$	$P_e = erfc \sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} = erfc \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}$	
QAM بـ L مستوى	$P_e = 2\left(1 - \frac{1}{L}\right).erfc\left[\left(\sqrt{\log_2 L}\right) \left(\sqrt{\frac{6}{L^2 - 1}} \right) . \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \right]$	

تمارين محلولة

.1 لدينا قناة ترسل الرمزين $x2=0,\ x1=1$ باستخدام الإشارتين $S1$ و $S2$ المبينين بالرسم التالي (T مدة البت):



ارسم المرشح التكيفي الموافق لكل من الإشارتين السابقتين ولتكن الاستجابة النبضية لهما $h1$ و $h2$ على التتالي.

ندخل كل من الإشارتين S1 و S2 على المرشح h1. اكتب علاقة الخرج لكل من الدخلين وارسمهما (اكتب برنامجاً للرسم باستعمال ماتلاب)

كيف يمكن استخدام خرج هذا المرشح لاستعادة البتات المرسلة بهذه الطريقة؟ اشرح ذلك.

الحل:

نلاحظ أن: الخرج للدخل الأول هو $h_1(t)*s_1(t)$ وللدخل الثاني هو $h_1(t)*s_2(t)$

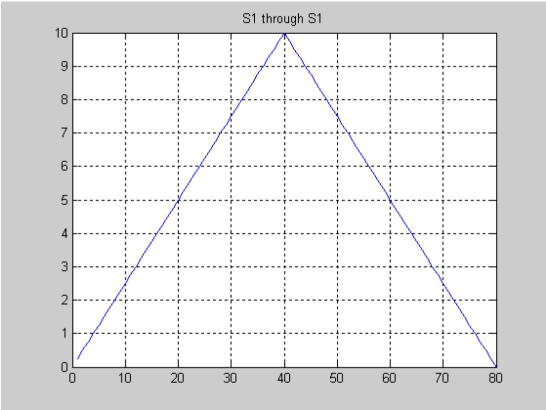
برنامج حساب الخرج:

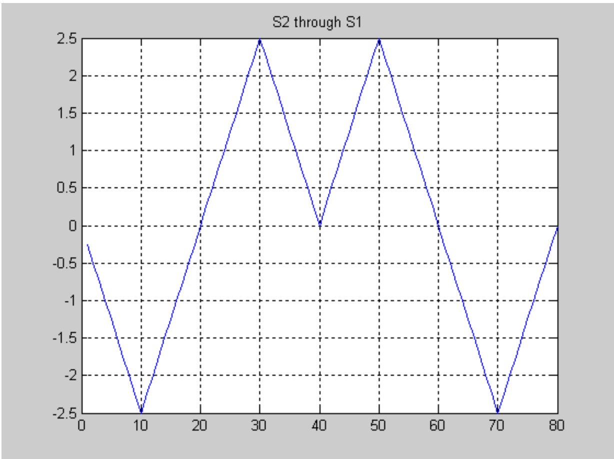
```
close all;
s =0.5*ones(1,10);
y =[-s s s -s zeros(1,40)];   s2(t)  followed by zeros
plot(y);
z =[0.5*ones(1,40) zeros(1,40)]; s1(t) followed by zeros
z1=filter(z,1,z);        h1(t)*s1(t)=s1(t)*s1(t)
plot(z1); grid  on;
```

```
title('S1 through S1');
figure;
z3=filter(y,1,z);
```

$h_1(t) * s_2(t) = s_1(t) * s_2(t)$

```
plot(z3); grid on;
title('S2 through S1');
```





في اللحظة T الموافقة لـ 40 على المحور الفقي نرى أن الخرج أعظمي عند إرسال $s1$ وأصغري في الحالة الأخرى، مما يمكننا من الكشف بمقارنة الخرج عند اللحظة T بالعتبة 5 للمثال السابق.

2. نظام اتصالات يرسل معطيات بالترميز NRZ باحتمال خطأ $p_e = 10^{-6}$ كم يصبح احتمال الخطأ حين يتضاعف معدل البت؟

الحل:

لدينا $P_e = \frac{1}{2} erfc\ [\sqrt{E_b / N_0}]$ و $E_b = A^2 T_b$. حين يتضاعف معدل البت ينقل زمن البت T_b إلى النصف. فإذا كان $u = \sqrt{E_b / N_0}$ فإن $P_e = \frac{1}{2} erfc\ [\sqrt{E_b / N_0}] = \frac{1}{2} erfc(u) = 10^{-6} \Rightarrow u = 3.3$. في الحالة الجديدة تنقص u بمقدار $\sqrt{2}$ فيكون معدل الخطأ الجديد $P_e = \frac{1}{2} erfc\ [u / \sqrt{2}] = \frac{1}{2} erfc(2.33) = 10^{-3}$ (من الجدول).

3. يرسل حاسوب معطيات بمعدل 56 Kb/s باستعمال تعديل PAM وبنبضات تجيب مرفوع. احسب عرض الحزمة اللازم للإرسال إذا كان معامل الانحدار $r = 0.25, 0.5, 0.75, 1$.

الحل:

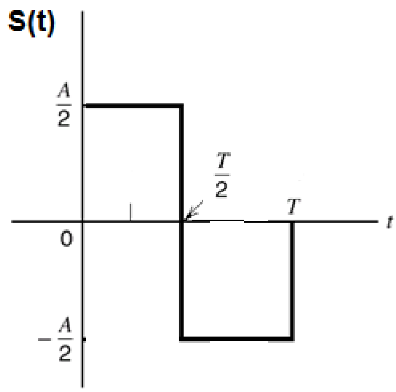
يعطى عرض الحزمة بالعلاقة $W = 0.5(1+r).R_s = (1+r) * 28\ kHz$

تمارين للحل

.1 نود إرسال معطيات كميرة جهاز تنظير هضمي علوي عالية الدقة ترسل 60 صورة في الثانية وتتألف كل صورة من 1920×1080 بكسلاً، هل يمكن عرض هذه الصورة على شاشة تلفاز 2 ميغا بكسل؟ وإذا كانت الشاشة تعرض 25 صورة في الثانية فهل سيرى الطبيب ما يمكن أن يراه بالعين المجردة؟ (قارن زمن العرض بزمن التصوير). ما عدد البكسلات المرسلة في الثانية؟ وإذا كانت الصور ملونة بحيث يمثل كل لون أساسي على بايت فما عدد البتات المرسلة في الثانية؟ برر إجابتك. إذا أردنا إرسال الصور على خط رقمي بالتعديل القاعدي NRZ فماعرض الحزمة اللازم للنقل؟ اذكر قناة اتصال تعديل حزمة يمكنها نقل هذه المعطيات مع تبرير خيارك.

.2 نود الآن نقل الصورة السابقة باستخدام تقنيات ضغط بحيث يصبح معدل النقل 44.736 Mb/s. هل نحتاج إلى ضغط المعطيات (ما هي نسبة الضغط اللازمة) أم نستطيع تضميم عدة قنوات (ماعدد القنوات)؟ وماهو التعديل القاعدي الذي نستخدمه لهذه الخطوط؟ وإذا كنا نبدأ المعطيات بترويسة بايتين 0x 8181 فبيّن شكل الإشارة المرسلة لهذه الترويسة على الخط للترامیز: NRZ, RZ, Diphase, CMI, B3ZS.

.3 لدينا إشارة رقمية معطاة بالشكل التالي:



والمطلوب ارسم الاستجابة النبضية للمرشح المتكيف مع هذه النبضة، ثم ارسم إشارة خرج ترشيح هذه النبضة بهذا المرشح. ماهي قيمة الخرج عند اللحظة T؟

إذا أدخلنا نبضة مستطيلة عرضها T ومطالها $A/2$ لهذا المرشح فما هي إشارة الخرج وماهي قيمتها عند اللحظة T؟ ماذا تلاحظ؟ كيف يمكن استخدام هذا المرشح لكشف بتات نمثل فيها البت "واحد" بهذه النبضة والبت "صفر" بالنبضة المستطيلة؟

ISSN: 2617-989X

مذاكرة

أجب باختصار واملأ الفراغات بما يناسب:

في اتصالات الحزمة القاعدية نكافئ قناة الاتصال بمرشح وحيد يتضمن أثر مرشحات ثلاث هي............ يمكن أن يحصل تداخل في الرموز بسبب .... وليس بسبب الضجيج. ولجعل أثر التداخل أصغرياً يمكن استعمال نبضات..........

في اتصالات تمرير الحزمة، نعرف مرشحاً متوافقاً مع نبضات الإرسال. فإذا كانت نبضة الإرسال $g(t)$ خلال زمن الرمز T كان المرشح المتوافق يعطى .... $h(t)=g(T-t)$

الكشف المتماسك هو الكشف الذي يستعمل ....

الكشف غير المتماسك يستعمل ....

أداء الكشف المتماسك .... من أداء الكشف غير المتماسك. نفضل الكشف .... لأنه أقل تعقيداً، دون خسارة كبيرة في الداء.

عند استعمال تعديل متعدد المستويات يصبح احتمال خطأ الرمز ....، ولكن انعكاسه على احتمال خطأ البت أقل حين نختار الرموز بعناية، بحيث تختلف الرموز المتجاورة بأقل عدد من البتات.

1. ‘Digital and Analog Communication Systems’, 8th edition, by Leon W. COUSH II, Pearson Education International, 2013 ch3-4
2. ‘Digital Communications: Fundamentals and Applications", 2nd edition, by, Bernard SKLAR, Pretice Hall P T R, 2001 ch3-4

حل المذاكرة

في اتصالات الحزمة القاعدية تكافئ قناة الاتصال بمرشح وحيد يتضمن أثر مرشحات ثلاث هي مرشح الإرسال و مرشح القناة ومرشح الاستقبال. يمكن أن يحصل تداخل في الرموز بسبب المرشح المكافئ وليس بسبب الضجيج. ولجعل أثر التداخل أصغرياً يمكن استعمال نبضات تجيب مرفوع.

في اتصالات تمرير الحزمة، نعرف مرشحاً متوافقاً مع نبضات الإرسال. فإذا كانت نبضة الإرسال $g(t)$ خلال زمن الرمز T كان المرشح المتوافق يعطى بالعلاقة: $h(t)=g(T-t)$

الكشف المتماسك هو الكشف الذي يستعمل الترشيح بمرشحات متوافقة مع نبضات الإرسال

الكشف غير المتماسك يستعمل معالجة إشارة مناسبة.

أداء الكشف المتماسك أعلى من أداء الكشف غير المتماسك. نفضل الكشف غير المتماسك لأنه أقل تعقيداً، دون خسارة كبيرة في الداء.

عند استعمال تعديل متعدد المستويات يصبح احتمال خطأ الرمز أعلى، ولكن انعكاسه على احتمال خطأ البت أقل حين نختار الرموز بعناية، بحيث تختلف الرموز المتجاورة بأقل عدد من البتات.

ISSN: 2617-989X

الفصل السادس:
ترميز القناة وتصحيح الأخطاء

ISSN: 2617-989X

الكلمات المفتاحية:

ترميز القناة، الترميز الخطي الكتلي Linear Bloc Codes، الترميز التلفيفي Convolutional Codes، ترميز ريد–سولومن Reed–Solomon، الترميز التشابكي Interleaving Codes، الترميز التوربيني Turbo Codes، قناة بذاكرة، المقايضة بين التعديل والترميز.

الملخص:

يعرض الفصل طرقاً في الاتصالات الرقمية المتقدمة، تتمثل في إضافة حشو لبتات المعطيات بطرق تمكن من كشف الأخطاء وتصحيحها ما أمكن. من هذه التراميز: الترميز الخطي الكتلي الذي يضيف تراكيب خطية من بتات المعطيات، والترميز التلفيفي الذي يمثل عملية ترميز القناة بآلات منتهية الحالات، ثم ترميز ريد سولومون الذي يعتمد على رياضيات الحقول المنتهية، ثم الترميز التشابكي الذي يخفف من أثر الأخطاء الرشقية بتغيير ترتيب البتات المرسلة بطرق مدروسة، ثم الترميز التوربيني الذي يعطي قرارات لينة في الكشف الرقمي (تعطى البت المكشوفة مع احتمال مرافق). أخيراً نعرض أهم المقايضات التي يمكن أن تجري بين طرق التعديل والترميز عند بناء نظام اتصالات معين.

الأهداف التعليمية:

- تعرف الترميز الخطي الكتلي
- تعرف الترميز التلفيفي والطرق المختلفة في تمثيله
- فهم كيفية تنفيذ الترميز التلفيفي
- مراجعة بعض المفاهيم في الحقول المنتهية
- تعرف ترميز ريد–سولومن R–S
- الاطلاع على قرارات الكشف اللينة، والترميز التوربيني
- الاطلاع على مختلف الموسطات التي تؤثر في أداء نظم الاتصالات الرقمية
- الاطلاع على أنواع من المقايضات في هذه النظم

يشير ترميز القناة إلى صف من تحويلات الإشارة، يهدف إلى تحسين أداء نظم الاتصالات وجعل الإشارات المرسَلَة أكثر مناعة في وجه الآثار السيئة لقنوات الاتصالات مثل إضافة الضجيج، والتداخل، والتخميد. إن تطور تقانات الدارات المتكاملة وسرعة معالِجات الإشارة الرقمية قد مكّنا من تحقيق أداء أفضل من حيث معدل الخطأ وصل أحياناً إلى 10dB مقارنة بالطرائق التي تعتمد على تحسين الأداء برفع الاستطاعة المرسلة واستعمال هوائيات أضخم.

يبين الشكل أنواع تحويل الإشارات الخاصة بترميز القناة من بين تحويلات أخرى في نظم الاتصالات:

نلاحظ أن جزءاً من ترميز القناة يعتمد على شكل الموجة وجزءاً آخر يعتمد على متتاليات رقمية.

فيما يتعلق بترميز شكل الموجة، نذكر بعض المفاهيم الهامة:

- **الإشارتان المتعاكستان** هما إشارتان إحداهما عكس الأخرى مثل $s_1(t) = -s_2(t) = \sin(\omega_0 t),\ 0 \le t \le T$.

- الإشارات المتعامدة هي إشارات تحقق:

$$z_{ij} = \frac{1}{E}\int_0^T s_i(t).s_j(t)dt = \begin{cases} 1 & if \quad i=j \\ 0 & else \end{cases}$$

حيث E طاقة الإشارة وتساوي $\int_0^T s_i^2(t)dt = E, \quad \forall i$ للإشارات المعنية التي يفترض أن تكون متساوية الطاقة. نسمي z_{ij} عامل الترابط المتعارض cross–correlation coefficient.

- **إجرائيات ترميز شكل الموجة waveform coding** تحول مجموعة أشكال موجة إلى مجموعة أخرى محسنة. يمكن استعمال هذه المجموعة المحسنة لاستعادة الإشارة. وأفضل هذه الأرمزة هي المتعامدة. نسعى لأن تكون هذه الأرمزة مختلفة أكثر ما يمكن. الإشارات المتعاكسة عامل ترابطها المتعامد -1 أما المتعامدة فعامل ترابطها المتعارض معدوم.

في حال استعملنا إشارات رقمية (إشارات تمثل مجموعة بتات بالترميز NRZ مثلاً)، يمكن أن تحقق المتتاليات ذات الطول الثابت المتعامدة العلاقة التالية:

$$z_{ij} = \frac{\text{عدد البتات المتوافقة لمتتاليتين - عدد البتات المختلفة للمتتاليتين}}{\text{عدد البتات في كل من المتتاليتين}} = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

مثال على الأرمزة المتعامدة:

يمكن أن نرمز البتين 0 و 1 باستعمال كلمات ترميز ببتين، بحيث تكونان متعامدتين كما يلي:

$$\begin{array}{cc} \underline{data\_set} & \underline{orthogonal\ codeword\_set} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \Rightarrow H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

حيث يرمز البت 0 بالثنائية 00 والبت 1 بالثنائية 01.

لترميز بتين نوسع المصفوفة أفقياً وشاقولياً لنحصل على ما يلي:

$$\begin{array}{cc} \underline{data\_set} & \underline{orthogonal\ codeword\_set} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \Rightarrow H_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} H_1 & H_1 \\ H_1 & \overline{H_1} \end{bmatrix} \end{array}$$

وعموماً يمكننا بناء مجموعة كلمات ترميز H_k بعده $2^k \times 2^k$ تسمى مصفوفة هادامارد hadamard matrix من المصفوفة H_{k-1} كما يلي:

$$H_k = \begin{bmatrix} H_{k-1} & H_{k-1} \\ H_{k-1} & \overline{H_{k-1}} \end{bmatrix}$$

الآن للتحكم بالخطأ يمكن أن نضيف حشواً إلى الرسائل المرسلة بحيث نكشف الخطأ وعندها يمكن أن نطلب إعادة الإرسال أو أن يكون الترميز مصححاً للخطأ. نبين فيما يلي بعضاً من هذه التراميز.

1. الترميز الخطي الكتلي LBC

نفترض أن الرسائل الممكنة هي رسائل من k بتاً (لدينا 2^k رسالة مختلفة)، سنرسل لكل رسالة كلمة ترميز من n بتاً $n>k$، ونرمز للترميز بالثنائية (n,k). البتات الإضافية هي تراكيب خطية لبتات الرسالة (المجموع هو xor والضرب هو and للبتات). بحيث لكل رسالة كلمة ترميز واحدة تحسب بطريقة واحدة. نسمي النسبة k/n معدل الترميز coding rate.

الضرب	الجمع
$0.0=0$	$0\oplus0=0$
$0.1=0$	$0\oplus1=1$
$1.0=0$	$1\oplus0=1$
$1.1=1$	$1\oplus1=0$

مثال: الترميز $(6,3)$: لدينا 2^3 رسالة مختلفة، كلمات الرماز تتكون من 6 بتات . نلاحظ أن كلمات الرماز تشكل فضاء شعاعياً جزئياً من فضاء الأشعة ذات البعد 6: (يتضمن هذا الفضاء الجزئي الشعاع الحيادي الصفري، ومجموع أي كلمتين (xor) هو كلمة من الفضاء).

إسناد كلمات الترميز إلى الرسائل

كلمة الترميز	شعاع الرسالة
000000	000
110100	100
011010	010
101110	110
101001	001
011101	101
110011	011
000111	111

في الحقيقة، حين يكون عدد الرسائل صغيراً، كما في الحالة السابقة، يمكن استعمال جدول بحيث يعطي كلمة الترميز لكل رسالة. ولكن، في الحالات الأخرى، يستحيل استخدام هذه التقنية لذلك نلجأ إلى مصفوفات يمكن أن تولد الرماز. نختار k شعاعاً من الفضاء 2^n مستقلة خطياً يمكن أن تولد الفضاء

الجزئي لكلمات الرماز الذي عدد عناصره 2^k وبحيث إذا كانت لدينا الرسالة ذات البتات $m = m_0 m_1 ... m_k$ والأشعة التي سنسميها قاعدة الفضاء $V_0 V_1 ... V_k$ أمكننا حساب كلمة الترميز الخاصة بهذه الرسالة على شكل مركبات شعاع U يعطى بالعلاقة: $U = \sum_{i=1}^{k} m_i V_i$.

بشكل مصفوفاتي، إذا كانت المصفوفة G المؤلفة من k سطراً (عدد الأشعة V)، و n عموداً (عدد مركبات كل شعاع) هي:

$$G = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ . \\ . \\ V_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & ... & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & ... & v_{2n} \\ . & & & \\ . & & & \\ v_{k1} & v_{k2} & ... & v_{kn} \end{bmatrix}$$

وأمكننا كتابة $U = m.G$ حيث m و U مصفوفات سطرية. الضرب ضرب مصفوفاتي بحيث إذا كانت لدينا المصفوفتان: المصفوفة A بـ l سطراً و n عموداً والمصفوفة B بـ n سطراً و m عموداً، أمكننا حساب مصفوفة الجداء $C = AB$ بحيث كل عنصر منها يحسب من العلاقة:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

الجمع هو xor والضرب هو and.

في المثال السابقة، مصفوفة التوليد هي

$$G = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_1 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ولحساب كلمة الترميز للرسالة 110 نجد أن:

$$U_4 = [1\,1\,0].\begin{bmatrix} V_1 \\ V_1 \\ V_3 \end{bmatrix} = 1.V_1 + 1.V_2 + 0.V_3$$
$$= 1\,10100 + 011010 + 000000$$
$$= 1\,0\,1\,1\,1\,0$$

حيث كلمة الرماز الموافقة هي 101110.

في الترميز الخطي الكتلي النظامي systematic linear bloc codes، تتكون كلمة الرماز من $n-k$ بتاً لفحص الندية، يتلوها k بتاً هي بتات الرسالة. فيمكننا كتابة المصفوفة G بالشكل:

$$G = [P \mid I_k]$$

$$= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & .. & p_{1,(n-k)} & 1 & 0 & .. & 0 \\ p_{21} & p_{22} & .. & p_{2,(n-k)} & 0 & 1 & .. & 0 \\ . & . & . & & & & & . \\ p_{k1} & p_{k2} & .. & p_{k,(n-k)} & 0 & .. & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نسمي P جزء فحص الندية parity check portion. وعندها يمكن كتابة كلمة الترميز على شكل بتات ندية تتلوها بتات الرسالة

$$U = \underbrace{p_1, p_2, ...p_{n-k}}_{\text{بتات الندية}}, \quad \underbrace{m_1, m_2, ..., m_k}_{\text{بتات الرسالة}}$$

وهنا يلزمنا فقط حساب بتات الندية.

في مثالنا السابق، يلزمنا فقط حساب بتات كلمات الترميز الثلاث الأولى، ونلحق بها بتات الرسالة، كما يبينه الشكل التالي:

$$U = [m_1 \ m_2 \ m_3]. \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \underbrace{1 \quad 0 \quad 1}_{P} & & & \underbrace{0 \quad 0 \quad 1}_{I_3} & & \end{array} \right]$$

$$= [\underbrace{m_1 + m_3}_{u_1}, \underbrace{m_1 + m_2}_{u_2}, \underbrace{m_2 \ \ m_3}_{u_3}, \underbrace{m_1}_{u_4}, \underbrace{m_2}_{u_5}, \underbrace{m_3}_{u_6}]$$

نعرف مصفوفة فحص الندية على أنها المصفوفة: $H = [I_{n-k} \mid P^T]$

فيكون منقولها: $H^T = \begin{bmatrix} I_{n-k} \\ \hline P \end{bmatrix}$

ونتحقق بسهولة أن $GH^T = 0$ وبذلك يكون $UH^T = 0$.

وبذلك، فإذا استقبلنا البتات $r = r_0 r_1 ... r_k$ أمكننا أن نكتب: $r = U + e$، حيث e بتات خطأ. فإذا كان الاتصال مثالياً من دون أخطاء، كانت $e = 0$ و $r = U$. ولمعرفة وجود أخطاء من عدمها، نحسب اختبار العرض syndrome test: $S = rH^T$. ونرى أن:

$$S = rH^T$$
$$= (U + e)H^T$$
$$= rH^T + eH^T = eH^T$$

لكي يكون الفحص فعالاً يجب ألا يكون أي عمود من H يساوي شعاعاً صفرياً، وأن تكون جميع الأعمدة متمايزة مثنى.

لنفترض مثلاً أننا أرسلنا كلمة الترميز $m=101110$ واستقبلنا $r=001110$

نحسب:

$$S=rH^T=[0\,01110].\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}=[10\ 0]$$

وبما أنه غير معدوم هذا يعني وجود خطأ. نحسب eH^T فنجد:

$$S=eH^T=[1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]H^T$$

وبذلك يساعد فحص العرض على كشف الخطأ.

يمكن باستعمال مفهوم المسافة الصغرى بين كلمتي ترميز–وهو أقل عدد من التغيرات في البتات بين الكلمتين Hamming distance– وتقنيات أخرى من تصحيح الخطأ.

في الحقيقة إذا عرفنا $d_{\min}$ على أنها المسافة الصغرى للرماز (المسافة بين كلمتي رماز U,V هو عدد البتات المختلفة بين الكلمتين ويساوي عدد الوحدان في الكلمة $U\oplus V$. يبرهن أن الترميز الخطي الكتلي يستطيع كشف الأخطاء التي لا يتجاوز عددها $e\le d_{\min}-1$، ويستطيع تصحيح الأخطاء التي لا يتجاوز طولها $t=\left\lfloor\frac{d_{\min}-1}{2}\right\rfloor$.

مثال:

لنفترض أننا نود تصميم رماز (n,k). للمقايضة الجيدة بين كشف الخطأ وتصحيحه يجب أن تكون $t=2$ على الأقل وهذا يقتضي أن تكون $d_{\min}=2t+1=5$.

ويجب أن يكون عدد بتات الرماز $k=2$ على الأقل. وبذلك يكون عدد كلمات الرماز $2^k=4$. إذن الرماز $(n,2)$.

لدينا شرط آخر يجب أن يتحقق وهو: $d_{\min}\le\frac{n\times 2^{k-1}}{2^k-1}$، يسمى هذا الحد plotkin bound. هذا يعطي $n=8$. وبذلك يكون الرماز $(8,2)$.

لمعرفة كلمات الترميز نفترض أن آخر بتين هما بتات المعطيات. يجب أن تضم كلمات الرماز الكلمة 00000000. نختار البتين الأخفض دلالة هي بتات االمعطيات. أحد الأمثلة:

Message	Codewords
00	00000000
01	11110001
10	00111110
11	11001111

وتكون المصفوفة المولدة:

$$G=\begin{bmatrix}00111110\\11110001\end{bmatrix}$$

الأرمزة الدوارة هي حالة خاصة من الأرمزة الخطية تحقق الخاصة التالية: إذا كانت $U=(u_0,u_1,....,u_{n-1})$ كلمة رماز فإن أي انزياح دوراني يعطي كلمة ترميز أخرى. يمكن النظر إلى كلمة الرماز كمعاملات كثير حدود U(X) كما يلي: $U(X)=u_0+u_1X+u_2X^2+....+u_{n-1}X^{n-1}$.

عندها تكون كلمات الرماز هي باقي قسمة $X^iU(X)$ على X^n+1 حين $i=0,1,...,n-1$.

يمكننا توليد كلمات الرماز بدءاً من كثير حدود مولد: $g(X)=g_0+g_1X+g_2X^2+....+g_pX^p, g_0=g_p=1$، بحيث $U(X)=m(X).g(X)$ من الدرجة n−1 و $m(X)=m_0+m_1X+m_2X^2+....+m_{n-p-1}X^{n-p-1}$. ويكون لدينا 2^{n-p} كثير حدود مختلف $n-p=k$ للرماز (n,k).

يجب أن يكون كثير الحدود $g(X)$ أحد معاملات X^n+1.

على سبيل المثال: $X^7+1=(1+X+X^3)(1+X+X^2+X^4)=g_1(X).g_2(X)$ فيمكن استعمال $g_1(X)$ لتوليد رماز دوار $(n,k)=(7,4)$، أو استعمال $g_2(X)$ لتوليد رماز دوار $(n,k)=(7,3)$.

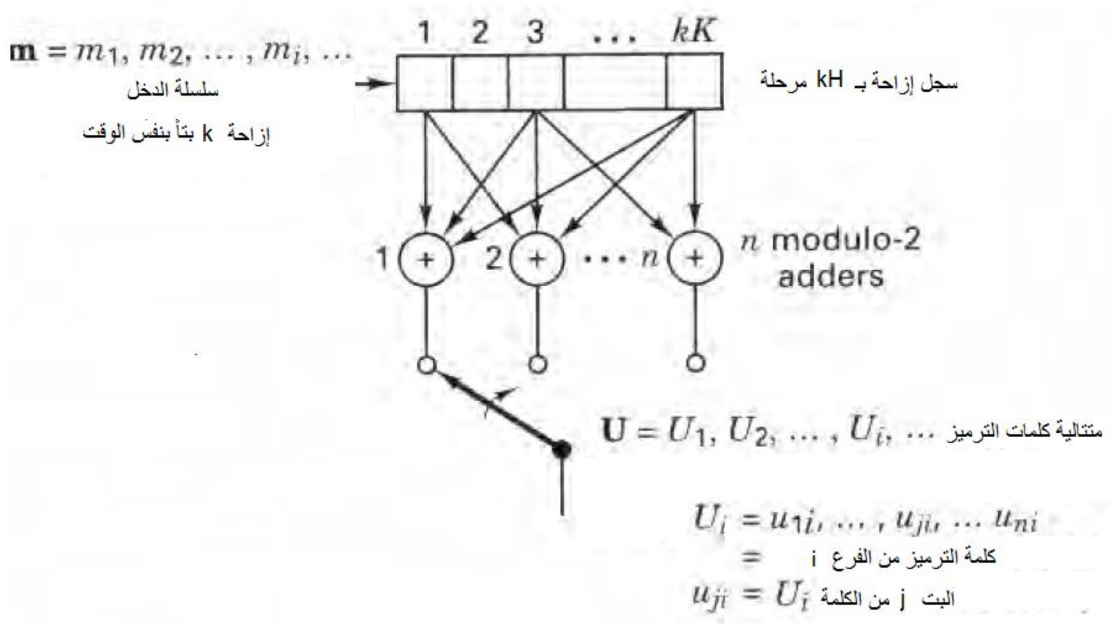
باختصار إذا كان كثير حدود من المرتبة $n-k$ يقسم X^n+1، فهو يحدد رمازاً دورياً وحيداً (n,k).

كشف الخطأ يكون بكشف إن كان $g(X)$ يقسم كثير الحدود الموافق لكلمة مستَقبَلة.

2. الترميز التلفيفي

يتحدد الرماز التلفيفي بثلاثة أعداد صحيحة $n, k\ and\ K$. لنسبة الترميز n/k الدلالة نفسها في أنها تقيس مقدار الحشو المُضاف على الرسالة ذات k بتاً أما البتات n فهي ليست تابعاً لبتات الرسالة فقط، كما في حالة الترميز الخطي الكتلي، وإنما أيضاً لـ $K-1$ رسالة سابقة بأخذ k بتاً من كل منها. نسمي K طول القيد constraint length. وبهذا نرى أن الترميز التلفيفي يتطلب ذاكرة.

يبين الشكل التالي مرمزاً تلفيفياً بطول قيد K ومعدل k/n:

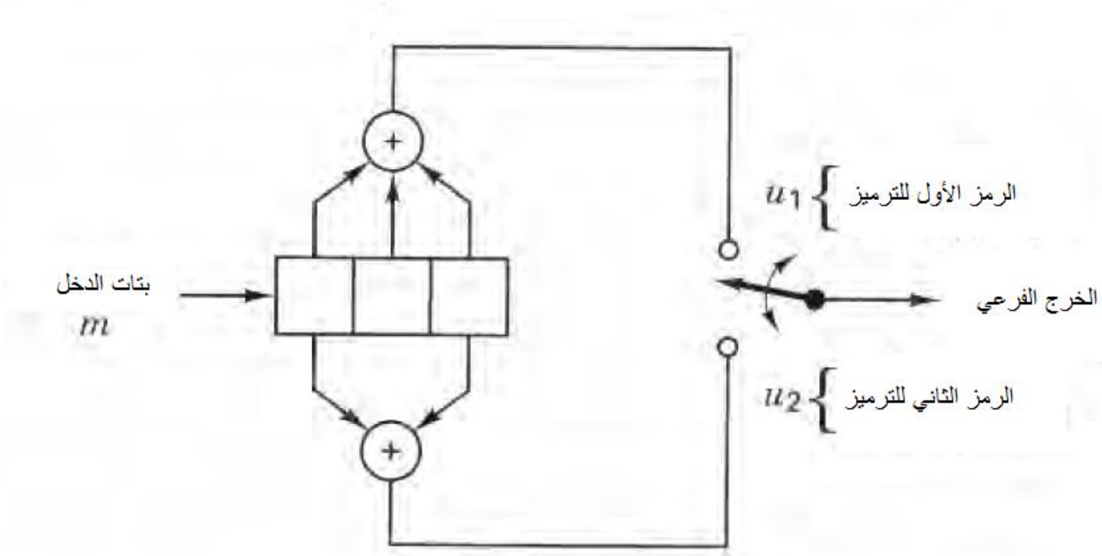


في كل وحدة زمنية، تجري إزاحة k بتاً إلى اليمين وإعادة حساب n بتاً هي خرج الجوامع xor (modulo 2 adders) تكوّن كلمة الرماز المرسلة في هذه اللحظة، وهكذا...

يمكن تمثيل عملية الترميز بإحدى الطرائق التالية:

1.2. التمثيل بوصلات connection representation

لنأخذ المثال التالي لترميز تلفيفي $(2,1)$ في حالة $K=3$.

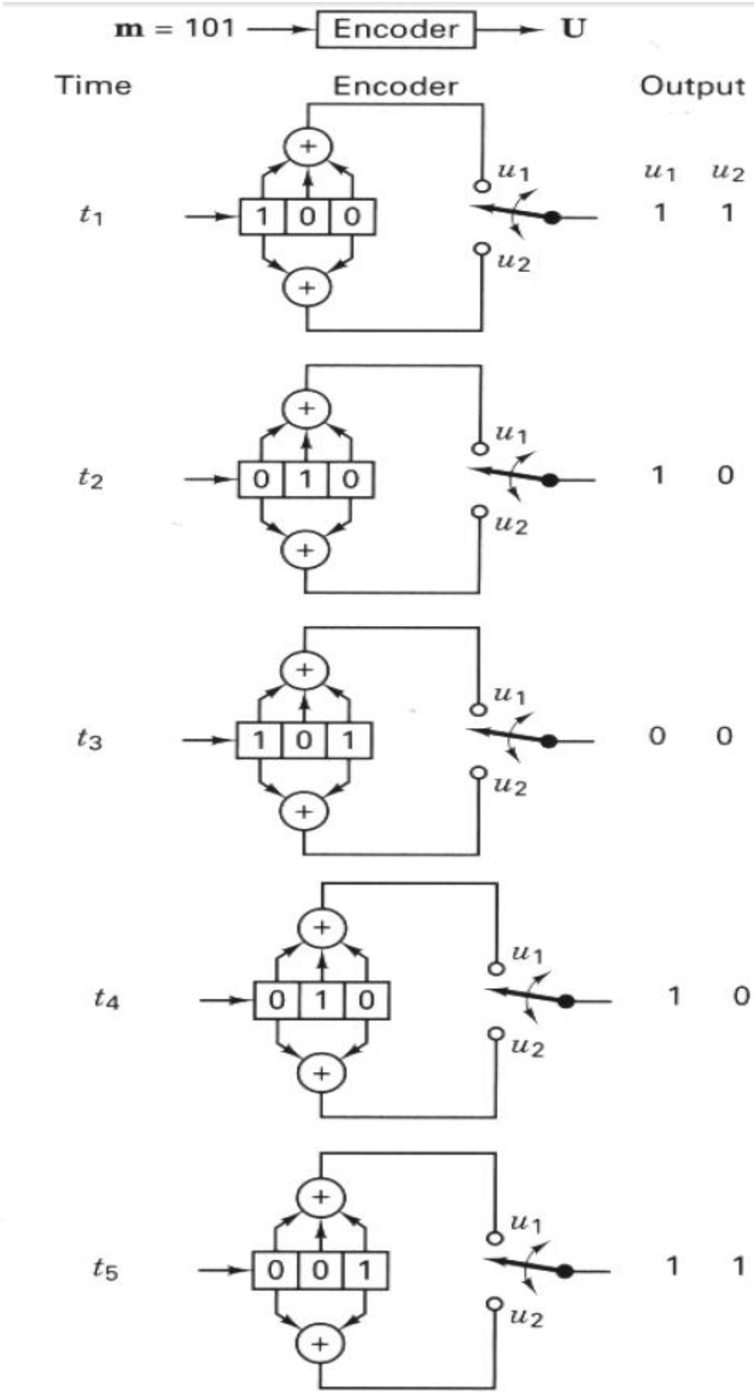


رمز الترميز الأول ينتج من جمع البتات الثلاثة من سجل الإزاحة الذي يستقبل بتات الرسالة، ونمثله بالشعاع $g_1=111$، أما رمز الترميز الثاني فينتج من جمع البتين الأول والثالث، ونمثله بالشعاع $g_2=101$.

لنفترض أن الرسالة $m=101$، في اللحظات الثلاث الأولى، نضطر لإضافة $K-1=3-1=2$ صفراً لنتأكد أن البت الأخير مر على جميع مواقع سجل الإزاحة.

إذا كانت الرسالة تتكون من بت 1 وحيد، نضيف لها $K-1=2$ صفراً، ونحسب الخرج، نسمي هذا الخرج الاستجابة النبضية. ولحساب الخرج الموافق للرسالة $m=101$ فإننا نراكب الاستجابة النبضية إلى الاستجابة النبضية المؤخرة (الموافقة للبت الثالث) فنحصل على الاستجابة المطلوبة كما يبينه الشكل التالي:

تدخل أول بت من اليسار فنملأ السجل بصفرين قبلها، وكلما دخلت بت نجري الإزاحة إلى اليمين، وهكذا...وفي كل مرة نحسب بتي الترميز.



يبين الشكل التالي حساب الاستجابة النبضية: النبضة مؤلفة من بت واحد تتحرك في سجل الإزاحة من اليسار إلى اليمين، ونحسب الخرج (الكلمات الفرعية المؤلفة من بتين) لكل حالة.

محتوى السجل	كلمات فرعية u_1	u_2
100	1	1
010	1	0
001	1	1

متتالية الدخل نبضة	1	0	0
متتالية الخرج: استجابة نبضية	11	10	11

وتراكب الاستجابات يعطي الاستجابة الكلية كما هو مبين:

Input **m**	Output				
1	11	10	11		
0		00	00	00	
1			11	10	11
الجمع بالمقاس ٢	11	10	00	10	11

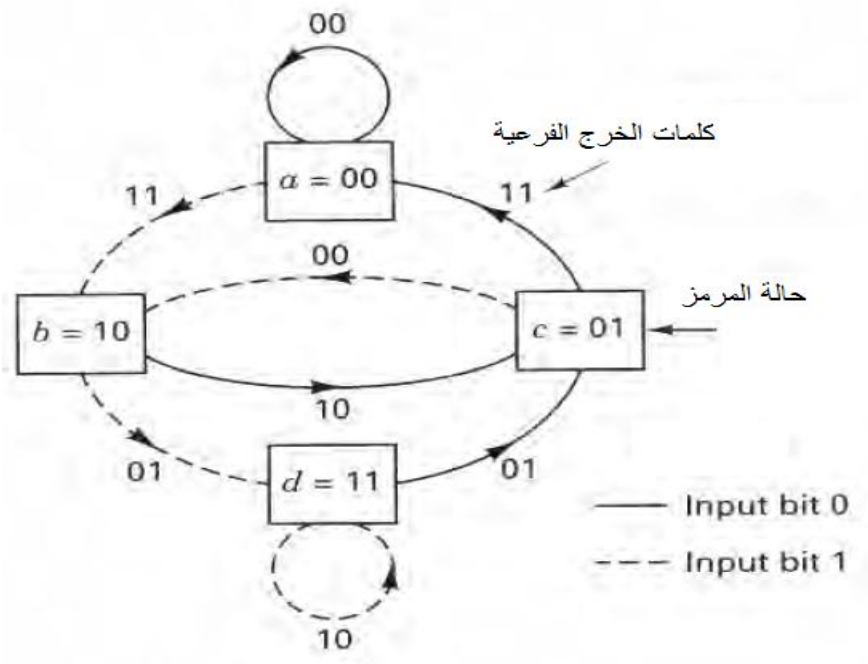
يمكن أيضاً إجراء حساب الخرج من رسالة الدخل باستعمال كثيرات الحدود للرسالة وللشعاعين g_1, g_2 . المخطط التالي يبين بوضوح هذه الحسابات:

$$g_1(X) = 1 + X + X^2$$
$$g_2(X) = 1 + X^2$$
$$m = 101 \ \Rightarrow m(X) = 1 + X^2$$
$$m(X).g_1(X) = (1+X^2).(1+X+X^2) = 1 + X + X^3 + X^4$$
$$\underline{m(X).g_2(X) = (1+X^2).(1+X^2) = 1 + X^4}$$
$$m(X).g_1(X) = (1+X^2).(1+X+X^2) = 1 + X \ + 0.X^2 + \quad X^3 + X^4$$
$$\underline{m(X).g_2(X) = (1+X^2).(1+X^2) \qquad = 1 + 0.X + 0.X^2 + 0.X^3 + X^4}$$
$$U(X) = (1,1) + (1,0)X + (0,0)X^2 + (1,0)X^3 + (1,1)X^4$$
$$U = 11 \ \ 1\,0 \ \ \ 0\,0 \ \ \ 1\,0 \ \ 11$$

2.2. مخططات الحالة state diagram

ننظر إلى عملية الترميز على أنها آلة منتهية الحالات، بحيث من أجل حالة معينة لسجل الإزاحة، حين يأتي دخل جديد يتحدد الخرج (الكلمات الفرعية). في المثال السابق، بما أن $K = 3$ يلزمنا $K-1$ بتاً (بتين فقط لهما 4 قيم ممكنة) ثم تأتي بت الدخل الجديدة (1 أو 0) فتتحدد الكلمتان (كلمات الخرج الفرعية) $u_1\ u_2$ كما في الشكل التالي:

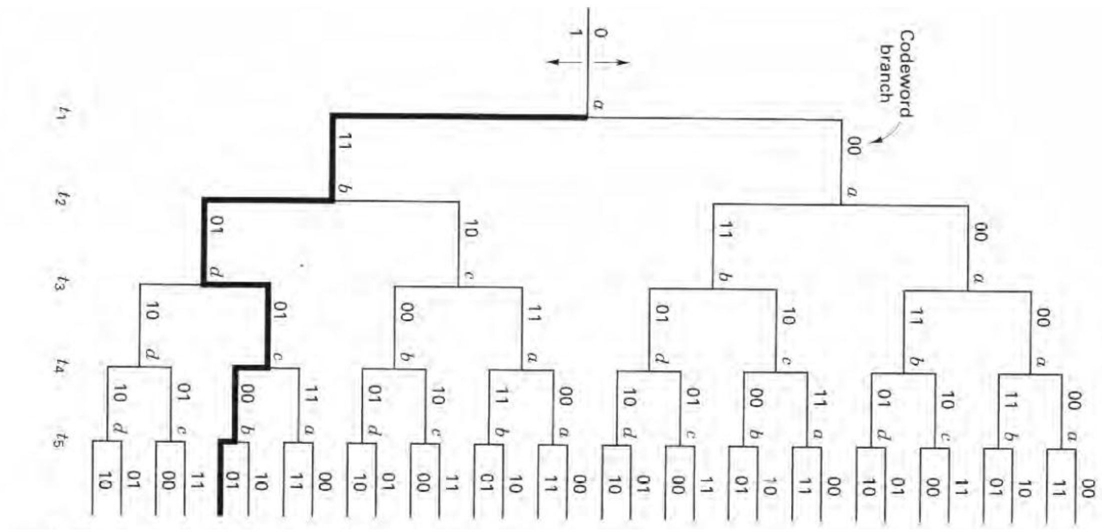
فإذا كان لدينا في السجل البتان 00 نكون في الحالة a. تاتي بت الدخل فإن كانت 0 فإن الكلمتين الفرعيتين كل منهم h 0 ونبقى في الحالة a. أما إذا كانت بت الدخل 1 كانت الكلمتان الفرعيتان كل منهما 1 في اللحظة التالية يكون البتات 10 في أقصى يمين سجل الإزاحة ونكون قد انتقلنا إلى الحالة b، وهكذا...



3.2. مخططات شجرية tree diagram

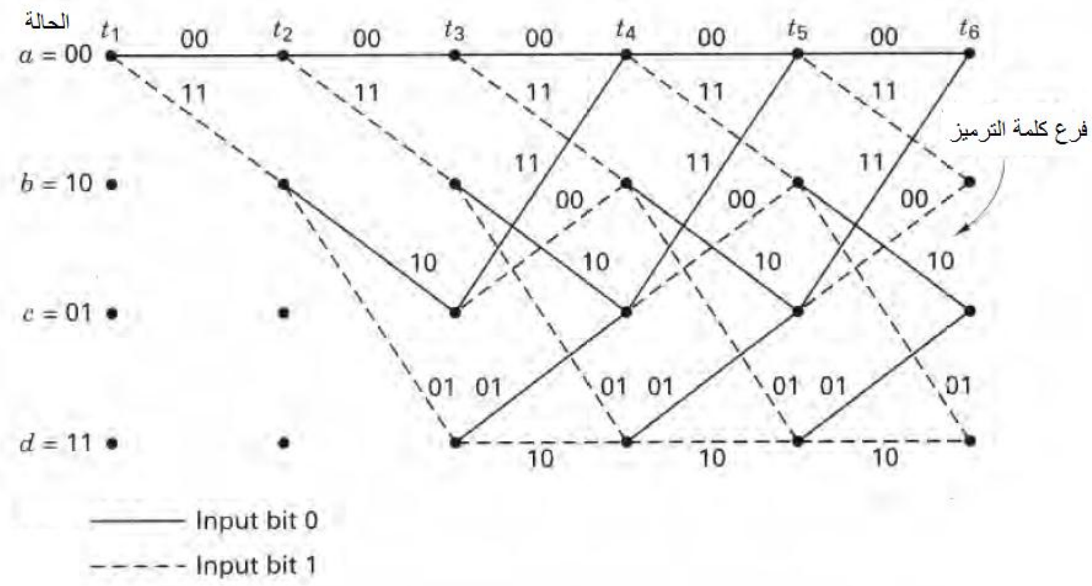
تشبه مخططات الحالة، ولكن يضاف لها البعد الزمني، عند دخول البت 0 إلى سجل الإزاحة نأخذ أحد فروع الشجرة وعند دخول البت 1 نأخذ الفرع بالاتجاه الآخر. وما يظهر على الفرع هو كلمات الخرج الفرعية. الحروف $a\ b\ c\ d$، تشير إلى نفس الحالات لمخططات الحالة.

مثلاً ننطلق من الحالة a، قدوم بت 0 يأخذنا إلى الفرع اليميني ونبقى في الحالة a وتكون كلمات الترميز 00 وقدوم بت 1 يأخذنا إلى الفرع اليساري إلى الحالة b وتكون كلمات الترميز 11 . في حالتنا بندأ بالحالة a وبتات الرسالة 101. يأتي اولا البت 1 ينقلنا إلى الحالة b، ثم البت 0 ينقلنا إلى الحالة d وهكذا..



4.2. مخططات تشابكية trellis diagram

إذا نظرنا إلى المخطط الشجري نجد تكراراً بعدد طول القيد K، لذلك يمكن استعمال المخطط الشبكي Trellis diagram لتمثيل الترميز، باختصار بعض فروع الشجرة المكررة، كما يلي:



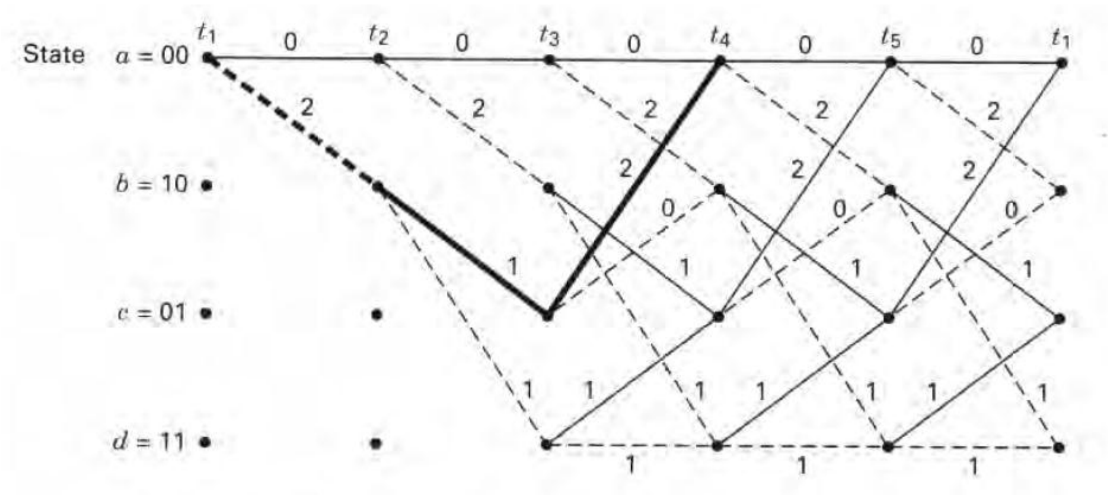
مخطط ترميز تشابكي للرماز السابق (معدل ترميز $1/2$، $K=3$).

لكشف الترميز التلفيفي، تستعمل مفاهيم رياضية مثل الأرجحية العظمى، فإذا اعتبرنا لجميع الرسائل الاحتمال نفسه، وبما أن الرسائل m يمكن أن تعطي أي خرج U، فإننا عند استقبال Z معينة موافقة لرسالة ما، فإن الرسالة المرسلة (فك الترميز) هي التي تعطي أعلى احتمال لإنتاج Z.

$$P\left(Z\left|U^{(m')}\right.\right)=\max P\left(Z\left|U^{(m)}\right.\right)$$
$$\text{over all} U^{(m)}$$

يمكن أيضاً استعمال خوارزمية فيتربي Viterbi لكشف الترميز التلفيفي. وهي خوارزمية تعتمد مبدأ الأرجحية العظمى ولكن بتبسيط الحسابات بالاستفادة من بنية الترميز التشابكية نفسها. وباعتماد المسار الأكثر أرجحية من بين المسارات. يمكن الرجوع إلى المرجع لتفصيل أكثر.

لدراسة كشف الخطأ وتصحيحه، يمكن النظر إلى الترميز التلفيفي على أنه مجموعة تراميز خطية، ولإيجاد المسافة الصغرى بين كلمات الترميز، نفترض دخلاً جميع بتاته صفرية (لأن رسائل الدخل متكافئة نجري الحساب على رسالة دخل صفرية)، المسارات المهمة هي التي تبدأ بـ 00 وتنتهي به، دون أن يتكرر وروده ضمنها، ولها طول معين. حين يحدث خطأ سنجد مسارات أقصر من المتوقع بحيث يستبعد المسار الأصلي. المسافة الصغرى في مجموعة المسارات التي تتباعد ثم تعود لتلتقي المسار الأصلي تسمى المسافة الحرة d_f. وهي توافق المسافة الصغرى في الترميز الكتلي. في مثالنا السابق هذه المسافة هي 5 (انظر الخط السميك في المخطط التشابكي التالي. مسافات هامنغ محسوبة بالرجوع إلى المخطط التشابكي السابق).



حيث تظهر الأرقام مسافة هامينغ بين معطيات الحالات المتتالية. السطر الأفقي العلوي ينطلق من الحالة $a=$"00" ويبقى الخرج 00 في هذه الحالة فمسافة هامنغ 0. السطر المائل من أقصى اليسار يصبح الخرج 11 ومسافة هامنغ عن 00 هي 2 وهكذا..

ويكون بإمكان الترميز تصحيح أخطاء عددها لا يتجاوز

$$t=\left\lfloor\frac{d_f-1}{2}\right\rfloor .$$

في الحقيقة، يجري التركيز على الترميز التلفيفي في جميع التطبيقات تقريباً لأنها أفضل أداء من الترميز الكتلي، وينفذ بتعقيد أقل، ويتطلب نسباً أقل من نسبة الإشارة إلى الضجيج. وهو يستعمل في الاتصالات الفضائية وغيرها.

3. ترميز Reed–Solomon R–S

ترامیز $R-S$ هي ترامیز دوارة غیر ثنائیة، تستعمل رموزاً من متتالیات ثنائیة من m بتاً، حیث m عدد صحیح موجب أكبر تماماً من 2. نعرف الترمیز $R-S\,(n,k)$ بحیث یكون عدد رموز المعطیات k رمزاً وعدد الرموز الكلیة n رمزاً. ویكون لدینا:

$$0<k<n<2^m+2$$
$$(n,k)=(2^m-1,2^m-1-2t)$$
$$n-k=2t$$

t هو عدد أخطاء الرموز التي یمكن أن یصححها الترمیز.

نعرّف ترمیز $R-S$ الموسع حین یكون $n=2^m \quad or \quad n=2^m+1$.

المسافة الصغرى بین كلمات الترمیز هي $d_{\min}=n-k+1$ ویستطیع الترمیز تصحیح أخطاء عددها أصغر أو یساوي: $t=\left\lfloor \frac{d_{\min}-1}{2} \right\rfloor=\left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor$

في الحقیقة، تتمیز الأرمزة الثنائیة عن الأرمزة غیر الثنائیة بالأداء. لنأخذ المثال التالي:

الرماز الثنائي $(n,k)=(7,3)$ یتضمن $2^3=8$ كلمة ترمیز من أصل $2^7=128$ كلمة ذات 7 بتات.

الرماز غیر الثنائي $(n,k)=(7,3)$ الذي یتضمن رموزاً على $m=3$ بتات كل منها یتضمن $2^{km}=2^9=512$ كلمة رماز من أصل $2^{nm}=2^{21}=2{,}097{,}152$ كلمة. وتقل النسبة بین كلمات الرماز والكلمات الكلیة بازدیاد عدد بتات الرموز m. وبذلك تزداد $d_{\min}$.

یتمیز الرماز R–S بأداء عال تجاه الضجیج الدفقي burst noise. لنأخذ على سبیل المثال الرماز $R-S\,(n,k)=(255,247)$ بحیث یتكون كل رمز من m=8 بتاً. ولأن $n-k=8=2t$، یستطیع هذا الرماز تصحیح أخطاء مكونة من 4 رموز أو 28 بتاً. فإذا ضرب ضجیج دفقي معطیات مدتها 25 بتاً، فهذا الضجیج یؤثر على 4 رموز وبالتالي یمكن تصحیحه. ولفهم ترمیز وفك ترمیز هذا الرماز علینا أن نراجع بعض المفاهیم المتعلقة بالحقول المنتهیة.

الحقول المنتهیة Finite Fields: وتسمى أیضاً حقول غالوا Galois Fields GF. لكل عدد أولي p یوجد حقل غالوا $GF(p)$، یضم p عنصراً، ویمكن توسعته لیضم p^m عنصراً ونشیر إلیه بالتدوین $GF(p^m)$ وتكون عناصر $GF(p)$ مجموعة جزئیة منه. تُستعمَل التوسعة $GF(2^m)$ في بناء ترمیز رید–سولومون، ویتضمن هذا الحقل بالإضافة إلى العنصرین $0,\ 1$ عنصراً α والقوى المتتالیة له؛ ولكي یكون الحقل مغلقاً بالنسبة للضرب یجب أن یتحقق: $\alpha^{(2^m-1)}+1=0$ أو بشكل مكافئ $\alpha^{(2^m-1)}=1=\alpha^0$. وبذلك تكون عناصر الحقل: $GF(2^m)=\{0,\alpha^0,\alpha^1,\alpha^2,...,\alpha^{(2^m-2)}\}$. أما بالنسبة لعملیة الجمع، فیجري تمثیل كل عنصر (غیر الصفر) من الحقل بكثیر حدود:

$$a_i(X)=\alpha^i=\sum_{j=0}^{m-1}a_{i,j}X^j$$

وتمثل عملية الجمع كما يلي:

$\alpha^i + \alpha^j = \sum_{k=0}^{m-1}(a_{i,k} + a_{j,k0})X^k$ والجمع هنا هو بالمقاس 2 (عملية xor).

نقول عن كثير حدود $f(X)$ من الدرجة m غير قابل للاختزال irreducible إنه أولي primitive إذا كان أصغر عدد صحيح n بحيث $f(X)$ يقسم X^n+1 هو $n=2^m-1$. على سبيل المثال إذا أخذنا كثير الحدود $f(X)=1+X+X^4$ يمكننا بسهولة أن نتأكد أن $f(X)$ يقسم $1+X^n=1+X^{(2^m-1)}=1+X^{15}$ وأنه لا يقسم أي كثير حدود من الشكل $1+X^n, 1\le n<15$، وبذلك يكون كثير الحدود $f(X)$ أولياً.

الجدول التالي يبين بعض كثيرات الحدود الأولية:

m	$f(X)$
3	$1+X+X^3$
4	$1+X+X^4$
5	$1+X^2+X^5$
6	$1+X+X^6$
7	$1+X^3+X^7$

لنأخذ كثير الحدود الأولي من الدرجة الثالثة $f(X)=1+X+X^3$ نلاحظ أنه في الحقل $GF(2)$ فإن $f(0)=f(1)=1$ أما في الحقل $GF(2^3)$ فسيكون لكثير الحدود ثلاثة جذور. لنفترض أن α هو أحد الجذور أي أن $f(\alpha)=1+\alpha+\alpha^3$. عملية الجمع هي xor. لنحسب القوى المتتالية لـ α:

$$\alpha^3 = 1+\alpha$$
$$\alpha^4 = \alpha+\alpha^2$$
$$\alpha^5 = \alpha^2+\alpha^3 = \alpha^2+1+\alpha$$
$$\alpha^6 = \alpha^3+\alpha+\alpha^2 = 1+\alpha^2$$
$$\alpha^7 = \alpha+\alpha^3 = 1 = \alpha^0$$

وبذلك تكون عناصر الحقل $GF(2^3)=GF(8)$ حيث $f(X)=1+X+X^3$ هي $\{0, \alpha^0, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6\}$ وهي مبينة فيما يلي:

0	0	0	0
α^0	1	0	0
α^1	0	1	0
α^2	0	0	1
α^3	1	1	0
α^4	0	1	1
α^5	1	1	1
α^6	1	0	1
α^7	1	0	$0=\alpha^0$

يبين الجدولان التاليان عمليات الجمع Addition والضرب Multiplication لهذا الحقل:

الجمع في الحقل $GF(2^3)=GF(8)$ حيث $f(X)=1+X+X^3$

$\oplus$	α^0	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6
α^0	0	α^3	α^6	α^1	α^5	α^4	α^2
α^1	α^3	0	α^4	α^0	α^2	α^6	α^5
α^2	α^6	α^4	0	α^5	α^1	α^3	α^0
α^3	α^1	α^0	α^5	0	α^6	α^2	α^4
α^4	α^5	α^2	α^1	α^6	0	α^0	α^3
α^5	α^4	α^6	α^3	α^2	α^0	0	α^1
α^6	α^2	α^5	α^0	α^4	α^3	α^1	0

الضرب في الحقل $GF(2^3)=GF(8)$ حيث $f(X)=1+X+X^3$

*	α^0	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6
α^0	α^0	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6
α^1	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6	α^0
α^2	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6	α^0	α^1
α^3	α^3	α^4	α^5	α^6	α^0	α^1	α^2
α^4	α^4	α^5	α^6	α^0	α^1	α^2	α^3
α^5	α^5	α^6	α^0	α^1	α^2	α^3	α^4
α^6	α^6	α^0	α^1	α^2	α^3	α^4	α^5

بالعودة إلى الترميز $R-S$. نذكر أنه معرف بثلاثة موسطات n, k, t و $m>2$ بحيث: $(n,k)=(2^m-1, 2^m-1-2t)$. ويكون $n-k=2t$ عدد رموز الندية parity. و t عدد الرموز التي يمكن تصحيحها. كثير الحدود المولد للرماز من الشكل:

$$g(X)=g_0+g_1X+g_2X^2+...+g_{2t-1}X^{2t-1}+X^{2t}$$

وبالتالي يكون له $2t$ جذراً. نشير إليهم $\alpha,\alpha^2,...,\alpha^{2t}$.

مثال:

نأخذ الرماز $(7,3)$ الذي يصحح رمزين $n-k=2t=4$. وله 4 جذور. وبالعودة إلى القوى المختلفة لـ α:

$$\alpha^3=1+\alpha$$
$$\alpha^4=\alpha+\alpha^2$$
$$\alpha^5=\alpha^2+\alpha^3=\alpha^2+1+\alpha$$
$$\alpha^6=\alpha^3+\alpha+\alpha^2=1+\alpha^2$$
$$\alpha^7=\alpha+\alpha^3=1=\alpha^0$$

نجد أن:

$$\begin{aligned}g(X)&=(X-\alpha)(X-\alpha^2)(X-\alpha^3)(X-\alpha^4)\\&=(X^2-(\alpha+\alpha^2)X+\alpha^3)(X^2-(\alpha^3+\alpha^4)X+\alpha^7)\\&=(X^2-\alpha^4X+\alpha^3)(X^2-\alpha^6X+\alpha^0)\\&=X^4-(\alpha^4+\alpha^6)X^3+(\alpha^3+\alpha^{10}+\alpha^0)X^2-(\alpha^4+\alpha^9)X+\alpha^3\\&=X^4-\alpha^3X^3+\alpha^0X^2-\alpha^1X+\alpha^3\end{aligned}$$

وبما ان الجمع بالمقاس 2 فإن -1 و 1 متطابقان، يكون لدينا:

$$g(X)=\alpha^3+\alpha^1X+\alpha^0X^2+\alpha^3X^3+\alpha^0X^4$$

ولترميز رسالة $m(X)$، نزيحها بمقدار $n-k$ إلى اليسار، ونضيف إليها رموز الندية $p(X)$ إلى اليمين فيكون لدينا: $p(X)=[X^{n-k}.m(X)] \mod g(X)$

وتنتج كلمة الترميز $U(X)$ الموافقة للرسالة $m(X)$ كما يلي:

$$U(X)=p(X)+X^{n-k}.m(X)$$

لنفترض أننا نود ترميز الرسالة:

$$m(X)\quad \underbrace{010}_{\alpha^1}\ \underbrace{110}_{\alpha^3}\ \underbrace{111}_{\alpha^5}$$

تُكتب على شكل كثير حدود: $\alpha^1+\alpha^3X+\alpha^5X^2$

ثم نضربها بـ $X^{n-k} = X^4$

فتصبح: $\alpha^1 X^4 + \alpha^3 X^5 + \alpha^5 X^6$

ثم نحسب باقي القيمة على $g(X)$ فنجد: $\alpha^3 + \alpha^1 X + \alpha^0 X^2 + \alpha^3 X^3 + X^4$

بحيث تجرى عملية الجمع والضرب بحسب الجداول المبينة سابقاً لهذا الحقل وهي أصعب من عمليات الحقول الثنائية، فيكون الناتج $p(X)$: $p(X) = \alpha^0 + \alpha^2 X + \alpha^4 X^2 + \alpha^6 X^3$

وتكون كلمة الترميز:

$$U(X) = \alpha^0 + \alpha^2 X + \alpha^4 X^2 + \alpha^6 X^3 + \alpha^1 X^4 + \alpha^3 X^5 + \alpha^5 X^6$$
$$= (100) + (001)X + (011)X^2 + (101)X^3 + (010)X^4 + (110)X^5 + (111)X^6$$

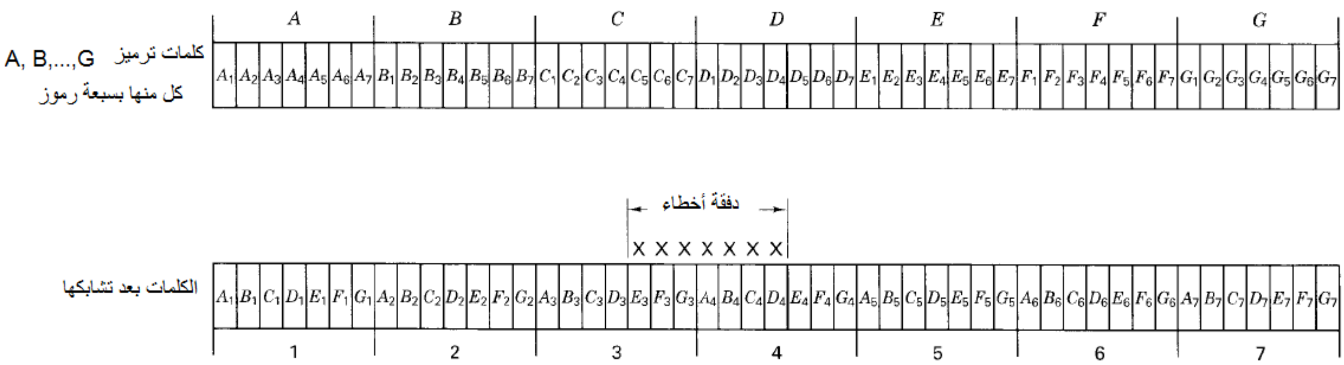
يمكن دراسة فك الترميز وكشف الخطأ وتصحيحه وحساب الأعراض. ولكنها خارج نطاق هذا المقرر. يمكن الاطلاع عليها من المرجع المرفق.

4. الترميز التشابكي Interleaving

في الترامیز السابقة، افترضنا أن القناة من دون ذاكرة، وأن الأخطاء تحدث على نحو عشوائي. بعض القنوات تعاني من تعدد مسارات الإشارات ضمنها multipath fading، حيث تصل الإشارة إلى المستقبل من عدة مسارات بأطوال مختلفة. مثل هذه القنوات نقول إنها قناة بذاكرة. تعاني قنوات الاتصالات النقالة كما يعاني الانتشار في طبقات الآينوسفير والتروبوسفير من هذه الظاهرة. وقد تصل الإشارات والنسخ المؤخرة عنها بصفحات متعاكسة فتنعدم النتيجة عند المستقبل. وتعاني قنوات أخرى من ضجيج رشقي أو نبضي مثل قنوات الهاتف، كل هذا ينتج ترابطاً إحصائياً بين الرموز المرسَلة المتتالية. لا تصلح الترامیز التي رأيناها سابقاً مع هذا النوع من القنوات (قنوات بذاكرة). لذلك، جرى تصميم أرمزة خاصة بهذه القنوات. ولكن المشكلة تكمن في صعوبة الحصول على نماذج دقيقة لإحصائيات القناة المتغيرة مع الزمن. إن استعمال التشابك هو إحدى التقنيات التي تتطلب فقط معرفة امتداد ذاكرة القناة.

تجري بعثرة معطيات الرموز في المرمز وإعادة ترتيبها في المستقبل. مايعني أن دفقات الأخطاء ستتوزع في الزمن ما يجعل القناة وكأنها من دون ذاكرة.

يبين الشكل التالي سبعة كلمات ترميز $A,B,\ldots,G$ كل منها بسبعة رموز. مثلاً كلمة الترميز A تتكون من الرموز $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$. السطر العلوي يبيّن إرسال الكلمات من دون تشابك. ولنفترض أن الترميز قادر على تصحيح رمز واحد. فإذا أتت دفقة خطأ يمكن أن تقضي على الكلمتين الثالثة والرابعة $C-D$. أما بوجود التشابك (السطر السفلي)، فستتمكن من تصحيح كل الرموز الخطأ، لأن رمزاً واحداً من كل كلمة ترميز أصابه الخطأ.



1.4. التشابك الكتلي

المشابك يأخذ الرموز من المرمز على شكل كتل، يطبق عليها تبديلاً ويرسلها. مفكك الترميز في المستقبل يجري التبديل المعاكس. عادة في المشبك نملأ مصفوفات $(M \times N)$ من كتل الرموز. نملؤها عموداً عموداً ونرسلها سطراً سطراً. مفكك الترميز يملأمصفوفته سطراً سطراً ويفك الترميز عموداً عموداً. كما في الشكل التالي:

$$N = 6$$

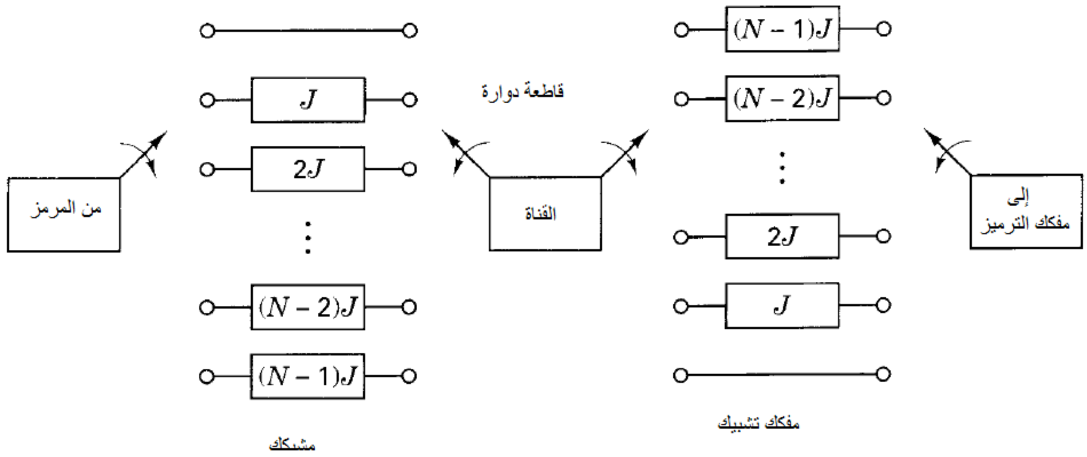
$$M = 4 \quad \begin{array}{|cccccc|} \hline 1 & 5 & 9 & 13 & 17 & 21 \\ 2 & 6 & 10 & 14 & 18 & 22 \\ 3 & 7 & 11 & 15 & 19 & 23 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 \\ \hline \end{array}$$

متتالية خرج المشابك : $1, 5, 9, 13, 17, 21, 2, 6, \cdots$

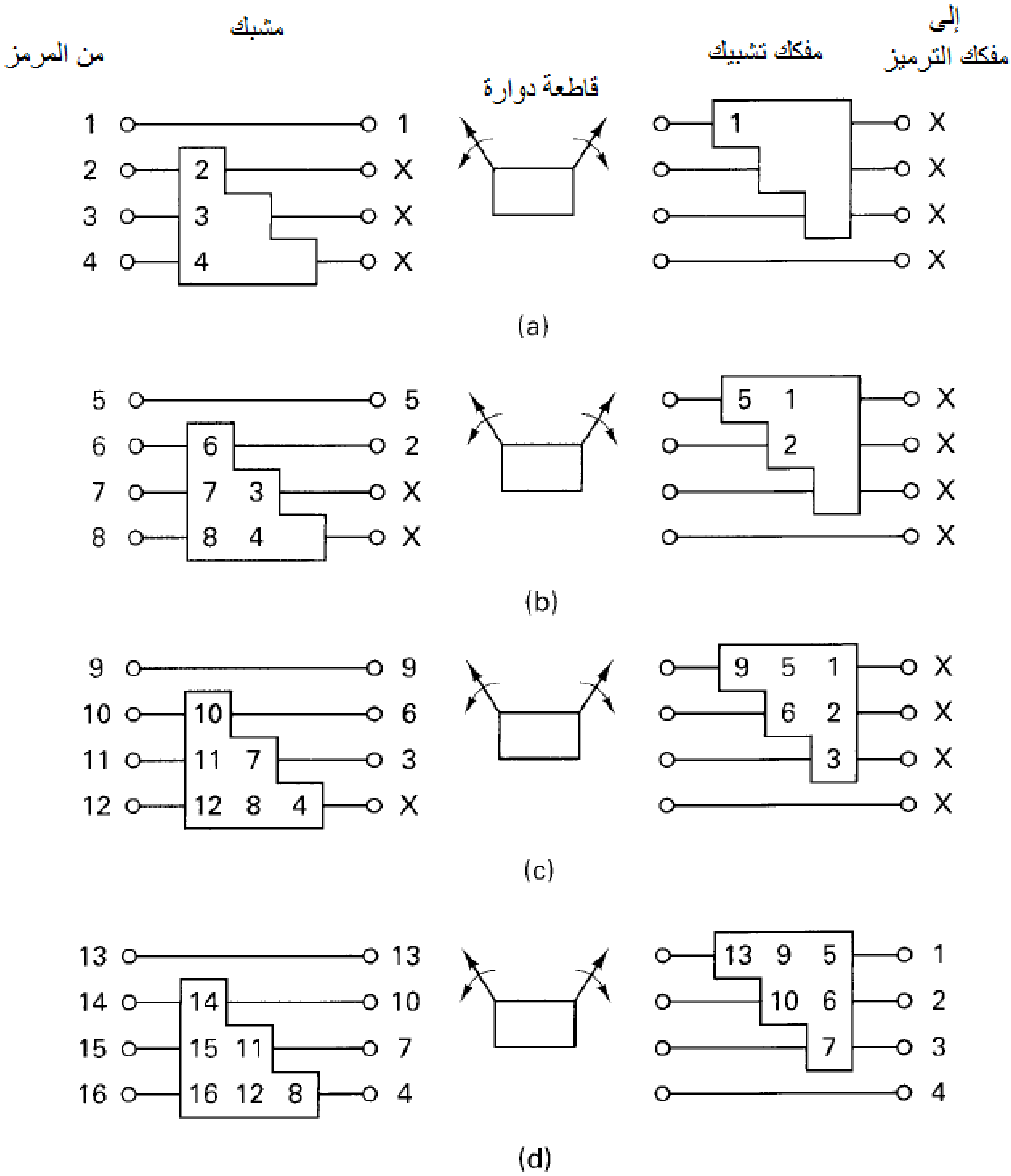
2.4. التشابك التلفيفي

هنا يجري ملء N سجل إزاحة بالرموز, ولتكن السجل 0 حتى السجل $N-1$. كل سجل يتضمن j رمزاً إضافياً عن سابقه. وثمة قاطعة تتحول من خرج سجل إلى آخر. السجل الصفري تخرج رموزه إلى القناة، ثم السجل الأول تزاح رموزه j رمزاً إلى اليمين ثم تخرج، والسجل الثاني بإزاحة $2J$ رمزاً وهكذا. ثم تعاد الكرة.

في المستقبل تجري العمليات المعاكسة بالترتيب المعاكس، كما هو مبين في الشكل التالي:

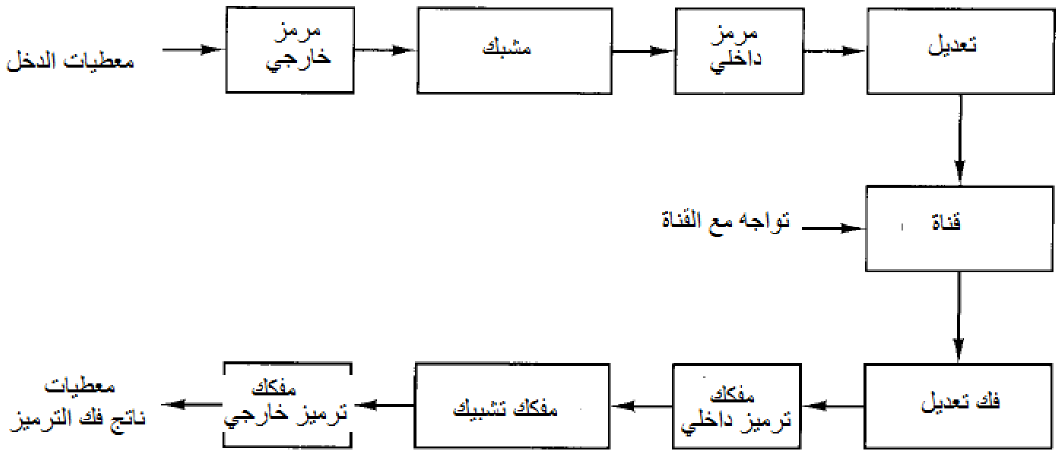


يبين المثال التالي أربع سجلات $j = 1$.



3.4. ضم الأرمزة

تستعمل بعض التطبيقات مستويين من الرماز، لتحسين أداء الرماز: رماز داخلي له تواجه مع المعدّل، هدفه تصحيح معظم أخطاء القناة، ورماز خارجي بمعدل رماز أعلى (وحشو أقل)، يخفض من احتمال الخطأ. يبين الشكل التالي توضع هذه الأرمزة:



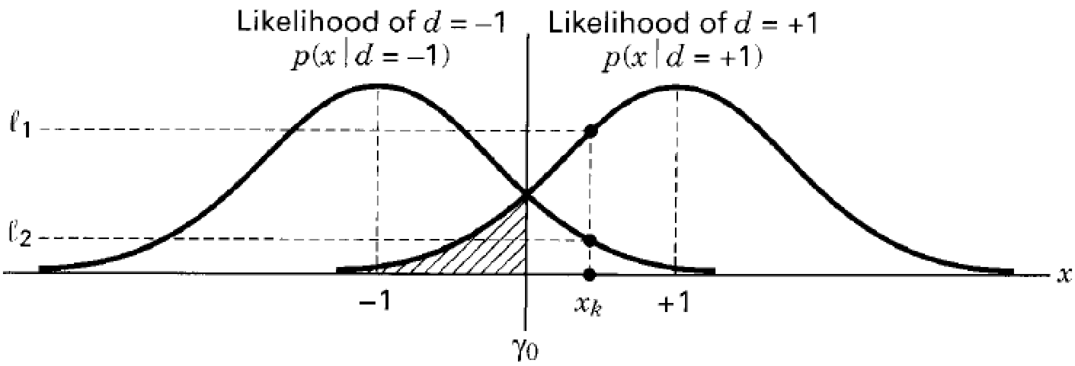
يبين الشكل السابق مثالاً هو الأشهر على استعمال ضم الأرمزة، يستعمل الرماز التلفيفي للترميز الداخلي و $R-S$ للترميز الخارجي وبينهما مشبّك interleaver. يحقق هذا النظام معدلات خطأ من رتبة 10^{-5} لنسبة استطاعة البت إلى الضجيج E_b/N_0 من رتبة $2dB$.

5. ترميز توربيني turbo codes

الترميز التوربيني هو تحسين لضم الأرمزة، يُضاف إليه خوارزمية تكرارية لفك الترميز. لذلك أُفرد له فقرة خاصة. يمكن الحصول على معدلات خطأ 10^{-5} مع نسبة استطاعة البت إلى الضجيج E_b / N_0 من رتبة $0.7dB$. يضاف إلى ذلك قرارات لينة بشأن فك الترميز. أي عوضاً عن أن يكون ناتج فك ترميز البت هو 0 أو 1 نقول أن احتمال أن يكون ناتج فك التعديل هو 0 هو p_0، واحتمال ان يكون ناتج فك التعديل 1 هو p_1. ونعرف بناء عليه الأرجحية العظمى اللاحقة Maximum a-posteriori likelihood MAP لحالة أن يكون مطال الإشارة $+1$ أو -1 ليمثل أحد البتات والبت الآخر على التتالي بالعلاقة:

$$p(d=+1|x) \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} p(d=-1|x)$$

حيث x قيمة المطال المقاسة، و d هي إشارة المعطيات التي يمكن أن تطابق القيمة $+1$ أو -1. H_1 فرضية $d=+1$ و H_1 فرضية $d=-1$. فإذا عرفنا عتبة معينة γ_0 تعرف لدينا مجالي أرجحية كما في الشكل التالي:



وباستعمال بايس للاحتمالات الشرطية يمكننا أن نكتب:

$$p(x|d=+1).p(d=+1) \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} p(x|d=-1).p(d=-1)$$

وهذه العلاقة تكافئ:

$$\frac{p(x|d=+1)}{p(x|d=-1)} \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{p(d=-1)}{p(d=+1)} \text{ or } \frac{p(x|d=+1)\,p(d=+1)}{p(x|d=-1)\,p(d=-1)} \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

$$\frac{p(x|d=+1)}{p(x|d=-1)} \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(d=-1)}{P(d=+1)} \text{ or } \frac{p(x|d=+1)\,P(d=+1)}{p(x|d=-1)\,P(d=-1)} \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

نسبة الأرجحية اللغرتمية تأخذ لغرتم العلاقة السابقة لتضعها على شكل مجموع حدين:

$$
\begin{aligned}
L(d \mid x) &= \log\left[\frac{p(d=+1 \mid x)}{p(d=-1 \mid x)}\right] = \log\left[\frac{p(x \mid d=+1)\,p(d=+1)}{p(x \mid d=-1)\,p(d=-1)}\right] \\
&= \log\left[\frac{p(x \mid d=+1)}{p(x \mid d=-1)\,p}\right] + \log\left[\frac{p(d=+1)}{p(d=-1)}\right] \\
&= \log(x \mid d) + L(d)
\end{aligned}
$$

غالباً ما يُشار إلى العلاقة الأخيرة بالتدوين:

$$L'(\hat{d}) = L_c(x) + L(d)$$

حيث الحد الأول ناتج عن قياسات تجري على خرج القناة، والحد الثاني له علاقة باحتمالات الرموز.

مثال:

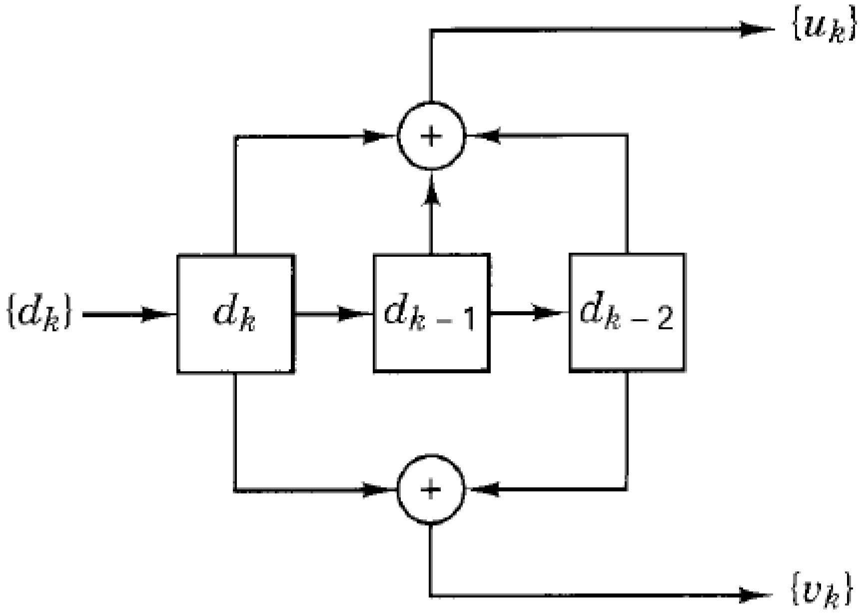
لنفترض لدينا رمازين تلفيفيين بمعدل $1/2$، مع طول قيد K وذاكرة $K-1$. في اللحظة k تأتي بت المعطيات d_k، ويكون الخرج هو البتان (u_k, v_k) بحيث:

$$u_k = \sum_{i=0}^{K-1} g_{1i} d_{k-i} \quad \text{mod } 2,\ \ g_{1i} = 0,1$$

$$v_k = \sum_{i=0}^{K-1} g_{2i} d_{k-i} \quad \text{mod } 2,\ \ g_{2i} = 0,1$$

يمكن النظر إلى u_k, v_k على أن كل منهما خرج مرشح باستجابة نبضية منتهية FIR، ونسمي هذه الأرمزة: أرمزة تلفيفية غير منتظمة nonsystematic convolutional codes NSC.

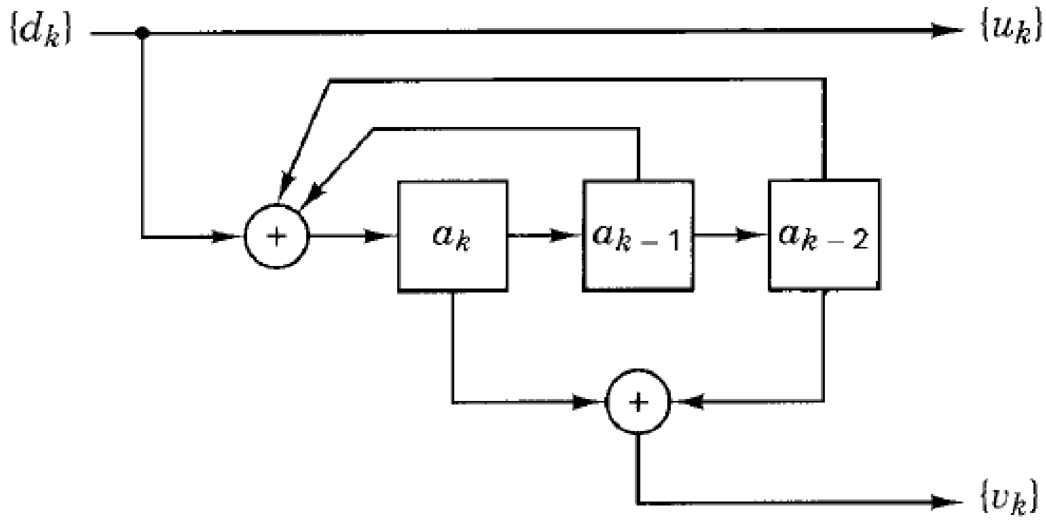
على سبيل المثال: إذا كان طول القيد K=3، وكان $G_1 = \{111\}, G_2 = \{101\}$. يبين الشكل التالي عملية الترميز في هذه الحالة:



جرى أيضاً تصميم أرمزة توربينية باستعمال مرشحات ذات استجابة نبضية غير منتهية IIR، وأنتجت أرمزة سميت أرمزة تلفيفية منتظمة عودية recursive systematic convolutional codes RSC. أداء هذه الأرمزة أفضل من النوع السابق NSC. يمكن استنتاج رماز RSC ½ من الرماز NSC في المثال بأخذ تغذية راجعة ووضع أحد الخرجين u_k أو v_k مساوياً d_k، لنحصل على العلاقة:

$$a_k = d_k + \sum_{i=1}^{K-1} g_i' a_{k-i} \quad \text{mod } 2,$$
$$g_i' = g_{1i} \text{ if } \; u_k = d_k, \quad g_i' = g_{2i} \text{ if } \; v_k = d_k,$$

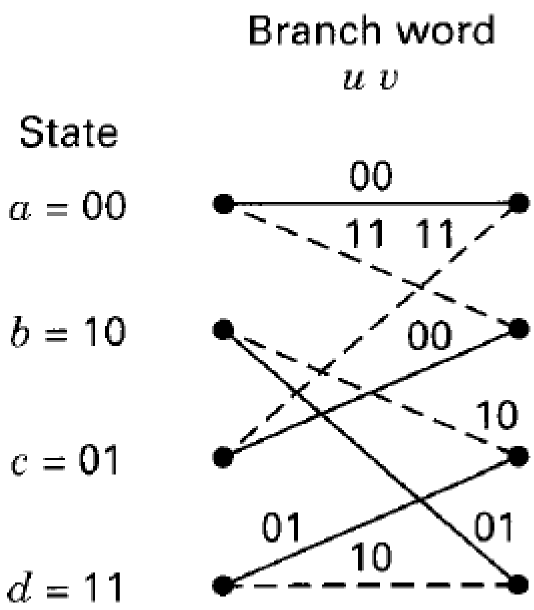
ويكون مخطط الترميز هو التالي:



الجدول التالي يبين تفصيل المخطط

اللحظة	بت الدخل	المرحلة الأولى	الحالة في اللحظة k		كلمات الرماز	
k	$d_k = u_k$	a_k	a_{k-1}	a_{k-2}	u_k	v_k
1	1	1	0	0	1	1
2	1	0	1	0	1	0
3	1	0	0	1	1	1
4	0	0	0	0	0	0
5			0	0		

وبالعودة إلى البنية الشبكية Trellis نرى أن بنية الشبكة لهذا الرماز هي التالية:



والجدول التالي يبين تفصيل الحالات لهذه البنية:

بت الدخل	البت الحالية	الحالة الابتدائية		كلمات الرماز		الحالة النهائية	
$d_k = u_k$	a_k	a_{k-1}	a_{k-2}	u_k	v_k	a_k	a_{k-1}
	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	0
	0	1	1	0	1	0	1
	1	0	0	1	1	1	0
	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	0	0
	1	1	1	1	0	1	1

يمكن اعتماد تشكيلات أخرى تتضمن أكثر من ترميز وتعطي أداء أفضل بالنسبة لمعدل الخطأ.

6. أداء نظم الاتصالات الرقمية

حين يجري تصميم نظام اتصالات رقمي، يمكن أن يهدف المصمم إلى تحقيق أحد أو معظم الأمور التالية:

1. جعل معدل البت R أعظمياً.
2. جعل معدل خطأ البت P_B أصغرياً.
3. جعل الاستطاعة أو نسبة طاقة البت إلى الكثافة الطيفية لاستطاعة الضجيج E_b / N_0 صغرى.
4. جعل عرض حزمة النظام أصغرياً.
5. جعل استعمال النظام أعظمياً (يعطي خدمات موثوقة إلى أكبر عدد من المستخدمين بأصغر تأخير وأكبر ممانعة للتداخل).
6. جعل تعقيد النظام وحساباته وتكلفته أصغرية.

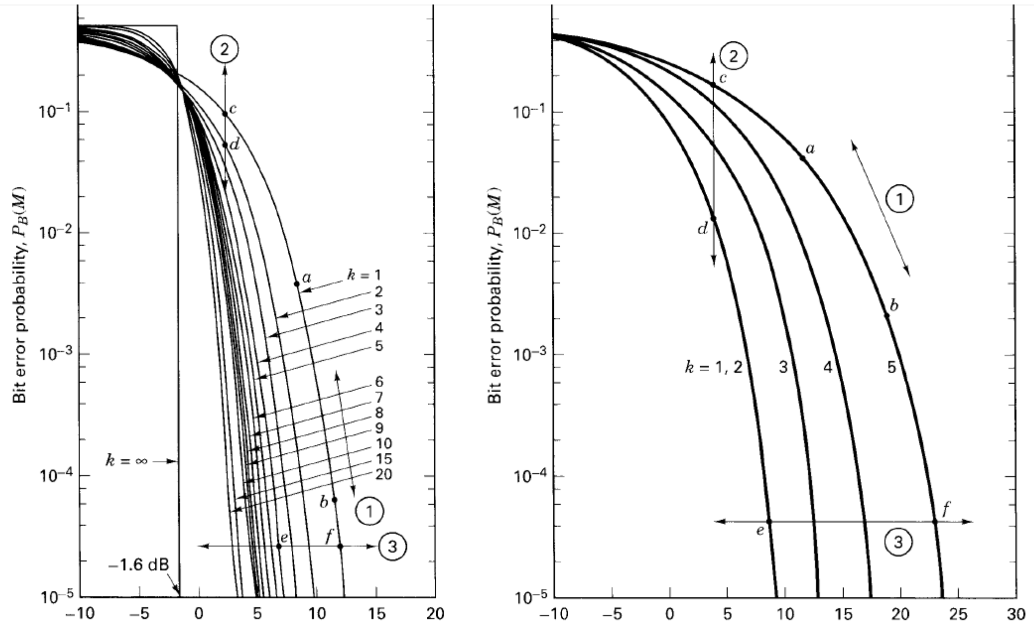
وقد يرغب المصمم بتحقيق جميع الأهداف السابقة. ولكن، يتعارض الهدفان 1 و2 مع الهدفين 3 و4. إضافة إلى ذلك، ثمة قيود نظرية لا يمكن تجاوزها:

- متطلبات عرض الحزمة الأصغر لنيكوست.
- حدود شانون لسعة القناة بناء على نظرية شانون–هارتلي.
- النواظم الحكومية (مثل تحصيص الترددات).
- الحدود التقانية (مثل العناصر الإلكترونية وغيرها).
- متطلبات أخرى (مثل مدارات السواتل).

يمكن في أحسن الحالات النظر إلى بعض المقايضات بين التعديل والترميز على أنه تغيير نقطة عمل في مستوي احتمال الخطأ أو مستوي فعالية عرض الحزمة أو كليهما. نبين هذه المفاهيم في الفقرة التالية.

1.6. مستوي احتمال الخطأ

سبق وأن رأينا في الفصل الخامس كيف تتأثر احتمال الخطأ بدلالة E_b / N_0 بالديسيبل. نعيد رسم النتائج هنا في الشكل التالي. إلى اليمين من أجل إشارات رموز متعامدة لعدد مختلف من الإشارات مثل FSK المتعدد، وإلى اليسار من أجل إشارات رموز بصفحات متعددة MPSK بدلالة عدد الصفحات.



يمكن النظر إلى النقل بين النقطتين ab على الخط 1 على أنه مقايضة بين P_B و E_b / N_0 مع W ثابت. وإلى النقل بين cd على الخط 2 كمقايضة بين $P_B\ W$ مع E_b / N_0 ثابتة. وأخيراً النقل بين النقطتين ef على الخط 3 كمقايضة بين W و E_b / N_0 مع P_B ثابت.

2.6. عرض الحزمة الأصغر لنكوست

بيّن نكوست أن عرض الحزمة الأصغر الذي يتطلبه النقل في الحزمة القاعدية لـ R_sرمزاً في الثانية من دون تداخل رموز ISI هو $R_s / 2$ هرتز. عملياً عرض الحزمة المطلوب أوسع بـ 10% إلى 40% فتنخفض النسبة من $2\, symbols / s / Hz$ إلى $1.4 - 1.8\ symbols / s / Hz$. في حالة MPSK يكون عدد البتات في الرمز الواحد $k = \log_2 M$ ويكون عدد البتات في الثانية $R = R_s k$ وبذلك تزيد فعالية عرض الحزمة.

3.6. نظرية سعة القناة لشانون–هارتلي

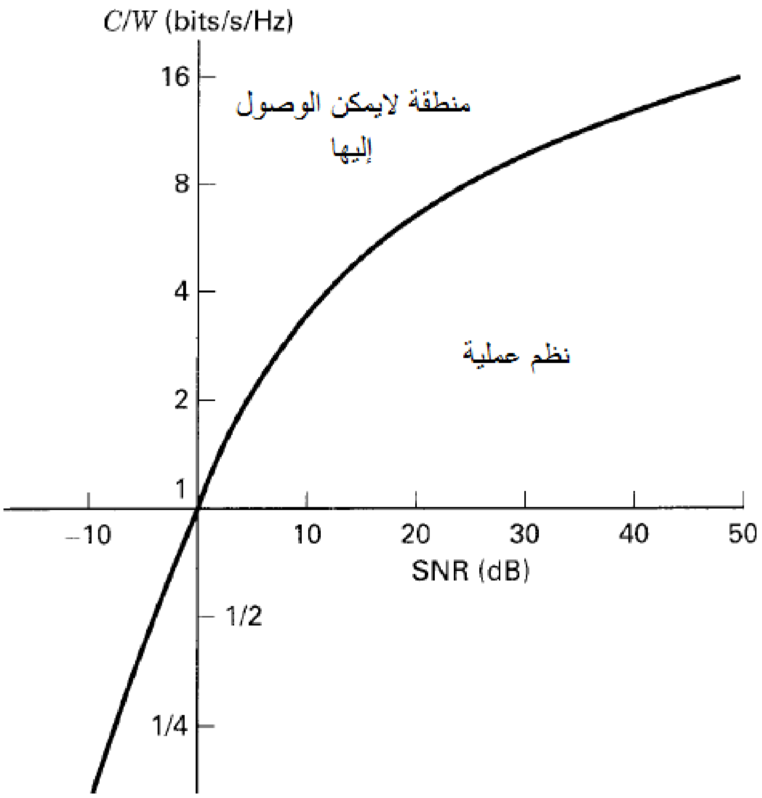
سيق وبيّنا أن سعة القناة C حين يضاف عليها ضجيج أبيض غاوسي جمعي تتبع إلى استطاعة الإشارة S واستطاعة الضجيج N وعرض الحزمة W بالعلاقة:

$$C = W.\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$$

فإذا كانت الكثافة الطيفية لاستطاعة الضجيج هو N_0 كانت استطاعة الضجيج $N = W.N_0$. وبإعادة ترتيب العلاقة نجد أن:

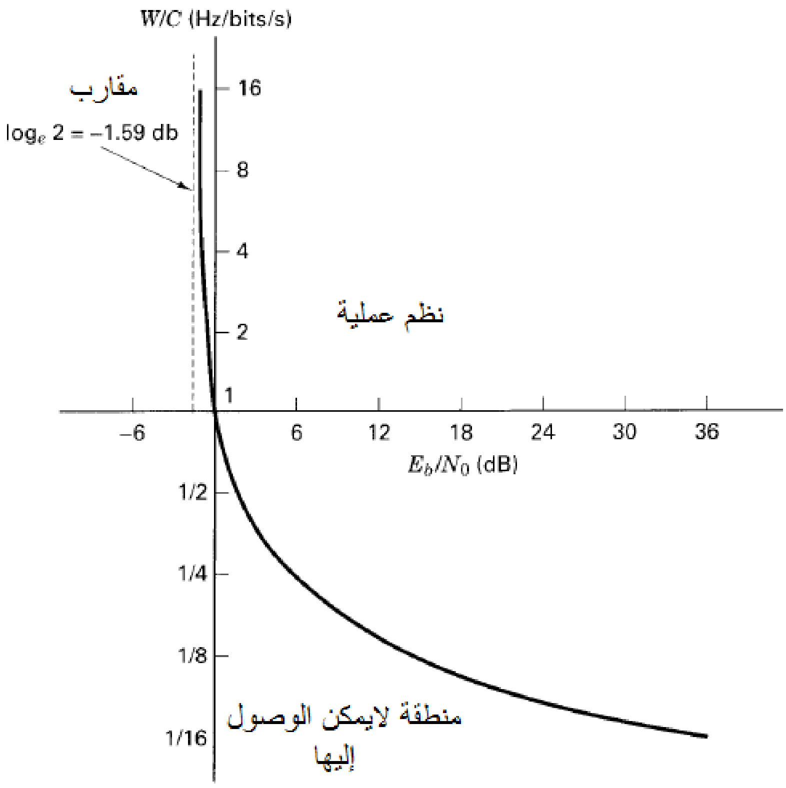
$$\frac{C}{W} = .\log_2\left(1+\frac{S}{N_0 W}\right)$$

الشكل التالي يبين منحني هذه العلاقة ويبين الحدود النظرية للنظم العملية.



4.6. مستوي فعالية عرض الحزمة

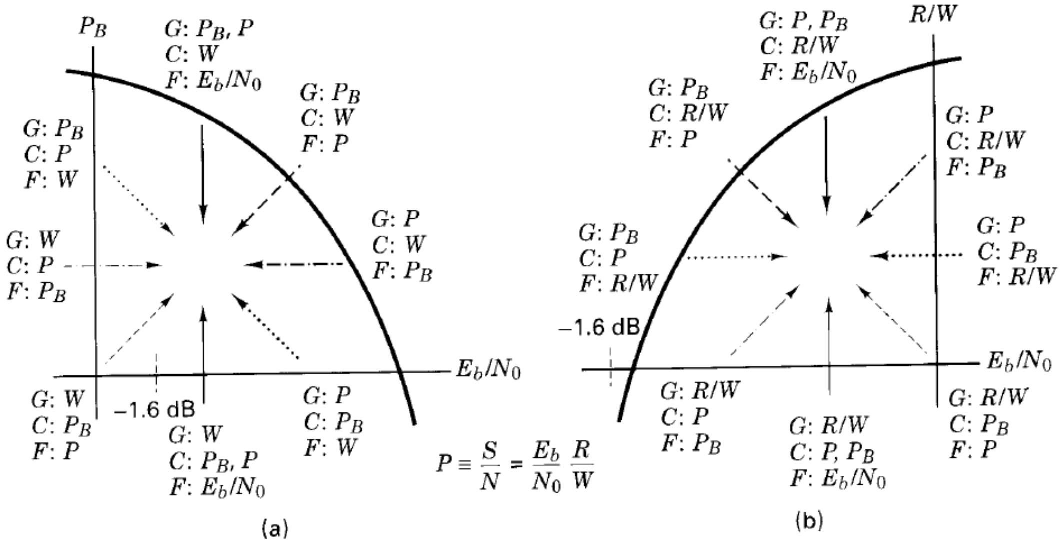
من علاقة سعة القناة السابقة يمكننا رسم علاقة عرض الحزمة W من أجل سعة قناة ثابتة بدلالة E_b/N_0 كما يلي:



الحالة المثالية حين يكون $R=C$. عملياً نبعد حوالي $10\,dB$ عن هذا الحد، وبسبب وجود الركبة في المنحني نرى أنه لخفض عرض الحزمة أو لخفض استطاعة الإشارة علينا أن نزيد بالموسط الآخر. على سبيل المثال، لنفترض أن نظاماً مثالياً له $E_b/N_0 = 1.8\,dB$ وعرض حزمة $0.5/Hz/bits/s$. على هذا النظام أن يزيد E_b/N_0 بمقدار $20\,dB$ ليقلل عرض الحزمة بمقدار $0.1/Hz/bits/s$.

5.6. المقايضة بين التعديل والترميز

من كل الفقرات السابقة يمكننا رسم مستوي احتمال الخطأ ومستوي فعالية الطيف ثم نرسم عليهما المقايضات اللازمة. ونستعمل التدوينات المعتمدة لعرض الحزمة W واحتمال الخطأ P_B وفعالية الطيف R/W واستطاعة الإشارة P. وبحيث تشير الحروف G إلى كسب و C إلى تكلفة و F إلى ثابت (لا يتغير). فنحصل على النتائج التالية التي تبين موضع نظامنا الذي نود تصميمه بحسب ما يتاح لنا من موسطات يمكن تغييرها أو قيود يجب احترامها.



في هذا الشكل (a) يمثل مستوي احتمال الخطأ و (b) يمثل مستوي فعالية الطيف.

أخيراً: جرى في هذا الفصل من المقرر عرض المفاهيم الأساسية والتقنيات المستعملة في الاتصالات الرقمية المتقدمة. وعادة يفرد مقرر مستقل لتغطية هذه المفاهيم. نرجو أن نكون قد قدمنا ما يكفي للتعمق لاحقاً بهذه المفاهيم إن تطلب الأمر في المستقبل.

تمارين محلولة

1. قناة هاتفية عرض حزمتها 3kHz، تتمذج بقناة ذات ضجيج ألبض جمعي. ماسعة القناة حين تكون نسبة الإشارة إلى الضجيج 30dB؟ وماهي نسبة الإشارة إلى الضجيج الصغرى اللازمة لمعدل بت 4800 بتاً في الثانية.

الحل:

$$C = W.\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right) = 3000\log_2(1+1000) \approx 30000\,bits/s$$

$$30dB \Leftrightarrow 1000$$

الطلب الثاني:

$$C = W.\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right) \Rightarrow \frac{S}{N} = 2^{C/W} - 1 = 2^{4800/3000} - 1 = 2.08 \Leftrightarrow 3.08\,dB$$

2. أثبت أن كثير الحدود $1+X^2+X^3$ أولي

الحل:

نتأكد أن كثير الحدود يقسم $1+X^{2^m-1} = 1+X^7$ ولا يقسم أي كثير حدود $1 \le n < 7 \quad ,1+X^n$.

3. في ترميز ريد–سولومون $(7,3)R-S$، ماعدد البتات التي يمكن أن يصححها؟ وما عدد بتات الرموز؟ وعدد الرموز الكلي.

الحل:

عدد البتات التي يصححها: $t = \frac{n-k}{2} = \frac{7-3}{2} = 2$

عدد بتات الرموز؟ $(n,k) = (7,3) = (2^m - 1,\ 2^m - 1 - 2t) \Rightarrow m = 3$.

لذلك فإن عدد الرموز $2^{km} = 2^9 = 512$.

تمارين للحل

1. أعد الطلب الثاني من التمرين المحلول $1-$ في حالة معدل البت 19200 bits/s.

2. تمرين $2-8$ من كتاب sklar) نود دراسة الحقل $GF(2^m),\ m=4$ نأخذ كثير الحدود الأولي $1+X+X^4$ والمطلوب:

- حدد عناصر الحقل $\{0,\alpha,\alpha^2,...,\alpha^{2^m-2}\}$ ثم أوجد جدول الجمع وجدول الضرب في هذا الحقل.
- أوجد كثير الحدود المولد للترميز $(31,27)R-S$ ثم اوجد ناتج ترميز الرسالة المكونة من 96 صفراً يتلوها 110010001111 باستعمال هذا الترميز.

مذاكرة

أجب بصح أو خطأ وصحح الخطأ

1. في الترميز الخطي الكتلي النظامي (n,k)، تتكون كلمة الرماز من $n-k$ بتاً لفحص الندية، يتلوها k بتاً هي بتات الرسالة
2. في الترميز الخطي الكتلي النظامي (n,k)، بتات فحص الندية هي ناتج الجداء التلفيفي لبتات الرسالة مع سلسلة اختبار
3. لا يحتاج الترميز التلفيفي لذاكرة
4. تأتي أهمية ترميز R-S والترميز التشابكي من أدائها الجيد في تصحيح الأخطاء الدفقية
5. تأتي أهمية الترميز التوربيني من قراراتها الصلبة في فك الترميز

1. 'Digital Communications: Fundamentals and Applications", 2nd edition, by, Bernard SKLAR, Pretice Hall P T R, 2001 ch 6-9
2. 'Digital and Analog Communication Systems', 8th edition, by Leon W. COUSH II, Pearson Education International, 2013 ch7

رقم السؤال	الإجابة
1. في الترميز الخطي الكتلي النظامي (n,k)، تتكون كلمة الرماز من $n-k$ بتاً لفحص الندية، يتلوها k بتاً هي بتات الرسالة.	صح
2. في الترميز الخطي الكتلي النظامي (n,k)، بتات فحص الندية هي ناتج الجداء التلفيفي لبتات الرسالة مع سلسلة اختبار	خطأ (تراكيب خطية من بتات الرسالة)
3. لا يحتاج الترميز التلفيفي لذاكرة	خطأ (تعتمد بتات الندية على بتات الرسالة وبتات سابقة)
4. تأتي أهمية ترميز R-S والترميز التشابكي من أدائها الجيد في تصحيح الأخطاء الدفقية	صح
5. تأتي أهمية الترميز التوربيني من قراراتها الصلبة في فك الترميز	خطأ (القرارات لينة تعطي احتمالات الكشف)