الجامعــة الافتراضيّــة السوريّــة

SYRIAN VIRTUAL UNIVERSITY

الجبر الرياضي

الدكتور رامز قدسية

ISSN: 2617-989X

Books

ISSN: 2617-989X

الجبر الرياضي

الدكتور رامز قدسية

من منشورات الجامعة الافتراضية السورية

الجمهورية العربية السورية 2018

Mathematical Algebra

Ramez Koudsia

Publications of the Syrian Virtual University (SVU)

Syrian Arab Republic, 2018

ISSN: 2617-989X

الفهرس

ISSN: 2617-989X

ISSN: 2617-989X

ISSN: 2617-989X

الفصل الأول: المجموعات والتوابع
Chapter 1: Sets and functions

الكلمات المفتاحية:

مجموعة، عنصر، مجموعة خالية، مجموعة كلية، مجموعة جزئية، حجم مجموعة، قدرة مجموعة، علاقة احتواء، علاقة انتماء، مخطط فن، تقاطع، اجتماع، متمم، فرق، فرق تناظري، خاصة تبديلية، خاصة تجميعية، خاصة توزيعية، ديمورغان، جداء ديكارتي، زوج مرتب، تابع، متباين، غامر، تقابل، تركيب التوابع، التابع العكسي، بيان تابع، تابع عددي.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على مفهوم المجموعة والعمليات الأساسية عليها من اجتماع وتقاطع وفرق ومتتم واستخدام مخططات فت لتمثيل المجموعات وفهمها. ومن ثم الانتقال إلى مفهوم التابع والذي هو عبارة عن علاقة بين مجموعتين، ودراسة الأنواع المختلفة للتوابع وتركيب التوابع وإيجاد التابع العكسي إن وجد وأخيراً الوصول إلى بيان تابع.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- مفهوم المجموعة وعناصرها
- العمليات على المجموعات (الاجتماع، التقاطع، الفرق، المتمم)
- مخططات فن وتطبيقاتها
- التوابع وأنواعها (متباين، غامر، متطابق)
- تركيب التوابع والتابع العكسي

1. المجموعات Sets

تعريف 1: نعرف المجموعة رياضياً بأنها أي تجمع من الكائنات (الأشياء) ذات التعريف المحدد والدقيق. كما ندعو الكائنات الموجودة في تلك المجموعة بعناصر المجموعة.

مثال 1: لتكن المجموعتان التاليتان:

a) مجموعة أحرف اللغة العربية.

b) مجموعة الحدائق الجميلة في فرنسة.

نعتبر a) مجموعة لأن عناصرها معروفة ومحددة. أما بالنسبة للمجموعة b) فلا نعتبرها مجموعة رياضية لأنها غير معرفة بشكل محدد ودقيق (الجمال مفهوم نسبي وليس دقيق).

رموز المجموعات وعناصرها

- نرمز عادة للمجموعات بأحرف كبيرة مثل: $A, B, X, \ldots$.
- نرمز عادة لعناصر المجموعة التي تتألف منها بأحرف صغيرة مثل: $a, c, x, \ldots$.
- نستخدم الأقواس المعترضة { } لتحديد عناصر المجموعة ويتم الفصل بين العناصر باستخدام الفواصل فيما بينها. على سبيل المثال نكتب المجموعة A التي عناصرها $-3, \pi, 0, 1$ كالتالي: $A = \{-3, \pi, 0, 1\}$.
- نستخدم رمز الانتماء $\in$ للدلالة على أن عنصر ما ينتمي إلى مجموعة. مثلاً $a \in B$، يدل على أن العنصر a ينتمي إلى المجموعة B. مثال العنصر $\pi \in A$ في المجموعة A السابقة $A = \{-3, \pi, 0, 1\}$.
- نستخدم رمز عدم الانتماء $\notin$ للدلالة على أن عنصر ما لا ينتمي إلى مجموعة. مثلاً $x \notin Y$، يدل على أن العنصر x لا ينتمي إلى المجموعة Y. مثال العنصر $5 \notin A$ في المجموعة A السابقة $A = \{-3, \pi, 0, 1\}$.
- نقول عن مجموعة أنها منتهية إذا كانت تحوي على عدد منته من العناصر، وفيما عدا ذلك نقول عنها أنها غير منتهية. على سبيل المثال مجموعة الأعداد الفردية الموجبة التي هي أقل من 12 $O = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$، هي مجموعة منتهية، بينما مجموعة الأعداد الفردية الموجبة هي مجموعة غير منتهية.

طرق تعريف المجموعات

1. طريقة التعريف بعبارة: في هذه الطريقة نكتفي بذكر جملة معينة يمكن عند قراءتها تحديد عناصر المجموعة فمثلاً نقول A هي مجموعة الأعداد الطبيعية. هذه الطريقة غير مناسبة للمجموعات التي تكون فيها العلاقة بين العناصر غير واضحة.

2. طريقة السرد أو حصر العناصر: وفيها نقوم بكتابة جميع عناصر المجموعة. على سبيل المثال، مجموعة الأحرف الصوتية V الموجودة في اللغة الإنكليزية هي: V = {a, e, i, o, u}.

من الطبيعي أن هذه الطريقة غير مناسبة إلا لمجموعات قليلة العناصر. فمثلاً لا يمكن سرد كافة عناصر مجموعة الأعداد الزوجية. من الملاحظ أيضاً أن ترتيب العناصر في المجموعة غير مهم فمثلاً المجموعة V السابقة هي نفسها أيضاً المجموعة V = {e, a, o, i, u}. كما أن تكرار العنصر لا يغير المجموعة فمثلاً المجموعة V السابقة هي نفسها أيضاً المجموعة V = {e, a, o, i, u, e).

مثال 2: مجموعة الأعداد الزوجية الصحيحة الموجبة التي هي أقل أو يساوي 100، بما أنه من الصعب سرد كل عناصر المجموعة يُكتفى بسرد بعض العناصر وحذف البقية واستبدالها ب ... وذلك عندما يكون النموذج العام للعناصر واضح E = { 2, 4, 6, …, 100}.

3. طريقة القاعدة المعينة: يُمكن استخدام طريقة أخرى في توصيف المجموعة تكمن في تمييز عناصر المجموعة بحيث يمكن التعبير عنها بقاعدة معينة. على سبيل المثال يمكن التعبير عن المجموعة E السابقة كما يلي: E = {x|x 100 عدد زوجي أصغر أو يساوي}، وتقرأ هي مجموعة العناصر x حيث x هو عدد زوجي أصغر أو يساوي 100. أو بشكل آخر: E = {x ∈ $\mathcal{Z}$ $x \leq 100$ و عدد زوجي x}، وتقرأ هي مجموعة العناصر x التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد الصحيحة حيث x هو عدد زوجي و x أصغر أو يساوي 100.

مجموعات الأعداد

هي مجموعات غير منتهية وتلعب دوراً هاماً في الرياضيات التقطيعية:

- مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
- مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathcal{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots\}$.
- مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $\mathcal{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
- مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة $\mathcal{Z}^- = \{-1, -2, -3, \ldots\}$.
- مجموعة الأعداد العادية $\mathcal{Q} = \{x \mid x = p/q,\ \ p,\ q \in \mathcal{Z},\ q \neq 0\}$
- مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathcal{R}$، فواصل كافة النقاط الواقعة على مستقيم.
- مجموعة الأعداد العقدية $\mathcal{C} = \{z \mid z = a + ib,\ \ a,\ b \in \mathcal{R},\ i^2 = -1\}$.

المجموعة الخالية والمجموعة الكلية

تعريف 2: المجموعة الخالية هي المجموعة التي لا تحوي أي عنصر ونرمز لها بالرمز $\varnothing$ أو { }. مثال على المجموعة الخالية مجموعة الأعداد الزوجية والفردية في آن واحد. أما المجموعة الكلية (الشاملة) هي المجموعة التي تحوي كافة عناصرها ويرمز لها بالرمز Ω. مثال على المجموعة الكلية في مجموعة الأعداد الصحيحة $\Omega = \mathcal{Z}$.

تساوي مجموعتين

تعريف 3: نقول عن مجموعتين أنهما متساويتين إذا وفقط إذا كان لهما نفس العناصر. ليكن لدينا المجموعتان A, B، نقول أنهما متساويتان ونكتب $A = B$، عندما يكون أي عنصر من المجموعة A هو عنصر من المجموعة B وأي عنصر من المجموعة B هو عنصر من المجموعة A.

في الحالة المغايرة نقول عن المجموعتين غير متساويتين، أي إذا وجد عنصر واحد على الأقل في إحدى المجموعتين وغير موجود في الأخرى.

أمثلة 3:

- $\{2, 3, 5, 7, 11\} = \{3, 2, 11, 7, 5\} = \{11, 7, 5, 3, 2\}$
- مجموعة الأعداد الطبيعية ومجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة هما مجموعتان متساويتان $\mathcal{N} = \mathcal{Z}^+$.

تمرين 1: هل المجموعتان التاليتان متساويتين: $A = \{0, 1\}$ $B = \{x | x \in \mathcal{Z}, x^2 - x = 0\}$

الحل: علينا تحديد عناصر المجموعة B، ويتم ذلك بحل المعادلة $x^2 - x = x(x - 1) = 0$ والتي حلها هما العددان إما $x = 0$ أو $x - 1 = 0$ أي $x = 1$. إذاً: $B = \{0, 1\}$ ومنه نستنتج أن $A = B$.

المجموعات الجزئية

تعريف 4: نقول عن مجموعة A أنها مجموعة جزئية من B إذا وفقط إذا كان كل عنصر من المجموعة A هو عنصر من المجموعة B. ونرمز للاحتواء بالرمز $\subset$ (احتواء حصري أي بدون مساواة) أو $\subseteq$ (محتوى أو يساوي). مثال: $A \subseteq B$.

ملاحظة 1: لبرهان أن المجموعة A هي مجموعة جزئية من B ($A \subseteq B$)، نبرهن أنه إذا كان العنصر x ينتمي إلى A فإنه ينتمي إلى B. ولبرهان أن المجموعة A غير محتواه في المجموعة B ($A \nsubseteq B$)، يكفي إيجاد عنصر واحد ينتمي إلى A ($x \in A$) وبحيث أنه لا ينتمي إلى B ($x \notin B$).

أمثلة 4:

- $\{2, 3, 5\} \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11\}$ ويمكن أن نكتب أيضاً $\{2, 3, 5\} \subset \{2, 3, 5, 7, 11\}$
- مجموعة الأعداد الفردية محتواه في مجموعة الأعداد الطبيعية.
- $\mathcal{N} \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$.

- المجموعة الخالية محتواه في أي مجموعة أخرى $\emptyset \subseteq S$.
- أي مجموعة هي مجموعة جزئية من نفسها $S \subseteq S$.
- أي مجموعة S تحوي على الأقل مجموعتين جزئيتين منها الخالية $\emptyset$ والمجموعة نفسها S.

ملاحظة 2: لبرهان مجموعتين متساويتان $A = B$، يكفي أن نبرهن أن $B \subseteq A$ وأن $A \subseteq B$.

حجم المجموعة

تعريف 5: لتكن مجموعة S، تحتوي على عدد منته من العناصر المختلفة مقداره n، حيث n عدد صحيح غير سالب، نقول عن المجموعة S أنها منتهية حجمها n. نرمز لحجم مجموعة بالرمز $n(S)$ أو $|S|$ أو $Card(S)$.

أمثلة 5:

- مجموعة الأحرف الصوتية الموجودة في اللغة الإنكليزية $V = \{a, e, i, o, u\}$ $|V| = 5$
- مجموعة الأعداد الفردية الصحيحة الموجبة التي هي أقل من 12 $O = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ $|O| = 6$
- مجموعة أحرف اللغة العربية L $|L| = 28$

قدرة المجموعة

تعريف 6: نسمي قدرة مجموعة S مجموعة المجموعات الجزئية التي تتألف منها، ونرمز إلى قدرة S بالرمز $\mathcal{P}(S)$.

مثال 6: ماهي قدرة المجموعة $\{0, 1, 2\}$؟

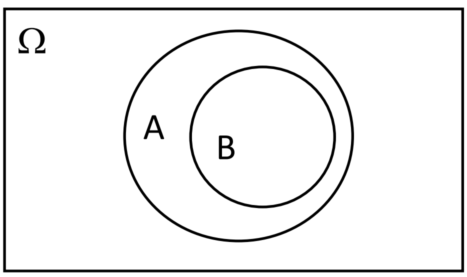
$$\mathcal{P}(\{0, 1, 2\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$$

فرضية 1: عدد المجموعات الجزئية لمجموعة عدد عناصرها n هو 2^n. على سبيل المثال المجموعة التي تحوي عنصرين يكون عدد مجموعاتها الجزئية $4 = 2^2$، والمجموعة التي تحوي 3 عناصر يكون عدد مجموعاتها الجزئية $8 = 2^3$.

مخططات فن

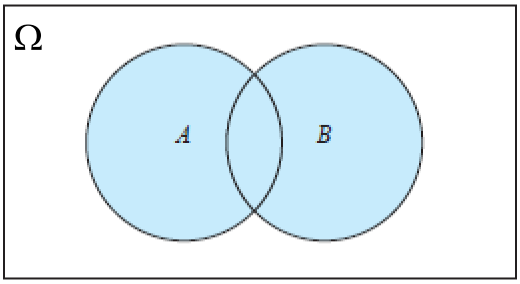
تستخدم مخططات فن لتسهيل التعامل مع المجموعات. يعبر داخل المستطيل على المجموعة الشاملة Ω، وداخل الدوائر تمثل المجموعات الأخرى.

نلاحظ في المخطط أن $B \subseteq A$



2. العمليات على المجموعات Set operations

1.2. اجتماع مجموعتين Union



ليكن لدينا المجموعتان A, B. نعرف اجتماع A و B ونرمز له بالرمز $A \cup B$، على أنه المجموعة التي تحوي العناصر من A أو من B أو من كليهما. ينتمي العنصر x إلى اجتماع A و B إذا وفقط إذا كان x ينتمي إلى A أو x ينتمي إلى B. أي أن:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

حيث الرمز $\vee$ يمثل "أو"

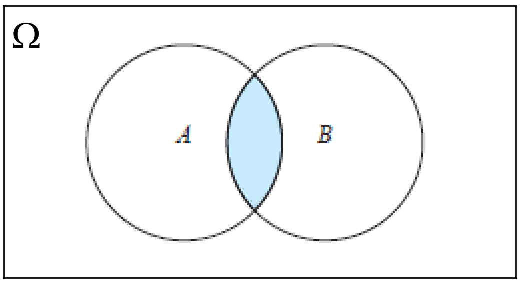
أمثلة 7:

- $\{1, 3, 5\} \cup \{3, 5, 7, 9\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
- $\mathcal{Z}^- \cup \mathcal{Z}^+ \cup \{0\} = \mathcal{Z}$

خصائص الاجتماع

1. $A \cup A = A$
2. $A \cup \varnothing = A$
3. $A \cup \Omega = \Omega$
4. $A \subseteq (A \cup B),\ \ B \subseteq (A \cup B)$
5. $A \cup B = B \cup A$ الخاصة التبديلية
6. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ الخاصة التجميعية

2-2.تقاطع مجموعتين Intersection



ليكن لدينا المجموعتان A, B. نعرف تقاطع A و B ونرمز له بالرمز $A \cap B$، على أنه المجموعة التي تحوي العناصر المشتركة بين A و B. ينتمي العنصر x إلى تقاطع A و B إذا وفقط إذا كان x ينتمي إلى A و x ينتمي إلى B. أي أن

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$، حيث الرمز $\wedge$ يمثل "و"

أمثلة 8:

- $\{1, 3, 5\} \cap \{3, 5, 7, 9\} = \{3, 5\}$
- A مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية، B مجموعة الأعداد الأولية. $A \cap B = \{2\}$

ISSN: 2617-989X

خصائص التقاطع

1. $A \cap A = A$
2. $A \cap \varnothing = \varnothing$
3. $A \cap \Omega = A$
4. $(A \cap B) \subseteq A, \ (A \cap B) \subseteq B$
5. $A \cap B = B \cap A$ الخاصة التبديلية
6. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ الخاصة التجميعية

تعريف 7: نسمي مجموعتين A و B على أنهما منفصلتين إذا لم يكن بينهما عناصر مشتركة. أي أن تقاطعهما يساوي المجموعة الخالية: $A \cap B = \varnothing$.

أمثلة 9:

- A مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية، B مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية. $A \cap B = \varnothing$، أي أن مجموعتي الأعداد الصحيحة الفردية والزوجية هما مجموعتان منفصلتان.
- $\mathcal{Z}^- \cap \mathcal{Z}^+ = \varnothing$، مجموعتي الأعداد الصحيحة الموجبة والسالبة هما مجموعتان منفصلتان.

من أجل حساب حجم (عدد عناصر) مجموعة اجتماع مجموعتين منتهيتين A و B علينا ملاحظة أن $|A| + |B|$ يعدّ كل عنصر موجود في A غير موجود في B أو موجود في B غير موجود في A مرة واحدة، بينما يعدّ كل عنصر موجود في كل من A و B مرتين. لذلك علينا طرح عدد عناصر التقاطع من $|A| + |B|$ كي نحصل على عدد عناصر الاجتماع. أي أن: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

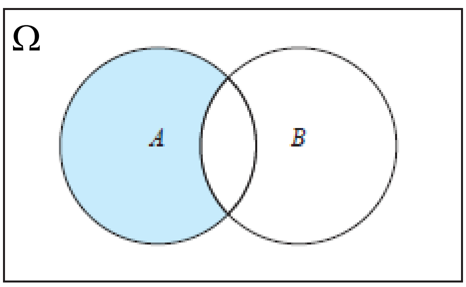
مثال 10:

ليكن $A = \{1, 3, 5\}$، $B = \{3, 5, 7, 9\}$، $A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$، $A \cap B = \{3, 5\}$

$|A| = 3$، $|B| = 4$، $|A \cup B| = 5$، $|A \cap B| = 2$

$= 3 + 4 - 2 = 5$ 5

3-2. فرق مجموعتين Difference



ليكن لدينا المجموعتان A, B. نعرف فرق A و B ونرمز له بالرمز $A \backslash B$، على أنه المجموعة التي تحوي العناصر الموجودة في A غير الموجودة في B. ينتمي العنصر x إلى فرق A و B إذا وفقط إذا كان x ينتمي إلى A و x لا ينتمي إلى B. أي أن

ISSN: 2617-989X

$A \backslash B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$

أمثلة 11:

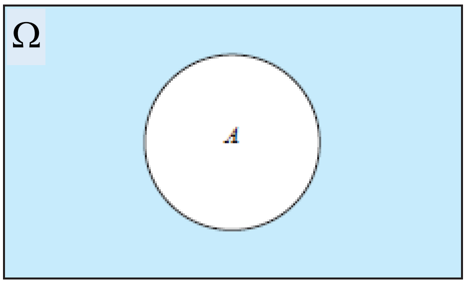
- $\{1, 3, 5, 7, 9\} \backslash \{1, 3, 5\} = \{7, 9\}$
- $\{1, 3, 5\} \backslash \{1, 3, 5, 7, 9\} = \varnothing$

خصائص الفرق

1. $A \backslash A = \varnothing$
2. $A \backslash \varnothing = A$ $\qquad$ $A \backslash \Omega = \varnothing$
3. $(A \backslash B) = B \backslash A \Leftrightarrow A = B$
4. $A \backslash B = A \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$
5. $A \backslash B = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq B$

2-4.متمم مجموعة Complement

لتكن Ω المجموعة الشاملة. متتم مجموعة A، ونرمز له بالرمز $\overline{A}$، هو متمم A بالنسبة ل Ω. لذلك فإن متتم المجموعة A هو $\Omega \backslash A$. ينتمي العنصر x إلى $\overline{A}$ إذا وفقط إذا x لا ينتمي إلى A. أي أن
$\overline{A} = \{x | x \notin A\}$



أمثلة 12:

- لتكن المجموعة V الأحرف الصوتية في اللغة الإنكليزية $V = \{a, e, i, o, u\}$ (حيث المجموعة الشاملة أحرف اللغة الإنكليزية). عندها $\overline{V} = \{b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, v, w, x, y, z\}$
- لتكن المجموعة A الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أكبر تماماً من 10 (حيث المجموعة الشاملة الأعداد الصحيحة الموجبة). عندها $\overline{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

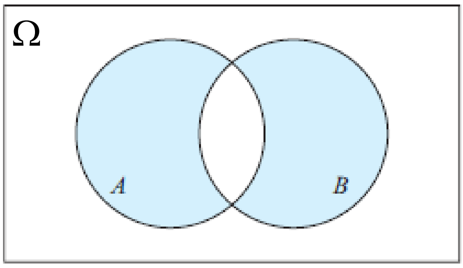
ملاحظة 3: يمكن البرهان على أن: $A \backslash B = A \cap \overline{B}$

خصائص المتمم

1. $\overline{A} \cup A = \Omega$
2. $\overline{A} \cap A = \varnothing$
3. $\overline{\varnothing} = \Omega,$ $\qquad$ $\overline{\Omega} = \varnothing$
4. $\overline{\overline{A}} = A$

5. $A \subseteq B \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$

2-5.الفرق التناظري بين مجموعتين Symmetric difference



ليكن لدينا المجموعتان A, B. نعرف الفرق التناظري بين A و B ونرمز له بالرمز أو $A \Delta B$، على أنه مجموعة العناصر الموجودة في A أو B ولكنها غير موجودة في العناصر المشتركة بين المجموعتين، أي بمعنى آخر العناصر الموجودة في اتحاد المجموعتين وفي نفس الوقت ليست موجودة في التقاطع.

ينتمي العنصر x إلى الفرق التناظري ل A و B إذا وفقط إذا: $A \Delta B = \{x \mid x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}$

أمثلة 13:

- لتكن المجموعتان $A = \{1, 3, 5\}$ و $B = \{3, 5, 7, 9\}$ فإن $A \Delta B = \{1, 7, 9\}$.
- ليكن لدينا المجموعتان $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{b, d ,e, f\}$ فإن $A \Delta B = \{a, c, e, f\}$.

خصائص الفرق التناظري

1. $A \Delta A = \varnothing$
2. $A \Delta \varnothing = A$ $\quad\quad A \Delta \Omega = \overline{A}$
3. $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$
4. $A \Delta B = B \Delta A$ الخاصة التبديلية
5. $A \Delta B = \varnothing \Leftrightarrow A = B$

2-6.خصائص أخرى للمجموعات

الخاصة التوزيعية للمجموعات

ليكن لدينا ثلاث مجموعات A, B, C، عندئذ يتحقق ما يلي:

- توزيع الاجتماع على التقاطع $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- توزيع التقاطع على الاجتماع $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cup C)$

خاصة الامتصاص للمجموعات

ليكن لدينا المجموعتان A, B، عندئذ يتحقق ما يلي:

- $A \cup (A \cap B) = A$
- $A \cap (A \cup B) = A$

ISSN: 2617-989X

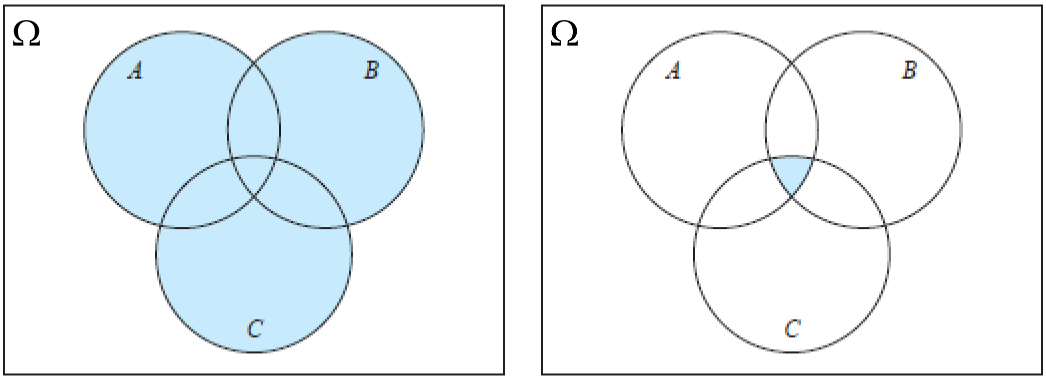
قانون ديمورغان

ليكن لدينا المجموعتان A, B، عندئذ يتحقق ما يلي:

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

تعميم الاجتماعات والتقاطعات

بما أن اجتماع وتقاطع المجموعات يخضع إلى الخاصة التوزيعية، بالتالي فإن المجموعتان $A \cup B \cup C$ و $A \cap B \cap C$ معرفتان تماماً. تحوي المجموعة $A \cup B \cup C$ العناصر الموجودة على الأقل في واحدة من المجموعات الثلاث A, B, C. أما المجموعة $A \cap B \cap C$ فإنها تحوي على العناصر الموجودة في كل المجموعات الثلاث A, B, C.



$A \cup B \cup C$ $\qquad$ $A \cap B \cap$

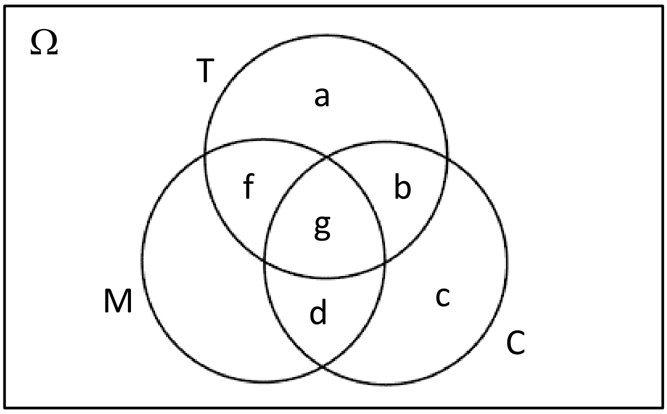
تمرين 2:

في أحد المعاهد 100 طالب عليهم أن يدرسوا على الأقل مادتين من المواد الثلاثة التالية: اتصالات T، رياضيات M أو معلوماتية C. 50 طالب منهم يدرس اتصالات، 65 طالباً يدرس رياضيات، و55 طالباً يدرس معلوماتية. 30 طالباً يدرس كل من الاتصالات والرياضيات، بينما 5 طلاب يدرسون رياضيات ومعلوماتية من دون اتصالات. 20 طالباً يدرسون المواد الثلاثة. ارسم مخطط فن ومن ثم احسب:

a. عدد الطلاب الذين يدرسون كل من اتصالات ومعلوماتية من دون الرياضيات.

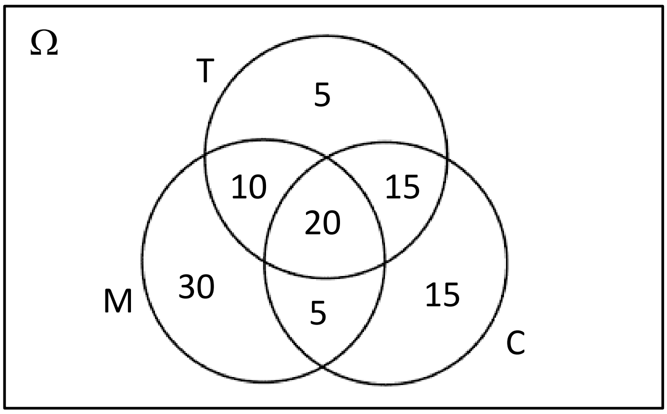
b. عدد الطلاب الذين يدرسون على الأقل مادتين من المواد الثلاثة.

الحل:



- من الواضح أن $g = 20$ لأنها تمثل الطلاب الذين يدرسون كافة المواد الثلاثة.
- 30 طالباً يدرس كل من الاتصالات والرياضيات، أي أن $f + g = 30$ وبالتالي فإن $f = 10$
- 5 طلاب يدرسون رياضيات ومعلوماتية من دون اتصالات، أي أن $d = 5$.
- 65 طالباً يدرس رياضيات، أي أن $e + d + f + g = 65$ وبالتالي فإن $e = 30$.
- 55 طالباً يدرس معلوماتية، أي أن $b + c + d + g = 55$ وبالتالي فإن $b + c = 30$ (1)
- 50 طالباً منهم يدرس اتصالات، أي أن $a + b + f + g = 50$ وبالتالي فإن $a + b = 20$ (2)
- العدد الكلي للطلاب هو 100، أي أن $a + b + c + d + e + f + g = 100$ وبالتالي $a + b + c = 35$ (3)

بتعويض (2) في المعادلة (3) نحصل على $c = 15$، من المعادلة (1) نحصل على $b = 15$، ومن المعادلة (2) نحصل على $a = 5$.



a. عدد الطلاب الذين يدرسون كل من الاتصالات والمعلوماتية من دون الرياضيات هو: $b = 15$.

b. عدد الطلاب الذين يدرسون على الأقل مادتين من المواد الثلاثة هو:

$b + d + f + g = 15 + 5 + 10 + 20 = 50$

2-7.الجداء الديكارتي Cartesian product

الأزواج المرتبة

تعريف 8: نعرف الزوج المرتب (a, b) على أنه يحوي مركبتين أو إحداثيتين: المركبة الأولى a والمركبة الثانية b.

يتساوى زوجان مرتبان إذا وفقط إذا تساوت مركبات الأول مع الثاني. أي $(a, b) \equiv (c, d)$، إذا وفقط إذا كان $a = c$ و $b = d$. وهكذا يكون $(a, b) \equiv (b, a)$، إذا وفقط إذا $a = b$.

ISSN: 2617-989X

تعريف 9 (الجداء الديكارتي):

لتكن A, B مجموعتان. الجداء الديكارتي لـ A وB، ونرمز له بالرمز $A \times B$، هو مجموعة كافة الأزواج المرتبة (a, b)، حيث $a \in A$ و $b \in B$. أي أن: $A \times B = \{(a, b) \mid a \; a \in A \wedge b \in B\}$.

مثال 14: لتكن $A = \{1, 2\}$ و $B = \{a, b, c\}$. أوجد $A \times B$ و $B \times A$

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

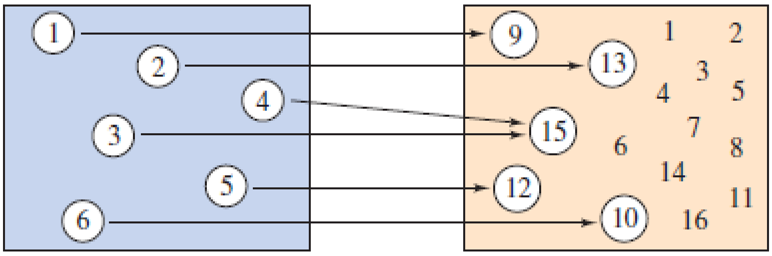
ملاحظة 4: نستخدم الرمز A^2 للدلالة على الجداء الديكارتي $A \times A$ للمجموعة A مع نفسها. لتكن على سبيل المثال $A = \{1, 2\}$، فإن: $A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.

3- التوابع Functions

تعريف 10 (تعريف التابع):

التابع f من مجموعة غير خالية A إلى مجموعة غير خالية B عبارة عن علاقة تربط كل عنصر x من A بعنصر واحد على الأكثر y من B بحيث $(x, y) \in f$.

بدلاً من كتابة $(x, y) \in f$، سيكون الرمز المستخدم $y = f(x)$ أو $f : A \to B$ حيث $y = f(x) \longmapsto x$. نسمي القيمة $y = f(x)$ صورة x وفق التابع f، كما نسمي المجموعة A منطلق التابع f، والمجموعة B مستقره.



مجموعة المنطلق A   مجموعة المستقر B

أمثلة 15:

- العلاقة التي تربط المجموعة $A = \{1, 2, 3, 4\}$ إلى المجموعة $B = \{1, 2, 3, 4\}$، حيث العلاقة هي الأزواج المرتبة $\{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 1)\}$ تمثل تابعاً لأنه من أجل كل عنصر يمثل المركّبة الأولى للأزواج المرتبة يوجد عنصر واحد هو المركّبة الثانية.
- العلاقة $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ حيث $f(x) = 2x^2 - 4$ تمثل تابعاً لأنه من أجل كل قيمة $x \in \mathcal{R}$ (من المنطلق) يوجد قيمة واحدة من المستقر $y = 2x^2 - 4 \in \mathcal{R}$.

- ليكن لدينا المجموعتان: المدن V وهي مجموعة مدن العالم، والبلدان P وهي مجموعة بلدان العالم والعلاقة f من المدن إلى البلدان $f : V \to P$ بحيث $f(x)$ هو البلد الذي توجد فيه المدينة x. العلاقة f هي تابع لأن كل عنصر x من المدن له علاقة مع عنصر واحد من البلدان. على سبيل المثال:

f(Damascus) = Syria f(Lattakia) = Syria

f(Paris) = France f(Barcelona) = Spain

- نفس المجموعتان السابقتان ولكن العلاقة g من البلدان إلى المدن $g : P \longmapsto V$ بحيث $g(x)$ هو مدينة من البلد x. العلاقة g ليست تابع لأنه مثلاً x = Syria لها علاقة مع أكثر من مدينة واحدة.

تعريف 11: مجال التابع f أو مجموعة تعريفه هو مجموعة العناصر الموجودة في مجموعة المنطلق والتي لها صورة بواسطة التابع f ويرمز لها بالرمز D_f أو اختصاراً D وهي مجموعة جزئية من مجموعة المنطلق. ومدى التابع f هو صور D_f وفق f، أي $f(D_f)$ وهو مجموعة جزئية من مجموعة المستقر، ويرمز له بالرمز R_f.

مثال 16: لتكن لدينا المجموعتان $A = \{0, 1, -1, 2, -2, 5\}$ و $B = \{0, 1, 4, 9, -2\}$ والتابع f من A إلى B بحيث: $f(0) = 0, f(1) = f(-1) = 1, f(2) = f(-2) = 4$. أوجد مجال التابع ومداه.

$D_f = \{0, 1, -1, 2, -2\}$, $R_f = \{0, 1, 4\}$

1-3.خصائص التابع Function properties

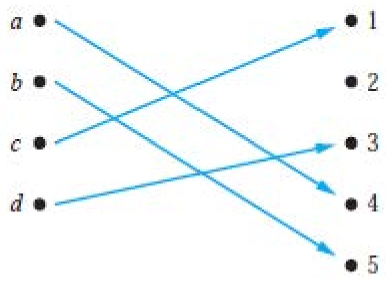
- يمكن لبعض عناصر B أن لا تكون مرتبطة بأي عنصر من A
- يمكن لعنصرين أو أكثر من A أن تكون مرتبطة بنفس العنصر من B
- لا يمكن لأي عنصر من A أن يرتبط بعنصرين مختلفين من B

2-3.أنواع التوابع Types of functions

التابع المتباين

تعريف 12: نقول عن التابع $f: A \to B$ إنه تابع متباين إذا كان لكل عنصر من مجموعة المنطلق صورة واحدة فقط، وكل عنصر من المدى يوافق عنصر واحد من مجموعة التعريف. من أجل البرهان على تابع أنه متباين ، يكفي أن نبرهن على أنه إذا كان $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ أو $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

مثال 17:



- هل التابع f المعرف من $A = \{a, b, c, d\}$ إلى $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ بحيث $f(a) = 4, f(b) = 5, f(c) = 1, f(d) = 3$ متباين؟

نعم التابع متباين لأن كل عنصر من المدى يوافق لعنصر واحد من المنطلق. بعبارة أخرى لا يوجد عنصرين من المنطلق مرتبطة بنفس العنصر من المدى.

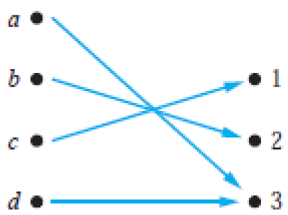
تمرين 3: هل التابع من $f : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ والمعرف كما يلي: $f(x) = x^2$ متباين؟

الجواب لا لأنه على سبيل المثال $f(-2) = f(2) = 4$، ولكن $-2 \neq 2$. أما إذا قصرنا التابع على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة بدلا من الأعداد الصحيحة يصبح التابع متباين ($f : \mathcal{Z}^{+} \to \mathcal{Z}$).

التابع الغامر

تعريف 13: نقول عن التابع $f: A \to B$ إنه تابع غامر إذا كان لكل عنصر من مجموعة المنطلق صورة واحدة فقط وكل عنصر من مجموعة المستقر يوافق عنصر واحد على الأقل من مجموعة المنطلق. أي أن المدى هو نفسه مجموعة المستقر.

مثال 18:



- هل التابع f المعرف من $A = \{a, b, c, d\}$ إلى $B = \{1, 2, 3\}$ بحيث $f(a) = 3, f(b) = 2, f(c) = 1, f(d) = 3$ غامر؟

بما أن كافة العناصر في المستقر هي صور لعناصر من المنطلق فالتابع غامر.

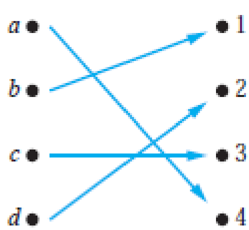
تمرين 4: هل التابع من $f : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ والمعرف كما يلي: $f(x) = x^2$ غامر؟

الجواب لا لأنه لا يوجد عدد صحيح x بحيث صورته $x^2 = -1$.

التابع التقابل

تعريف 14: نقول عن التابع $f: A \to B$ إنه تابع تقابل إذا كان لكل عنصر من مجموعة المنطلق صورة واحدة فقط، وكل عنصر من مجموعة المستقر يوافق عنصر واحد فقط من مجموعة المنطلق. أي أن التابع متباين وغامر في آن واحد.

مثال 19:



- هل التابع f المعرف من $A = \{a, b, c, d\}$ إلى $B = \{1, 2, 3, 4\}$ بحيث $f(a) = 4, f(b) = 1, f(c) = 3, f(d) = 2$ تقابل؟

نعم لأن كل عنصر من مجموعة المنطلق صورة واحدة فقط، وكل عنصر من مجموعة المستقر يوافق عنصر واحد فقط من مجموعة المنطلق. إذن التابع تقابل.

تمرين 5: هل التابع من $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ والمعرف كما يلي: $f(x) = x^2$ تقابل؟

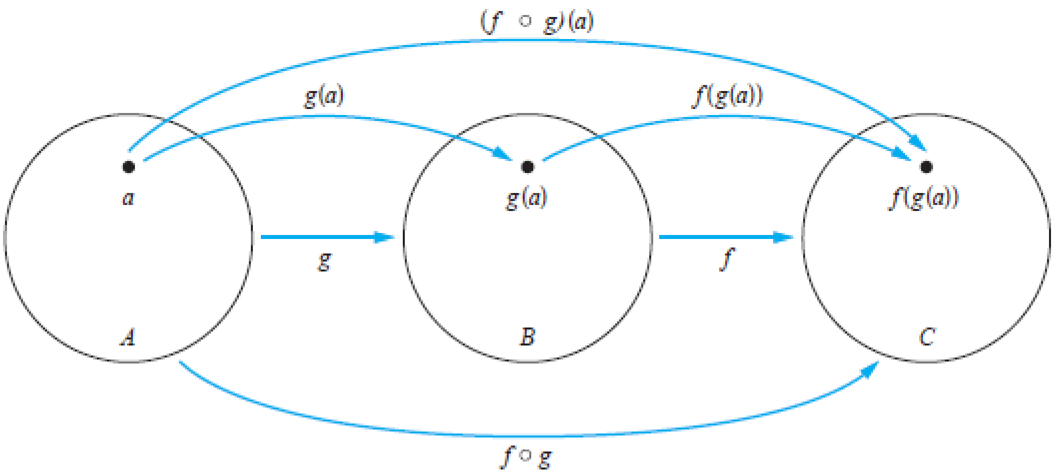
ISSN: 2617-989X

الجواب لا لأنه على سبيل المثال $f(-2) = f(2) = 4$، ولكن $-2 \neq 2$ والتابع ليس متباين وبالتالي ليس تقابل أما إذا قصرنا التابع على مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة بدلا من الأعداد الحقيقية يصبح التابع تقابل $(f : \mathcal{R}^{+} \to \mathcal{R})$.

تعريف 15 (التابع المطابق): لتكن A مجموعة ما. نسمي التابع $I_A : A \to A$ والمعرف كما يلي $I_A(x) = x$ بالتابع المطابق. من الواضح أن التابع المطابق هو متباين وغامر وبالتالي تطابق.

3-3.تركيب التوابع Function composition

تعريف 16: ليكن لدينا التابع $g : A \to B$، والتابع $f : B \to C$. تركيب التابعين f و g والذي نرمز له ب $f \circ g$، من أجل كافة العناصر $a \in A$، معرف كما يلي: $(f \circ g)(a) = f(g(a))$.



ملاحظة 5: لا يمكن تعريف التركيب $f \circ g$ إلا إذا كان مدى التابع g عبارة عن مجموعة جزئية من منطلق التابع f.

ملاحظة 6: تركيب التوابع ليس تبديلي، أي بشكل عام $(f \circ g) \neq (g \circ f)$.

مثال 20: ليكن التابع g المعرف من المجموعة $\{a, b, c\}$ إلى نفسها كما يلي: $g(a) = b, g(b) = c, g(c) = a$. وليكن أيضاً التابع f المعرف من المجموعة $\{a, b, c\}$ إلى المجموعة $\{1, 2, 3\}$ كما يلي: $f(a) = 3, f(b) = 2, f(c) = 1$. أوجد $f \circ g$ و $g \circ f$.

$(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(b) = 2$، $(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(c) = 1$، $(f \circ g)(c) = f(g(c)) = f(a) = 3$

أما $g \circ f$ فهو غير معرف لأن مدى التابع f ليس مجموعة جزئية من منطلق التابع g.

تمرين 6: ليكن f, g تابعان معرفان من مجموعة الأعداد الصحيحة إلى مجموعة الأعداد الصحيحة كما يلي: $f(x) = 2x + 3$ و $g(x) = 3x + 2$. أوجد $f \circ g$ و $g \circ f$.

من الواضح أن كل من $f \circ g$ و $g \circ f$ معرف.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 2) = 2(3x + 2) + 3 = 6x + 4 + 3 = 6x + 7$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = 3(2x + 3) + 2 = 6x + 9 + 2 = 6x + 11$

مبرهنة 1: ليكن لدينا التوابع التالية: $f : A \to B$ و $g : B \to C$ و $h : C \to D$، عندئذ لدينا:

a. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ الخاصة التجميعية

b. $f \circ I_A = I_B \circ f = f$ التابع المطابق عنصر حيادي بالنسبة لتركيب التوابع

مبرهنة 2 (خواص التوابع المركبة): ليكن لدينا التابعان التاليان: $f : A \to B$ و $g : B \to C$، عندئذ لدينا:

a. إذا كان f و g متباينين فإن $g \circ f$ متباين

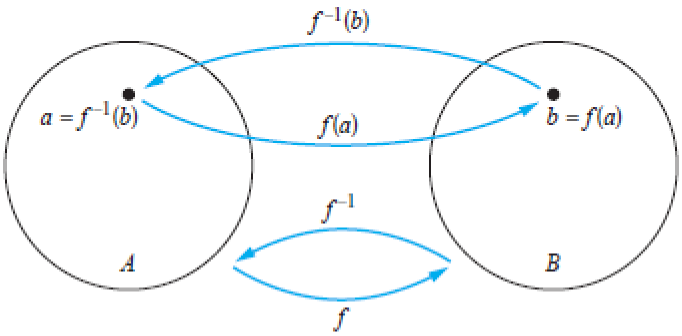
b. إذا كان f و g غامرين فإن $g \circ f$ غامر

c. إذا كان $g \circ f$ متباين فإن f متباين

d. إذا كان $g \circ f$ غامر فإن g غامر

4-3.التابع العكسي Inverse function

تعريف 17: ليكن التابع f تقابل من المجموعة A إلى المجموعة B. التابع العكسي للتابع f هو التابع الذي يُلحق لعنصر b ينتمي إلى B العنصر الوحيد a في A بحيث $f(a) = b$. يرمز للتابع العكسي لـ f بـ f^{-1}. بالتالي $f^{-1}(b) = a$ وذلك عندما يكون $f(a) = b$.



أمثلة 21:

- ليكن التابع f المعرف من $A = \{a, b, c\}$ إلى $B = \{1, 2, 3\}$ بحيث $f(a) = 2, f(b) = 3, f(c) = 1$. هل للتابع f تابع عكسي؟ أوجده إذا كان كذلك.

  f تابع تقابل وبالتالي له تابع عكسي معرف كما يلي: $f^{-1}(1) = c$، $f^{-1}(2) = a$، و $f^{-1}(3) = b$.

- ليكن التابع $f : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ المعرف كما يلي $f(x) = x + 1$. هل للتابع f تابع عكسي، أوجده إذا كان كذلك.

  التابع f تابع تقابل بالتالي له تابع عكسي. ليكن y صورة x، أي $y = x + 1$، وبالتالي فإن $x = y - 1$. معنى هذا أن $f^{-1}(y) = y - 1$.

- ليكن التابع $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ المعرف كما يلي $f(x) = x^2$. هل للتابع f تابع عكسي، أوجده إذا كان كذلك.

  التابع f ليس تقابل (ليس متباين) لأن $f(-2) = f(2) = 4$، وبالتالي ليس له تابع عكسي.

تمرين 7: ليكن التابع $f : \mathcal{R}^+ \to \mathcal{R}^+$ المعرف كما يلي $f(x) = x^2$. هل للتابع f تابع عكسي، أوجده إذا كان كذلك.

لنرى فيما إذا أصبح التابع متباين؟ ليكن $f(x) = f(y)$، أي $x^2 = y^2$، وبالتالي $x = y$ أو $x = -y$ الحل الثاني مرفوض لأن كل من x و y موجبين. إذن لدينا فقط $x = y$، أي أن التابع متباين وبالتالي تقابل وله تابع عكسي.

$y = x^2$ وبالتالي فإن $x = \sqrt{y}$ ($x = -\sqrt{y}$ مرفوض). أي أن $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

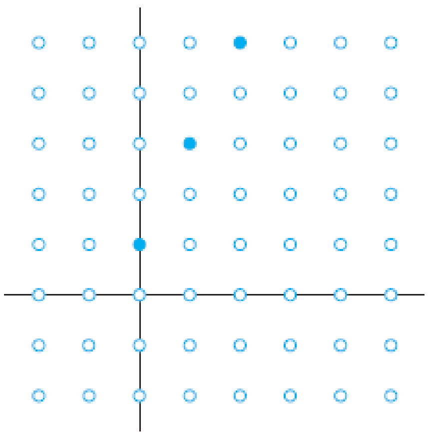
التابع العكسي والتركيب:

$$f \circ f^{-1}(a) = f^{-1} \circ f(a) = a$$ ، وبالتالي فإن $f^{-1} \circ f = I_A$ و $f^{-1} \circ f = I_B$

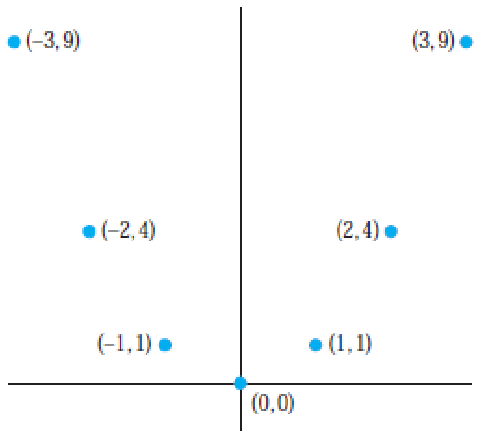
5-3. بيان تابع Function graph

تعريف 18: ليكن $f: A \to B$. بيان التابع f هو مجموعة الأزواج المرتبة $\{(a, b) | a \in A \text{ and } f(a) = b\}$.

مثال 22: ارسم التابعين $f : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ المعرف كما يلي $f(n) = 2n + 1$، و $f : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ المعرف كما يلي $f(x) = x^2$.



$f(n) = 2n + 1$



$f(x) = x^2$

6-3. التوابع العددية Numeric Functions

تعريف 19: التابع العددي هو التابع الذي يكون مجموعة مستقرّه عبارة عن مجموعة عددية.

أمثلة 23:

- التابع $f: \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ المعرف كما يلي $f(x) = x + 1$ هو تابع عددي.
- التابع $f: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ المعرف كما يلي $f(x) = x^2$ هو تابع عددي.

أسئلة الفصل

1. اذكر عناصر المجموعات التالية:

a) $A = \{x \mid x \in \mathcal{N}, 3 < x < 12\}$

b) $B = \{x \mid x \in \mathcal{R}, x^2 = 1\}$

c) $C = \{x \mid x \in \mathcal{N}, x + 1 = 0\}$

d) $D = \{x \mid x \in \mathcal{R}, \sqrt{x^2 + 1} = 2\}$

2. أي من المجموعات التالية متساوية:

a) $A = \{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$

b) $B = \{x \mid x \in \mathcal{N}, x < 3\}$

c) $C = \{x \mid x \in \mathcal{N}, x \text{ فردي}, x < 5\}$

d) $D = \{3, 1\}$

e) $E = \{1, 1, 3\}$

3. بفرض أنه لدينا $\Omega = \{1, 2, \ldots, 9\}$ والمجموعات التالية:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\quad B = \{4, 5, 6, 7\}$ $\quad C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

أوجد ما يلي:

a) $A \cup B,\ A \cap B,\ A\backslash B,\ B\backslash A,\ A \oplus B,\ A \cap B \cap C,\ B \cap \bar{C}$

4. برهن أن $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{C}) = A$.

5. باستخدام $A\backslash B = A \cap \bar{B}$ برهن أن: $(A \cup B)\backslash(A \cap B) = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.

6. ارسم مخطط فن للمجموعات الثلاث A, B, C:

a) $A \cap (B\backslash C)$

b) $(A \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C})$

c) $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

7. أياً من التوابع التالية $f : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ تابع متباين؟

a) $f(n) = n - 1$

c) $f(n) = n^2 + 1$

d) $f(n) = n^3$

8. أياً من التوابع السابقة تابع غامر؟

9. أياً من التوابع التالية $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ تابع تقابل؟

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = x^2 + 1$

c) $f(x) = (x^2 + 1)/(x^2 + 2)$

10. أوجد $g \circ f$ و $f \circ g$، حيث $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = x + 2$ هي توابع من $\mathcal{R}$ إلى $\mathcal{R}$.

11. ليكن التابع f معرف من $\mathcal{R}$ إلى $\mathcal{R}$ ب $f(x) = x^2$. أوجد:

a) $f^{-1}(\{1\})$

b) $f^{-1}(\{x \mid 0 < x < 1\})$

c) $f^{-1}(\{x \mid x > 4\})$

تمارين إضافية

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة

1. $A \subseteq B \Leftarrow A\backslash B =$

a) $\varnothing$ | b) A | c) B | d) Ω

2. $A \subseteq B \Leftarrow A \cap B =$

a) $\varnothing$ | **b) A** | c) B | d) Ω

3. $A \subseteq B \Leftarrow A \cup B =$

a) $\varnothing$ | b) A | **c) B** | d) Ω

4. $|A| + |\bar{A}| =$

a) $|A|$ | b) $|\bar{A}|$ | c) $|\Omega|$ | d) 0

5. $A \Delta B = \varnothing \Leftrightarrow$

a) $A = \varnothing$ | b) $B = \varnothing$ | **c) $A = B$** | d) $A \subseteq B$

6. $A\backslash B = A \Leftrightarrow$

a) $A = B$ | **b) $A \cap B = \varnothing$** | c) $A \subseteq B$ | d) $B = \varnothing$

7. عناصر المجموعة $A = \{x | x \in \mathcal{R}, \sqrt{x^2+1} = 2\}$ هي:

a) $S=[-3, 3]$ | b) $S=\{-3, 3\}$ | c) $S=\varnothing$ | **d) $S=\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$**

السؤال الثاني: أجب بصح أو خطأ

1. المجموعتان $B = \{x | x \in \mathcal{Z}, x^2 - 2x = 0\}$ $A = \{0, 2\}$ متساويتان — **صح** أو خطأ
2. حجم وقدرة مجموعة الأحرف الصوتية في اللغة الإنكليزية هما 5 و 32 على الترتيب — **صح** أو خطأ
3. $\mathcal{Z}^- \cap \mathcal{Z}^+$ مجموعتان منفصلتان — **صح** أو خطأ
4. $\{1, 3, 5\}\backslash\{1, 3, 5, 7, 9\} = \{7, 9\}$ — صح أو **خطأ**
5. $|A \cup B| = |A| + |B|$، حيث $|A|$ عدد عناصر المجموعة A — صح أو **خطأ**
6. $A\backslash B = A \cap \bar{B}$ — **صح** أو خطأ
7. $A \Delta \Omega = A$ — صح أو **خطأ**
8. التابع $f: \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ المعرف ب $f(n) = n^2+1$ متباين — صح أو **خطأ**
9. التابع $f: \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ المعرف ب $f(n) = n^3$ غامر — صح أو **خطأ**
10. التابع $f: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ المعرف ب $f(n) = (x^2 + 1)/(x^2 + 2)$ تقابل — صح أو **خطأ**

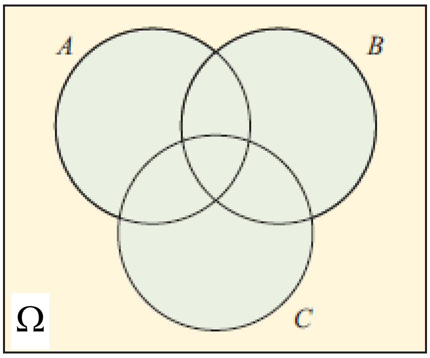
السؤال الثالث:

ليكن التابع f معرف من $\mathcal{R}$ إلى $\mathcal{R}$ ب $f(x) = x^2-1$. أوجد:

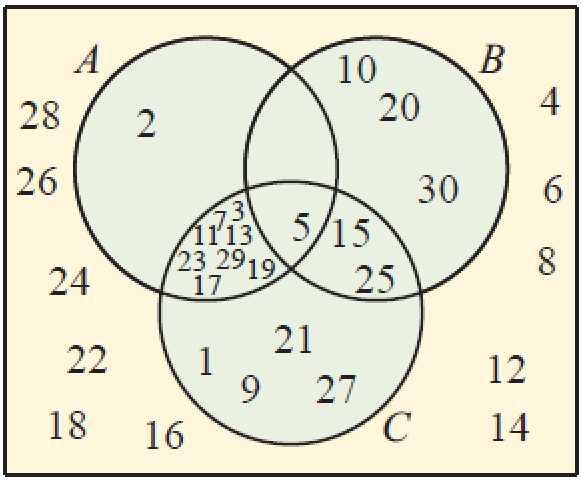
b) $f^{-1}(\{3\})$ b) $f^{-1}(\{x |\ 0 < x < 1\})$ c) $f^{-1}(\{x |\ x > 4\})$

السؤال الرابع:

لتكن المجموعات التالية: $\Omega = \{x\,|\,x \le 30,\ x \in \mathcal{Z}+\}$ و A = {عدد أولي أصغر أو يساوي 30} و B = {مضاعفات العدد 5 وأصغر أو يساوي 30} و C = {عدد فردي وأصغر أو يساوي 30}. اكتب على مخطط فن التالي العناصر المذكورة.

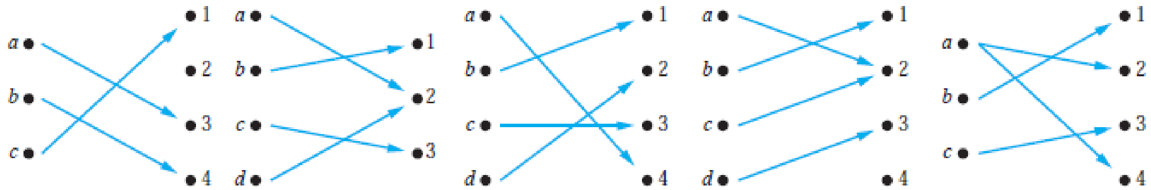


الحل:

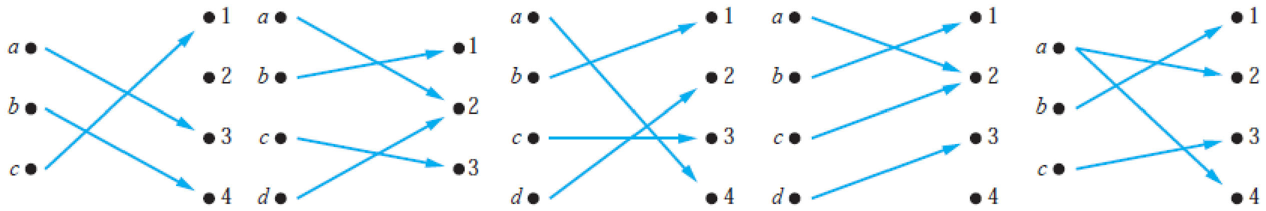


السؤال الخامس:

من أجل كل شكل من الأشكال التالية بين إذا كان تابعاً أولاً وثانياً فيما إذا كان متباين، غامر، تقابل



الحل:



ليس تابعاً | تابع لا متباين ولا غامر | تابع تقابل | تابع غامر غير متباين | تابع متباين غير غامر

الفصل الثاني: الأعداد الحقيقية المعادلات والمتراجحات
Real numbers, equations and inequalities

الكلمات المفتاحية:

عدد طبيعي، عدد كلي، عدد صحيح، عدد عادي، عدد غير عادي، عدد حقيقي، خاصة تبديلية، خاصة تجميعية، خاصة توزيعية، عنصر حيادي، عنصر نظير، مجال، قيمة مطلقة، قوة، أس، جذر، لوغاريتم، عبارة جبرية، معادلة، مميز، متراجحة، إشارة ثلاثي جدود.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على مجموعات الأعداد لاسيما مجموعة الأعداد الحقيقية والعمليات الأساسية عليها من عمليات قوى ولوغاريتم وجذور. ومن ثم تم التطرق إلى مختلف أصناف المعادلات الجبرية بمجهول واحد وكيفية حلها في مجموعة الأعداد الحقيقية. وأخيراً دراسة وحل المتراجحات الخطية والتربيعية.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- مجموعات الأعداد وعلاقات الاحتواء بينها.
- مجموعة الأعداد الحقيقية وخواصها والعمليات عليها.
- المعادلات بكافة أنواعها (القيمة المطلقة، الخطية، التربيعية، الأسية، اللوغاريتمية)، وكيفية حلها.
- المتراجحات (القيمة المطلقة، الخطية، التربيعية)، وكيفية حلها.

1- تعاريف Definitions

مجموعة الأعداد الطبيعية

تعريف 1: نسمي الأعداد التي نستخدمها لعد الأشياء، مثل عدد الكتب في المكتبة أو عدد الطلاب في الصف. نسمي هذه الأعداد بالأعداد الطبيعية، ويرمز لها بالرمز $\mathcal{N}$.

$$\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$$

تحوي هذه المجموعة مجموعة الأعداد الأولية $\{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ وهي الأعداد التي لا تقبل القسمة إلا على نفسها وعلى الواحد (الواحد عدد غير أولي).

مجموعة الأعداد الكلية

تعريف 2: مجموعة الأعداد الكلية هي مجموعة الأعداد الطبيعية مضافاً إليها العدد 0، ويرمز لها بالرمز $\mathcal{W}$. أي أن:

$$\mathcal{W} = \mathcal{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

مجموعة الأعداد الصحيحة

تعريف 3: تشمل مجموعة الأعداد الصحيحة الأعداد الطبيعية (الأعداد الموجبة) بالإضافة إلى العدد الصفر وكذلك الأعداد السالبة، ويرمز لها بالرمز $\mathcal{Z}$.

$$\mathcal{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

تحوي هذه المجموعة العديد من المجموعات الجزئية الشهيرة كالأعداد الزوجية والأعداد الفردية والأعداد الصحيحة الموجبة والأعداد الصحيحة السالبة.

ملاحظة 1: العدد الصحيح 0 ليس بعدد زوجي أو عدد فردي.

مجموعة الأعداد العادية

تعريف 4: تنتج مجموعة الأعداد العادية من قسمة عدد صحيح على عدد صحيح آخر لا يساوي الصفر، أي أنها من الشكل p/q، حيث p و q عددان صحيحان و $q \neq 0$. نرمز إلى مجموعة الأعداد العادية بالرمز $\mathcal{Q}$.

$$\mathcal{Q} = \left\{\frac{p}{q},\ p \in \mathcal{Z},\ q \in \mathcal{Z},\ q \neq 0\right\}$$

الأعداد $\frac{2}{3}$ و $-\frac{4}{9}$ و $\frac{5}{1}$ هي أعداد عادية. من الملاحظ أن $5 = \frac{5}{1}$ وبالتالي فإن الأعداد الصحيحة هي أعداد عادية.

يمكن كتابة الأعداد العادية بشكل عشري وذلك عن طريق تقسيم البسط على المقام. مثال على ذلك $\frac{3}{8} = 0.375$ (كتابة عشرية منتهية)، أما $\frac{3}{11} = 0.2727 \dots = 0.\overline{27}$ (كتابة عشرية دورية غير منتهية).

مجموعة الأعداد غير العادية

تعريف 5: بعض الأعداد لا يمكن كتابتها لا بشكل عشري منته ولا بشكل عشري دوري غير منته. تسمى هذه الأعداد بالأعداد غير العادية.

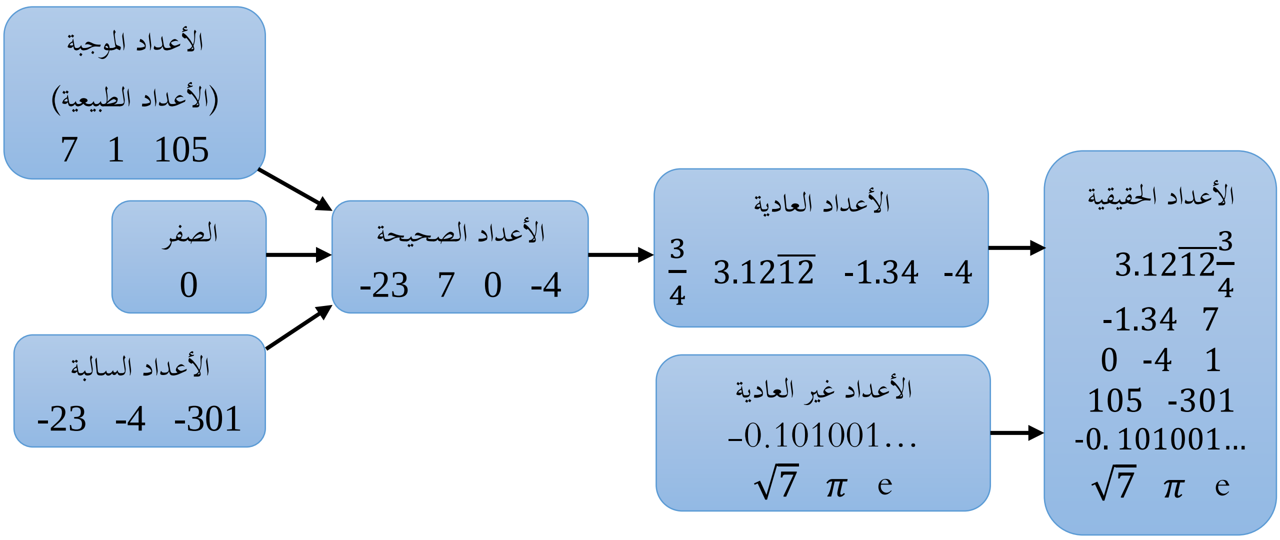
مثال 1: الأعداد $0.010010001\ldots$ و $\sqrt{7}\ldots 2.6457513 =$ و $\pi = 3.141592\ldots$ والعدد النيبري $e = 2.718281\ldots$ هي أعداد غير عادية.

مجموعة الأعداد الحقيقية

تعريف 6: تشمل الأعداد الحقيقية مجموعة الأعداد العادية وغير العادية. نرمز إلى مجموعة الأعداد الحقيقية بالرمز $\mathcal{R}$.

كل عدد عادي هو عدد حقيقي. نقول إن المجموعة $\mathcal{Q}$ محتواة في المجموعة $\mathcal{R}$، ونرمز إلى ذلك بالرمز $\mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$.

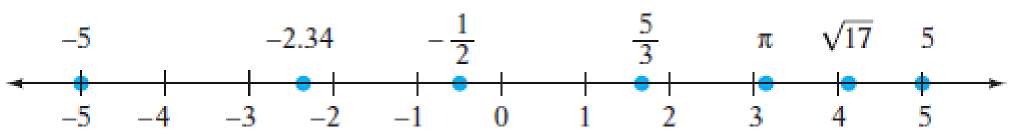
ترتبط مجموعات الأعداد فيما بينها بعلاقة احتواء ولدينا بالتالي: $\mathcal{N} \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$.



مثال 2:

- العدد 7 هو عدد طبيعي وصحيح وعادي وحقيقي.
- العدد -4 هو عدد صحيح وعادي وحقيقي.
- العدد -1.34 هو عدد عادي وحقيقي.

يتم تمثيل الأعداد الحقيقية بخط مستقيم موجه نسميه محور الأعداد الحقيقية. يوافق كل عدد حقيقي نقطة وحيدة على المحور، وبالعكس كل نقطة من المحور توافق عدد حقيقي وحيد.

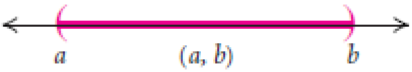


من خلال محور الأعداد الحقيقية يمكن القول بأنه إذا كان العدد a يقع إلى يسار العدد b، عندها يكون a أصغر من b $(a < b)$. بشكل مشابه العدد a أكبر من العدد b $(a > b)$ إذا وجد a إلى يمين b على المحور.

تقرأ العبارة $a \leq b$ "العدد a أصغر أو يساوي العدد b"، وهي صحيحة عندما تكون $a < b$ صحيحة أو عندما تكون $a = b$ صحيحة.

ISSN: 2617-989X

يُستخدم الرمز $\in$ للإشارة إلى أن عنصر ينتمي إلى مجموعة، على سبيل المثال



عندما نكتب $3.12\overline{12} \in Q$ معناها أن العدد $3.12\overline{12}$ هو عدد عادي.

ويمكننا أن نكتب أيضاً أن $\pi \notin Q$ للدلالة على أن العدد π ليس عدد عادي (لا ينتمي إلى Q).

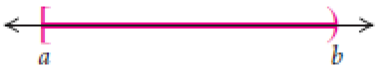
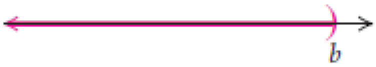
2- الأعداد الحقيقية Real numbers

2-1. المجال في مجموعة الأعداد الحقيقية Interval

يمكن التعبير على مجموعات الأعداد الحقيقية باستخدام مفهوم المجال. على سبيل المثال الأعداد الحقيقية المحصورة بين العددين a و b بحيث $a < b$ وبدون العددين a و b عبارة عن مجال مفتوح (a, b): $(a, b) = \{x | a < x < b\}$.

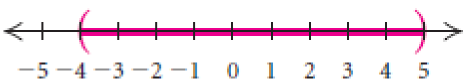
النقطتين a و b هما طرفي المجال، والأقواس تدل على أن طرفي المجال لا ينتميان إلى المجال.

أنواع المجالات

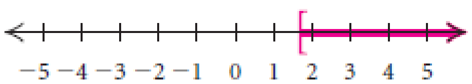
	$\{x \mid a < x < b\}$	(a, b)	مفتوح
	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	مفتوح
	$\{x \mid a \leq x < b\}$	$[a, b)$	نصف مفتوح
	$\{x \mid a < x \leq b\}$	$(a, b]$	نصف مفتوح
	$\{x \mid x > a\}$	(a, ∞)	مفتوح
	$\{x \mid x \geq a\}$	$[a, \infty)$	نصف مفتوح
	$\{x \mid x < b\}$	$(-\infty, b)$	مفتوح
	$\{x \mid x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	نصف مفتوح

مثال 3:

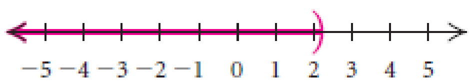
- $\{x | -4 < x < 5\} = (-4, 5)$



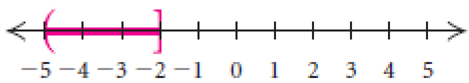
- $\{x | x \geq 1.7\} = [1.7, +\infty)$



- $\{x | -5 < x \leq -2\} = (-5, -2]$



- $\{x \mid x < \sqrt{5}\} = (-\infty, \sqrt{5})$



2-2. خصائص الأعداد الحقيقية Real numbers properties

لتكن الأعداد الحقيقية a, b, c ولندرس خصائصها بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب:

- الخاصة التبديلية:

$a + b = b + a$ مثال: $3 + 5 = 5 + 3 = 8$

$a.b = b.a$ مثال: $3.5 = 5.3 = 15$

- الخاصة التجميعية:

$a + (b + c) = (a + b) + c$ مثال: $3 + (5 + 2) = (3 + 5) + 2 = 10$

$a.(b.c) = (a.b).c$ مثال: $3.(5.2) = (3.5).2 = 30$

- العنصر الحيادي: العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الجمع هو العدد 0، كما أن العدد 1 هو العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الضرب.

$a + 0 = 0 + a = a$ مثال: $3 + 0 = 0 + 3 = 3$

$a.1 = 1.a = a$ مثال: $3.1 = 1.3 = 3$

- العنصر النظير: نظير العدد a بالنسبة لعملية الجمع هو $-a$، كما أن نظير العدد a $(a \neq 0)$ هو العدد $\frac{1}{a}$ بالنسبة لعملية الضرب.

$(-a) + a = a + (-a) = 0$ مثال: $(-3) + 3 = 3 + (-3) = 0$

$.\frac{1}{a} = \frac{1}{a}.a = 1a$ مثال: $3.\frac{1}{3} = \frac{1}{3}.3 = 1$

- الخاصة التوزيعية: عملية الضرب توزيعية على عملية الجمع

$a.(b + c) = a.b + a.c$ مثال: $3.(5 + 2) = 3.5 + 3.2 = 21$

ملاحظة 2: خاصة التوزيع صحيحة أيضاً من أجل عملية الطرح

$a.(b - c) = a.b - a.c$ مثال: $3.(5 - 2) = 3.5 - 3.2 = 9$

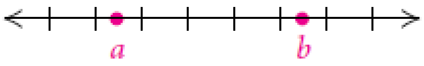
ملاحظة 3: عملية الجمع ليست توزيعية على عملية الضرب. مثال $3 + (5.2) = 13$، بينما $(3 + 5).(3 + 2) = 40$ والنتيجتان مختلفتان.

القيمة المطلقة

تعريف 7: القيمة المطلقة لعدد ما a ويرمز لها بالرمز |a|، تعرف على أنها المسافة التي تفصلها عن المبدأ (العدد صفر) لمحور الأعداد الحقيقية، وهي قيمة موجبة دوماً $|a| \geq 0$. على سبيل المثال $|-5| = 5$، $|3/4| = 3/4$. وبالتالي فإن التعريف الرياضي للقيمة المطلقة هو:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{if } a \geq 0 \\ -a, & \text{if } a < 0 \end{cases}$$

يمكن استخدام القية المطلقة في إيجاد المسافة الفاصلة بين نقطتين على محور الأعداد الحقيقية. وبالتالي ومن أجل أي عددين a, b المسافة الفاصلة بينهما هي $|a - b| = |b - a|$.



$|a - b| = |b - a|$

مثال 4: المسافة التي تفصل العددين 2- و 3 هي $5 = |3 - (-2)| = |-2 -3|$.

خصائص أخرى للقيمة المطلقة:

- $|a.b| = |a|.|b|$
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$

مثال 5:

- $-|-3| -|8| = -3 - 8 = -11$
- $|1 - \pi| = \pi - 1$، لأن $\pi > 1$ وبالتالي $1 - \pi < 0$
- $|x^2 + 1| = x^2 + 1$، لأن $x^2 \geq 0$ وبالتالي $x^2 + 1 > 0$
- $|x + 1| + |x - 3|, x > 4$

$|x + 1| + |x - 3| = x + 1 + x - 3 = 2x - 2$

رفع عدد حقيقي إلى أس صحيح

تعريف 8: ليكن a عدد حقيقي، وليكن n عدداً صحيحاً موجباً، نعرف a^n على أنها ناتج ضرب العدد a بنفسه n مرة. $a^n = a.a.a\ldots a$. نسمي العدد a الأساس ونسمي العدد n بالأس. أما من أجل أس للعدد صفر أو عدد صحيح سالب فإننا نعرف القوى كما يلي: $a^0 = 1$ و $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

مثال 6:

$(-3.4)^0 = 1$ $\qquad$ $\frac{1}{4^{-5}} = 4^{-5}$ $\qquad$ $\frac{1}{(0.82)^{-7}} = (0.82)^7$ $\qquad$ $\frac{x^{-3}y^{-8}}{z^{-10}} = \frac{z^{10}}{x^3y^8}$

ISSN: 2617-989X

خصائص القوى

ليكن لدينا عددان حقيقيان a, b وعددان صحيحان m, n نذكر بالخصائص التالية:

- $a^m.a^n = a^{m+n}$ مثال: $2^2.2^4 = 2^{2+4} = 2^6 = 64$ $3^{-4}.3^7 = 3^{-4+7} = 3^3 = 27$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$ مثال: $\frac{2^6}{2^4} = 2^{6-4} = 2^2 = 4$
- $(a^m)^n = a^{m.n}$ مثال: $(4^2)^3 = 4^{2.3} = 4^6 = 4096$
- $(a.b)^m = a^m.b^m$ مثال: $(2.3)^4 = 2^4.3^4 = 1296$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, b \neq 0$ مثال: $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4^3}{5^3}$

ترتيب (أولويات) العمليات على الأعداد الحقيقية

في حال عدم وجود أقواس:

- نبحث عن القوى ونحسبها من اليسار إلى اليمين.
- نطبق عمليات الضرب والقسمة بالترتيب الذي تظهر عليه من اليسار إلى اليمين.
- نطبق عمليات الجمع والطرح بالترتيب الذي تظهر عليه من اليسار إلى اليمين.

في حال وجود أقواس:

نطبق نفس العمليات أعلاه بالترتيب المذكور ضمن الأقواس أولاً ونبدأ من الأقواس الداخلية ثم ننتقل إلى الأقواس الخارجية.

مثال 7: احسب المقدار $8(5-3)^3 - 20$

$8(5-3)^3 - 20 = 8.2^3 - 20 = 8.8 - 20 = 64 - 20 = 44$

الجذور والعمليات عليها

تعريف 9: يشير الرمز $\sqrt{a}$ إلى الجذر التربيعي للعدد غير السالب a، ويشير الرمز $\sqrt[3]{a}$ إلى الجذر التكعيبي للعدد a، ويشير الرمز $\sqrt[n]{a}$ إلى الجذر ذو الرتبة n للعدد a، بمعنى أنه العدد الحقيقي الذي إذا رفع إلى الأس n أعطى العدد a.

نقول عن عدد حقيقي c أنه الجذر ذو الرتبة n للعدد الحقيقي a إذا كان $c^n = a$.

مثال 8:

- $\sqrt{36} = 6$ لأن $6^2 = 36$ $-\sqrt{36} = -6$
- $\sqrt[3]{-8} = -2$ لأن $(-2)^3 = -8$
- $\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{2}{3}$ لأن $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$

- $\sqrt[4]{-16}$ ليس بعدد حقيقي لأنه لا يوجد عدد حقيقي بحيث إذا رفع للأس 4 أعطى 16-

خصائص الجذور

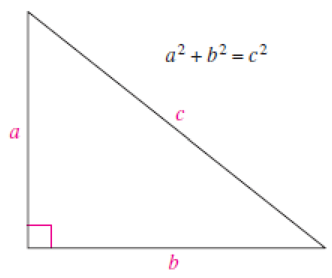
ليكن لدينا عددان حقيقيان a, b وعددان صحيحان m, n و $n \neq 1$ نذكر بالخصائص التالية:

- $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ إذا كان n عدد زوجي
- $\sqrt[n]{a^n} = a$ إذا كان n عدد فردي
- $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$ $\qquad$ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, (b \neq 0)$ $\qquad$ $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

مثال 9:

- $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$
- $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$
- $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{72}{6}} = \sqrt{12} = \sqrt{4.3} = \sqrt{4}.\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$
- $\sqrt{\frac{x^2}{16}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{16}} = \frac{|x|}{4}$

تطبيق 1: نظرية فيثاغورث



في مثلث قائم مربع الوتر يساوي مجموع مربعي الضلعين القائمين.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

مثال 10: ليكن a = 3 و b = 4. أوجد طول الوتر c

$c^2 = a^2 + b^2$ وبالتالي فإن

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

إزالة الجذر من البسط أو المقام

يمكن التخلص من الجذر في المقام بضرب البسط والمقام بنفس بالمقدار بحيث يتم الحصول على قوة من الرتبة n كاملة.

مثال 11:

- $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$
- $\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{9}}.\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{21}}{\sqrt[3]{21}} = \frac{\sqrt[3]{21}}{3}$

نسمي العبارتين $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$ و $a\sqrt{b} - c\sqrt{d}$ بالمرافقة. حاصل ضربهما مع بعض يخلو من الجذور وبالتالي يمكن استخدامهما للتخلص من الجذر في البسط أو المقام. $(a\sqrt{b} - c\sqrt{d}).(a\sqrt{b} + c\sqrt{d}) = a^2b - c^2d$.

مثال 12:

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{5}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{5}.\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{x-y}{5\sqrt{x}+5\sqrt{y}}$$

رفع عدد حقيقي إلى أس عادي

ليكن a عددا حقيقياً، وليكن m و n عددان طبيعيان بحيث $n \geq 2$، التي من أجلها $\sqrt[n]{a}$ موجود:

- $a^{1/n}=\sqrt[n]{a}$
- $a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$ $\qquad a^{-m/n}=\frac{1}{a^{m/n}}$

مثال 13:

- $8^{-5/3}=\frac{1}{8^{5/3}}=\frac{1}{(\sqrt[3]{8})^5}=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$
- $\sqrt[6]{x^3}=x^{3/6}=x^{1/2}=\sqrt{x}$
- $(x+3)^{5/2}.(x+3)^{-1/2}=(x+3)^{5/2-1/2}=(x+3)^2$

اللوغاريتمات

تعريف 10 (**اللوغاريتم**):

يعرف لوغاريتم عدد ما موجب غير معدوم a بالنسبة للأساس 10، بأنه الأس المرفوع على الأساس 10 والذي سينتج ذلك العدد. فعلى سبيل المثال لوغاريتم العدد 1000 بالنسبة للأساس 10 هو 3 لأن $10^3 = 1000$. يرمز للوغاريتم بالرمز $log_{10}\, a = log\, a$.

مثال 14:

- $log\ 100 = 2$ لأن $10^2 = 100$
- $log\ 0.001 = -3$ لأن $10^{-3} = 0.001$

خصائص اللوغاريتم

ليكن لدينا عددان حقيقيان موجبان مختلفان عن الصفر a, b وليكن n عدد صحيح نذكر بالخصائص التالية:

- $log(ab) = log\, a + log\, b$
- $log(\frac{a}{b}) = log\, a - log\, b$ $\qquad log(\frac{1}{a}) = -log\, a$
- $log(x^n) = \mathrm{n}.\, log\, a$ $\qquad log\, 1 = 0$

مثال 15:

- $\frac{log\, 49}{log\frac{1}{7}}=\frac{log\, 7^2}{log\, 7^{-1}}=\frac{2\, log\, 7}{-1\, log\, 7}=-2$
- اكتب المعادلة التالية بدون لوغاريتم $\log c = \log a + 3\log b$

ISSN: 2617-989X

وبالتالي $\log c = \log a + 3\log b = \log a + \log b^3 = \log(ab^3)$ فإن $c = ab^3$

لوغاريتم لأي أساس b

لا حظنا سابقاً أن $x = log_{10}\, a \iff 10^x = a$، وبشكل عام فإن $x = log_b\, a \iff b^x = a$ يمثل لوغاريتم العدد a بالنسبة للأساس b.

مثال 16:

- $log_2 16 = 4$ $\qquad$ $log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = log_2 2^{-1/2} = -1/2$
- حل المعادلة $log_5 x = -2$ هو $x = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

اللوغاريتم النيبري (الطبيعي)

هو لوغاريتم أساسه العد الحقيقي (غير العادي) $e = 2.718281\ldots$ ونرمز له بالرمز $log_e\, a = ln\, a$

مثال 17:

$ln\, e = 1$ $\qquad$ $ln\, \frac{1}{e} = -1$ $\qquad$ $ln\, 1 = 0$ $\qquad$ $ln\, e^5 = 5$

3- المعادلات Equations

3-1. العبارات الجبرية Algebraic Statements

تعريف 11: ليكن لدينا العديد من المتحولات x, y, z على سبيل المثال وبعض الأعداد الحقيقية، نقوم بتركيبها مع بعضها البعض باستخدام العمليات الحسابية كالجمع والطرح والقسمة والضرب والجذور والقوى، نحصل على عبارة جبرية.

مثال 18:

$2x^2 - 3x + 4$ $\qquad$ $\sqrt{x} + 10$ $\qquad$ $\frac{y-2z}{y^2+4}$

متطابقات شهيرة

تفيد المتطابقات الشهيرة في نشر العبارات أو تحليلها إلى عوامل، وأهمها المتطابقات من الدرجة الثانية التالية:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

مثال 19: انشر المقدار $(2x+3y)^2$

$$(2x+3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

مثال 20: أثبت أن $A = \left(3\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2$ هو عدد طبيعي

$$A = \left(3\sqrt{2}\right)^2 + 2\left(3\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 - 2\left(3\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$A = 18 + 6\sqrt{6} + 3 + 18 - 6\sqrt{6} + 3 = 42$$

2-3. المعادلات الجبرية Algebraic equations

ليكن لدينا العبارات الجبرية التالية:

$$A = 2x - 5 \qquad B = (-2x + 3)(x + 4)$$

$$C = 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 \qquad D = x^2 + y^2$$

تعريف 12: نسمي كلاً من الصيغ $A = 0$ أو $B = 0$ أو $C = 0$ أو $D = 0$ أو ما يماثلها معادلة جبرية، ونسمي المتحولات x و y و ... مجاهيل هذه المعادلات. وحل أي منها ضمن مجموعة معطاة هو البحث في هذه المجموعة عن قيم متحولات المعادلة. للمعادلة $A = 0$ على سبيل المثال حل واحد في مجموعة الأعداد الحقيقية هو $x = 5/2$.

تقوم الطريقة العامة لحل معادلة من الشكل $A = 0$ على تطبيق تحويلات بسيطة متتالية عليها لإرجاعها إلى معادلة جديدة مكافئة لها تكون أسهل حلاً. فيما يلي بعض هذه القواعد:

1. عندما نجمع العدد نفسه إلى طرفي المعادلة $A = 0$ أو نطرحه من طرفيها، نحصل على معادلة جديدة مكافئة لها، أي لها نفس حلول المعادلة $A = 0$.
2. عندما نضرب طرفي المعادلة $A = 0$ بالعدد غير المعدوم (لا يساوي الصفر) نفسه أو نقسم طرفيها عليه، نحصل على معادلة جديدة مكافئة لها.
3. إذا كانت A و B عبارتان جبريتان. فإن المعادلة $A.B = 0$ تكافئ $A = 0$ أو $B = 0$.

مثال 21:

- لحل المعادلة $x - 3 = 7$ نجمع المقدار 3 إلى طرفي المعادلة فينتج $x - 3 + 3 = 7 + 3$ وبالتالي يصبح لدينا $x = 10$.
- لحل المعادلة $-3/4x = 12$ نضرب طرفي المعادلة بالمقدار $-4/3$ فينتج $(-4/3)12 = (-4/3)(-3/4)x$ وبالتالي يصبح لدينا $x = -16$.
- لحل المعادلة $B = (-2x + 3)(x + 4) = 0$ نبدأ بحل كل من المعادلتين $-2x + 3 = 0$ و $x + 4 = 0$. تقبل الأولى العدد 3/2 حلاً وحيداً لها، وتقبل الثانية العدد 4- حلاً وحيداً. إذن العددان الحقيقيان 3/2 و 4- هما حل للمعادلة $(-2x + 3)(x + 4) = 0$.

3-3. حل معادلة تآلفية Affine equation solution

إن أبسط نوع من المعادلات هو المعادلة التآلفية (معادلة من الدرجة الأولى). تأخذ المعادلة التآلفية الشكل $ax + b = 0$، حيث a و b عددان حقيقيان (a لا يساوي الصفر) و x هو المتحول. كما أن حل هذه المعادلة التآلفية هو من الشكل $x = -b/a$.

مثال 22: حل المعادلة التالية $7x - 4 = 3x + 8$

$$(7x - 4) + 4 = (3x + 8) + 4$$

$$7x = 3x + 12$$

$$7x - 3x = (3x + 12) - 3x$$

$$x = 3 \Leftarrow 4x/3 = 12/3 \Leftarrow 4x = 12$$

مثال 23: حل المعادلة التالية $\frac{x}{6} + \frac{2}{3} = \frac{3}{4}x$

$$12.\left(\frac{x}{6} + \frac{2}{3}\right) = 12.\frac{3}{4}x$$

$$2x + 8 = 9x$$

$$\frac{8}{7} = x \Leftarrow 8 = 7x$$

3-4. حل معادلات القيمة المطلقة Absolute value equation solution

معادلة القيمة المطلقة هي من الشكل $|x| = C$ وحلها هو $x = \pm C$

مثال 24:

- حل المعادلة $|x| = 5$ هو $x = 5$ أو $x = -5$
- حل المعادلة $|2x - 5| = 3$ هو
  $2x - 5 = 3$ وبالتالي $2x = 8$ أي $x = 4$
  أو $2x - 5 = -3$ وبالتالي $2x = 2$ أي $x = 1$

3-5. حل معادلات القوى Power equation solution

معادلة قوى هي من الشكل $x^n = a$، لها الحل التالي:

- $X = \sqrt[n]{a}$ إذا كان n فردي
- $X = \pm\sqrt[n]{a}$ إذا كان n زوجي وأيضاً $a \geq 0$
- ليس للمعادلة حل إذا كان n زوجي وأيضاً $a < 0$

مثال 25:

- للمعادلة $x^5 = -32$ حل وحيد $x = \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$
- للمعادلة $x^5 = 32$ حل وحيد $x = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$
- للمعادلة $x^4 = 16$ حلان $x = \pm\sqrt[4]{16} = \pm\sqrt[4]{2^4} = \pm 2$
- ليس للمعادلة $x^4 = -16$ حل في مجموعة الأعداد الحقيقية
- للمعادلة $(x-4)^2 = 5$ حلان: $x - 4 = \pm\sqrt{5}$ وبالتالي $x = 4 \pm \sqrt{5}$
- حل المعادلة $16x^4 = 81$

  بالقسمة على 4 نحصل على $x^4 = \frac{81}{16}$ وبالتالي فإن

$$x = \pm\left(\frac{81}{16}\right)^{1/4} = \pm\left(\frac{3^4}{2^4}\right)^{1/4} = \pm\left(\left(\frac{3}{2}\right)^4\right)^{1/4} = \pm\frac{3}{2}$$

3-6. حل معادلة من الدرجة الثانية Quadratic equation solution

تأخذ معادلة من الدرجة الثانية الشكل $ax^2 + bx + c = 0$، حيث a, b, c أعداد حقيقية و $a \neq 0$

حل معادلة من الدرجة الثانية عن طريق التحليل

بعض معادلات الدرجة الثانية يمكن تحليلها (كتابتها على شكل جداء حدين)، وبالتالي فإن المعادلة $A.B = 0$ تكافئ $A = 0$ أو $B = 0$.

مثال 26: حل المعادلة $x^2 + 5x = 24$

$x^2 + 5x - 24 = 0 \Leftarrow (x-3)(x+8) = 0$

إما $x - 3 = 0$ وبالتالي $x = 3$ أو $x + 8 = 0$ وبالتالي $x = -8$

حل معادلة من الدرجة الثانية باستخدام مميزها

يسمى العدد $\Delta = b^2 - 4ac$ مميز المعادلة من الدرجة الثانية $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$، نميز 3 حالات مختلفة:

- في حالة $\Delta < 0$، لا تقبل المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ حلاً.
- في حالة $\Delta = 0$، تقبل المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ حلاً وحيداً $x = -\frac{b}{2a}$.
- في حالة $\Delta > 0$، تقبل المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ حلان $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

مثال 27:

- حل المعادلة $x^2 + 2x + 5 = 0$

$\Delta = (2)^2 - 4(1)(5) = 4 - 20 = -16 < 0$، وبالتالي ليس للمعادلة حلول.

- حل المعادلة $-4x^2 + 12x - 9 = 0$

$\Delta = (12)^2 - 4(-4)(-9) = 144 - 144 = 0$، وبالتالي للمعادلة حلاً وحيداً $x = -\frac{12}{2.(-4)} = \frac{-12}{-8} = \frac{3}{2}$.

- حل المعادلة $x^2 - x - 6 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 1 + 24 = 25 > 0$، وبالتالي للمعادلة حلان:

$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2(1)} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$.

7-3. حل المعادلات الأسية Exponential equation solution

حل معادلة أسية من الشكل $a^x = a^k$

إن حل المعادلة الأسية من الشكل $a^x = a^k$ هو $x = k$

مثال 28:

- حل المعادلة $2^x = 32$

$2^x = 32 = 2^5$ وبالتالي فإن $x = 5$

- حل المعادلة $3^{x-2} = 1/9$

$3^{x-2} = 1/9 = 3^{-2}$ وبالتالي فإن $x = -2$

- حل المعادلة $4^{x-1} = (1/2)^{1-3x}$

$4^{x-1} = (1/2)^{1-3x} \Leftarrow (2^2)^{x-1} = (2^{-1})^{1-3x} \Leftarrow (2)^{2(x-1)} = (2)^{-1(1-3x)} \Leftarrow 2x - 2 = -1 + 3x$ وبالتالي فإن:

$x = -1$

- حل المعادلة $3^{2x-7} = 1$

$3^{2x-7} = 3^0 \Leftarrow 2x - 7 = 0 \Leftarrow x = 7/2$

- حل المعادلة $16^x - 12(4^x) - 64 = 0$

$(4^2)^x - 12(4^x) - 64 = 0 \Leftarrow (4^x)^2 - 12(4^x) - 64 = 0$

بفرض أن $4^x = y$ حيث $y > 0$

$y^2 - 12y - 64 = 0 \Leftarrow (y - 16)(y + 4) = 0$

إما $y + 4 = 0$ وبالتالي $y = -4$ مرفوض، أو $y - 16 = 0$ وبالتالي $y = 16$

$4^x = 16 = 4^2$ وبالتالي $x = 2$

- حل المعادلة $e^{2x}/e^2 = e^x$

$e^{2x-2} = e^x \Leftarrow 2x - 2 = x \Leftarrow x = 2$

3-8. حل المعادلات اللوغاريتمية Logarithmic equation solution

حل معادلة لوغاريتمية من الشكل log x = log a

إن حل المعادلة الأسية من الشكل $\log x = \log a$ (بالنسبة لأي أساس) هو $x = a$

مثال 29:

- حل المعادلة $\log_2 x = 2 \log_2 8$

  $x = 64 \Leftarrow \log_2 x = 2 \log_2 8 = \log_2 8^2$

- حل المعادلة $\ln(x^2) = \ln(2x + 3)$

  $(x - 3)(x + 1) = 0 \Leftarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftarrow x^2 = 2x + 3$

  إما $x + 1 = 0$ أي $x = -1$ مقبول، أو $x - 3 = 0$ أي $x = 3$ مقبول

- حل المعادلة $\ln(x) = \ln(-x^2 + 6)$

  $(x + 3)(x - 2) = 0 \Leftarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftarrow -x^2 + 6 = x$

  إما $x - 2 = 0$ أي $x = 2$ مقبول، أو $x + 3 = 0$ أي $x = -3$ مرفوض لأن $\ln(-3)$ غير موجود

- حل المعادلة $4.\log_{10}(x+1) = 4$

  $x = 9$ وبالتالي، $x + 1 = 10 \Leftarrow \log_{10}(x+1) = 1 = \log_{10} 10 \Leftarrow 4.\log_{10}(x+1) = 4$

- حل المعادلة $3^x = 2^{1/x}$، $x \neq 0$

  $$x^2.\ln(3) = \ln(2) \Leftarrow x.\ln(3) = \frac{1}{x}.\ln(2) \Leftarrow \ln(3^x) = \ln(2^{1/x})$$

  $$x = \pm\sqrt{\frac{\ln(3)}{\ln(2)}} \Leftarrow x^2 = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \Leftarrow x^2.\ln(3) = \ln(2)$$

4- المتراجحات Inequalitie

تعريف 13: المتراجحة عملية مقارنة بين عبارتين جبريتين تبين أن إحداهما أكبر من العبارة الأخرى. على سبيل المثال: $4x + 7 \leq 19$ وحل هذه المتراجحة هو $4x \leq 12$ وبالتالي $x \leq 3$.

كما هو الحال بالنسبة للمعادلات، تقوم الطريقة العامة لحل متراجحة على تطبيق تحويلات بسيطة متتالية عليها لإرجاعها إلى متراجحة جديدة مكافئة لها تكون أسهل حلاً. فيما يلي بعض هذه القواعد:

1. عندما نجمع العدد نفسه إلى طرفي المتراجحة أو نطرحه من طرفيها، نحصل على متراجحة جديدة مكافئة لها.

$$A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad A + C \leq B + C$$

$$A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad A - C \leq B - C$$

2. عندما نضرب طرفي المتراجحة بالعدد الموجب غير المعدوم (لا يساوي الصفر) نفسه أو نقسم طرفيها عليه، نحصل على متراجحة جديدة مكافئة لها.

$$A \le B \Leftrightarrow A.C \le B.C, \qquad C > 0$$
$$A \le B \Leftrightarrow A/C \le B/C, \qquad C > 0$$
$$A \le B \Leftrightarrow A.C \ge B.C, \qquad C < 0$$
$$A \le B \Leftrightarrow A/C \ge B/C, \qquad C < 0$$

3. إذا كانت A و B عبارتان جبريتان موجبتان فإن المقلوب يغير من علاقة التراجح أي أصغر يصبح أكبر والأكبر يصبح أصغر.

$$A \le B \Leftrightarrow 1/A \le 1/B, \qquad A > 0, B > 0$$

4. يمكن جمع متراجحتين مع بعض

$$A \le B, C \le D \quad \Rightarrow \quad A + C \le B + D$$

مثال 31:

- $5 < 8 \quad \Leftrightarrow \quad 5 + 2 = 7 < 8 + 2 = 10$
- $5 < 8 \quad \Leftrightarrow \quad 5(2) = 10 < 8(2) = 16$
- $5 < 8 \quad \Leftrightarrow \quad 5(-2) = -10 > 8(-2) = -16$
- $5 < 8 \quad \Leftrightarrow \quad 1/5 > 1/8$
- $5 < 8$ و $3 < 6$ يعطي $3 + 5 = 8 < 6 + 8 = 14$

4-1. حل المتراجحات التآلفية Affine inequality solution

تعريف 14: نقول عن متراجحه أنها تآلفية إذا كانت تعبر عن علاقة تراجح بين عبارتين جبريتين تآلفيتين. على سبيل المثال: $2 + 3x > 5 - 3x$

لإيجاد حلول متراجحة خطية نطبق خواص المتراجحات بهدف عزل المتحول في أحد الطرفين.

مثال 32: حل المتراجحة $3x < 9x + 4$

$3x - 9x < 9x + 4 - 9x \Leftarrow -6x < 4 \Leftarrow -6x/-6 > 4/-6$

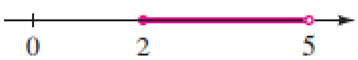
وبالتالي: $x > -2/3$

مثال 33: حل المتراجحة $4 \le 3x - 2 < 13$

يتألف الحل من مجموعة قيم x التي تحقق المتراجحتين $4 \le 3x - 2$ و $3x - 2 < 13$ في آن واحد

$4 \le 3x - 2 < 13$ بإضافة العدد 2 نحصل على

$6 \le 3x < 15$ بالقسمة على 3 نحصل على: $2 \le x < 5$



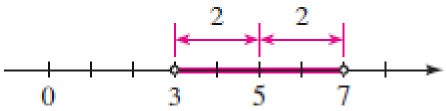
ISSN: 2617-989X

4-2. حل متراجحة القيمة المطلقة Absolute value inequality solution

تعريف 15: نقول عن متراجحة أنها متراجحة قيمة مطلقة إذا كانت تعبر عن علاقة تراجح بين عبارتين جبريتين إحداهما على الأقل هي عبارة قيمة مطلقة. على سبيل المثال: $|2x -3| < 5$

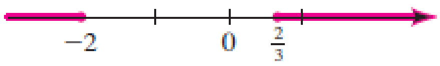
خواص متراجحة القمة المطلقة

- $|x| < c \quad \Leftrightarrow \quad -c < x < c$
- $|x| > c \quad \Leftrightarrow \quad x < -c$ أو $x > c$



مثال 34: حل المتراجحة التالية: $|x - 5| < 2$

$-2 < x - 5 < 2 \Rightarrow 3 < x < 7$



مثال 35: حل المتراجحة التالية: $|3x + 2| \geq 4$

$3x + 2 \geq 4$ أو $3x +2 \leq -4$

$3x \geq 2$ أو $3x \leq -6 \Rightarrow x \geq 2/3$ أو $x \leq -2$

4-3. حل متراجحة من الدرجة الثانية Quadratic inequality solution

تعريف 16: متراجحة من الدرجة الثاني هي متراجحة تحوي على عبارة تربيعية من الشكل $ax^2 + bx +c$ $(a \neq 0)$.

على سبيل المثال: $x^2 - 5x \leq -6$.

إشارة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية

ليكن ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية $A = ax^2 + bx +c$ $(a \neq 0)$، وليكن Δ مميزه:

- في حالة $\Delta < 0$ تكون إشارة المقدار A هي من إشارة a نفسها أياً كانت x.
- في حالة $\Delta = 0$ تكون إشارة المقدار A هي من إشارة a نفسها أياً كانت x فيما عدا القيمة $x = -b/2a$، حيث تكون قيمة المقدار A مساوياً للصفر.
- في حالة $\Delta > 0$ تكون إشارة المقدار A هي من إشارة a نفسها إذا لم تقع x بين جذري A، وإذا وقعت x بين الجذرين، خالفت إشارة A إشارة a.

مثال 36:

- ادرس إشارة $x^2 + x + 1$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3 < 0$$

وبالتالي فإن إشارة المقدار $x^2 + x + 1$ هي من إشارة $a = 1$ أي أنه موجب دوماً.

- ادرس إشارة $-x^2 + 2x - 1$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(-1)(-1) = 4 - 4 = 0$$

أي أن المقدار $-x^2 + 2x - 1$ هو سالب دوماً (من إشارة $a = -1$) من أجل كافة القيم للمتحول x، عدا القيمة $x = -b/2a = -2/-2 = 1$، حيث قيمة المقدار تكون مساوية للصفر.

- حل المتراجحة $x^2 \leq 5x - 6$

$$x^2 - 5x + 6 \leq 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(-1)(-1) = 4 - 4 = 0$ وبالتالي للمعادلة جذران:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$$

وبالتالي الجذران هما $x = 3$ و $x = 2$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
إشارة $x^2 - 5x + 6$		+	0	−	0	+	

وبالتالي مجموعة الحلول هي [2, 3]

- حل المتراجحة $2x^2 - x > 1$

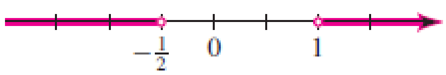
$$2x^2 - x - 1 > 0$$

$$(2x + 1)(x - 1) > 0$$

الجذران هما $x = 1$ و $x = -1/2$

x	$-\infty$		$-1/2$		1		$+\infty$
إشارة $2x^2 - x - 1$		+	0	−	0	+	

وبالتالي مجموعة الحلول هي $(-\infty, -1/2)$ و $(1, +\infty)$



ISSN: 2617-989X

أسئلة الفصل

1. أوجد ناتج ما يلي:

a) $-(-1)^{10}$ b) $-(-3)^3$ c) $3^0 - 3^{-1}$

2. بسط كل مما يلي:

a) $\frac{2^{x+1}}{2^{x-1}}$ b) $\frac{3^{1-2x}}{6^{x+2}} \cdot \frac{2^{x+3}}{8}$ c) $log_2(x+1) - log_2(x^2+2x+1)$

3. بسط كل مما يلي:

a) $\frac{\sqrt[3]{x^2+y^6}}{\sqrt[6]{x^2+y^{18}}}$ b) $\frac{2x^{-5}}{15y^3} \cdot \frac{3^2x^3y}{10}$

4. حل المعادلات التالية:

a) $2^{x+1} = 64$ b) $4^{x+1} = (1/8)^x$ c) $9^x = 27^{2-2x}$

5. اكتب المعادلات التالية بدون استخدام اللوغاريتم:

a) $\ln P = 1.5 \ln Q + \ln T$ b) $\ln M = 1.2 - 0.5 \ln N$

6. حل المعادلات التالية:

a) $log_8 \sqrt[4]{x^2+7} = \frac{1}{3}$ b) $log_3(10x^2 - x - 2) = 2 + 2log_3 x$

c) $16^x - 5(8^x) = 0$

7. حل المعادلات التالية:

a) $\log(x-6) = \log(2-x)$ b) $-log_3(x+5) + log_3(-x+1) = log_3 2$

8. حل المعادلات التالية:

a) $\sqrt[3]{x^2} = 4$ b) $-2x^6 = x^{-2}$ c) $x^{-5} = 2x^3$

9. حل المتراجحات التالية:

a) $-x + 2 \le 3$ b) $2 < 3x + 4 \le 7$ c) $|1/3x - 2/5| < 3$

d) $|-2x + 16| > 1/2$ e) $-4 < \frac{2x-4}{3} \le 7$ f) $4 > |-0.5x - 2|$

10. ادرس إشارة كل من ثلاثي الحدود:

a) $-x^2 + 3x - 5$ b) $x^2 - x - 1$ c) $-x^2 + 6x - 9$

ISSN: 2617-989X

تمارين إضافية

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة

1. $\left(\frac{4}{9}\right)^{-1/2} =$

a) **3/2** b) 2/3 c) 16/81 d) 81/16

2. حل المعادلة $|2x-3| = 1$ هو:

a) **{1, 2}** b) {1} c) {2} d) {1, 2, 3}

3. حل المعادلة $\ln(x) = \ln(-x^2 + 6)$ هو

a) {-3, 2} b) {-3} **c) {2}** d) $\varnothing$

4. حل المتراجحة $|3x + 2| \geq 4$ هو

a) $x \geq 4/3$ b) $x \leq 0$ c) $x \in [0, 4/3]$ **d) $x \geq 4/3$ or $x \leq 0$**

5. إشارة $P(x) = x^2 - x + 1$ هي

a) $P(x) \leq 0$ b) $0 < P(x) < 3$ **c) $P(x) > 0$** d) $0 > P(x) > -3$

6. حل المتراجحة $x^2 < x + 6$ هو

a) $\varnothing$ b) $x < -2$ c) $x > 3$ **d) $x \in]-2, 3[$**

7. حل المتراجحة $x^2 - x + 5 < 0$ هو

a) $x > 0$ **b) $\varnothing$** c) $x < 0$ d) $\mathcal{R}$

8. مجموعة حلول المعادلة $log_3(10x^2 - x - 2) = 2 + 2log_3 x$ هي:

b) S={-1, 2} b) S={-1} c) S=$\varnothing$ **d) S={2}**

9. مجموعة حلول المعادلة $log_8 \sqrt[4]{x^2 + 7} = \frac{1}{3}$

a) S={3} b) S={-3} **c) S={-3, 3}** d) S=$\varnothing$

10. حل المتراجحة $2 < 3x + 4 \leq 7$ هو

a) $x > -2/3$ b) $x \leq 1$ c) $x \geq 1$ **d) $-2/3 < x \leq 1$**

السؤال الثاني: أجب بصح أو خطأ

1. العدد $0.\overline{27}$ هو عدد عادي — **صح** أو خطأ
2. العدد $\sqrt{\frac{4}{9}}$ هو عدد غير عادي — صح أو **خطأ**
3. $|3-\pi| = \pi - 3$ — **صح** أو خطأ
4. $(2+3)^2 = 2^2 + 3^2$ — صح أو **خطأ**
5. $\sqrt{16} = \pm 4$ — صح أو **خطأ**
6. $x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$ — **صح** أو خطأ
7. $\frac{\log 7}{\log \frac{1}{7}} = -1$ — **صح** أو خطأ
8. حل المعادلة $x^2 - x - 6 = 0$ هو $\{-2, 3\}$ — **صح** أو خطأ
9. حل المعادلة $2^{-x+1} = 1/8$ هو $x = 3$ — صح أو **خطأ**
10. حل المعادلة $3^x = 5^{1/x}$، $x \neq 0$ هو $x = \pm\sqrt{\frac{ln(3)}{ln(5)}}$ — **صح** أو خطأ

السؤال الثالث: ادرس إشارة كثيرات الحدود

b) $-x^2 + 3x - 5$ b) $x^2 - x - 1$ c) $-x^2 + 6x - 9$

الجواب:

- $-x^2 + 3x - 5$ دائماً سالب لأن مميزه أصغر من الصفر بالتالي إشارته من إشارة أمثال الحد x^2.
- $x^2 - x - 1$ له جذران هما $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$، بالتالي إشارته كما هو مبين في الجدول:

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
إشارة $x^2 - x - 1$		+	0	−	0	+	

- $-x^2 + 6x - 5$ له جذران هما 1 و 5، بالتالي إشارته كما هو مبين في الجدول:

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
إشارة $-x^2 + 6x - 5$		−	0	+	0	−	

الفصل الثالث: كثيرات الحدود
Chapter 3: Polynomials

الكلمات المفتاحية:

كثير حدود، خطي، تربيعي، تكعيبي، درجة كثير حدود، الحد الرئيسي، المعامل الرئيسي، خاصة تبديلية، خاصة تجميعية، خاصة توزيعية، قاسم مشترك، قاسم مشترك أعظمي، كثيري حدود أوليان، صفر كثير حدود، جذر كثير حدود ،جذر بسيط، جذر مضاعف عامل كثير حدود، تحليل كثير حدود، النظرية الأساسية في الجبر، كسر جبري، تفريق كسر جبري.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على كثيرات الحدود من الرتبة n والعمليات الأساسية عليها من جمع وطرح وضرب. كما يتم التعرف إلى حساب كثيرات الحدود بما فيها قسمة كثيري حدود وإيجاد القاسم المشترك الأعظم بينهما. كما نتطرق إلى تحليل كثيرات الحدود عن طريق الجذور والأصفار مع إعطاء بعض الأهمية إلى كثيرات الحدود الخطية والتربيعية والتكعيبية لما لها من أهمية. وأخيراً نتطرق إلى الكسور الجبرية وكيفية تبسيطها إلى مجموع كسور جزئية.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- كثيرات الحدود والعمليات الحسابية عليها (الجمع، الطرح، الضرب)
- حساب كثيرات الحدود (القسمة، القاسم المشترك الأعظمي، الأصفار والجذور، ...)
- تحليل كثيرات الحدود بشكل عام والخطية والتربيعية والتكعيبية بشكل خاص
- الكسور الجبرية وتفريقها إلى مجموع كسور جزئية

1. تعريف كثير الحدود Polynomial definition

تعريف 1: نسمي التابع $P(x)$ المعرف بالشكل: $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ كثير من حدود من الدرجة n بالنسبة للمتحول الحقيقي x، حيث أن n عدد صحيح موجب و $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ أعداد حقيقية تُسمى أمثال (معاملات) كثير الحدود، وأن المعامل $a_n \neq 0$.

- نسمي a_0 الحد الثابت في كثير الحدود، والحد الأعلى درجة a_nx^n يسمى الحد الرئيسي، وأمثاله a_n يسمى المعامل الرئيسي.
- عندما يكون كثير الحدود مرتب تنازلياً وبأبسط تعبير، نقول إنه مكتوب بالشكل المعياري أو القياسي.
- إذا كان المعامل الرئيسي $a_n = 1$ يسمى كثير الحدود واحدي.
- درجة كثير الحدود هي درجة أكبر أس لها.

الاسم	الدرجة	كثير الحدود
خطي	1	$ax + b,\ \ a \neq 0$
تربيعي	2	$ax^2 + bx + c,\ \ a \neq 0$
تكعيبي	3	$ax^3 + bx^2 + cx + d,\ \ a \neq 0$
الدرجة الرابعة	4	$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,\ \ a \neq 0$

مثال 1:

يبين الجدول التالي المعامل الرئيسي، الدرجة، الحدود والمعاملات لثلاث كثيرات حدود:

المعامل الرئيسي	المعاملات	الدرجة	الحدود	كثير الحدود
-3	-3, 8	1	-3x, 8	$8 - 3x$
2	2, -3, 5	2	$2x^2$, -3x, 5	$2x^2 - 3x + 5$
1 (واحدي)	1, 0, 5, -2	3	x^3, 5x, -2	$x^3 + 5x - 2$

ISSN: 2617-989X

مثال 2: توابع ليست كثيرات حدود:

$P(x) = 2x^{-2} + x^3 + 2$ $\qquad$ $P(x) = \sqrt{x} + x^2 + 1$ $\qquad$ $P(x) = x^{\sqrt{2}} + x + 1$

2. العمليات على كثيرات الحدود Polynomial operations

1-2.حساب قيمة كثير حدود عند قيمة معينة للمتغير Evaluating a polynomial

يتم حساب هذه القيمة بتعويض x بقيمتها في كثير الحدود.

مثال 3: احسب قيمة $P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 7$ عندما $x = \sqrt{2}$ وعندما $x = -3$.

$$P(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2})^3 - 6(\sqrt{2})^2 + 7 = 2(2\sqrt{2}) - 6(2) + 7 = 4\sqrt{2} - 5$$

$$P(-3) = 2(-3)^3 - 6(-3)^2 + 7 = 2(-27) - 6(9) + 7 = -54 - 54 + 7 = -101$$

2-2. تساوي كثيري حدود Equality of polynomials

نقول عن كثيري حدود أنهما متساويان إذا كان وفقط إذا كان لهما نفس الدرجة، وكان للحدود المتشابهة في كلا كثيري الحدود نفس المعاملات.

مثال 4:

- إذا كان $2x^3 + 3x^2 - 4x + 6 = ax^3 + bx^2 + cx + d$، فإنه: $a = 2$ و $b = 3$ و $c = -4$ وأخيراً $d = 6$
- أوجد الثوابت a, b, c ليكون $6x^3 + 7x^2 - 19x + 7 = (2x - 1)(ax^2 + bx + c)$.

$$6x^3 + 7x^2 - 19x + 7 = (2x - 1)(ax^2 + bx + c)$$
$$6x^3 + 7x^2 - 19x + 7 = 2ax^3 + 2bx^2 + 2cx - ax^2 - bx - c$$
$$6x^3 + 7x^2 - 19x + 7 = 2ax^3 + (2b - a)x^2 + (2c - b)x - c$$

وبالتالي فإن: $2a = 6$ و $2b - a = 7$ و $2c - b = -19$ و $7 = -c$

من المساواة الأولى والأخيرة ينتج $a = 3$ و $c = -7$، بتعويض $a = 3$ في $2b - a = 7$ نحصل على $b = 5$.

- إذا كان $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (كثير الحدود الصفري أو المعدوم)، فإن: $a = b = c = d = 0$.

3-2. جمع وطرح كثيرات الحدود Adding and subtracting polynomials

لجمع (أو طرح) كثيري حدود P(x) ذو الدرجة n و Q(x) ذو الدرجة m، نجمع (أو نطرح) الحدود المتشابهة. ودرجة كثير الحدود الناتج عن الجمع أو الطرح k يحقق العلاقة $k \leq \max(m, n)$، حيث $\max(m, n)$ ترمز إلى أكبر العددين m, n.

مثال 5:

- ليكن لدينا: $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ و $Q(x) = 2x^3 + x^2 - 11$. أوجد كل من: P(x) + Q(x) و P(x) - Q(x).

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (x^3 - 2x^2 + 3x - 5) + (2x^3 + x^2 - 11) \\ &= x^3 - 2x^2 + 3x - 5 + 2x^3 + x^2 - 11 \\ &= x^3 + 2x^3 - 2x^2 + x^2 + 3x - 5 - 11 \\ &= 3x^3 - x^2 + 3x + -16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= (x^3 - 2x^2 + 3x - 5) - (2x^3 + x^2 - 11) \\ &= x^3 - 2x^2 + 3x - 5 - 2x^3 - x^2 + 11 \\ &= x^3 - 2x^3 - 2x^2 - x^2 + 3x - 5 + 11 \\ &= -x^3 - 3x^2 + 3x + 6 \end{aligned}$$

- ليكن لدينا: $P(x) = -2x^2 + 3x - 5$ و $Q(x) = 2x^2 - 11$. أوجد: P(x) + Q(x).

$$P(x) + Q(x) = (-2x^2 + 3x - 5) + (2x^2 - 11) = 3x - 16$$

2-4.ضرب كثير حدود بعدد Scalar multiplication of polynomials

لضرب كثير حدود بعدد $c \neq 0$ نضرب كل حد من حدوده بالعدد. الناتج هو كثير حدود من نفس الدرجة.

مثال 6:

- ليكن كثير الحدود التالي: $P(x) = x^4 - 2x^3 + 4x - 5$، أوجد 3P(x) و -2P(x)

$$3P(x) = 3(x^4 - 2x^3 + 4x - 5) = 3x^4 - 6x^3 + 12x - 15$$
$$-2P(x) = -2(x^4 - 2x^3 + 4x - 5) = -2x^4 + 4x^3 - 8x + 10$$

2-5.ضرب كثيرات الحدود Multiplying polynomials

لضرب كثيري حدود P(x) ذو الدرجة n و Q(x) ذو الدرجة m، نضرب كل حد من كثيرات الحدود الأول بكل حد كثيرات الحدود الثاني ومن ثم تجميع الحدود المتشابهة. ودرجة كثير الحدود الناتج عن الضرب k يحقق العلاقة التالية: k = n + m.

مثال 7:

ليكن لدينا: $P(x) = x^3 - 2x + 5$ و $Q(x) = 2x^2 + 3x - 4$. أوجد P(x)Q(x)

$$\begin{aligned} P(x)Q(x) &= (x^3 - 2x + 5)(2x^2 + 3x - 4) \\ &= x^3(2x^2 + 3x - 4) - 2x(2x^2 + 3x - 4) + 5(2x^2 + 3x - 4) \\ &= 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 4x^3 - 6x^2 + 8x + 10x^2 + 15x - 20 \\ &= 2x^5 + 3x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 23x - 20 \end{aligned}$$

2-6. خواص عمليتي الجمع والضرب لكثيرات الحدود Adding and multiplying polynomials properties

ليكن لدينا كثيرات الحدود $P(x), Q(x), R(x)$، فإنه لدينا الخواص التالية:

- الخاصة التبديلية:

$P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x)$

$P(x)Q(x) = Q(x)P(x)$

مثال 8:

$(3x^2 + 5x +2) + (7x^3 + x) = 7x^3 + 3x^2 + 6x + 2 = (3x^2 + 5x +2) + (7x^3 + x).$

$(4x5 - \frac{1}{2}x +3)(8x - 2) = 32x^6 - 8x^5 - 4x^2 + 25x -6 = (8x - 2)(4x5 - \frac{1}{2}x +3).$

- الخاصة التجميعية:

$P(x) + [Q(x) + R(x)] = [P(x) + Q(x)] + R(x)$

$P(x)[Q(x)R(x)] = [P(x)Q(x)]P(x)$

مثال 9:

$(2x + 1) + [(x^4 - 6x) + (5x + 17)] = (2x + 1) + (x^4 - x +17) = x^4 + x + 18$
$[(2x + 1) + (x4 - 6x)] + (5x + 17) = (x^4 - 4x + 1) + (5x +17) = x^4 + x + 18.$

$(x - 1)[(x + 1)(x + 2)] = (x - 1)(x^2 + 3x + 2) = x^3 + 3x^2 + 2x - x^2 - 3x - 2 = x^3 + 2x^2 - x - 2$
$[(x - 1)(x + 1)](x + 2) = (x^2 - 1)(x + 2) = x^3 + 2x^2 - x - 2 = x^3 + 2x^2 - x - 2$

- الخاصة التوزيعية:

$P(x)[Q(x) + R(x)] = P(x)Q(x) + P(x)R(x)$

$[P(x) + Q(x)]R(x) = P(x)R(x) + Q(x)R(x)$

مثال 10:

$(x + 1)[(x^4 - 4x) + (3x + 2)] = (x + 1)(x^4 - x + 2) = x^5 - x^2 + 2x + x^4 - x + 2 =$
$= x^5 + x^4 - x^2 + x + 2$

$(x + 1)(x^4 - 4x) + (x + 1)(3x + 2) = x^5 - 4x^2 + x^4 - 4x + 3x^2 + 2x + 3x +2 =$
$= x^5 + x^4 - x^2 + x + 2$

3- حساب كثيرات الحدود Polynomial arithmetic

3-1. قسمة كثيرات الحدود Dividing polynomials

إن قسمة كثيرات حدود يشبه القسمة في الأعداد الصحيحة، فكما نعلم أنه عندما نقسم العدد 37 على العدد 5 يكون الناتج (حاصل القسمة) 7 والباقي 2، أي أننا نكتب $37 = 5(7) + 2$.

تعريف 2: ليكن $P(x), Q(x)$ كثيري حدود، نقول أن كثير الحدود $Q(x)$ يقسم $P(x)$ إذا وجد كثير حدود $D(x)$ بحيث $P(x) = D(x)Q(x)$، حيث أن باقي القسمة $R(x) = 0$. ونرمز لها بالرمز $Q(x)|P(x)$.

ونقول أيضاً أن $P(x)$ هو من مضاعفات $Q(x)$ أو أن $P(x)$ قابل للقسمة على $Q(x)$.

نتيجة 1: من العلاقة $P(x) = Q(x)D(x)$ يمكن القول أن كل من $Q(x)$ و $D(x)$ يقسم $P(x)$.

عملية القسمة لكثيري حدود ممكنة في حال كون درجة المقسوم $P(x)$ أكبر أو تساوي درجة المقسوم عليه $Q(x)$.

لقسمة كثيري حدود $P(x)/Q(x)$، $Q(x) \neq 0$ نقوم بما يلي:

1. نرتب كلاً من المقسوم والمقسوم عليه ترتيباً تنازلياً (من الأس الأكبر إلى الأس الأصغر) ونضعهما على الشكل التالي ($Q(x) = x - 1$ و $P(x) = x^2 - 3x + 2$):

$$\begin{array}{r|l} x-1 & \overline{x^2 - 3x + 2} \end{array}$$

2. نقسم الحد الرئيسي من المقسوم على الحد الرئيسي من المقسوم عليه نجد بالنسبة للمثال $x^2/x = x$، ويكون الناتج هو الحد الرئيس من ناتج القسمة:

$$\begin{array}{r|l} & x \\ x-1 & \overline{x^2 - 3x + 2} \end{array}$$

3. نضرب ناتج القسمة x في المقسوم عليه $x - 1$ ونكتب الناتج تحت المقسوم مع مراعاة تناظر الحدود المتشابهة ثم نطرحه من المقسوم:

$$\begin{array}{r|l} & x \\ x-1 & \overline{x^2 - 3x + 2} \\ & -(x^2 - x) \\ \hline & 0 - 2x + 2 \end{array}$$

4. نتعامل مع ناتج الطرح $-2x+2$ كمقسوم جديد حيث نلاحظ لأن درجته تساوي درجة المقسوم عليه ثم نكرر الخطوة رقم 2 والخطوة رقم 3:

$$\begin{array}{r|l} & x-2 \\ \hline x-1 & x^2-3x+2 \\ & -(x^2-x) \\ \hline & 0-2x+2 \\ & -(2x+2) \\ \hline & 0+0 \end{array}$$

فيكون ناتج القسمة $x-2$، وباقي القسمة 0. وبالتالي يمكن كتابة $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$.

- درجة كثير الحدود المقسوم = درجة كثير الحدود المقسوم عليه + درجة كثير الحدود ناتج القسمة.
- باقي القسمة إما أن يساوي صفراً أو كثير حدود درجته أقل من درجة المقسوم عليه.
- تتوقف عملية القسمة بمجرد أن تصبح درجة باقي القسمة أقل من درجة المقسوم عليه.
- تُكتب مخرجات القسمة كما يلي: المقسوم = المقسوم عليه x ناتج القسمة + باقي القسمة. أي على الشكل التالي: $P(x)=D(x).Q(x)+R(x)$، حيث $D(x)$ هو ناتج تقسيم $P(x)$ على $Q(x)$ و $R(x)$ باقي القسمة. نسمي عملية القسمة هذه بالقسمة الإقليدية.

مثال 11: أوجد قسمة $2x^3+7x^2+10x+15$ على $x+2$

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2+3x+4 \\ \hline x+2 & 2x^3+7x^2+10x+15 \\ & -(2x^3+4x^2) \\ \hline & 3x^2+10x \\ & -(2x^2+6x) \\ \hline & 4x+15 \\ & -(4x+8) \\ \hline & 7 \end{array}$$

بالتالي: $2x^3+7x^2+10x+15=(2x^2+3x+4)(x+2)+7$

أو بشكل آخر: $\frac{2x^3+7x^2+10x+15}{x+2}=(2x^2+3x+4)+\frac{7}{x+2}$

2-3. القاسم المشترك والقاسم المشترك الأعظمي Polynomial greatest common divisor

تعريف 3: إذا كان لدينا كثيري حدود $P_1(x)$ و $P_2(x)$، نقول عن كثير حدود $Q(x)$ أنه قاسم مشترك لكثيري الحدود $P_1(x)$ و $P_2(x)$ إذا كان قاسماً لكل من $P_1(x)$ و $P_2(x)$ أي يوجد كثيري حدود $D_1(x)$ و $D_2(x)$ بحيث يكون:

$$P_1(x) = Q(x).D_1(x)$$
$$P_1(x) = Q(x).D_2(x)$$

كما نسمي $Q(x)$ قاسم مشترك أعظم لكثيري الحدود $P_1(x)$ و $P_2(x)$ إذا كان يقبل القسمة على كل قاسم مشترك آخر $Q_i(x)$ لكثيري الحدود $P_1(x)$ و $P_2(x)$. أو هو كثير حدود واحدي بأكبر درجة يقسم كل من $P_1(x)$ و $P_2(x)$.

مثال 12:

ليكن لدينا: $P_1(x) = (x-1)^3(x^2+x+1)$ و $P_2(x) = (x-1)^2(x+1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$. كثير الحدود $x - 1$ قاسم مشترك لكل من $P_1(x)$ و $P_2(x)$، كما أن $(x-1)^2$ قاسم مشترك لهما وهو القاسم المشترك الأعظم.

تعريف 4: نقول عن كثيري حدود $P(x)$ و $Q(x)$ أنهما أوليان فيما بينهما إذا كان القاسم المشترك الأعظم لهما يساوي الواحد (كثير الحد الثابت والمساوي للواحد).

مثال 13: كثيري الحدود $x^2 + 1$ و $x + 1$ أوليان فيما بينهما. بينما كثيري الحدود $x^2 + x + 1$ و $x^3 - 1$ غير أوليان فيما بينهما لأن $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ وبالتالي فإن $x - 1$ هو قاسم مشترك أعظمي لهما.

3-3. الخواص الأساسية لقسمة كثيرات الحدود Dividing polynomials properties

- إذا كان $P(x)$ يقبل القسمة على $Q(x)$ وكان $Q(x)$ يقبل القسمة على $D(x)$، فإن $P(x)$ يقبل القسمة على $D(x)$.

مثال 14: ليكن لدينا كثيرات الحدود

$$P(x) = 2x^4 - 4x^2 + 2 = 2(x-1)^2(x+1)^2$$
$$Q(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$
$$D(x) = (x - 1)$$
$$P(x)/Q(x) = 2(x-1)(x+1) = 2x^2 - 2$$
$$Q(x)/D(x) = x + 1$$
$$P(x)/D(x) = 2(x-1)(x+1)^2 = 2x^3 + 2x^2 - 2x - 2$$

- إذا كان $P(x)$ يقبل القسمة على $Q(x)$ وكان $Q(x)$ يقبل القسمة على $P(x)$، فإن العلاقة التالية محققة:

$$P(x) = c.Q(x);\ c \neq 0$$

مثال 15: ليكن لدينا كثيرات الحدود

$$P(x) = 2x^2 - 4x + 2 = 2(x-1)^2$$
$$Q(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$
$$P(x)/Q(x) = 2$$
$$Q(x)/P(x) = 1/2$$
$$P(x) = 2Q(x)$$

- إذا كان $P(x)$ يقبل القسمة على $Q(x)$، فإن جداء $P(x)$ بأي كثير حدود يقبل القسمة على $Q(x)$.

مثال 16: ليكن لدينا كثيرات الحدود

$$P(x) = 2x^2 - 4x + 2 = 2(x-1)^2$$
$$Q(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$
$$P(x)/Q(x) = 2$$
$$(x+1)P(x)/Q(x) = 2(x+1)$$

- إذا كان كل من $P_1(x)$ و $P_2(x)$ يقبل القسمة على $Q(x)$، فإن مجموعهما وفرقهما وجدائهما يقبل القسمة على $Q(x)$.

مثال 17: ليكن لدينا كثيرات الحدود

$$P_1(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x-1)^2(x+1)^2$$
$$P_2(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$
$$Q(x) = (x-1)$$
$$P_1(x)/Q(x) = (x-1)(x+1)^2 = x^3 + x^2 - x - 1$$
$$P_2(x)/Q(x) = x + 1$$
$$P_1(x) + P_2(x) = x^4 - x^2 = x^2(x^2-1) = x^2(x-1)(x+1)$$
$$P_1(x) - P_2(x) = x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2-2)(x^2-1) = (x^2-2)(x-1)(x+1)$$
$$P_1(x)P_2(x) = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 = (x-1)^3(x+1)^3$$

من الواضح أن كل من المجموع $P_1(x) + P_2(x)$ والفرق $P_1(x) - P_2(x)$ والجداء $P_1(x)P_2(x)$ يحوي على العامل المشترك $x - 1$ وبالتالي يقبل القسمة على $Q(x)$.

4- أصفار وجذور كثيرات الحدود Polynomial zeros (roots)

تعريف 5: نسمي صفر كثير حدود قيمة للمتحول x التي تجعل كثير الحدود مساوياً للصفر. جذور معادلة كثير الحدود هي قيم المتحول x والتي تمثل حلولاً للمعادلة $P(x) = 0$.

- جذور المعادلة $P(x) = 0$ هي أصفار $P(x)$.
- a صفر لكثير الحدود $P(x)$ $\Leftrightarrow$ $P(a) = 0$.
- a جذر لـ $P(x) = 0$ $\Leftrightarrow$ $P(a) = 0$
- $x - a$ عامل لكثير الحدود عندما يكون $x - a$ أحد مضاريبها لما تكتب على شكل جداء مضاريب.

مثال 18: أوجد جذور كثير الحدود $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$.

يوجد 3 جذور: $x = 2$, $x = -1$, $x = 1$. المقادير $x - 1$ و $x + 1$ و $x - 2$ كل منها عامل لكثير الحدود $P(x)$.

مبرهنة 1 (مبرهنة الباقي): إن باقي قسمة كثير الحدود $P(x)$ على كثير الحدود الخطي $(x-a)$ يساوي قيمة كثير الحدود $P(x)$ من أجل $x = a$.

مثال 19: ليكن $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 4$ و $Q(x) = x - 2$. أوجد نواتج قسمة $P(x)$ على $Q(x)$، ومن ثم تحقق من مبرهنة الباقي.

الحل: إن باقي قسمة $P(x)$ على $x - 2$ هو: $P(2) = (2)^3 + 2(2)^2 - 3(2) - 4 = 8 + 8 - 6 - 4 = 6$.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 4x + 5 \\
\hline
x - 2 & x^3 + 2x^2 - 3x - 4 \\
 & -(x^3 - 2x^2) \\
\hline
 & \quad 4x^2 - 3x \\
 & \quad -(4x^2 - 8x) \\
\hline
 & \qquad 5x - 4 \\
 & \qquad -(5x - 10) \\
\hline
 & \qquad\quad 6
\end{array}
$$

بالتالي: $x^3 + 2x^2 - 3x - 4 = (x^2 + 4x + 5)(x - 2) + 6$.

من الواضح أن باقي القسمة هو 6.

مبرهنة 2 (مبرهنة العامل): $(x - a)$ عامل لكثير الحدود $P(x)$ $\Leftrightarrow$ يوجد كثير حدود $Q(x) \neq 0$ بحيث أن $P(x) = (x - a)Q(x)$.

يمكن صياغة مبرهنة العامل بشكل آخر: يكون العدد a صفراً لكثير الحدود $P(x)$ إذا وفقط إذا كان $x - a$ عاملاً لـ $P(x)$.

مثال 20:

- بين أن $x-2$ عامل لكثير الحدود $P(x) = x^3 - x^2 - 3x + 2$.

لنحسب $P(2) = (2)^3 - (2)^2 - 3(2) + 2 = 8 - 4 - 6 + 2 = 0$، وبالتالي فإن $x-2$ يكون عاملاً ل $P(x)$.

- أوجد قيمة k التي تجعل $x + 3$ عاملاً لكثير الحدود $P(x) = 2x^3 + 7x^2 - k$.

ليكون $x + 3$ عاملاً لكثير الحدود $P(x)$ يجب أن يتحقق $P(-3) = 0$.

$P(-3) = 9 - k$ وبالتالي $9 - k = 0$، أي $k = 9$.

مبرهنة 3: إذا كان كثير الحدود $P(x)$، و a عدداً حقيقياً، فإن المفاهيم التالية متكافئة:

1. a صفر ل $P(x)$.
2. $x = a$ حلاً (جذراً) للمعادلة $P(x) = 0$.
3. $x - a$ أحد عوامل $P(x)$.
4. $x = a$ فاصلة النقطة التي يتقاطع فيها منحني التابع كثير الحدود مع المحور x.

مثال 21:

أوجد القية k التي تجعل $x - 2$ عاملاً لكثير الحدود $P(x) = x^3 + kx^2 - 3x + 6$. ومن ثم حلل $P(x)$ إلى عوامل خطية.

بما أن $x - 2$ عاملاً ل $P(x)$ فإن $P(2) = 0$.

$P(2) = (2)^3 + k(2)^2 - 3(2) + 6 = 8 + 4k - 6 + 6 = 0$. وبالتالي $k = -2$.

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = (x-2)(ax^2 + bx - 3) = ax^3 + bx^2 - 3x - 2x^2 - 2bx + 6$$
$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = ax^3 + (b-2)x^2 + (-2-2b)x + 6$$

بمساواة أمثال x^3 نحصل على $a = 1$، وبمساواة أمثال x^2 نحصل على $b - 2 = -2$ وبالتالي $b = 0$.

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = (x-2)(x^2 - 3) = (x-2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$$

تعريف 6: إذا كان العدد a صفراً لكثير الحدود $P(x)$، أي $x - a$ عامل ل $P(x)$. عدد المرات التي يظهر فيها هذا العامل يسمى تكرار الصفر.

يقال أن الصفر a لكثير الحدود $P(x)$ له التكرار m إذا وجد كثير حدود $Q(x) \neq 0$ تحقق العلاقة التالية:

$$P(x) = (x-a)^m Q(x)$$

يسمى الصفر الذي له التكرار $m = 1$ صفراً بسيطاً، والتكرار $m = 2$ صفراً مضاعفاً.

مثال 22:

كثير الحدود $P(x) = x^4(x-2)^3(x+1)^2(x+5)$ له الأصفار التالية: 0 تكرار 4، 2 تكرار 3، 1- صفر مضاعف وأخيراً 5- صفر بسيط.

-5 تحليل كثير الحدود Factoring Polynomials

- ليكن كثير الحدود $P(x) = x^3 - 7x + 6$، بين أن $P(1) = 0$ ومن ثم حلّل $P(x)$ إلى جداء عوامل خطية.

الحل: $P(1) = (1)^3 - 7(1) + 6 = 0$، وبالتالي حسب مبرهنة العامل فإن $x - 1$ عامل ل $P(x)$.

باستخدام عملية القسمة ل $P(x)$ على $x - 1$ نجد أن:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + x - 6 \\
\hline
x - 1 & x^3 - 7x + 6 \\
 & -(x^3 - x^2) \\
\hline
 & \quad x^2 - 7x \\
 & \quad -(x^2 - x) \\
\hline
 & \qquad -6x + 6 \\
 & \qquad -(6x - 6) \\
\hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$P(x) = (x - 1)(x^2 + x - 6) = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$

- ليكن كثير الحدود $P(x) = x^3 - 1$، بين أن $P(1) = 0$ واستفد منها في تحليل $P(x)$ إلى جداء عوامل.

الحل: $P(1) = (1)^3 - 1 = 0$، وبالتالي حسب مبرهنة العامل فإن $x - 1$ عامل ل $P(x)$.

باستخدام عملية القسمة ل $P(x)$ على $x - 1$ نجد أن:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + x + 1 \\
\hline
x - 1 & x^3 - 1 \\
 & -(x^3 - x^2) \\
\hline
 & \quad x^2 - 1 \\
 & \quad -(x^2 - x) \\
\hline
 & \qquad x - 1 \\
 & \qquad -(x - 1) \\
\hline
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

$P(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

النظرية الأساسية في الجبر

كل كثير حدود هو عبارة عن مضاريب (جداء) عدد حقيقي، ومجموعة من كثيرات الحدود التربيعية الواحدية والتي ليس لها جذور، وكثيرات حدود خطية واحدية.

مثال 23:

- $4x^2 - 12x + 8 = 4(x - 1)(x - 2)$
- $-x^5 + 2x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 10x + 20 = -(x - 2)(x^2 + 2)(x^2 + 5)$

من الملاحظ أن كثيري الحدود $x^2 + 2$ و $x^2 + 5$ ليس لهما جذور حقيقية.

- $2x^4 - 2x^3 + 14x^2 - 6x + 24 = 2(x^2 + 3)(x^2 - x + 4)$

1-5. تحليل كثير الحدود الخطي Factoring first degree polynomials

لتحليل كثير حدود خطي، نضع المعامل الرئيسي خارجاً: $ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right)$

مثال 24: $2x + 6 = 2(x + 3)$

2-5. تحليل كثير الحدود التربيعي Factoring second degree polynomials

يعتمد تحليل كثير الحدود التربيعي على عدد جذوره.

1. لا جذور له. إذا لم يكن لكثير الحدود التربيعي $ax^2 + bx + c$ أي جذر، يتم تحليله بإخراج المعامل الرئيسي:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

مثال 25:

كثير الحدود $4x^2 - 2x + 2$ ليس له جذور لأن مميزه $\Delta = (-2)^2 - 4(4)(2) = 4 - 32 = -28 < 0$، لذلك تحليله هو: $4\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)$.

2. له جذران. إذا كان لكثير الحدود التربيعي $ax^2 + bx + c$ جذران x_1, x_2، تعطي الجذور معاملات خطية، لذلك فإن $x - x_1$ و $x - x_2$ تشكل معاملات لكثير الحدود $ax^2 + bx + c$. هذا يعني أن:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

مثال 26:

كثير الحدود $2x^2 + 4x - 6$ له جذران لأن مميزه $\Delta = (4)^2 - 4(2)(-6) = 16 + 48 = 64 > 0$، وجذراه هما: $\frac{-4+\sqrt{64}}{2(2)} = 1$ و $\frac{-4-\sqrt{64}}{2(2)} = -3$، لذلك تحليله هو: $4(x - 1)(x + 3)$.

ملاحظة 1: في حالة كثير الحدود له جذران

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2]$$

وبالتالي فإن العلاقة التي تربط جذرا المعادلة بمعاملات كثير الحدود من الدرجة الثانية هي:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ و } x_1.x_2 = \frac{c}{a}$$

3. له جذر واحد مضاعف. إذا كان لكثير الحدود التربيعي $ax^2 + bx + c$ جذر مضاعف x_1، تعطي الجذور معاملات خطية، لذلك فإن $x - x_1$ و $x - x_1$ تشكل معاملات لكثير الحدود $ax^2 + bx + c$. هذا يعني أن:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_1) = a(x - x_1)^2$$

مثال 27:

كثير الحدود $3x^2 - 6x + 3$ له جذر مضاعف لأن مميزه $\Delta = (-6)^2 - 4(3)(3) = 36 - 36 = 0$، وجذره هو: $\frac{-(-6)}{2(3)} = 1$ ، لذلك تحليله هو: $3(x-1)^2$.

تذكرة: عوامل العدد الصحيح n هي كافة الأعداد الصحيحة k بحيث يكون $n = mk$، و m عدد صحيح أيضاً.

مثال 28:

- $12 = 3x4$ وبالتالي العدد 4 هو عامل للعدد 12. (عوامل العدد 12 هي $\mp1, \mp2, \mp3, \mp4, \mp6, \mp12$).
- $-30 = -2x15$ وبالتالي 15 هو عامل للعدد -30.
- الأعداد $1, -1, n, -n$ كلها عوامل للعدد n وذلك لأن $n = n.1$ و $n = (-n)(-1)$.

حالة خاصة هامة: إذا كان $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{Z}$، بالتالي فإن كل عدد من هذه الأعداد هو عامل لجداء هذه الأعداد $x_1 x_2 \dots x_n$. على سبيل المثال كل من الأعداد 2, 3, 5 هو عامل للجداء $30 = 2x3x5$.

مبرهنة 4: إذا كان P(x) كثير حدود من الدرجة n وكان a_n هو المعامل الرئيسي لها. فإذا كانت الأعداد الحقيقية $x_1, x_2, \dots, x_n$ أصفاراً لها فإن: $P(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$.

مثال 29:

- أوجد كثير حدود من الدرجة الرابعة أصفاره 2 ,2- ,1 ,1- ومعاملها الرئيسي $a = 2$.

$$P(x) = 2(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$$
$$P(x) = 2(x^2-1)(x^2-4) = 2(x^4-4x^2-x^2+4)$$
$$P(x) = 2(x^4-5x^2+4) = 2x^4-10x^2+8$$

- أوجد كثير حدود من الدرجة الخامسة أصفاره 1- مضاعف، 1 مضاعف و 2 بسيط ومعاملها الرئيسي $a = 1$

$$P(x) = (x-1)^2(x+1)^2(x-2) = (x^2-1)^2(x-2)$$
$$P(x) = (x^4-2x^2+1)(x-2) = x^5-2x^3+x-2x^4+4x^2-2$$
$$P(x) = x^5-2x^4-2x^3+4x^2+x-2$$

ليكن لدينا كثير الحدود P(x):

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

إن الحد الثابت في كثير الحدود يوافق القيمة صفر للمتحول x، أي أن $a_0 = a_n(-x_1)(-x_2)\dots(-x_n)$، وبالتالي إذا كانت جذور كثير الحدود أعداد صحيحة $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{Z}$ فإن أياً من هذه الجذور هو عامل للحد الثابت a_0.

نتيجة 2: عند البحث عن جذور كثير حدود $P(x)$ معاملاته أعداد صحيحة، نختبر عوامل الحد الثابت a_0.

مثال 30:

- ليكن لدينا كثير الحدود من الدرجة الثانية $2x^2 + 8x - 42 = 2(x - 3)(x + 7)$، له الجذران $3, -7$ وهما من عوامل الحد الثابت -42.
- ليكن لدينا كثير الحدود من الدرجة الرابعة $P(x) = 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 6$.

للبحث عن جذور كثير الحدود نبحث عن عوامل الحد الثابت -6 وهي: $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$. لنجرب القيم الثمانية فيما إذا كانت جذراً أم لا

$$P(1) = 3(1)^4 + 3(1)^3 - 3(1)^2 + 3(1) - 6 = 3 + 3 - 3 + 3 - 6 = 0$$
$$P(-2) = 3(-2)^4 + 3(-2)^3 - 3(-2)^2 + 3(-2) - 6 = 48 - 24 - 12 - 6 - 6 = 0$$
$$P(-1) = 3(-1)^4 + 3(-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) - 6 = 3 - 3 - 3 - 3 - 6 = -12 \neq 0$$
$$P(2) \neq 0 \qquad P(3) \neq 0 \qquad P(-3) \neq 0 \qquad P(6) \neq 0 \qquad P(-6) \neq 0$$

وبالتالي فإن $1, -2$ هما جذران لكثير الحدود $P(x)$. أي أن $P(x) = 3(x - 1)(x + 2)Q(x)$، حيث $Q(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية. وبإجراء قسمة $P(x)$ على $(x - 1)(x + 2)$ ينتج $3Q(x) = 3(x^2 + 1)$. أي أن:

$$P(x) = 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 6 = 3(x - 1)(x + 2)(x^2 + 1)$$

3-5. تحليل كثير الحدود التكعيبي Factoring third degree polynomials

حسب النظرية الأساسية في الجبر فإن كثير الحدود من الدرجة الثالثة إما أن يكون جداء عدد حقيقي ثابت وثلاث كثيرات حدود خطية، أو جداء عدد حقيقي ثابت وكثير حدود خطي وآخر تربيعي ليس له جذور حقيقية. في كلا الحالتين كثير حدود من الدرجة الثالثة لديه على الأقل كثير حدود خطي واحد أي على الأقل جذر واحد والذي يمكن تخمينه باستخدام عوامل الحد الثابت. وبعد إيجاد أحد الجذور نضعه عاملا ونقوم بعملية التقسيم عليه فنحصل عندها على كثير حدود من الدرجة الثانية نقوم عندها بتحليله وبالتالي نحصل على تحليل كثير الحدود التكعيبي.

مثال 31:

- حلل كثير الحدود $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 3$

لنبدأ بتخمين الجذر. الحد الثابت هو -3، وبالتالي الجذر هو أحد العوامل: $1, -1, 3, -3$. بالتجريب نجد أن $P(1) = 0$، نقسم الآن $P(x)$ على $x - 1$ نحصل على كثير الحدود التربيعي $2x^2 - x + 3$. ومميز المعادلة التربيعية هو $(-1)^2 - 4(2)(3) = 1 - 24 = -23 < 0$، وبالتالي ليس لها جذور، ولكن يمكن إخراج المعامل الرئيسي لتصبح على الشكل التالي: $2x^2 - x + 3 = 2(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2})$. مما سبق نستنتج أن تحليل كثير الحدود التكعيبي هو:

$$2x^3 - 3x^2 + 4x - 3 = 2(x - 1)(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2})$$

- حلل كثير الحدود $P(x) = 3x^3 - 3x^2 - 15x + 6$

لنبدأ بتخمين الجذر. الحد الثابت هو 6، وبالتالي الجذر هو أحد العوامل: $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$. بالتجريب نجد أن $P(-2) = 0$، نقسم الآن $P(x)$ على $x + 2$ نحصل على كثير الحدود التربيعي $3x^2 - 9x + 3$. ومميز المعادلة التربيعية هو $(-9)^2 - 4\,(3)(3) = 81 - 36 = 45 > 0$، وبالتالي لها جذران: $\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{9+\sqrt{45}}{2(3)}$ و $\frac{9-\sqrt{45}}{2(3)} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. وبالتالي فإن $3x^2 - 9x + 3 = 3(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2})(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2})$. مما سبق نستنتج أن تحليل كثير الحدود التكعيبي هو:

$$3x^3 - 3x^2 - 15x + 6 = 3(x + 2)\,(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2})(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2})$$

6- الكسور الجبرية Rational function

تعريف 7: الكسر الجبري هو عبارة جبرية من الشكل التالي $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$، حيث $P(x)$ و $Q(x)$ هما كثيرا حدود و $Q(x) \neq 0$.

مثال 32:

$$F(x) = \frac{3x+2}{2x-3} \qquad\qquad F(x) = \frac{x^2-2x+3}{x^2+5x+8}$$

6-1. تفريق الكسر الجبري إلى مجموع كسور جزئية Partial fraction decomposition

نفرض هنا أن عوامل كثير الحدود $Q(x)$ هي كثيرات حدود خطية غير مكررة و/أو كثيرات حدود تربيعية (مميزها سالب) غير مكررة.

مبرهنة 5: ليكن $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ كسر الجبري، بالتالي يُمكن كتابة $F(x)$ بطريقة وحيدة كما يلي:

- جزء عبارة عن كثير حدود $E(x)$ وهو عبارة عن حاصل قسمة $P(x)$ على $Q(x)$.
- كسور جزئية من الشكل $\frac{a}{x-x_i}$، x_i جذر بسيط ل $Q(x)$.
- كسور جزئية من الشكل $\frac{ax+b}{x^2+cx+d}$.

حيث $x - a$ و $x^2 + cx + d$ هي عوامل ل $Q(x)$.

إذا كان لكثير الحدود $Q(x)$ فقط عوامل كثيرات حدود خطية غير مكررة

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

فإن الكسر الجبري $F(x)$ يكتب على الشكل التالي:

$$F(x) = E(x) + \frac{a_1}{x-x_1} + \frac{a_2}{x-x_2} + \dots + \frac{a_n}{x-x_n}$$

مثال 33:

- فرق الكسر الجبري $\frac{x^5-6x^3+8x^2-14x+7}{x^3-7x+6}$

  - الخطوة الأولى: تحديد كثير الحدود E(x) حاصل قسمة P(x) على Q(x). بعد القيام بالقسمة نحصل على $\frac{P(x)}{Q(x)} = x^2+1+\frac{2x^2-7x+6}{Q(x)}$.وبالتالي فإن: $E(x) = x^2 + 1$.
  - الخطوة الثانية: تحليل كثير الحدود Q(x). وجدنا سابقاً أن $Q(x) = (x-1)(x-2)(x+3)$.
  - الخطوة الثالثة: تفريق الكسر إلى مجموع كسور جزئية نظرياً: $\frac{P(x)}{Q(x)} = x^2+1+\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{x+3}$. بقي علينا إيجاد الثوابت a, b, c.
  - الخطوة الرابعة: لتعيين الثوابت a, b, c نأخذ المعادلة (*) $\frac{2x^2-7x+6}{(x-1)(x-2)(x+3)} = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{x+3}$، لتعيين a نضرب طرفي العلاقة (*) بالمقدار $x-1$ ونعطي x القيمة 1 فنجد $a = 1$. لتعيين b نضرب طرفي العلاقة (*) بالمقدار $x-2$ ونعطي x القيمة 2 فنجد $b = -1$. لتعيين c نضرب طرفي العلاقة (*) بالمقدار $x+3$ ونعطي x القيمة 3- فنجد $c = 2$. ينتج لدينا:

$$\frac{x^5-6x^3+8x^2-14x+7}{x^3-7x+6} = x^2+1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+3}$$

- فرق الكسر الجبري $\frac{-x^2-6x-2}{x^3-1}$

بما أن درجة البسط أصغر من درجة المقام ينتج أن $E(x) = 0$. وبالتالي فإن:

$$\frac{-x^2-6x-2}{x^3-1} = \frac{-x^2-6x-2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

لتعيين a نضرب طرفي العلاقة بالمقدار $x-1$ ونعطي x القيمة 1 فنجد $a = -3$. لتعيين b نضرب طرفي العلاقة بالمقدار x ونجعل x تسعى إلى اللانهاية فنجد $b = 2$. لتعيين قيمة c نعطي x القمة 0 فنجد $c = -1$.

$$\frac{-x^2-6x-2}{x^3-1} = \frac{-3}{x-1}+\frac{2x-1}{x^2+x+1}$$

أسئلة الفصل

1. ليكن $P(x) = (x + 1)^3$ و $Q(x) = (x - 1)^3$ و $R(x) = x + 2$.
   a) احسب $P + Q$ و $P - Q$ و PQ و $PR - 2Q$
   b) ما هي درجة كل من $P + Q$ و $P - Q$ و PQ.
2. أوجد كثير الحدود P درجته أصغر أو تساوي 3 بحيث: $P(0) = 1$ و $P(1) = 0$ و $P(-1) = -2$ و $P(2) = 4$.
3. احسب نواتج القسمة لكثير الحدود $P(x) = x^5 - 2x^4 + 6x^3$ بكثير الحدود $Q(x) = 2x^3 + 1$.
4. أوجد قواسم كثير الحدود $x^4 + 2x^2 + 1$.
5. برهن أن $(x - 1) | x^n - 1$ من أجل $n \geq 1$.
6. هل $x^2 - x + 1$ و $x^3 + 1$ أوليان فيما بينهما؟
7. أوجد كثير الحدود $P(x)$ له الأصفار التالية: 2 مضاعف، 1 تكرار 3، 1- مضاعف وقيمة كثير الحدود من أجل القيمة $x = 0$ تساوي 8-.
8. ليكن لدينا $P(x) = x^4 - 3x^3 - 8x + 24$.
   a) أثبت أن $P(x)$ يقبل القسمة على $x - 3$.
   b) $x + 3$ ليس عاملاً من عوامل $P(x)$.
9. حلل كثيرات الحدود التالية:

a) $-2x + 5$

b) $10x^2 + 3$

c) $-2x^2 + 6x - 3$

d) $5x^2 + 3x =2$

e) $-x^3 - x^2 + x + 1$

f) $4x^3 - 20x^2 + 25x -3$

g) $x^4 - 5x^2 + 4$

10. حلل كل من $P(x) = (2x^2 + x - 2)^2(x^4 - 1)^3$ و $Q(x) = 3(x^2 - 1)^2(x^2 - x + 1/4)$. استنتج القاسم المشترك الأعظمي لهما.
11. فرق الكسور الجبرية التالية:

a) $\frac{1}{x^2-1}$ b) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ c) $\frac{x}{x^3-1}$

12. فرق الكسور الجبرية التالية:

a) $\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ b) $\frac{2x^2-x}{(x^2+2)(x^2+1)}$ c) $\frac{x^6}{(x^2+2)(x^2+1)}$

أسئلة إضافية

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة

1. قسمة كثير الحدود $2x^2 + 5x - 3$ على $x + 3$ هي

a) **$2x - 1$** b) $2x + 1$ c) $x - 2$ d) $x + 2$

2. قسمة كثير الحدود $3x3 + x^2 - 3x - 1$ على $3x + 1$ هي

a) **$x^2 - 1$** b) $x^2 + 1$ c) $3x^2 - 2$ d) $2x^2 + 2$

3. باقي قسمة كثير الحدود $x^2 + x + 1$ على $x - 1$ هو

a) 2 b) -2 **c) 3** d) -3

4. باقي قسمة كثير الحدود $x^3 + x^2 + x + 1$ على $x + 1$ هو

a) 2 b) -2 c) 1 **d) 0**

5. قيمة k التي تجعل $x + 2$ عاملاً لكثير الحدود $x^3 + 3x^2 - k$

a) 2 b) -2 **c) 4** d) -4

6. قيمة k التي تجعل كثير الحدود $2kx^{100} + 1$ قابلاً للقسمة على $x + 1$

a) 1 b) -1 c) 1/2 **d) -1/2**

7. مجموعة حلول المعادلة $x^2 = 9$

a) $S=\{3\}$ b) $S=\{-3\}$ c) $S=\varnothing$ **d) $S=\{-3, 3\}$**

8. مجموعة حلول المعادلة $x^2 + 9 = 0$

a) $S=\{3\}$ b) $S=\{-3\}$ c) $S=\{-3, 3\}$ **d) $S=\varnothing$**

9. كثير حدود مجموع جذريه -2 وجداءهما -8

a) x^2-2x-8 b) x^2-2x+8 **c) x^2+2x-8** d) x^2+2x+8

10. مجموعة حلول المعادلة $x^{20} + 2x^{11} + x^2 = 0$

a) $S=\varnothing$ b) $S=\{0, 1\}$ c) $S=\{0, -1, 1\}$ **d) $S=\{0, -1\}$**

السؤال الثاني: أجب بصح أو خطأ

1. $P(x) = x^2 + 2\sqrt{x} + 1$ كثير حدود من الدرجة 2 — صح أو **خطأ**
2. $\frac{1+\sqrt{2}x+x^3}{5}$ كثير حدود من الدرجة 3 — صح أو **خطأ**
3. درجة كثير الحدود $(x + 1)^2 - (x + 1)^2$ هي 2 — صح أو **خطأ**

4. درجة كثير الحدود $(x^3 + 1)(x^2 + 1)$ هي 5 — **صح** أو خطأ
5. كثير الحدود $x^2 - 5x + 3$ يقبل القسمة على $x - 3$ — **صح** أو خطأ
6. $x + 1$ قاسم مشترك ل $x^2 + 2x + 1$ و $x^2 - 1$ — **صح** أو خطأ
7. $(x + 2)$ عامل لكثير الحدود $x2 - x - 5$ — صح أو **خطأ**
8. كثيري حدود لهما نفس الجذور متساويان — صح أو **خطأ**
9. كثير الحدود أصفاره 1 و -1 و 2 هو $x^3 - 2x^2 - x + 2$ — **صح** أو خطأ
10. القيمة a جذر لكل من $P(x)$ و $Q(x)$، بالتالي $x - a$ عامل ل $P(x) - Q(x)$ — **صح** أو خطأ

السؤال الثالث: هل كثيري الحدود $P(x)$ و $Q(x)$ أوليان فيما بينهما

a) $P(x) = x^2 - x + 1$ و $Q(x) = x^3 + 1$

الجواب: لا: $Q(x) = x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1) = (x + 1)P(x)$.

b) $P(x) = x^3 - 1$ و $Q(x) = x^3 + 1$

الجواب نعم: $Q(x) = x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$ و $P(x) = x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$، بالتالي القاسم المشترك الأعظم هو 1.

السؤال الرابع:

بين أن 3 جذر لكثير الحدود $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ واستفد من ذلك في تحليله إلى جداء عوامل خطية

الحل: $P(3) = (3)^3 - 2(3)^2 - 5(3) + 6 = 27 - 18 - 15 + 6 = 0$.

$$P(x) = (x - 3)(x^2 + x - 2) = (x - 3)(x + 2)(x - 1)$$

السؤال الخامس:

فرق الكسور الجبرية التالية:

a) $\frac{2}{x^2-1}$

الجواب: $\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$.

b) $\frac{2x^2+2x}{(x-1)(x+2)}$

الجواب: $\frac{2x^2+2x-1}{(x-1)(x+2)} = 2 + \frac{3}{(x-1)(x+2)} = 2 + \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x+2)}$

الفصل الرابع: حساب المثلثات
Chapter 4: Trigonometry

الكلمات المفتاحية:

زاوية موجهة، قياس زاوية، زاوية حادة، قياس أساسي، راديان، درجة، قوس دائرة، قطاع دائري، متممة، متكاملة، نسبة مثلثية، جيب، تجيب، ظل، تظل، دائرة مثلثية، معادلة مثلثية، دساتير التحويل، قاعدة الجيب في مثلث، قاعدة التجيب في مثلث.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على المثلثات والنسب المثلثية لزاوية حادة في مثلث قائم وتطبيقاتها في حل المثلث. ومن ثم تعميم النسب المثلثية على الزوايا المنفرجة من خلال الدائرة المثلثية. وبعدها يتطرق الفصل إلى إيجاد كافة العلاقات بين النسب المثلثية من دساتير الإرجاع إلى الربع الأول من الدائرة المثلثية إلى دساتير التحويل من مجموع زاويتين إلى جدائهما والعكس. وبعدها يتم التعرف إلى بعض المعادلات المثلثية البسيطة وطريقة حلها. وأخيراً يتم التعرف على قانوني الجيب والتجيب في مثلث بشكل عام أياً كانت زواياه وتطبيقاتهما في حل هذا المثلث.

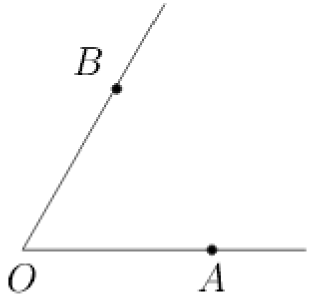
أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- النسب المثلثية لزاوية حادة في مثلث قائم.
- المثلثات في الدائرة المثلثية.
- دساتير الإرجاع إلى الربع الأول ودساتير التحويل بين مجموع زاويتين وضربهما
- المعادلات المثلثية البسيطة.
- تطبيقات المثلثات في حل المثلث.

ISSN: 2617-989X

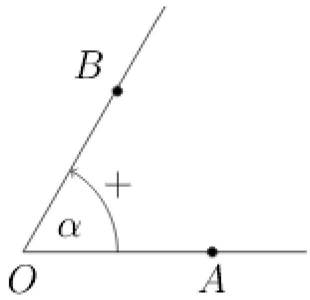
1. مفاهيم عامة General concepts



تعريف 1: الزاوية الموجهة

الزاوية الموجهة هي التقاء نصفي مستقيمين ($[OA, [OB$) لهما نقطة بداية واحدة O تسمى رأس الزاوية ونصفي المستقيمين هما ضلعا الزاوية.

نميز اتجاهين:



- اتجاه موجب أو مباشر وهو اتجاه عكس عقارب الساعة، قيمة الزاوية تكون مسبوقة بإشارة +.
- اتجاه سالب وهو اتجاه مع عقارب الساعة، قيمة الزاوية تكون مسبوقة بإشارة −.

قياس الزاوية

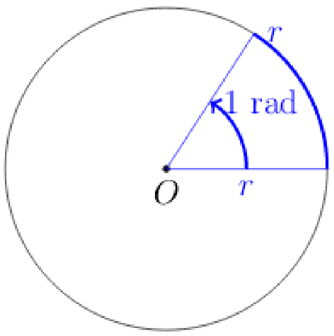
توجد وحدات قياس مختلفة لقياس الزاوية، أهمها:

- القياس الستيني: في هذا القياس تقسم الزاوية التي تمثل دورة كاملة إلى 360 قسماً متساوياً، قياس كل منها يسمى درجة ويرمز لها بالرمز (°). مثال الزاوية $+45°$، الزاوية $-30°$، الزاوية القائمة $+90$ والزاوية المستقيمة $180°$.

  تقسم الدرجة إلى 60 دقيقة ويرمز للدقيقة بالرمز (')، وتقسم الدقيقة بدورها إلى 60 ثانية ويرمز للثانية بالرمز ('').

- القياس الدائري: يعتمد هذا القياس على طول القوس في الدائرة، الذي تحصره الزاوية المركزية وعلى طول نصف قطر الدائرة. وحدة القياس هنا هي ال rad والتي هي اختصار لكلمة radian.

تعريف 2: الراديان



الراديان هو زاوية مركزية في دائرة تحصر قوساً طوله يساوي نصف قطر هذه الدائرة.

ملاحظة 1: التعريف السابق للراديان مستقل عن نصف قطر الدائرة وعن الزاوية المركزية المختارة.

العلاقة بين الراديان والدرجة

$$1\,rad = \frac{180°}{\pi} \approx 57.2957° = 57°17'45''$$

$$1° = \frac{\pi}{180} \approx 0.0175\,rad$$

بعض الزوايا الهامة:

180	90	60	45	30	0	**درجة**
π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	**راديان**

ISSN: 2617-989X

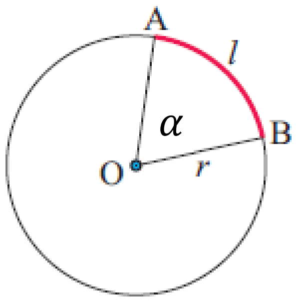
مثال 1:

- $5\,rad = 5.\frac{180°}{\pi} \approx 286.48° = 286°29'$
- $75° = 75.\frac{\pi}{180} \approx 1.309\,rad$

الزوايا المرتبطة

- زاويتان متعاكستان هما زاويتان مجموعهما صفر. الزاويتان $25°$ و $-25°$ هما زاويتان متعاكستان.
- زاويتان متتامتان هما زاويتان مجموعهما زاوية قائمة. الزاويتان $60°$ و $30°$ هما زاويتان متتامتان.
- زاويتان متكاملتان هما زاويتان مجموعهما زاوية مستقيمة. الزاويتان $60°$ و $120°$ هما زاويتان متكاملتان.

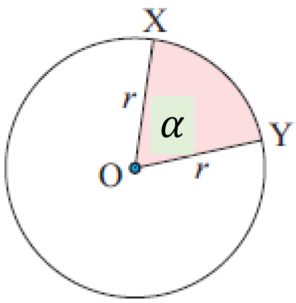
طول قوس دائرة ومساحة قطاع دائري



إن طول دائرة (محيط) نصف قطرها r يساوي $2\pi r$ ومساحتها تساوي $2\pi r^2$.

نتيجة 1:

- طول قوس l من دائرة نصف قطرها r يساوي $l = r\alpha$ حيث α قياس الزاوية المركزية التي يحدها هذا القوس مقدرة بالراديان.



- مساحة قطاع دائرة A نصف قطرها r يساوي $A = \frac{1}{2} r^2\alpha$ حيث α قياس الزاوية المركزية التي يحدها هذا القوس مقدرة بالراديان.

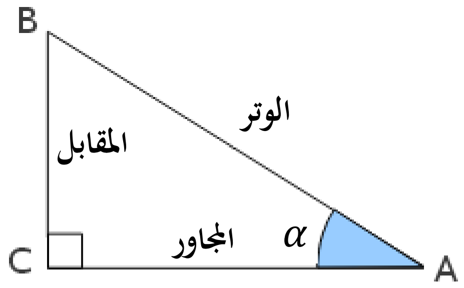
مثال 2:

قطاع دائري نصف قطره $12\ cm$ ويحد زاوية مركزية $65°$. أوجد طول القوس ومساحة القطاع.

$$l = r\alpha = 12\frac{65\pi}{180} \approx 13.6\ cm$$

$$A = \frac{1}{2} r^2\alpha = \frac{1}{2} 12^2.\frac{65\pi}{180} \approx 81.7\ cm^2$$

2. النسب المثلثية لزاوية حادة في مثلث قائم Right angle trigonometric ratios



تعريف 3:

- جيب الزاوية A: هو النسبة بين طول الضلع المقابلة للزاوية A في المثلث قائم الزاوية وطول الوتر ويرمز لها بالرمز sin.

جيب الزاوية A: $\sin A = \sin \alpha = \frac{BC}{AB}$

جيب الزاوية B: $\sin B = \frac{AC}{AB}$.

على سبيل المثال إذا كان $AC = 4$ و $BC = 3$ وبالتالي فإن $AB = 5$. يكون $\sin A = 3/5 = 0.6$ و $\sin B = 4/5 = 0.8$

- تجيب الزاوية A: هو النسبة بين طول الضلع المجاورة للزاوية A في المثلث قائم الزاوية وطول الوتر ويرمز لها بالرمز cos.

تجيب الزاوية A: $\cos A = \cos \alpha = \frac{AC}{AB}$

تجيب الزاوية B: $\cos B = \frac{BC}{AB}$.

على سبيل المثال إذا كان $AC = 4$ و $BC = 3$ وبالتالي فإن $AB = 5$. يكون $\cos A = 4/5 = 0.8$ و $\cos B = 3/5 = 0.6$

- ظل الزاوية A: هو النسبة بين طول الضلع المقابلة للزاوية A في المثلث قائم الزاوية وطول الضلع المجاورة ويرمز لها بالرمز tan.

ظل الزاوية A: $\tan A = \tan \alpha = \frac{BC}{AC}$

ظل الزاوية B: $\tan B = \frac{AC}{BC}$.

على سبيل المثال إذا كان $AC = 4$ و $BC = 3$ وبالتالي فإن $AB = 5$. يكون $\tan A = 3/4 = 0.75$ و $\tan B = 4/3$

ملاحظة 2: ظل الزاوية هو أيضاً حاصل قسمة جيب الزاوية إلى تجيب الزاوية.

$$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{BC/AB}{AC/AB} = \frac{\sin A}{\cos A}$$

وهذه العلاقة هي علاقة أساسية في المثلثات.

ISSN: 2617-989X

ملاحظة 3: لنحسب المقدار $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \frac{BC^2+AC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1$$

إذن $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ وهذه العلاقة هي علاقة أساسية في المثلثات.

تطبيق 1: ليكن لدينا زاوية حادة α، بحيث $\cos \alpha = 0.6$. أوجد $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$.

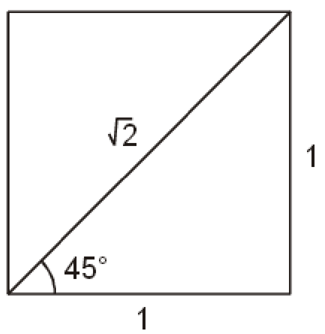
بنا أنه لدينا $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ وبالتالي $\sin^2 \alpha + 0.6^2 = 1$. أي أنه وباعتبار أن $\sin \alpha$ عدد موجب فإن:

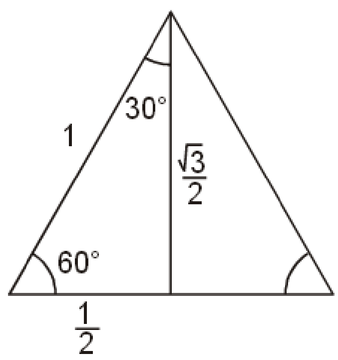
$$\sin^2 \alpha = 1 - 0.36 = 0.64 \Rightarrow \sin^2 \alpha = \sqrt{0.64} = 0.8$$

باستخدام العلاقة $tan\ \alpha = \frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha}$ نحصل على $tan\ \alpha = \frac{0.8}{0.6} = \frac{4}{3}$

بعض القيم المشهورة للنسب المثلثية

هذه القيم تتكرر بشكل كبير ويفضل حفظها غيباً. يتم الحصول عليها من خلال مربع ومثلث متساوي الأضلاع:





$$cos\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad sin\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad tan\ 45° = \frac{1}{1} = 1$$

$$cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad sin\ 30° = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2} \qquad tan\ 30° = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

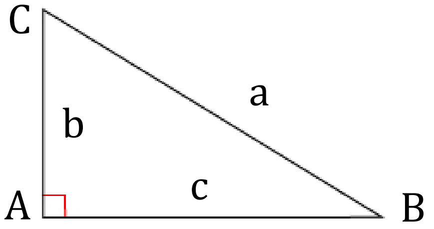
$$cos\ 60° = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2} \qquad sin\ 60° = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad tan\ 60° = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—

حل المثلث قائم الزاوية

نعلم أن للمثلث ست عناصر هي أضلاعه الثلاثة وزواياه الثلاث. حل المثلث يعني إيجاد قياسات عناصره الستة.

مثال 3:



- ليكن لدينا المثلث ABC القائم في A التالي، وليكن c = 6 cm و C = 60°. أوجد الزوايا والأضلاع المتبقية.

$\tan 60° = \frac{b}{c} \Leftrightarrow b = c.\tan 60° = 6\sqrt{3} \approx 10.4\,cm$

$a^2 = b^2 + c^2 = 6^2 + (6\sqrt{3})^2 = 36 + 108 = 144$

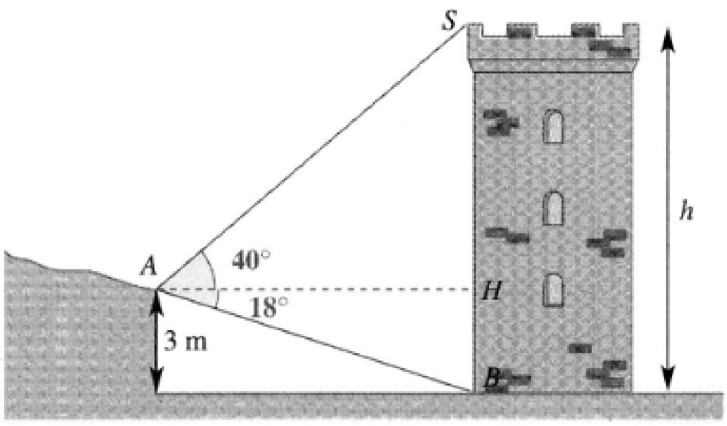
$a = \sqrt{144} = 12\,cm$ وأخيراً B = 30°.

- ليكن لدينا المثلث القائم ABC التالي، وليكن a = 10 cm و B = 30°. أوجد الزوايا والأضلاع المتبقية.

$\sin 30° = \frac{b}{a} \Leftrightarrow b = c.\sin 30° = 10\,\frac{1}{2} = 5\,cm$

$c^2 = a^2 - b^2 = 10^2 - (5)^2 = 100 - 25 = 75$

$c = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \approx 8.7\,cm$ وأخيراً C = 60°.



- احسب ارتفاع البرج h.

إن: h = BH + HS

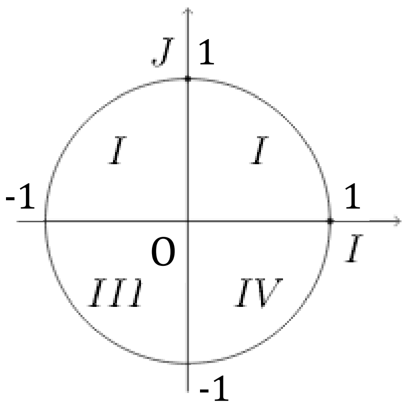
بما أن BH = 3 m، بقي علينا أن نحسب فقط الطول HS. ولكن في المثلث القائم AHS لدينا فقط قيمة زاوية لذلك يجب علينا حساب ضلع منه. يمكن حساب الضلع القائم AH من المثلث القائم ABH.

$\tan 18° = \frac{BH}{AH} \Leftrightarrow AH = \frac{BH}{\tan 18°} = \frac{3}{\tan 18°} \approx 9.2\,m$.

$\tan 40° = \frac{SH}{AH} \Leftrightarrow SH = AH.\tan 40° \approx 7.8\,m$. وبالتالي $h \approx 7.8 + 3 \approx 10.8\,m$.

ISSN: 2617-989X

3. المثلثات في الدائرة Unit circle trigonometry

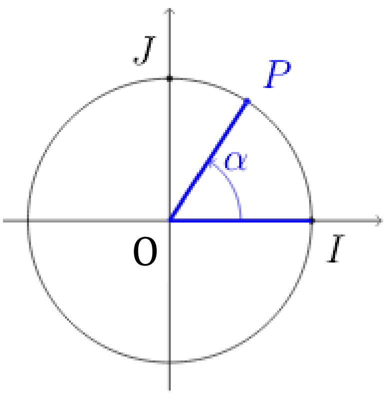


تعريف 4 (الدائرة المثلية):

في مستوي الإحداثيات المتعامد $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$، الدائرة المثلثية هي الدائرة التي مركزها النقطة O، ونصف قطرها يساوي الواحد.

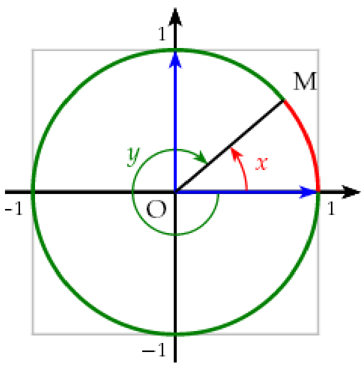
الدائرة المثلثية مقسمة بواسطة المحاور إلى أربعة أقسام تسمى أرباع: الربع الأول I والربع الثاني II والربع الثالث III والربع الرابع IV.

3-1. الزاوية الموجهة في الدائرة المثلثية Oriented angle



الزاوية الموجهة في الدائرة المثلثية هي زاوية رأسها مركز الدائرة والضلع الأول لها هو نصف القطعة المستقيمة [OI. نقطة تقاطع الضلع الثاني مع الدائرة المثلثية P.

لكل زاوية موجهة نقطة وحيدة على الدائرة المثلثية، أما العكس فهو غير صحيح. فإنه من أجل نقطة P على الدائرة المثلثية يقابلها عدد لا نهائي من الزوايا الموجهة والتي هي من الشكل $\alpha + 2k\pi\ (k \in \mathcal{Z})$. أي الزاوية الموجهة α زائد عدد صحيح من الدورات (الدورة 2π) في الاتجاه الموجب أو في الاتجاه السالب.



مثال 4: يوجد على الشكل جانباً قياسان مختلفان للزاوية لنفس النقطة M. القياس الأول $x = \frac{\pi}{6}$ والقياس الثاني $y = \frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11\pi}{6}$.

كما أنه يوجد عدد لانهائي من القياسات للزاوية الموجهة المفروضة والتي تعطى بالصيغة $\frac{\pi}{6} + 2\pi k\ (k \in \mathcal{Z})$.

$$\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6} + 2\pi,\ \frac{\pi}{6} - 2\pi,\ \frac{\pi}{6} + 4\pi,\ \frac{\pi}{6} - 4\pi, \ldots$$

تعريف 5:

نسمي القياس الأساسي للزاوية α، القياس x الموجود ضمن المجال $]-\pi, \pi]$. لإيجاد القياس الأساسي نطرح أو نجمع من القياس المذكور عدد صحيح من الدورات (مضاعفات العدد 2π) حتى يصبح القياس ضمن المجال $]-\pi, \pi]$.

مثال 5: أوجد القياس الأساسي للزاوية حيث القياس: $\frac{17\pi}{4}$ و $-\frac{31\pi}{6}$.

$\frac{17\pi}{4}$: عبارة عن قياس كبير خارج المجال الأساسي لذلك نطرح منها k دورة، أي:

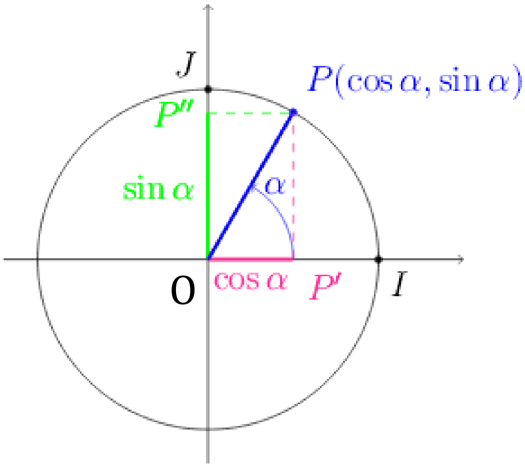
$\frac{17\pi}{4} - k2\pi = \frac{\pi(17-8k)}{4} = \frac{\pi}{4}$ من أجل $k = 2$.

ISSN: 2617-989X

$-\frac{31\pi}{6}$: عبارة عن قياس صغير خارج المجال الأساسي لذلك نضيف إليه k دورة، أي:

$-\frac{31\pi}{6} + k2\pi = \frac{\pi(-31+12k)}{4} = \frac{5\pi}{6}$ من أجل $k = 3$.

3-2. جيب وتجيب زاوية موجهة Sine and cosine of oriented angle



تعريف 6: ليكن لدينا زاوية موجهه α والممثلة بالنقطة P على الدائرة المثلثية. نرمز ب 'P و "P للمسقطان العموديان للنقطة P على OI و OJ.

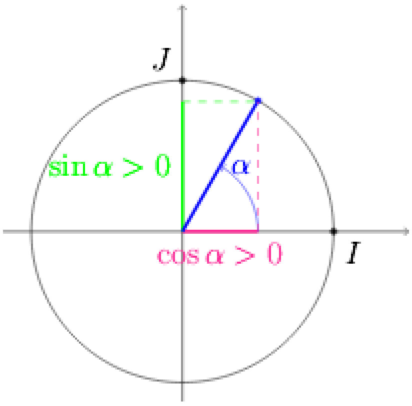
- تجيب الزاوية الموجهة α هو فاصلة النقطة P أي 'OP، نرمز لها $\cos\alpha$.
- جيب الزاوية الموجهة α هو ترتيب النقطة P أي "OP، نرمز لها $\sin\alpha$.

نتيجة 2: جيب وتجيب الزاوية عددان حقيقيان محصوران بين العددين -1 و 1. أي:

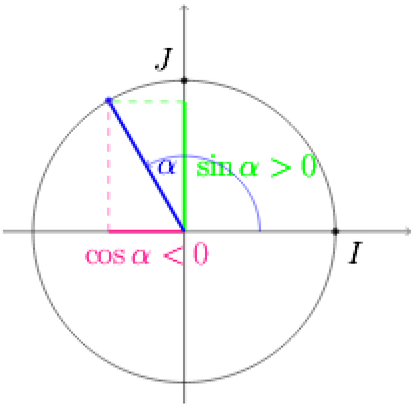
$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ و $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$.

إشارة الجيب والتجيب

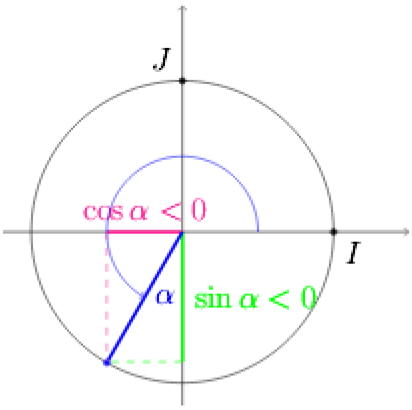
يبين الشكل التالي إشارات كل من الجيب والتجيب في الأرباع المختلفة للدائرة المثلثية.



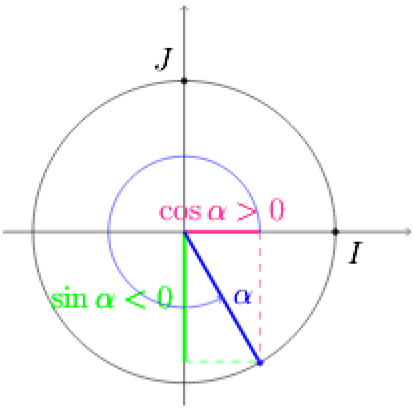
الربع الأول



الربع الثاني

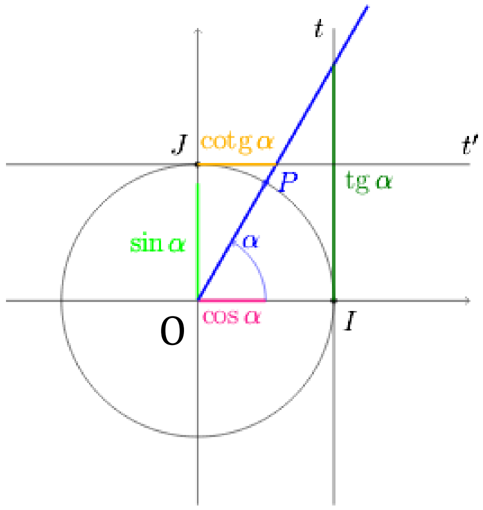


الربع الثالث



الربع الرابع

3-3. ظل وتظل زاوية موجهة Tangent and cotangent of oriented angle



تعريف 7: ليكن t المماس للدائرة المثلثية المار ب I، و t' المماس للدائرة المثلثية المار بالنقطة J.

- ظل الزاوية الموجهة α هو ترتيب نقطة التقاطع T للضلع الثاني للزاوية الموجهة مع المستقيم t، نرمز لها tan α.
- تظل الزاوية الموجهة α هو فاصلة نقطة التقاطع T' للضلع الثاني للزاوية الموجهة مع المستقيم t'، نرمز لها cot α.

إشارة الظل والتظل

الظل والتظل موجبان في الربعين الأول والثالث، وسالبان في الربعين الثاني والرابع.

مثال 6:

- أوجد القيم المختلفة ل cos α إذا علمت أن sin α = 2/3.

من العلاقة الأساسية في المثلثات $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$: $(2/3)^2 + \cos^2\alpha = 1$، وبالتالي فإن:

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{4}{9} = 5/9$. أي $cos\ \alpha = \pm\sqrt{\frac{5}{9}}$.

- إذا علمت أن $\sin\alpha = -3/4$ و $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$، أوجد cos α.

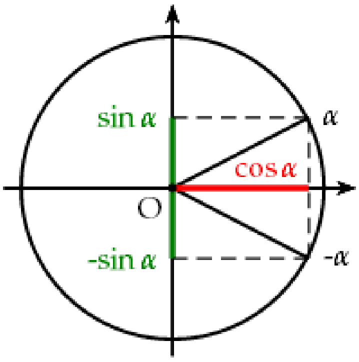
من العلاقة الأساسية في المثلثات $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$: $(-3/4)^2 + \cos^2\alpha = 1$، وبالتالي فإن:

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{16} = 7/16$. أي $cos\ \alpha = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$ وبما أن الزاوية تقع في الربع الثالث (التجيب سالب) فإن $cos\ \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$.

العلاقات بين النسب المثلثية

- $\tan\alpha = \frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha},\ \ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathcal{Z})$
- $\cot\alpha = \frac{cos\ \alpha}{sin\ \alpha},\ \ \alpha \neq k\pi\ (k \in \mathcal{Z})$ $\qquad \cot\alpha = \frac{1}{tan\ \alpha},\ \ \alpha \neq k\pi\ (k \in \mathcal{Z})$
- $1 + tan^2\ \alpha = \frac{1}{cos^2\ \alpha},\ \ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathcal{Z})$
- $1 + cot^2\ \alpha = \frac{1}{sin^2\ \alpha},\ \ \alpha \neq k\pi\ (k \in \mathcal{Z})$

4-3. العلاقات بين زاويتين Relations between angles

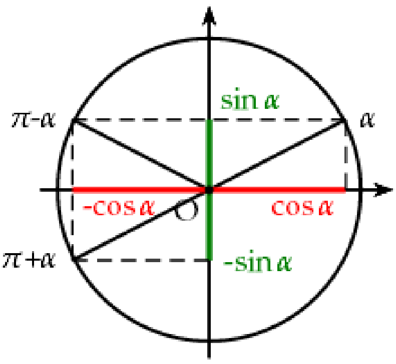


- $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$
- $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
- $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$

مثال 7: $sin\ (-30°) = sin\ (30°) = -\frac{1}{2}$

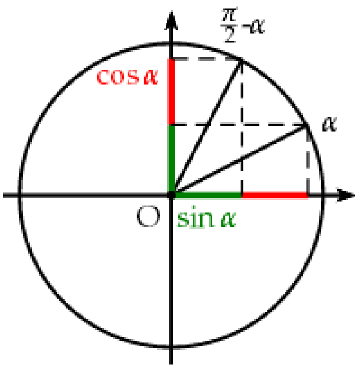
$$cos\ (-30°) = cos\ (30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

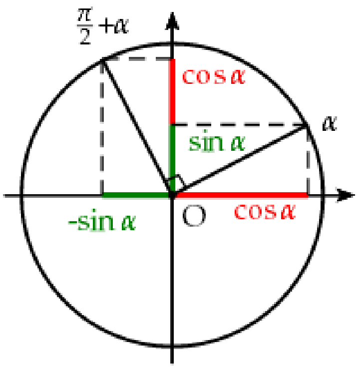
$$tan\ (-30°) = -tan\ (30°) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$



- $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$

- $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$
- $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$
- $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$

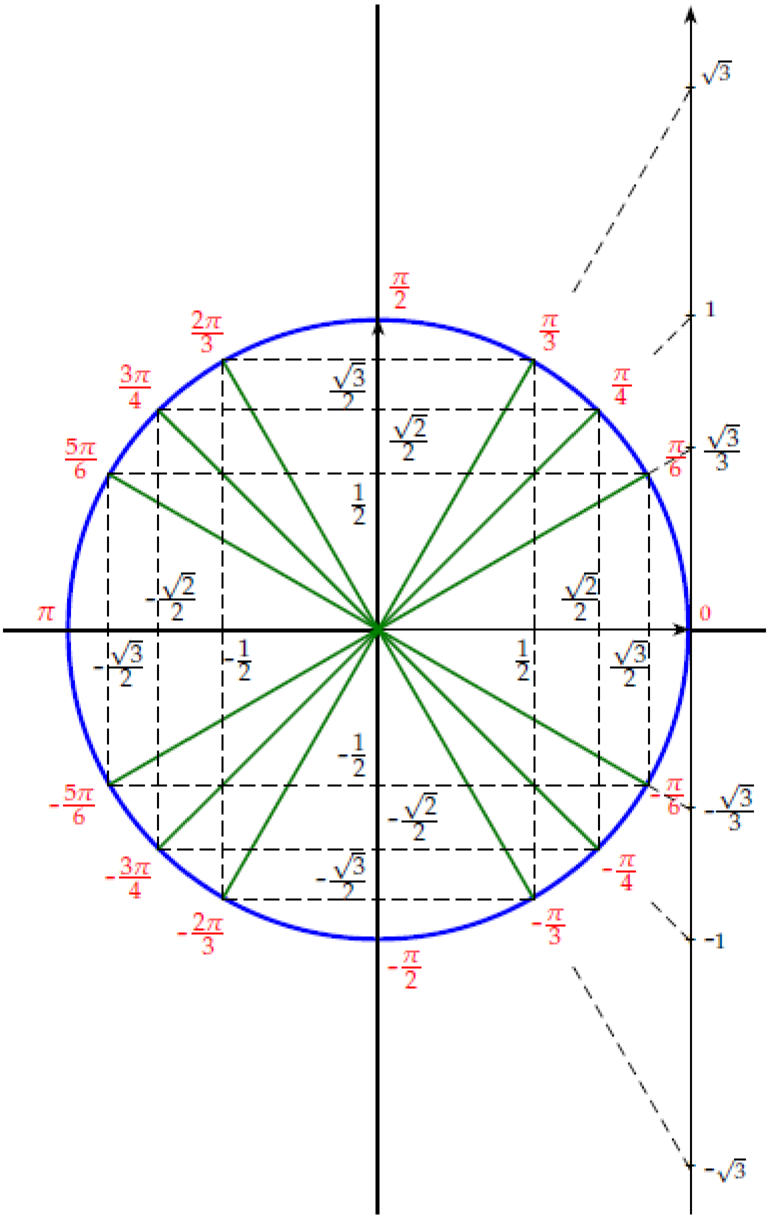




- $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos \alpha$
- $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin \alpha$
- $\tan(\pi/2 - \alpha) = \cot \alpha$

- $\sin(\pi/2 + \alpha) = \cos \alpha$
- $\cos(\pi/2 + \alpha) = -\sin \alpha$
- $\tan(\pi/2 + \alpha) = -\cot \alpha$

القيم المشهورة للزوايا على الدائرة المثلثية



مثال 8: أوجد النسب المثلثية للزوايا التالية: $\frac{7\pi}{4},\ \frac{5\pi}{6},\ -\frac{\pi}{3}$.

- $cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ $\qquad sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

  $tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

- $cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

  $sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

  $tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) = tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

قياس الزاوية $\frac{7\pi}{4}$ ليس أساسياً، لجعله أساسياً نطرح منه دورة واحدة 2π: $\frac{7\pi}{4} - 2\pi = -\frac{\pi}{4}$

- $cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

  $tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$

4. المعادلات المثلثية البسيطة Simple trigonometric equations

مبدأ التكافؤ الأساسي

1. $cos\,x = cos\,a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi, & k \in \mathcal{Z} \\ \text{أو} & \\ x = -a + 2k\pi, & k \in \mathcal{Z} \end{cases}$
2. $sin\,x = sin\,a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi, & k \in \mathcal{Z} \\ \text{أو} & \\ x = \pi - a + 2k\pi, & k \in \mathcal{Z} \end{cases}$
3. $tan\,x = tan\,a \Leftrightarrow x = a + k\pi, \; k \in \mathcal{Z}$

مثال 9:

- حل المعادلة $cos\,x = \frac{1}{2}$

$$cos\,x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow cos\,x = cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \; or \; x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

- حل المعادلة $cos\,x = -\frac{1}{2}$

$$cos\,x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow cos\,x = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \; or \; x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

- حل المعادلة $cos\,(2x - \frac{\pi}{3}) = cos\,(x + \frac{\pi}{6})$

$$cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = x + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$\text{or } 2x - \frac{\pi}{3} = -x - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$$

- حل المعادلة $sin\,x = \frac{1}{2}$

$$sin\,x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow sin\,x = sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \; or \; x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

- حل المعادلة $tan\,x = 1$

$$tan\,x = 1 \Leftrightarrow tan\,x = tan\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

- حل المعادلة $sin^2\,x = \frac{1}{2}$

$$sin^2\,x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow sin\,x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

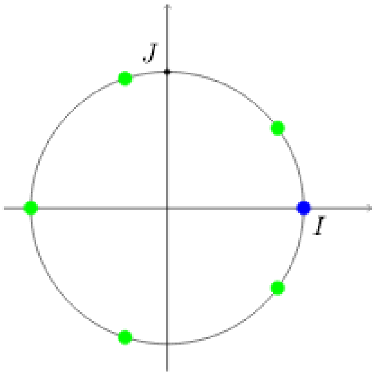
$sin\, x = +\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow\ sin\, x = sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow\ x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi\ or\ x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi\ = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow\ x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$or\ x = \pi - (-\frac{\pi}{4}) + 2k\pi\ = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$

- حل المعادلة $sin\,(2x) = sin\,(3x)$

$sin\,(2x) = sin\,(3x) \Leftrightarrow\ 2x = 3x + 2k\pi\ or\ 2x = \pi - 3x + 2k\pi\ = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$



$\Leftrightarrow\ -x = 2k\pi\ or\ 5x = \pi + 2k\pi$

$\Leftrightarrow\ x = 2k\pi\ or\ x = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}$

الحلول الأساسية (ضمن المجال $]-\pi, \pi]$) هي:

من المعادلة $x = 2k\pi$ ينتج $x = 0$ $(k = 0)$.

من المعادلة $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}$ ينتج $x = \frac{\pi}{5}$ $(k = 0)$ و $x = \frac{3\pi}{5}$ $(k = 1)$

و $x = \pi$ $(k = 2)$ و $x = -\frac{\pi}{5}$ $(k = -1)$ و $x = -\frac{3\pi}{5}$ $(k = -2)$

- حل المعادلة $sin\, x + cos\,(2x) = 0$

$\sin x + \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = -\sin x\ \Leftrightarrow \cos(2x) = \sin(-x)$

$\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \cos(\frac{\pi}{2} + x)$

$\Leftrightarrow\ \ 2x = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi\ \ or\ 2x = -\frac{\pi}{2} - x + 2k\pi$

$\Leftrightarrow\ \ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ \ or\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$

- حل المعادلة $2cos^3\, x + cos^2\, x - 5cos\, x + 2 = 0$

لنفرض أن $y = \cos x$ ينتج: $2y^3 + y^2 - 5y + 2 = 0$

$2y^3 + y^2 - 5y + 2 = 0\ \Leftrightarrow (y-1)(2y-1)(y+2) = 0$

إما $y = 1$ أو $y = 1/2$ أو $y = -2$

$y = \cos x = -2$ ليس لها حلول لأن التجيب قيمه محصورة بين الناقص واحد والواحد

$y = cos\, x = \frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ cos\, x = cos\frac{\pi}{3}\ \Leftrightarrow\ x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\ or\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$y = cos\, x = 1\ \Leftrightarrow\ cos\, x = cos\, 0\ \Leftrightarrow\ x = 2k\pi$

5. النسب المثلثية لمجموع أو فرق زاويتين Angle sum and difference identities

أياًكان $a, b \in \mathcal{R}$ فإنه لدينا:

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\tan(a+b) = \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}; \quad a,\ b,\ a+b \neq \frac{\pi}{2}+k\pi\ (k \in \mathcal{Z})$
- $\tan(a-b) = \frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a.\tan b}; \quad a,\ b,\ a-b \neq \frac{\pi}{2}+k\pi\ (k \in \mathcal{Z})$

مثال 10: أوجد كل من $\cos(105°)$ و $\cos(15°)$ و $\sin(75°)$ و $\sin(15°)$ و $\tan(105°)$ و $\tan(15°)$.

- $\cos(105°) = \cos(60°+45°) = \cos 60° \cos 45° - \sin 60° \sin 45°$
  $= \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
- $\cos(15°) = \cos(45°-30°) = \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30°$
  $= \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
- $\sin(75°) = \sin(45°+30°) = \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30°$
  $= \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
- $\sin(15°) = \sin(45°-30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30°$
  $= \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
- $\tan(105°) = \tan(60°+45°) = \frac{\tan 60°+\tan 45°}{1-\tan 60°.\tan 45°} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}.1} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$
- $\tan(15°) = \tan(60°-45°) = \frac{\tan 60°-\tan 45°}{1+\tan 60°.\tan 45°} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}.1} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

النسب المثلثية لمضاعفات زاوية

لنضع $a = b$ في علاقات مجموع زاويتين نحصل على:

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$
- $\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}; \quad a \neq \frac{\pi}{2}+k\pi\ \ and\ a \neq \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\ (k \in \mathcal{Z})$

هذا ويمكن وضع العلاقة الأولى على الشكل التالي:

$$1 + \cos(2a) = 2\cos^2 a \qquad 1 - \cos(2a) = 2\sin^2 a$$

مثال 11: لتكن الزاوية a حادة و $\cos 2a = 3/4$. أوجد كل من $\cos a$ و $\sin a$ و $\tan a$.

$$1 + \cos(2a) = 2\cos^2 a = 1 + 3/4 = 7/4 \Rightarrow \cos^2 a = 7/8$$

$$\cos a = \pm\sqrt{\frac{7}{8}} = \pm\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$$

وبما أن الزاوية حادة فإن الجيب والتجيب موجب، أي: $\cos a = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$.

$$\sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a} = \sqrt{1 - 7/8} = \sqrt{1/8}$$

$$\sin a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{1/2\sqrt{2}}{\sqrt{7}/2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

مثال 12: ما نوع المثلث ABC الذ تحقق زواياه العلاقة: $\sin^2\frac{A}{2} = \cos B.\cos C$

$$\sin^2\frac{A}{2} = \cos B.\cos C \Rightarrow \frac{1-\cos A}{2} = \cos B.\cos C \Rightarrow 1 - \cos A = 2\cos B.\cos C$$

$$1 - \cos A = 1 - \cos[\pi - (B + C)] = 1 + \cos(B + C) = 2\cos B\cos C$$

$$1 + \cos B\cos C - \sin B\sin C = 2\cos B\cos C$$

$$1 = \cos B\cos C + \sin B\sin C = \cos(B - C) \Rightarrow B - C = 2\pi k$$

ما يلائم المثلث يوافق $k = 0$ فقط، وبالتالي يكون $B = C$ أي أن المثلث ABC متساوي الساقين قاعدنه $[BC]$.

دساتير التحويل من جداء إلى مجموع

- $\cos a.\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a + b) + \cos(a - b)]$
- $\sin a.\sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a + b) - \cos(a - b)]$
- $\sin a.\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a + b) + \sin(a - b)]$
- $\cos a.\sin b = \frac{1}{2}[\sin(a + b) - \sin(a - b)]$

دساتير التحويل من مجموع إلى جداء

- $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$
- $\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$
- $\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$
- $\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$

مثال 13:

- حول العبارة التالية غلى جداء: $\sin 3x + \sin 7x$

$$\sin 3x + \sin 7x = 2\sin \frac{3x+7x}{2} . \cos \frac{3x-7x}{2} = 2\sin 5x . \cos 2x$$

- أثبت أن: $\cos 75° . \cos 15° = 1/4$

$$\cos 75° . \cos 15° = \frac{1}{2}[\cos (75° + 15°) + \cos (75° - 15°)]$$

$$\cos 75° . \cos 15° = \frac{1}{2}[\cos (90°) + \cos (60°)] = \frac{1}{2}[0 + 1/2] = 1/4$$

- أثبت أن: $\cos 80° . \cos 40° . \cos 20° = 1/8$

$$\cos 80° . \cos 40° . \cos 20° = \frac{1}{2}[\cos (80° + 40°) + \cos (80° - 40°)] . \cos 20°$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 120° + \cos 40°] . \cos 20° = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2} + \cos 40°\right] . \cos 20°$$

$$= -\frac{1}{4}\cos 20° + \frac{1}{2}\cos 40° . \cos 20°$$

$$= -\frac{1}{4}\cos 20° + \frac{1}{4}(\cos 60° + \cos 20°) = \frac{1}{4}\cos 60° = \frac{1}{8}$$

- ما هو نوع المثلث ABC الذي تحقق زواياه المعادلة: $\sin 2A + \sin 2B = 2\sin C$

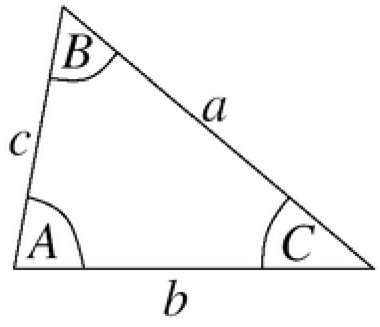
$$\sin 2A + \sin 2B = 2\sin C \Rightarrow 2\sin(A + B).\cos(A - B) - 2\sin C = 0$$

ولكن $\sin (A + B) = \sin (\pi - C) = \sin C$، وبالتالي نضع $\sin C$ خارج القوس ينتج لدينا:

$\sin C[\cos (A - B) - 1] = 0$ وهذا بعطي إما $\sin C = 0$ وهو مرفوض لأن $\sin C > 0$ في المثلث. أو $\cos (A - B) - 1 = 0$، أي $\cos (A - B) = 1$ ومنه $A - B = 2k\pi$. والذي يلائم المثلث يوافق $k = 0$ فقط، وبالتالي يكون $A = B$ أي أن المثلث ABC متساوي الساقين قاعدنه [AB].

6. تطبيقات في المثلث Triangle and trigonometric applications

6-1. قاعدة التجيب في المثلث (نظرية فيثاغورث المعممة) Cosine rule



في المثلث ABC:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

مثال 14:

- ABC مثلث فيه $A = 60°$ و $b = 1 + \sqrt{3}$ و $c = 2$. احسب قيمة a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = \left(1 + \sqrt{3}\right)^2 + (2)^2 - 2\left(1 + \sqrt{3}\right)(2).\frac{1}{2} = 6$$
$$\Rightarrow a = \sqrt{6}$$

- ABC مثلث فيه $a = 2$ و $b = \sqrt{2}$ و $c = 1 + \sqrt{3}$. احسب قيمة الزوايا.

من العلاقة $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ ينتج $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2+1+3+2\sqrt{3}-4}{2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ومنه $A = 60°$. ولحساب B نطبق العلاقة المشابهة: $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{4+1+3+2\sqrt{3}-2}{2(2)(1+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ومنه $B = 30°$ وبالتالي فإن $C = 90°$ (مجموع زوايا المثلث $180°$).

6-2. قاعدة الجيب في المثلث Sine rule

في المثلث ABC:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

مثال 15:

ABC مثلث فيه $A = C = 30°$ و $b = 6$. أوجد كل من c, a, B.

$B = 180° - (30° + 30°) = 120°$. لحساب a نستخدم العلاقة $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

$\frac{a}{1/2} = \frac{6}{\sqrt{3}/2} \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$. بما أن $A = C$ يعني أن $a = c = 2\sqrt{3}$.

ISSN: 2617-989X

مساحة المثلث

مساحة المثلث ABC تعطى بالعلاقة:

$$S = \frac{1}{2}ab\ sin\ C = \frac{1}{2}ac\ sin\ B = \frac{1}{2}bc\ sin\ A$$

مثال 16:

ABC مثلث فيه $A = 45°$ و $b = 8$ و $c = 6$. أوجد مساحته.

$$S = \frac{1}{2}bc\ sin\ A = \frac{1}{2}8(6)\frac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$$

أسئلة الفصل

1. حول كل من الزوايا التالية إلى راديان: $15°, 75°, 225°, -135°$.
2. حول كل من الزوايا التالية إلى درجات: $\frac{5\pi}{6}, 2.5, -0.75\frac{\pi}{12}$.,
3. استخدم الدائرة المثلثية لإيجاد جيب و تجيب وظل كل من: $\frac{-14\pi 5\pi}{3 \quad 6}$, $\frac{8\pi}{3}, -135°$.,
4. أوجد الزاوية α في الحالات التالية: $\cos \alpha = -1$ و $\sin^2\alpha = 3/4$ و $\tan^2\alpha = 3$.
5. ليكن $\cos \alpha = -3/4$ و $\pi\frac{\pi}{2} > \alpha >$. أوجد $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$.
6. ليكن $\sin \alpha = -3/4$ و $\frac{3\pi}{2}\pi > \alpha >$. أوجد $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ و $\tan 2\alpha$.
7. حل كل من المعادلات التالية: $2\sin 3x + \sqrt{2} = 0$ و $\sqrt{2}\sin x - 1 = 0$ و $\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$
8. حل كل من المعادلات التالية: $\tan(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{\sqrt{3}}, x\epsilon[0, 4\pi]$ و $\cos(x + \frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{2}, x\epsilon[-2\pi, 2\pi]$.
9. برهن أن: $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$.
10. حل المعادلة التالية: $\sin x.\cos 3x + \sin 3x.\cos x = 1/2$، ثم استنتج مجموعة حلولها في المجال $[0, 2\pi]$.
11. برهن أن: $\frac{\sin 2\alpha - \sin \alpha}{\cos 2\alpha - \cos \alpha + 1} = \tan \alpha$.
12. ما نوع المثلث ABC الذ تحقق زواياه العلاقة: $\sin A = \sin B.\sin C$.
13. برهن أن: $\cos(30° + x) - \cos(30° - x) = -\sin x$.
14. ABC مثلث فيه $A = 45°$ و $B = 60°$ و $a = 4$. أوجد كل من b, c, C.
15. حل المثلث ABC إذا علمت أن: $C = 45°$ و $B = 60°$ و $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.

تمارين إضافية

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة

1. القياس الأساسي للزاوية $\frac{143\pi}{3}$ هو

a) $\frac{-\pi}{3}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{4\pi}{3}$ d) $\frac{\pi}{3}$

2. $\cos(\pi/2 + x) =$

a) sin x b) −sin x c) $\cos(\pi/2 - a)$ d) $\sin(x - \pi/2)$

3. $\cos(\frac{-14\pi}{3}) =$

a) 1/2 b) −1/2 c) $\sqrt{3}/2$ d) $-\sqrt{3}/2$

4. $\cos(30^\circ + x) - \cos(30^\circ - x) =$

a) cos x b) −cos x c) sin x d) −sin x

5. $\cos\alpha = -1 \Leftarrow \alpha =$

a) $\pi/2$ b) $-\pi/2$ c) π d) 0

السؤال الثاني: أجب بصح أو خطأ

1. قيمة الزاوية 135° بالراديان هي $\frac{5\pi}{4}$ — صح أو **خطأ**
2. $\cos(3\pi/2 - a) = \sin a$ — صح أو **خطأ**
3. $\sin(9\pi - a) = \sin a$ — **صح** أو خطأ
4. زاوية حادة α، بحيث $\sin\alpha = 0.6$، بالتالي $\cos\alpha = 0.8$ — **صح** أو خطأ
5. القياس الأساسي للزاوية $\frac{9\pi}{4}$ هو $\frac{\pi}{4}$ — **صح** أو خطأ
6. إذا علمت أن $\cos\alpha = -2/3$ و $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$، فإن $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ — صح أو **خطأ**
7. $\tan\frac{7\pi}{4} = -1$ — **صح** أو خطأ
8. $\cos(-\frac{7\pi}{3}) = 1/2$ — **صح** أو خطأ
9. a زاوية حادة و $\cos 2a = 3/4$. فإن $\cos a = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$ — **صح** أو خطأ
10. مساحة مثلث طول ضلعاه 3 و 4 وقياس الزاوية بينهما 30° هي 3 — **صح** أو خطأ

السؤال الثالث: حل كل من المعادلات التالية:

$2\cos 3x + \sqrt{2} = 0$ (a

$\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$ (b

الجواب:

a) $2\cos 3x + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \cos 3x = -\sqrt{2}/2 = \cos(\frac{3\pi}{4}) \Rightarrow 3x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

$x = \pm\frac{3\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathcal{Z}$

b) $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1\pm 3}{2} = -1$ or 2

$\cos x = 2$ لا حلول

$\cos x = -1 = \cos\pi \Rightarrow x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathcal{Z}$

السؤال الرابع:

ABC مثلث فيه $A = C = 30°$ و $b = 9$. أوجد كل من c, a, B. ماهي مساحته

الجواب: $B = 180° - (30° + 30°) = 120°$.

لحساب a نستخدم العلاقة $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

$\frac{a}{1/2} = \frac{9}{\sqrt{3}/2} \Rightarrow a = 3\sqrt{3}$. **بما أن** $A = C$ **يعني أن** $a = c = 3\sqrt{3}$.

المساحة $= \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}3\sqrt{3}x3\sqrt{3}\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$

السؤال الخامس:

- ABC مثلث فيه $a = 4$ و $b = 2\sqrt{2}$ و $c = 2(1+\sqrt{3})$. احسب قيمة الزوايا.

الجواب: من العلاقة $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ ينتج أن $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ومنه $A = 60°$. ولحساب B نطبق العلاقة المشابهة: $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ومنه $B = 30°$ وبالتالي فإن $C = 90°$.

الفصل الخامس: الأعداد العقدية

Chapter 5: Complex numbers

الكلمات المفتاحية:

عدد عقدي، عدد تخيلي، طويلة عدد عقدي، زاوية عدد عقدي، صورة العدد العقدي، مرافق عدد عقدي، الجبري، المثلثي، الأسي، الخاصة التبديلية، التجميعية، التوزيعية، عنصر حيادي، عنصر نظير، دوموافر، جذر من المرتبة n، معادلة خطية، معادلة تربيعية، كثر حدود عقدي.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على مجموعة الأعداد العقدية والعمليات الأساسية عليها من جمع وطرح وضرب وقسمة ورفع إلى أس وكتابة العدد العقدي بكافة الأشكال الجبري والمثلثي والأسي. وحل معادلات من الدرجة الأول والثانية بأمثال حقيقية وعقدية. وأخيراً تطبيقات الأعداد العقدية في الهندسة المستوية الإقليدية.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- مجموعة الأعداد العقدية والعمليات عليها.
- خواص الأعداد العقدية وكتابتها بالشكل الجبري والمثلثي والأسي.
- حل المعادلات الخطية والتربيعية في مجموعة الأعداد العقدية.
- كثيرات الحدود والنظرية الأساسية في الجبر.
- تطبيقات الأعداد العقدية في الهندسة المستوية الإقليدية.

ISSN: 2617-989X

1. مقدمة Introduction

مجموعات الأعداد

$\mathcal{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية وهي أعداد موجبة.

ليس للمعادلة $x + 1 = 0$ حل في مجموعة الأعداد الطبيعية، حل هذه المعادلة هو -1. هذا الحل ينتمي إلى مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathcal{Z}$. $\mathcal{Z}$ هي مجموعة الأعداد الموجبة والسالبة. المجموعة $\mathcal{Z}$ تحوي $\mathcal{N}$ $(\mathcal{N} \subset \mathcal{Z})$.

ليس للمعادلة $2x + 1 = 0$ حل في مجموعة الأعداد الصحيحة، حل هذه المعادلة هو $-\frac{1}{2}$. هذا الحل ينتمي إلى مجموعة الأعداد العادية $\mathcal{Q}$. $\mathcal{Q}$ هي مجموعة الأعداد من الشكل $\frac{p}{q}$، حيث $p \in \mathcal{Z}$ و $q \in \mathcal{Z}^*$. المجموعة $\mathcal{Q}$ تحوي $\mathcal{Z}$ ($\mathcal{N} \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{Q}$).

ليس للمعادلة $x^2 - 2 = 0$ حل في مجموعة الأعداد العادية، تقبل هذه المعادلة حلان يُرمز لهما ب $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$. هذان الحلان ينتميان إلى مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathcal{R}$. $\mathcal{R}$ هي مجموعة فواصل كافة النقاط الواقعة على مستقيم. المجموعة $\mathcal{R}$ تحوي $\mathcal{Q}$ $(\mathcal{N} \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{R})$.

ليس للمعادلة $x^2 + 1 = 0$ حل في مجموعة الأعداد الحقيقية، تقبل هذه المعادلة حلان يُرمز لهما ب i و $-i$. هذان الحلان ينتميان إلى مجموعة الأعداد العقدية $\mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ هي مجموعة الأعداد من الشكل $a + bi$، حيث $a \in \mathcal{R}$ و $b \in \mathcal{R}$. المجموعة $\mathcal{C}$ تحوي $\mathcal{R}$ $(\mathcal{N} \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{C})$.

2. الأعداد العقدية Complex numbers

تعريف 1: يوجد مجموعة يرمز لها بالرمز $\mathcal{C}$، تدعى مجموعة الأعداد العقدية والتي تمتلك الخصائص التالية:

- المجموعة $\mathcal{C}$ تحوي مجموعة الأعداد الحقيقية.
- المجموعة $\mathcal{C}$ مزودة بعمليتي الجمع و الضرب وهما امتداد لنفس العمليتين الموجودتين في $\mathcal{R}$ ولهما نفس الخصائص.
- تحوي المجموعة $\mathcal{C}$ على عنصر عقدي (غير حقيقي) يُرمز له بالرمز i وبحيث $i^2 = -1$.
- كل عنصر z من $\mathcal{C}$ يكتب بطريقة وحيدة على الشكل: $z = x + yi$ ، حيث $x, \ y \in \mathcal{R}$. نسمي الكتابة $z = x + yi$ بالشكل الجبري للعدد العقدي z. كما ندعو x بالجزء (القسم) الحقيقي ل z، ونرمز له $\mathrm{Re}(z)$ و y بالجزء التخيلي ل z، ونرمز له $\mathrm{Im}(z)$.

ملاحظة 1:عندما يكون $y = 0$ يكون العدد العقدي z حقيقي صرف، وعندما يكون $x = 0$ يكون العدد العقدي z تخيلي صرف.

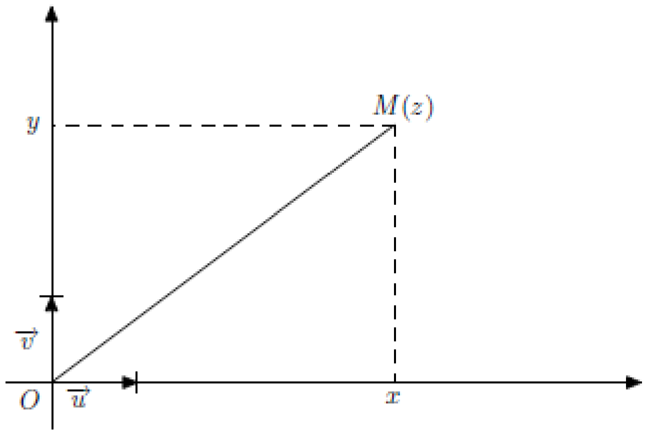
مثال 1:

- العدد $z = 3 + 4i$ عدد عقدي قسمه الحقيقي 3 وقسمه التخيلي 4.
- العدد $z = 7i = 0 + 7i$ عدد عقدي قسمه الحقيقي 0 وقسمه التخيلي 7، هو عدد تخيلي صرف.
- العدد $z = 3 = 3 + 0i$ عدد عقدي قسمه الحقيقي 3 وقسمه التخيلي 0، هو عدد حقيقي صرف.

التمثيل الهندسي للأعداد العقدية

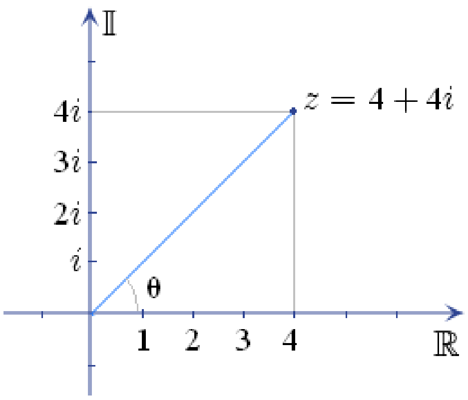
في مستوي الإحداثيات المتعامد $(O; \vec{u}, \vec{v})$، يمكن أن نقرن كل نقطة $M(x, y)$ بعدد عقدي $z = x + yi$. وبالعكس يمكن أن نقرن بكل عدد عقدي $z = x + yi$ النقطة $M(x, y)$ من المستوي. تُسمى النقطة $M(x, y)$ صورة العدد العقدي $z = x + yi$، ونرمّز ذلك $M(z)$. كما نسمي المستوي بالمستوي العقدي.

في مستوي الإحداثيات المتعامد $(O; \vec{u}, \vec{v})$، يُقابل النقطة $M(x, y)$ من المستوي الشعاع $\overrightarrow{OM}$، حيث يكون $\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ ويمكن القول أن العدد العقدي $z = x + yi$ يقابله الشعاع $\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$، يُسمى الشعاع $\overrightarrow{OM}$ صورة العدد العقدي z، ونسمي $\overrightarrow{OM}$ ممثل العدد العقدي.



إن صورة كل عدد عقدي $z = x + 0i$ هي نقطة $N(x, 0)$ من محور الفواصل $(O; \vec{u})$، وبالعكس كل نقطة $N(x, 0)$ من محور الفواصل $(O; \vec{u})$ هي صورة لعدد عقدي من الشكل $z = x + 0i$، لذلك نسمي محور الفواصل المحور الحقيقي.

كما أن صورة كل عدد عقدي $z = 0 + yi$ هي نقطة $E(0, y)$ من محور التراتيب $(O; \vec{v})$، وبالعكس كل نقطة $E(0, y)$ من محور التراتيب $(O; \vec{v})$ هي صورة لعدد عقدي من الشكل $z = 0 + yi$، لذلك نسمي محور التراتيب المحور التخيلي.



على سبيل المثال النقطة $M(4, 4)$ هي صورة العدد العقدي $z = 4 + 4i$. كما أن الشعاع $\overrightarrow{OM} = 4\vec{u} + 4\vec{v}$ يمثل صورة العدد العقدي $z = 4 + 4i$.

تساوي عددين عقديين

مبرهنة 1: يتساوى عددان عقديان إذا وفقط إذا تساوى القسم الحقيقي مع القسم التخيلي لكل منهما. أي أنه إذا كان: $z_1 = x_1 + y_1 i$ و $z_2 = x_2 + y_2 i$ عددين عقديين فإن: $(x_1 = x_2,\ y_1 = y_2) \Leftrightarrow (z_1 = z_2)$. وأن: $(z = 0) \Leftrightarrow (x = 0,\ y = 0)$.

1-2. العمليات الأساسية على الأعداد العقدية Operations on complex numbers

تعريف 2: ليكن لدينا العددين العقديين $z_1 = x_1 + y_1 i$ و $z_2 = x_2 + y_2 i$ فإننا نستطيع تعريف كل ما يلي:

- الجمع: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$
- الطرح: $z_1 - z_1 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$
- الضرب: $z_1 . z_1 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$

مثال 2:

- بفرض أن $z_1 = 3 + 2i$ و $z_2 = 5 - 4i$، أوجد $z_1 + z_2$ و $z_1 - z_2$ و $z_1 . z_1$.

$$z_1 + z_2 = 3 + 2i + 5 - 4i = (3 + 5) + (2 - 4)i = 8 - 2i$$
$$z_1 - z_2 = (3 + 2i) - (5 - 4i) = (3 - 5) + \big(2 - (-4)\big)i = -2 + 6i$$
$$z_1 . z_2 = (3 + 2i)(5 - 4i) = (3(5) - 2(-4)) + (3(-4) + 2(5))i = 23 - 2i$$

ضرب عدد عقدي بعدد حقيقي

تعريف 3: ضرب العدد العقدي $z = x + yi$ بالعدد الحقيقي a هو العدد العقدي $az = ax + ayi$.

مثال 3: ليكن $z = -2 + 3i$، فإن $5z = -10 + 15i$

خصائص الأعداد العقدية

لتكن الأعداد العقدية z_1, z_2, z_3 ولندرس خصائصها بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب:

- الخاصة التبديلية:

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ مثال: $(1 + i) + (1 - 2i) = (1 - 2i) + (1 + i) = 2 - i$

$z_1 . z_2 = z_2 . z_1$ مثال: $(1 + i)(1 - i) = (1 - i)(1 + i) = 1 - i^2 = 1 + 1 = 2$

- الخاصة التجميعية:

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$
$$z_1 .(z_2 . z_3) = (z_1 . z_2) . z_3$$

- العنصر الحيادي: العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الجمع هو العدد 0، كما أن العدد 1 هو العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الضرب.

$z + 0 = 0 + z = z$

$z.1 = 1.z = z$

- العنصر النظير: نظير العدد z بالنسبة لعملية الجمع هو $-z$، كما أن نظير العدد z $(z \neq 0)$ هو العدد $\frac{1}{z}$ بالنسبة لعملية الضرب.

$(-z) + z = z + (-z) = 0$ مثال: $(2 - 3i) + (-2 + 3i) = (-2 + 3i) + (2 - 3i) = 0$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{z}.z = 1z$. مثال: $(-2 + 3i)\frac{-2-3i}{13} = \frac{-2-3i}{13}(-2 + 3i) = \frac{13}{13} = 1$

- الخاصة التوزيعية: عملية الضرب توزيعية على عملية الجمع

$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$

ملاحظة 2: خاصة التوزيع صحيحة أيضاً من أجل عملية الطرح

$z_1(z_2 - z_3) = z_1z_2 - z_1z_3$

2-2. مقلوب عدد عقدي Multiplicative inverse of a complex number

مبرهنة 2: لكل عدد عقدي مختلف عن الصفر $z = x + yi$ مقلوب، نرمز له بالرمز $\frac{1}{z}$، ويساوي:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+yi} = \frac{1}{(x+yi)}.\frac{(x-yi)}{(x-yi)} = \frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)} = \frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{-y}{x^2+y^2}i$$

مثال 4:

- ليكن $z = -2 + 3i$، فإن $\frac{1}{z} = \frac{1}{-2+3i} = \frac{-2-3i}{(-2)^2+3^2} = \frac{-2-3i}{13} = -\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$
- $\frac{1}{i} = \frac{-i}{i(-i)} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{1} = -i$

قسمة عددين عقديين

تعريف 4: ليكن لدينا العددين العقديين $z_1 = x_1 + y_1i$ و $z_2 = x_2 + y_2i$ نعرّف القسمة $\frac{z_1}{z_2}$، بحيث $z_2 \neq 0$ كما يلي:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1.\frac{1}{z_2} = (x_1 + y_1i)\frac{1}{x_2+y_2i} = \frac{(x_1+y_1i)(x_2-y_2i)}{x_2^2+y_2^2} = \frac{(x_1x_2+y_1y_2)+(x_2y_1-x_1y_2)i}{x_2^2+y_2^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + \frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}i$$

مثال 5: ليكن $z_1 = 3 + 2i$ و $z_2 = 4 - i$، فإن:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+2i}{4-i} = \frac{3+2i}{4-i} \cdot \frac{4+i}{4+i} = \frac{12+3i+8i+2i^2}{16+1} = \frac{10+11i}{17} = \frac{10}{17} + \frac{11}{17} i$$

رفع عدد عقدي إلى أس صحيح

تعريف 5: ليكن z عدد عقدي، وليكن n عدداً صحيحاً موجباً، نعرف z^n على أنها ناتج ضرب العدد z بنفسه n مرة. $z^n = z.z.z\ldots z$. أما من أجل أس للعدد صفر أو عدد صحيح سالب فإننا نعرف القوى كما يلي: $z^0 = 1$ و $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$.

مثال 6: ليكن العدد $z = 1 + i$:

$(1 + i)^0 = 1$

$(1 + i)^1 = 1 + i$

$(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$

$(1 + i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = -2 + 2i$

$$(1 + i)^{-3} = \frac{1}{(1+i)^3} = \frac{1}{-2+2i} = \frac{1}{-2+2i}\frac{-2-2i}{-2-2i} = \frac{-2-2i}{(-2)^2-4i^2} = \frac{-2-2i}{8} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} i$$

مثال 7: ليكن العدد $z = i$:

$(i)^0 = 1$	$(i)^1 = i$	$(i)^2 = -1$	$(i)^3 = i.i^2 = -i$
$(i)^4 = 1$	$(i)^5 = i$	$(i)^6 = -1$	$(i)^7 = i.i^2 = -i$

نتيجة 1:

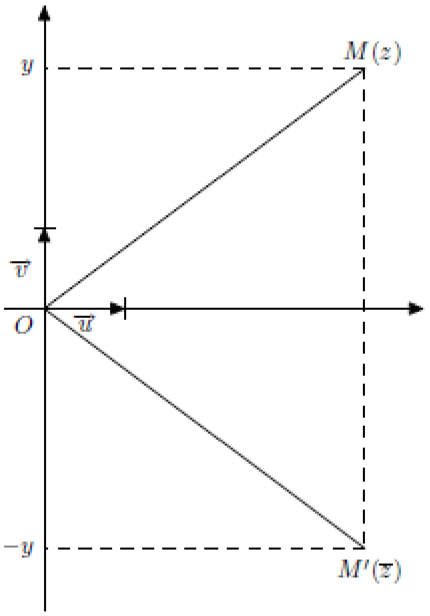
$(i)^n = \{1, i, -1, -i\}: n \in \mathcal{W} = \mathcal{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$

مثال 8: أوجد $(i)^{27}$ و $(i)^{1001}$

$(i)^{27} = (i^4)^6.i^3 = i^3 = -i$

$(i)^{1001} = i^{1000}.i = (i^4)^{250}.i = i$

3-2. مرافق العدد العقدي Complex conjugate



تعريف 6: مرافق العدد العقدي $z = x + yi$، ونرمز له بالرمز $\bar{z}$ هو العدد العقدي $\bar{z} = x - yi$. ينتج من التعريف مباشرة ما يلي:

1. مرافق مرافق العدد z هو العدد نفسه، أي: $\bar{\bar{z}} = z$.
2. مرافق العدد الحقيقي a هو العدد نفسه، أي: $\bar{a} = a$.
3. مرافق العدد التخيلي الصرف bi هو العدد $-bi$، أي: $\overline{bi} = -bi$.
4. $z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x = 2\mathrm{Re(z)}$
5. $z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi = 2\mathrm{Im(z)}i$
6. حاصل ضرب عدد $z = x + yi$ بمرافقه $\bar{z} = x - yi$ يعطي:

$$\begin{aligned}(x + yi)(x - yi) &= x^2 - xyi + xyi - (yi)^2 \\ &= x^2 + y^2\end{aligned}$$

مثال 9:

- مرافق العدد $3 + 4i$ هو $3 - 4i$ — مرافق العدد $\sqrt{3} - 2i$ هو $\sqrt{3} + 2i$
- مرافق العدد 6 هو 6 — مرافق العدد $-2i$ هو $2i$
- $(3 + 4i)(3 - 4i) = 3^2 + 4^2 = 25$
- $(3 + 4i) + (3 - 4i) = 3 + 3 = 6$
- $(3 + 4i) - (3 - 4i) = 4i + 4i = 8i$

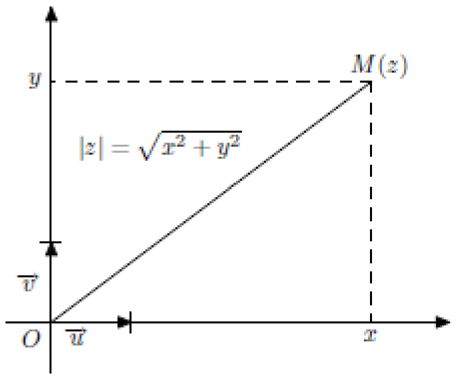
خصائص المرافق

فرضية 1: ليكن لدينا الأعداد العقدية $z_1 = x_1 + y_1 i$ و $z_2 = x_2 + y_2 i$ و $z = x + yi$:

1. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
2. $\overline{z_1 . z_2} = \bar{z}_1 . \bar{z}_2$
3. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2},\ z_2 \neq 0$
4. $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}},\ z \neq 0$
5. $\overline{z^n} = \bar{z}^n,\ n \in \mathcal{Z}$

2-4. طويلة عدد عقدي Modulus of a complex number

تعريف 7: طويلة العدد العقدي $z = x + yi$، ونرمز له بالرمز $|z|$ هو العدد الحقيقي الموجب المعرف كما يلي: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.



ملاحظة 3:

1. **إذا كان** العدد z حقيقي تصبح الطويلة القيمة المطلقة.
2. $|z| = 0$ يكافئ $z = 0$.
3. $z.\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

مثال 10:

- $|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ $\quad$ $|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$
- $|-2i| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$ $\quad$ $|-3| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$

خصائص طويلة العدد العقدي

ليكن لدينا الأعداد العقدية $z_1 = x_1 + y_1 i$ و $z_2 = x_2 + y_2 i$ و $z = x + yi$:

1. $|\bar{z}| = |z|$
2. $|-z| = |z|$
3. $|z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2|$
4. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\ z_2 \neq 0$
5. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ متراجحة المثلث
6. $|z^n| = |z|^n,\ n \in \mathcal{Z}\ (z \neq 0 \text{ if } n \in \mathcal{Z}^-)$

مثال 11: ليكن العدد العقدي $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$، أوجد $|z|$ و $\bar{z}$ و $\frac{1}{z}$.

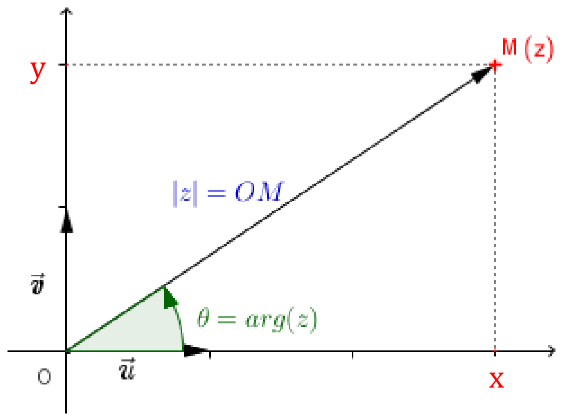
$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$\bar{z} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i} = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i} \cdot \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}{1} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

من الملاحظ أن $\bar{z} = \frac{1}{z}$ وبالتالي فإن $z.\bar{z} = 1 = |z|^2$، أي أن $|z| = 1$.

2-5. زاوية العدد العقدي Argument of a complex number



تعريف 8: زاوية العدد العقدي غير المعدوم $z = x + yi$ والذي صورته النقطة M، ونرمز لها بالرمز arg(z) هي العدد الحقيقي المعرف كما يلي: $\arg(z) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM})$ مقدرة بالراديان.

ملاحظة 4: زاوية الأعداد الحقيقية الموجبة هي 0، بينما زاوية الأعداد الحقيقية السالبة فهي π. أما زاوية الأعداد التخيلية فهي إما π/2 أو −π/2.

مثال 12:

$\arg(3) = 0$ $\qquad$ $\arg(-4) = \pi$

$\arg(2i) = \pi/2$ $\qquad$ $\arg(-5i) = -\pi/2$ $\qquad$ $\arg(1 + i) = \pi/4$

ملاحظة 5: إذا كانت $\theta = \arg(z)$ زاوية للعدد العقدي غير المعدوم z، كان كل عدد حقيقي من المجموعة $\{\theta + 2\pi k : k \in \mathcal{Z}\}$ أيضاً زاوية للعدد العقدي z وبالتالي نكتب $\theta \equiv \arg(z)\ [2\pi]$. على سبيل المثال:

$$\arg(-4) = \pi,\ 3\pi\ (=\pi + 2\pi),\ 5\pi\ (=\pi + 4\pi),\ -\pi\ (=\pi - 2\pi)\ ,\ -3\pi\ (= \pi - 4\pi),\ \ldots$$

يمكننا جعل قيمة الزاوية لعدد عقدي $\theta = \arg(z)$ وحيدة وذلك بإضافة الشرط $\theta \in]-\pi, +\pi]$.

خصائص زاوية العدد العقدي

ليكن لدينا الأعداد العقدية $z_1 = x_1 + y_1 i$ و $z_2 = x_2 + y_2 i$ و $z = x + yi$:

1. $arg(\bar{z}) = -arg(z)$
2. $arg(-z) = arg(z) + \pi$

3. $arg(z_1.z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$

4. $arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1) - arg(z_2)$

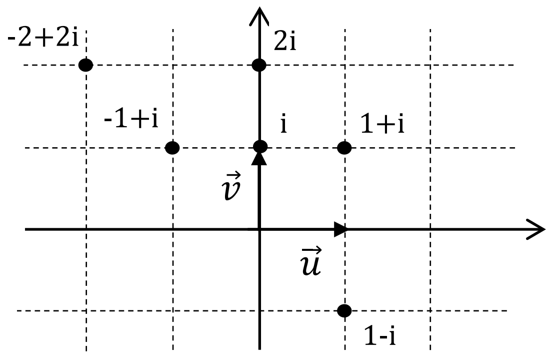
5. $arg(z^n) = n\, arg(z), \;\; n \in \mathcal{Z}$

مثال 12:

arg[i(1 + i)] = arg(−1 + i) = arg(i) + arg(1 + i) = π/2 + π/4 = 3π/4

arg[(1 + i)/i] = arg(1 − i) = arg(1 + i) − arg(i) = π/4 − π/2 = −π/4

arg[(1 + i)³] = arg(−2 + 2i) = 3.arg(1 + i) = 3π/4



6-2. الشكل المثلثي للعدد العقدي Trigonometric form of a complex number

في مستوي الإحداثيات المتعامد $(O; \vec{u}, \vec{v})$، وليكن العدد العقدي $z = x + yi$ غير المعدوم و r عدداً حقيقياً موجباً تماماً و θ عدداً حقيقياً. نفرض $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$، وبالتالي فإن:

$$z = x + yi = \sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{x+yi}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}i\right)$$

وبملاحظة أن: $cos\,\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r}$ و $sin\,\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{r}$، بالتالي يمكن كتابة العدد العقدي $z = x + yi$ بالشكل $z = r(cos\,\theta + sin\,\theta i)$، نسمي هذه الكتابة بالشكل المثلثي للعدد العقدي z.

ISSN: 2617-989X

مثال 13:

- العدد العقدي 1 + i: طويلة العدد r هي $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ وزاويته θ تحسب من العلاقتين $\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$، وبالتالي فإن $\theta=\frac{\pi}{4}$. أي أن الشكل المثلثي ل 1 + i هو $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}i\right)$.
- العدد العقدي $-\sqrt{3}-i$: طويلة العدد r هي $r=\sqrt{3+1}=2$ وزاويته θ تحسب من العلاقتين $\cos\theta=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ و $\sin\theta=\frac{-1}{\sqrt{2}}$، وبالتالي فإن $\theta=\frac{5\pi}{6}$. أي أن الشكل المثلثي ل $-\sqrt{3}-i$ هو $z=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\sin\frac{5\pi}{6}i\right)$.
- الشكل المثلثي للعدد العقدي i هو: $\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}i$
- الشكل المثلثي للعدد العقدي −3i هو: $3(\cos\frac{3\pi}{2}+\sin\frac{3\pi}{2}i)$
- الشكل المثلثي للعدد العقدي 2 هو: $2(\cos 0+\sin 0\, i)$
- الشكل المثلثي للعدد العقدي −5 هو: $5(\cos\pi+\sin\pi\, i)$

7-2. الشكل الأسي للعدد العقدي Exponential form of a complex number

تعريف 9: كل عدد عقدي غير معدوم $z\neq 0$ طويلته r وزاويته θ، يُمكن كتابته بالشكل التالي:

$$z=re^{i\theta}=r(\cos\theta+\sin\theta i)$$

ينتج من التعريف أن $\left|e^{i\theta}\right|=1$ وأن $\arg\left(e^{i\theta}\right)=\theta$ و $\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$.

ضرب وقسمة عددين عقدين بالشكل الأسي

ليكن لدينا العددان العقديان $z_1=r_1e^{i\theta_1}$ و $z_2=r_2e^{i\theta_2}$، لنحسب الجداء $z_1.z_2$:

$$z_1.z_2=r_1e^{i\theta_1}.r_2e^{i\theta_2}=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

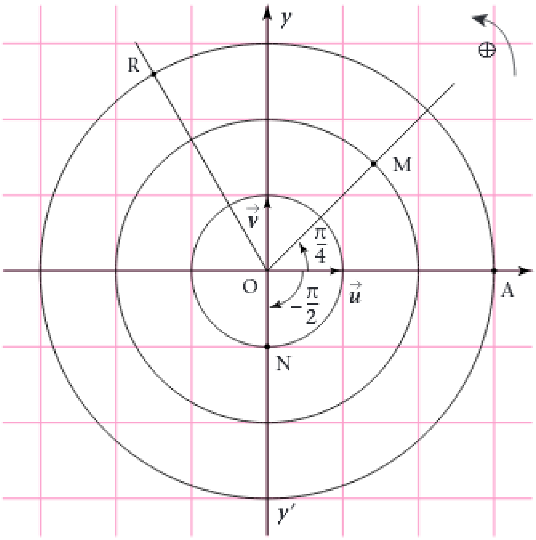
وقسمة العددان $\frac{z_1}{z_2}$ هو:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

وإذا كان العدد العقدي غير المعدوم $z=re^{i\theta}$ فإنه ومن أجل $n\in\mathcal{Z}$:

$$z^n=\left(re^{i\theta}\right)^n=r^ne^{in\theta}$$

التمثيل الهندسي



نمثل العدد العقدي $z = re^{i\theta}$ في مستوي الإحداثيات المتعامد $(O; \vec{u}, \vec{v})$ بنقطة P(z) على دائرة نصف قطرها يساوي r ومركزها مبدأ الإحداثيات O بحيث يصنع نصف القطر OP مع الشعاع $\vec{u}$ زاوية قياسها θ. على سبيل المثال يوجد في الشكل جانباً أربع نقاط هي:

$z_M = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ و $z_N = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$z_A = 3e^{i0}$ و $z_R = 3e^{i\frac{2\pi}{3}}$

مثال 14:

- ليكن لدينا العدد العقدي $z = 1 + i$، اكتبه بالشكل المثلثي ومن ثم احسب z^8 و z^{10}.

وجدنا سابقاً أن $r = \sqrt{2}$ و $\theta = \frac{\pi}{4}$ وبالتالي فإن $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

$$z^8 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^8 = \sqrt{2}^8 e^{i8\frac{\pi}{4}} = 16e^{i2\pi} = 16$$

$$z^{10} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{10} = \sqrt{2}^{10} e^{i10\frac{\pi}{4}} = 32e^{i\frac{\pi}{2}} = 32i$$

- ليكن لدينا العددان العقديان $z_1 = 1 + i$ و $z_2 = 1 - i$، اكتبهما بالشكل الأسي ومن ثم احسب $z_1.z_2$ و $\frac{z_1}{z_2}$.

$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ $(z_2 = \overline{z_1})$.

لحساب الضرب: $z_1z_2 = \sqrt{2}.\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4})} = 2$

ولحساب القسمة: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

دستور دوموافر

أياً كانت θ عدداً حقيقياً، وأياً كانت n عدداً صحيحاً فإن:

$$(cos\ \theta + sin\ \theta\ i)^n = \cos n\theta + \sin n\theta$$

مثال 15: اكتب النسب المثلثية للزاوية 2θ بدلالة النسب المثلثية للزاوية θ.

باستخدام دستور دوموافر: $(cos\ \theta + sin\ \theta\ i)^2 = \cos 2\theta + \sin 2\theta$

ننشر الحد الأيسر من المساواة نحصل على:

$$(cos\ \theta + sin\ \theta\ i)^2 = cos^2\ \theta - sin^2\ \theta + 2cos\ \theta\ sin\ \theta\ i = \cos 2\theta + \sin 2\theta$$

بمساواة الجزأين الحقيقيين والجزأين التخيلين نحصل على:

$$cos\ 2\theta = cos^2\ \theta - sin^2\ \theta$$

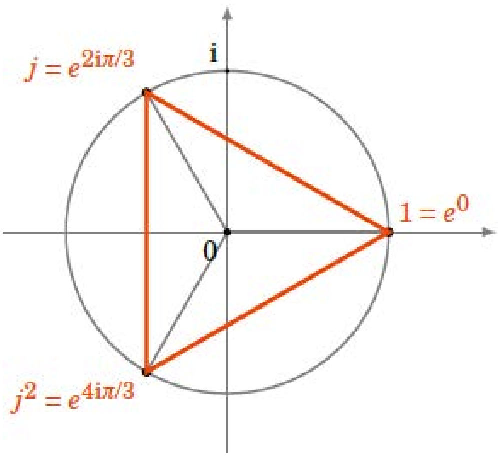
$$\sin 2\theta = 2cos\ \theta\ sin\ \theta$$

الجذور من المرتبة n لعدد عقدي

تعريف 10: من أجل كل عدد عقدي z و عدد صحيح موجب. الجذر من المرتبة n للعدد z هو عدد عقدي ω بحيث $z\omega^n =$.

فرضية 2: يوجد n جذر من المرتبة n للعدد العقدي $z = re^{i\theta}$، وهي:

$$\omega_k = r^{1/n} e^{\frac{\theta i + 2k\pi i}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$



مثال 16:

- أوجد الجذور التكعيبية للعدد العقدي 1.

نكتب الواحد على الشكل $1 = 1e^{0i}$ وبالتالي فإن الجذور الثلاث للواحد هي:

$$\omega_k = 1^{1/3} e^{\frac{0i + 2k\pi i}{3}} = e^{\frac{2k\pi i}{3}}, \quad k = 0, 1, 3$$

عند k = 0 يكون $\omega_0 = e^{\frac{2k\pi i}{3}} = 1$

عند k = 1 يكون $\omega_1 = e^{\frac{2\pi i}{3}} = cos\frac{2\pi}{3} + sin\frac{2\pi}{3} i$

عند k = 2 يكون $\omega_2 = e^{\frac{4\pi i}{3}} = cos\frac{4\pi}{3} + sin\frac{4\pi}{3} i$

أي أن مجموعة الحلول هي: $\{1,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = j,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = j^2\}$. وهي تشكل رؤوس مثلث متساوي الأضلاع.

- أوجد الجذور التكعيبية للعدد العقدي 8i.

نكتب العدد العقدي 8i على الشكل $8i = 8e^{\frac{\pi}{2} i}$ وبالتالي فإن الجذور الثلاث للواحد هي:

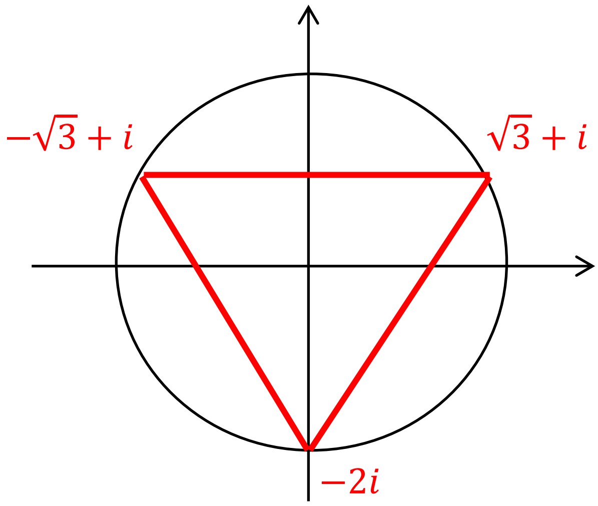
$$\omega_k = 8^{1/3} e^{\frac{\frac{\pi}{2} i + 2k\pi i}{3}}, \quad k = 0, 1, 3$$

k = 0 يكون $\omega_0 = 2e^{\frac{\pi}{6} i} = 2\left(cos\frac{\pi}{6} + sin\frac{\pi}{6} i\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right) = \sqrt{3} + i$

k = 1 يكون $\omega_1 = 2e^{\frac{\pi}{6} i + \frac{2\pi}{3} i} = 2\left(cos\frac{5\pi}{6} + sin\frac{5\pi}{6} i\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right) = -\sqrt{3} + i$

يكون k = 2 $\omega_2 = 2e^{\frac{\pi}{6}i+\frac{4\pi}{3}i} = 2\left(cos\frac{9\pi}{6} + sin\frac{9\pi}{6}i\right) = 2(0-1i) = -2i$

أي أن مجموعة الحلول هي: $\{-2i,\ \sqrt{3}+i,\ -\sqrt{3}+i\}$.



3- حل المعادلات في $\mathcal{C}$ Solving equations in Complex numbers

3-1. معادلة من الدرجة الأولى First degree equation

إن كل معادلة من الدرجة الأولى للمتحول العقدي z يمكن إرجاعها إلى الشكل $az + b = 0$، حيث $a \in \mathcal{C}^*$ و $b \in \mathcal{C}$. هذه المعادلة حلها هو $z = -b/a$.

مثال 17: حل في $\mathcal{C}$ المعادلة $(1 - i)z + 3 = -z + i$.

$(1 - i)z + 3 = -z + i \Rightarrow (2 - i)z = -3 + i$

$$z = \frac{-3+i}{2-i} = \frac{-3+i}{2-i}\frac{2+i}{2+i} = \frac{(-3+i)(2+i)}{5} = \frac{-7-i}{5} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i$$

3-2. معادلة من الدرجة الثانية Second degree equation

1. المعادلة التربيعية بأمثال عقدية

فرضية 3: ليكن a, b, c ثلاث أعداد عقدية بحيث $a \neq 0$. ولتكن المعادلة من الشكل $ax^2 + bx + c = 0$ ومميزها $\Delta = b^2 - 4ac$.

- إذا كان $\Delta \neq 0$، فإن المعادلة تقبل حلان (جذران) مختلفان $z = \frac{-b\pm\delta}{2a}$، حيث δ هو جذر تربيعي ل Δ.
- إذا كان $\Delta = 0$، فإن المعادلة تقبل حل (جذر) مضاعف $z = \frac{-b}{2a}$.

مثال 18:

- حل في $\mathcal{C}$ المعادلة $z^2 - (1+i)z - i/2 = 0$.

$$\Delta = [-(1+i)]^2 - 4(1)(-i/2) = 2i + 2i = 4i = 4e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$\delta = \sqrt{\Delta} = 4^{1/2}e^{\frac{\frac{\pi}{2}i+2k\pi i}{2}} = 2e^{\frac{\pi}{4}i+k\pi i}, \quad k = 0, 1$$

$$k = 0, \delta = 2e^{\frac{\pi}{4}i} = 2\left(cos\frac{\pi}{4} + sin\frac{\pi}{4}i\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$k = 1, \delta = 2e^{\frac{\pi}{4}i+\pi i} = 2e^{\frac{5\pi}{4}i} = 2\left(cos\frac{5\pi}{4} + sin\frac{5\pi}{4}i\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

لنأخذ أحد الجذرين وليكن $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ (يمكنن أن نأخذ الجذر الآخر ونحصل على نفس النتائج)، وبالتالي يكون جذرا المعادلة هما: $z = \frac{-b\pm\delta}{2a} = \frac{(1+i)\pm(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)}{2(1)}$، أي أن أحد الجذرين هو $z_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}(1+i)$ والجذر الآخر هو $z_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

- حل في $\mathcal{C}$ المعادلة $z^2 - (1+i)z + i/2 = 0$.

$$\Delta = [-(1+i)]^2 - 4(1)(i/2) = 2i - 2i = 0$$

وبالتالي للمعادلة جذر مضاعف هو: $z = \frac{-b}{2a} = \frac{(1+i)}{2(1)} = \frac{(1+i)}{2}$.

2. المعادلة التربيعية بأمثال حقيقية

فرضية 4: ليكن a, b, c ثلاث أعداد حقيقية بحيث $a \neq 0$. ولتكن المعادلة من الشكل $ax^2 + bx + c = 0$ ومميزها $\Delta = b^2 - 4ac$.

- إذا كان $\Delta > 0$، فإن المعادلة تقبل حلان (جذران) حقيقيان مختلفان $z = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$
- إذا كان $\Delta < 0$، فإن المعادلة تقبل حلان (جذران) عقديان مختلفان $z = \frac{-b\pm\sqrt{-\Delta}\,i}{2a}$
- إذا كان $\Delta = 0$، فإن المعادلة تقبل حل (جذر) حقيقي مضاعف $z = \frac{-b}{2a}$.

مثال 19:

- حل في $\mathcal{C}$ المعادلة $z^2 - z - 6 = 0$.

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 25 > 0$$

بالتالي المعادلة تقبل حلان (جذران) حقيقيان مختلفان $z = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1\pm\sqrt{25}}{2(1)}$

والجذران هما $z_1 = 3$ و $z_2 = -2$.

- حل في $\mathcal{C}$ المعادلة $z^2 - z + 1 = 0$.

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$

بالتالي المعادلة تقبل حلان (جذران) عقديان مختلفان $z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\, i}{2(1)}$

والجذران هما $z_1 = \frac{1+\sqrt{3}\, i}{2}$ و $z_2 = \frac{1-\sqrt{3}\, i}{2}$ ($z_2 = \overline{z_1}$).

- حل في $\mathcal{C}$ المعادلة $z^2 - 6z + 9 = 0$.

$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(6) = 36 - 36 = 0$

بالتالي المعادلة تقبل حل (جذر) حقيقي مضاعف $z = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$.

3-3. النظرية الأساسية في الجبر Fundamental theorem of algebra

ليكن لدينا كثير الحدود $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ بمعاملات عقدية ودرجته n. تقبل المعادلة $P(z) = 0$ تماماً n حل (جذر) عقدي وهذه الجذور قد لا تكون جميعها متميزة عن بعضها، وعندها نقول إن للمعادلة جذور مشتركة. بمعنى آخر يوجد أعداد عقدية $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (يمكن لبعضها أن يكون متطابق) بحيث:

$$P(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)$$

مثال 20:

- $4z^3 - 12z^2 + 8z = 4z(z-1)(z-2)$
- $-z^5 + 2z^4 - 7z^3 + 14z^2 - 10z + 20 = -(z-2)(z+2i)(z-2i)(z+5i)(z-5i)$
- $2z^4 - 2z^3 + 14z^2 - 6z + 24 = 2(z+3i)(z-3i)(z - \frac{1+\sqrt{15}i}{2})(z - \frac{1-\sqrt{15}i}{2})$

4- تطبيقات الأعداد العقدية في الهندسة المستوية Complex numbers and plane geometry

- للعددين z و $\bar{z}$ صورتان في المستوي العقدي $M(z)$ و $M(\bar{z})$ متناظرتان بالنسبة للمحور الحقيقي.
- للعددين z و $-z$ صورتان في المستوي العقدي $M(z)$ و $M(-z)$ متناظرتان بالنسبة للمبدأ.
- لتكن النقطة A صورة العدد العقدي z_A والنقطة B صورة العدد العقدي z_B، عندها تمثل النقطة M منتصف القطعة المستقيمة AB صورة العدد العقدي $\frac{z_A + z_B}{2}$.

مبرهنة 3: ليكن لدينا النقاط A صورة z_A و B صورة z_B و M صورة $z = x + yi$، والعدد الحقيقي الموجب تماماً r:

1. $|z| = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$ تمثل بعد النقطة O (المبدأ) عن النقطة M.

2. $|z_B - z_A| = AB$ تمثل طول المسافة من A إلى B.

3. مجموعة النقاط العقدية M من المستوي والتي تحقق المعادلة $|z - z_A| = r$ هي عبارة عن دائرة مركزها A ونصف قطرها r.

4. من أجل A ≠ B، النقطة M تقع على محور القطعة المستقيمة [AB] إذا وفقط إذا تحققت العلاقة التالية: $|z - z_A| = |z - z_B|$,

مثال 21:

- ليكن العددين $z_A = 1 - 2i$ و $z_B = 3 + 5i$ صورتي النقطتين A و B على الترتيب. احسب المسافة AB.

$$AB = |z_B - z_A| = |3 + 5i - (1 - 2i)| = |2 + 7i| = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{53}$$

- مجموعة نقاط المستوي M(z)، صور الأعداد العقدية z التي تحقق العلاقة $|z - 3| = 5$.

لتكن النقطة A هي صورة العدد العقدي 3، عندئذ تعبر المساواة $|z - 3| = 5$ عن أن MA = 3 أي أن بعد النقطة M عن A يساوي 3. فمجموعة النقاط المطلوبة هي عبارة عن نقاط الدائرة التي مركزها A(3, 0) ونصف قطرها يساوي 5.

- لتكن M(z) صورة العدد العقدي z. ماذا تمثل مجموعة النقاط M(z) في المستوي العقدي والتي تحقق العلاقة التالية (المساواة): $|z - 1 + 2i| = |z - 3 - 5i|$.

ليكن العددين $z_A = 1 - 2i$ و $z_B = 3 + 5i$ صورتي النقطتين A و B على الترتيب. تكتب المعادلة المعطاة على الشكل $|z - z_A| = |z - z_B|$ وهذا يعني أن MA = MB وبالتالي مجموعة النقاط M في المستوي التي تبعد البعد نفسه عن النقطتين A و B هي مجموعة نقاط محور القطعة المستقيمة [AB].

فرضية 5: ليكن الشعاع $\overrightarrow{OA}$ صورة العدد العقدي z_A والشعاع $\overrightarrow{OB}$ صورة العدد العقدي z_B. فإن زاوية العدد العقدي $arg\frac{z_B}{z_A}$ تمثل قياس الزاوية $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

مبرهنة 4: في مستوي الإحداثيات المتعامد $(O; \vec{u}, \vec{v})$، ليكن لدينا النقاط A صورة z_A و B صورة z_B و C صورة z_C و D صورة z_D: $arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}) = \theta\ [2\pi]$ و $\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C} = \frac{AB}{CD}e^{i\theta}$.

نتيجة 2:

1. ABC مثلث قائم في B ⇔ العدد $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C}$ تخيلي صرف لا يساوي الصفر.
2. ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين في B ⇔ $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.
3. ABC مثلث متساوي الأضلاع ⇔ $|z_B - z_A| = |z_C - z_B| = |z_C - z_A|$.
4. ABC على استقامة واحدة ⇔ العدد $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C}$ حقيقي.

5. ABCD متوازي أضلاع $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D$.

مثال 22:

- ما هو نوع المثلث ABC علماً أن $z_A = 3 + 2i$ و $z_B = 2 + i$ و $z_C = 1 + 2i$ صور النقاط A و B و C على الترتيب.

لنشكل العدد العقدي $Z = \frac{z_B - z_A}{z_B - z_C}$

$$Z = \frac{z_B-z_A}{z_B-z_C} = \frac{(2+i)-(3+2i)}{(2+i)-(1+2i)} = \frac{-1-i}{1-i} = \frac{-1-i}{1-i}.\frac{1+i}{1+i} = \frac{-2i}{2} = -i$$

العدد Z تخيلي وبالتالي فإن المثلث ABC قائم في B.

- لتكن الأعداد العقدية: $z_A = 2 + i$ و $z_B = -1 + 4i$ و $z_C = 1 + 2i$ صور النقاط A و B و C على الترتيب. أثبت أن النقاط A, C, B تقع على استقامة واحدة.

لنشكل العدد العقدي $Z = \frac{z_B - z_A}{z_B - z_C}$

$$Z = \frac{z_B-z_A}{z_B-z_C} = \frac{(-1+4i)-(2+i)}{(-1+4i)-(1+2i)} = \frac{-3+3i}{-2+2i} = \frac{3}{2}.\frac{-1+i}{-1+i} = \frac{3}{2}$$

العدد Z حقيقي وبالتالي فالنقاط A, C, B تقع على استقامة واحدة.

أسئلة الفصل

1. ليكن العدد العقدي $z = \frac{4-3i}{2-2i}$. أوجد $|z|$ و $\bar{z}$.
2. أوجد ناتج ما يلي: $1 - 2i + \frac{i}{1-2i}$
3. اكتب بالشكل a + ib الأعداد العقدية $(1 - i)^2$، $(1 - i)^3$، $(1 - i)^4$، $(1 - i)^8$
4. استنتج $1 + (1 - i) + (1 - i)^2 + \ldots + (1 - i)^7$
5. ليكن العدد العقدي $z = (1 + b)^2$ حيث b عدد حقيقي موجب، أوجد قيمة b إذا كان $\arg z = \frac{\pi}{3}$
6. بفرض أن $z \in \mathcal{C}$ بحيث $|1 - iz| = |1 + iz|$. برهن أن $z \in \mathcal{R}$
7. ليكن $z \neq 0$ و $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 1$، برهن أن z تخيلي صرف
8. باستخدام دستور دوموافر اكتب النسب المثلثية للزاوية 3θ بدلالة النسب المثلثية للزاوية θ
9. احسب الجذور التربيعية للأعداد $-i, 3 - 4i$
10. ليكن لدينا العدد العقدي $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.
    a) اكتب z^2 بالشكل الجبري
    b) اكتب z^2 بالشكل الأسي
    c) استنتج z بالشكل الأسي
11. حل المعادلات: $z^2 + z - 1$، $2z^2 + (-10 - 10i)z + 24 - 10i$
12. حل المعادلة $z^2 + (i - \sqrt{2})z - i\sqrt{2} = 0$، ثم المعادلة $Z^4 + (i - \sqrt{2})Z^2 - i\sqrt{2} = 0$
13. احسب الجذر من المرتبة 5 للأعداد $32i$ و $4 - 4i$
14. احسب بطريقتين مختلفتين الجذران التربيعيان للعدد $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ بطريقين مختلفتين. استنتج القيمتين $cos\frac{\pi}{12}$ و $sin\frac{\pi}{12}$.
15. ما هو نوع المثلث ABC علماً أن $z_A = 1 + 2i$ و $z_B = -2 + i$ و $z_C = -1 + 2i$ صور النقاط A و B و C على الترتيب.
16. لتكن الأعداد العقدية: $z_A = -4$ و $z_B = -1 - i$ و $z_C = 2 - 2i$ صور النقاط A و B و C على الترتيب. أثبت أن النقاط A, C, B تقع على استقامة واحدة.

ISSN: 2617-989X

تمارين إضافية

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة

1. $z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$، الشكل الجبري ل z هو:

a) $-1 + i\sqrt{3}$ b) $1 + i\sqrt{3}$ c) $2 + i\sqrt{3}$ d) $\sqrt{3} - i$

2. $z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ و $z' = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ بالتالي zz' هو:

a) −4 b) 4 c) 4i d) −4i

3. $\left(\frac{i}{1-i}\right)^{20}$ يساوي:

a) $\frac{1}{1024}$ b) $\frac{-1}{1024}$ c) $\frac{i}{1024}$ d) $\frac{-i}{1024}$

4. $z = \frac{4-i}{1+2i}$، بالتالي z يساوي:

a) $\frac{2-9i}{5}$ b) $\frac{2-9i}{-3}$ c) $\frac{6+7i}{5}$ d) $\frac{2+9i}{5}$

5. مرافق العدد $\frac{1-z}{1+i}$ ، حيث z عدد عقدي هو:

a) $\frac{1-z}{1-i}$ b) $\frac{1-\bar{z}}{1-i}$ c) $\frac{1+\bar{z}}{1-i}$ d) $\frac{1+z}{1-i}$

6. زاوية العدد العقدي $-3\frac{1+i\sqrt{3}}{i}$

a) $\frac{-\pi}{6}$ b) $\frac{5\pi}{6}$ c) $\frac{7\pi}{6}$ /2 d) $\frac{\pi}{6}$

7. إذا كانت $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$ و $z' = -7$ فإن $\arg(zz')$ يساوي

a) $\frac{2\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $-\frac{\pi}{3}$ d) $\frac{-2\pi}{3}$

8. ليكن n عدد طبيعي. العدد $(1 + i\sqrt{3})^n$ يكون حقيقي إذا وفقط إذا كان n:

a) عدد زوجي b) عدد فردي c) مضاعفات العدد 4 d) مضاعفات العدد 3

9. $z_A = -3$ و $z_B = 2i$ بالتالي AB تساوي

a) 5 b) −1 c) 3 + 2i d) $\sqrt{13}$

10. مجموعة النقاط M التي صورتها z بحيث $|z - 1| = |z + i|$ هي الخط المستقيم الذي معادلته:

a) y = x b) y = −x c) y = x − 1 d) y = x + 1

ISSN: 2617-989X

السؤال الثاني: أجب بصح أو خطأ

1. العدد $(1 + i)^2$ تخيلي صرف	**صح** أو خطأ
2. من أجل كل عدد عقدي z لدينا $z^2 = \|z\|^2$	صح أو **خطأ**
3. $(1 - i\sqrt{3})(4 + 4i) = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$	صح أو **خطأ**
4. $\arg(1+i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$	**صح** أو خطأ
5. $\|z\| = \|z'\|$ إذا وفقط إذا كان $z = z'$ أو $z = -z'$	صح أو **خطأ**
6. $z + \bar{z} = 0$، بالتالي $z = 0$	صح أو **خطأ**
7. مرافق العدد $1 + e^{i\theta}$ هو $1 - e^{i\theta}$	صح أو **خطأ**
8. $z + 1/z = 0$ يؤدي إلى أن $z = i$ أو $z = -i$	**صح** أو خطأ
9. $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ بالتالي z^4 عدد حقيقي	**صح** أو خطأ
10. z و z' عددان عقديان بحيث z + z' و zz' حقيقيان بالتالي z و z' حقيقيان	صح أو **خطأ**

السؤال الثالث: حل كل من المعادلات التالية:

لتكن الأعداد العقدية: $z_A = -4$ و $z_B = -1 - i$ و $z_C = 2 - 2i$ صور النقاط A و B و C على الترتيب.

أثبت أن النقاط A, C, B تقع على استقامة واحدة.

الجواب:

ABC على استقامة واحدة ⟺ العدد $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C}$ حقيقي.

$$\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} = \frac{-1-i+4}{-1-i-2+2i} = \frac{3-i}{-3+i} = -1$$

السؤال الرابع:

حل المعادلة $z^2 + (i - \sqrt{2})z - i\sqrt{2} = 0$

الجواب:

$$\Delta = (i - \sqrt{2})^2 - 4(1)(-i\sqrt{2}) = -1 + 2 - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 1 + 2\sqrt{2}i = (i + \sqrt{2})^2$$

$$z = \frac{-b \pm \delta}{2a} = \frac{-(i - \sqrt{2}) \pm (i + \sqrt{2})}{2(1)} = \{\sqrt{2}, -i\}$$

الفصل السادس: البنى الجبرية

Chapter 6: Algebraic structure

الكلمات المفتاحية:

قانون تشكيل داخلي، خواص قانون التشكيل، عنصر حيادي، عنصر نظير، زمرة، زمرة تبديلية، زمرة جزئية، زمرة منتهية، زمرة وحيدة التوليد، زمرة دوارة، رتبة زمرة، مورفيزم، أندومورفيزم، إيزومورفيزم، أوتومورفيزم، نواة مورفيزم، صورة مورفيزم، زمرتان متشاكلتان، زمر القسمة، حلقة، حلقة جزئية، حلقة تامة، حقل، حقل جزئي.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على بعض البنى الجبرية ابتداء بقوانين التشكيل الداخلي وخواصها. والزمر الجزئية وخواص الزمر، ويتم التركيز بشكل خاص على الزمر المنتهية والدوارة لما لها من فوائد، والتطبيقات (التشاكلات) بين الزمر. بعدها يتم دراسة الحلقات والحلقات الجزئية والتشاكلات بين الحلقات. وأخيراً نصل إلى البنية الأعم وهي الحقل. هذه البنى هي الأساس لمفاهيم أخرى في الرياضيات كالمصفوفات والفضاءات الشعاعية بالإضافة لكونها تلعب دورا أساسياً في الحساب والهندسة والتشفير.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- البنى الجبرية من قوانين التشكيل الداخلية إلى الزمر والحلقات والحقول.
- الزمر وخواصها والتشاكلات فيما بينها.
- الزمر المنتهية والدوارة.
- الحلقات والتشاكلات فيما بينها.
- الحقول والتشاكلات فيما بينها.

1. قوانين التشكيل Composition law

1-1. قوانين التشكيل الداخلي Internal composition law

تعريف 1: لتكن E مجموعة ما. نسمي قانون تشكيل داخلي على E كل تطبيق من ExE إلى E.

ليكن * قانون تشكيل داخلي على E، صورة كل زوج $(x, y) \in ExE = E^2$ وفق * يُرمز لها بالشكل $x * y$.
والرمز $(E, *)$ يعني أن المجموعة E مزودة بقانون التشكيل الداخلي *.

أمثلة 1:

- لتكن $E = \mathcal{Z}$، عملية الجمع العادية $\mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ المعرفة بالشكل $(a, b) \mapsto a + b$ تشكل قانون تشكيل داخلي. عملية الضرب العادية $\mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ المعرفة بالشكل $(a, b) \mapsto a \times b$ تشكل قانون تشكيل داخلي. عملية الطرح العادية $\mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ المعرفة بالشكل $(a, b) \mapsto a - b$ تشكل قانون تشكيل داخلي. أما القسمة a/b فلا تشكل قانون تشكيل داخلي لأن قسمة العددين الصحيحين 2 و 3 ليس بعدد صحيح.
- عملية الجمع على المجموعات $\mathcal{N}$ و $\mathcal{Z}$ و $\mathcal{Q}$ و $\mathcal{R}$ و $\mathcal{C}$ تشكل قانون تشكيل داخلي. أما عملية الجمع على المجموعات $\mathcal{Z}^*$ و $\mathcal{Q}^*$ و $\mathcal{R}^*$ و $\mathcal{C}^*$ فلا تشكل قانون تشكيل داخلي $(5 - 5 = 0 \notin \mathcal{Z}^*)$.
- عملية الضرب على المجموعات $\mathcal{N}$ و $\mathcal{Z}$ و $\mathcal{Q}$ و $\mathcal{R}$ و $\mathcal{C}$ تشكل قانون تشكيل داخلي.
- عملية الطرح على المجموعات $\mathcal{Z}$ و $\mathcal{R}$ و $\mathcal{C}$ تشكل قانون تشكيل داخلي. أما عملية الطرح على $\mathcal{N}$ فلا تشكّل قانون تشكيل داخلي، لأن طرح عددين من $\mathcal{N}$ ليس بالضرورة أن يكون من $\mathcal{N}$ $(2 - 5 = -3 \notin \mathcal{N})$.
- لتكن $E = \mathcal{P}(X)$ المجموعات الجزئية التي تتألف منها مجموعة X، عملية الاجتماع $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ المعرفة بالشكل $(A, B) \mapsto A \cup B$ تشكل قانون تشكيل داخلي لأن اجتماع أي مجموعتين من $\mathcal{P}(X)$ هي مجموعة من $\mathcal{P}(X)$. نفس الشيء بالنسبة لعملية التقاطع $\cap$ والفرق التناظري Δ فكل منهما يشكل قانون تشكيل داخلي.
- لتكن $E = \mathcal{F}(X)$ مجموعة التطبيقات من X إلى X، عملية التركيب $\mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X)$ المعرفة بالشكل $(f, g) \mapsto f \circ g$ تشكل قانون تشكيل داخلي (قانون تركيب التطبيقات). لأن تركيب تطبيقين من $\mathcal{F}(X)$ هو تطبيق من $\mathcal{F}(X)$.
- لتكن $E = \mathcal{R}^2$، الجمع $\mathcal{R}^2 x \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$ المعرف بالشكل $((x_1,y_1), (x_2,y_2)) \mapsto (x_1+x_2, y_1+y_2)$ يشكل قانون تشكيل داخلي (جمع عددين حقيقيين هو عدد حقيقي . أما عملية الضرب بسلّمي $\mathcal{R} \times \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$ والمعرف بالشكل التالي: $(\lambda, (x, y)) \mapsto (\lambda x, \lambda y)$ لا يشكل قانون تشكيل داخلي لأن مجموعة المنطلق ليست من الشكل ExE.

1-2. خواص قانون التشكيل الداخلي Internal composition law properties

الخاصة التجميعية

تعريف 2: ليكن $*$ قانون تشكيل داخلي على E. نقول عن $*$ إنه تجميعي إذا كان من أجل كل $(x, y, z) \in E^3$ لدينا: $x * (y * z) = (x * y) * z$. عندها نكتب $x * y * z$ وبدون أقواس.

الخاصة التبديلية

تعريف 3: ليكن $*$ قانون تشكيل داخلي على E. نقول عن $*$ إنه تبديلي إذا كان من أجل كل $(x, y) \in E^2$ لدينا: $x * y = x * y$.

1-3. العنصر الحيادي Neutral element

تعريف 4: ليكن $*$ قانون تشكيل داخلي على E. نقول عن العنصر $e \in E$ أنه عنصر حيادي ل $(E, *)$ إذا كان من أجل كل عنصر $x \in E$ لدينا: $x * e = e * x = x$.

وحدانية العنصر الحيادي

مبرهنة 1: ليكن $*$ قانون تشكيل داخلي على E. إذا كانت $(E, *)$ تملك عنصر حيادي، فهذا العنصر وحيد.

أمثلة 2:

- عملية الجمع والضرب على مجموعة الأعداد الصحية $\mathcal{Z}$ هي عملية تجميعية وتبديلية وتقبل عنصر حيادي هو الصفر "0"بالنسبة للجمع و الواحد "1" بالنسبة للضرب. نفس الشيء بالنسبة للمجوعة $\mathcal{R}$ و $\mathcal{C}$.
- عملية الطرح ليست تجميعية ولا تبديلية في $\mathcal{Z}$ وأيضاً في $\mathcal{R}$: $3 - (7 - 2) = -8 \neq -2\ (3 - 7) - 2$. كما أن $3 - 7 = -4 \neq 4 = 7 - 3$.
- المجموعة $\mathcal{N}$ ليس لها عنصر حيادي بالنسبة لعملية الجمع (الصفر "0") بينما المجموعة $\mathcal{W} = \mathcal{N} \cup \{0\}$ لها.
- قانون تركيب التطبيقات $\circ$ على $\mathcal{F}(X)$ تجميعي ولكنه ليس تبديلي بشكل عام: $(f \circ g) \neq (g \circ f)$. ويقبل عنصر حيادي التطبيق المطابق I_X.
- القوانين $\cup$ و $\cap$ و Δ في $\mathcal{P}(X)$ تجميعية وتبديلية وتقبل عنصر حيادي ($\varnothing$ بالنسبة للاجتماع $\cup$) و (Ω بالنسبة للتقاطع $\cap$) و (X بالنسبة للفرق التناظري Δ).
- عملية الجمع المعرفة سابقاً على $\mathcal{R}^2$ تجميعية وتبديلية وتقبل عنصر حيادي $(0, 0)$.

$$(x, y) * (0, 0) = (x+0, y+0) = (x, y)$$

$(0, 0) * (x, y) = (0+x, 0+y) = (x, y)$

تمرين 1: ليكن $*$ قانون تشكيل داخلي على $\mathcal{R}$ كما يلي: $(x, y) \in \mathcal{R}^2, x * y = x + y + x^2y^2$. هل القانون تبديلي؟ تجميعي؟ وهل يقبل عنصر حيادي؟

$y * x = y + x + y^2x^2 = x * y$ تبديلي

$(1 * 1) * (-1) = (1 + 1 + 1^21^2) * (-1) = 3 * (-1) = 3 + (-1) + 3^2(-1)^2 = 11$

$1 * (1 * (-1)) = 1 * (1 + (-1) + 1^2(-1)^2) = 1 * 1 = 1 + 1 + 1^21^2 = 3 \neq 11$ غير تجميعي

من أجل أي عنصر x من $\mathcal{R}$: $0 * x = x * 0 = 0$، بالتالي العنصر 0 حيادي بالنسبة ل $*$.

4-1. العنصر النظير Inverse element

تعريف 5: ليكن $*$ قانون تشكيل داخلي على E وله عنصر حيادي e. نقول عن عنصر $x \in E$ أنه يقبل عنصر نظير y بالنسبة للقانون $*$ إذا تحقق: $x * y = y * x = e$. ونرمز لنظير x عادة ب x^{-1}.

وحدانية العنصر النظير

مبرهنة 2: ليكن $*$ قانون تشكيل داخلي على E. إذا كان القانون تجميعي وله عنصر حيادي، إذا وجد العنصر النظير يكون وحيد.

أمثلة 3:

- في المجوعة $\mathcal{R}$، لكل عنصر x نظير بالنسبة لعملية الجمع هو المعكوس $-x$ (نظير العنصر 5 هو -5). أما بالنسبة لعملية الضرب فلكل عنصر x مختلف عن الصفر نظير هو المقلوب $1/x$ (نظير العنصر 5 هو $1/5$).
- في المجوعة $\mathcal{Z}$، العنصران الوحيدان اللذان لهما نظير بالنسبة للضرب هما $1-$ و 1.
- في مجموعة التطبيقات $\mathcal{F}(X)$، العناصر التي لها نظير بالنسبة لقانون تركيب التطبيقات هي مجموعة تطبيقات التقابل.

خواص العنصر النظير

مبرهنة 3: ليكن $*$ قانون تشكيل داخلي على E تجميعي وله عنصر حيادي، لدينا:

1. ليكن $x \in E$. نظير العنصر x^{-1} هو x (نظير النظير هو العنصر نفسه).
2. ليكن $(x, y, z) \in E^3$ وللعنصر x نظير. عندئذ $(x * y = y * z \text{ or } y * x = z * x) \Rightarrow y = z$. معنى ذلك أننا نستطيع الاختصار من اليسار واليمين.
3. ليكن $(x, y) \in E^2$ وللعنصرين x و y نظير، عندئذ العنصر $x * y$ له نظير و $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$.

ملاحظة 1: يجب الانتباه إلى أن $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$ وليس $x^{-1} * y^{-1}$.

1-5. القوى Associative powers

تعريف 6: ليكن $*$ قانون تشكيل داخلي على E تجميعي وله عنصر حيادي e. ليكن x عنصر من E و $n \in \mathcal{N}$.

- العنصر $x * x * \ldots x$، n مرة ويرمز له x^{*n} أو اختصاراً x^n.
- اصطلاحاً، نرمز $x^0 = e$.
- ليكن x له نظير، نرمز $x^{-n} = (x^{-1})^n = (x^n)^{-1}$. وهكذا فالعنصر x^k معرف من أجل أي $k \in \mathcal{Z}$.

فرضية 1: ليكن $*$ قانون تشكيل داخلي على E تجميعي وله عنصر حيادي e. ليكن x عنصر من E، لدينا:

1. من أجل $(n, p) \in \mathcal{N}^2$، $x^n * y^n = x^{n+p}$.
2. إذا كان للعنصر x نظير فإنه من أجل $(n, p) \in \mathcal{Z}^2$، $x^n * y^n = x^{n+p}$.

ملاحظة 2: بشكل عام يجب الانتباه إلى أن $(x * y)^n \neq y^n * x^n$ إلا إذا كان $*$ تجميعي.

1-6. الخاصة التوزيعية Distributive property

تعريف 7: ليكن $*$ و T قانوني تشكيل داخليين على E. نقول عن $*$ إنه توزيعي بالنسبة للقانون T إذا كان من أجل كل $(x, y, z) \in E^3$ لدينا: $x * (y \mathrm{T} z) = (x * y) \mathrm{T} (x * z)$.

أمثلة 4:

- عملية الضرب توزيعي على الجمع في مجموعة الأعداد الصحية $\mathcal{Z}$. $2x(4+6) = 2x4 + 2x6 = 20$.
- القانونين $\cup$ و $\cap$ توزيعيان أحدهما بالنسبة للآخر في $\mathcal{P}(X)$. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ و $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cup C)$.

2. الزمر Groups

تعريف 8: ليكن $*$ قانون تشكيل داخلي على المجموعة G غير الخالية. نسمي $(G, *)$ زمرة إذا تحققت الشروط التالية:

1. القانون $*$ تجميعي.
2. $(G, *)$ لها عنصر حيادي.
3. لكل عنصر $x \in G$ نظير.

تعريف 9: لتكن $(G, *)$ زمرة. إذا كان القانون $*$ تبديلي، نقول عن $(G, *)$ أنها تبديلية.

ISSN: 2617-989X

أمثلة 5:

- تشكل المجموعات $\mathcal{Z}$ و $\mathcal{Q}$ و $\mathcal{R}$ و $\mathcal{C}$ زمر تبديلية بالنسبة لعملية الجمع عنصرها الحيادي 0.
- تشكل المجموعات $\mathcal{Q}^*$ و $\mathcal{R}^*$ و $\mathcal{C}^*$ زمر تبديلية بالنسبة لعملية الضرب عنصرها الحيادي 1.
- تشكل المجموعة $\mathcal{P}(X)$ زمرة تبديلية بالنسبة للفرق التناظري Δ.
- لا تشكل المجموعة $(\mathcal{N}, +)$ زمرة لأنه لا يوجد للعناصر نظير.
- لا تشكل المجموعة $(\mathcal{R}, .)$ زمرة لأنه لا يوجد نظير للعنصر 0، بينما المجموعة $(\mathcal{R}^*, .)$ تشكل زمرة تبديلية.
- لا تشكل $(\mathcal{P}(X), \cup)$ زمرة لأنه لأن العنصر الوحيد الذي له نظير هو العنصر $\varnothing$ فقط $(\varnothing \cup \varnothing = \varnothing)$. كما أن $(\mathcal{P}(X), \cap)$ لا تشكل زمرة لأن العنصر الوحيد الذي له نظير هو العنصر X فقط $(X \cap \varnothing = \varnothing)$.
- لتكن X مجموعة. نرمز لمجموعة تطبيقات التقابل من X إلى X بالرمز $\mathcal{G}(X)$. $(\mathcal{G}(X), \circ)$ تشكل زمرة عنصرها الحيادي I_X.

تمرين 2: لتكن $G = \mathcal{R}^* x\, \mathcal{R}$، وليكن القانون $*$ تشكيل داخلي معرف على G بالعلاقة التالية:
$(x, y) * (x', y') = (xx', xy'+y)$. أثبت أن: $(G, *)$ زمرة غير تبديلية.

الحل: لنبرهن أن القانون تجميعي:

$$((x, y) * (x', y')) * (x'', y'') = (xx', xy' + y) * (x'', y'') = (xx'x'', xx'y'' + xy' + y)$$
$$(x, y) * ((x', y') * (x'', y'')) = (x, y) * (xx'', x'y'' + y') = (xx'x'', xx'y'' + xy' + y)$$

وبالتالي القانون $*$ تجميعي.

$(x, y) * (1, 0) = (x, y)$ and $(1, 0) * (x, y) = (x, y)$

وبالتالي العنصر $(1, 0)$ عنصر حيادي للقانون $*$.

$(x, y) * (1/x, -y/x) = (1, 0)$ and $(1/x, -y/x) * (x, y) = (1, 0)$

وبالتالي لكل عنصر (x, y) عنصر نظير $(1/x, -y/x)$. إذن $(G, *)$ زمرة.

$(1, 2) * (3, 4) = (3, 6)$ and $(3, 4) * (1, 2) = (3, 10)$

والزمرة غير تبديلية.

1-2. الزمرة الجزئية Subgroup

تعريف 10: لتكن $(G, *)$ زمرة ولتكن H مجموعة. نقول عن H أنها زمرة جزئية من G إذا كان:

i. $H \subset G$

ii. تحوي H العنصر الحيادي e

iii. H مستقرة بالنسبة للقانون $*$، بمعنى أياً كان العنصران $(h_1, h_2) \in H^2$ فإن $h_1*h_2 \in H$

iv. H مستقرة بالنسبة للنظير بمعنى أنه أياً كان العنصر $h \in H$ فإن $h^{-1} \in H$

مثال 6: لتكن G زمرة عنصرها الحيادي e. عندئذ G و $\{e\}$ تشكلان زمرتين جزئيتين من G.

فرضية 2: لتكن $(G, *)$ زمرة ولتكن H زمرة جزئية من G. بالتالي $(H, *)$ زمرة. وأيضاً:

i. العنصر الحيادي ل $(H, *)$ هو نفسه العنصر الحيادي ل $(G, *)$.

ii. ليكن $h \in H$، نظير العنصر h باعتباره عنصراً من الزمرة $(H, *)$ هو نفسه النظير باعتباره عنصراً في الزمرة $(G, *)$.

ملاحظة 3: لتكن K زمرة جزئية من H والتي هي بدورها زمرة جزئية من G، بالتالي فإن K زمرة جزئية من G.

مبرهنة 4: لتكن $(G, *)$ زمرة عنصرها الحيادي e و H مجموعة. عندئذ تكون H زمرة جزئية إذا وفقط إذا:

i. $H \subset G$

ii. تحوي H العنصر الحيادي e

iii. أياً كان العنصران $(h, k) \in H^2$ فإن $h * k^{-1} \in H$

أمثلة 7:

- $(\mathcal{Z}, +)$ زمرة جزئية من $(\mathcal{Q}, +)$ وهي بدورها زمرة جزئية من $(\mathcal{R}, +)$ وهي بدورها زمرة جزئية من $(\mathcal{C}, +)$.
- المجموعة $n\mathcal{Z}$ مضاعفات العدد n زمرة جزئية من $(\mathcal{Z}, +)$. كما أن أي زمرة جزئية من الزمرة $(\mathcal{Z}, +)$ هي من النمط $(n\mathcal{Z}, +)$ حيث n عدد طبيعي أو صفر.
- $(\mathcal{Q}^*, .)$ زمرة جزئية من $(\mathcal{R}^*, .)$ وهي بدورها زمرة جزئية $(\mathcal{C}^*, .)$.

ISSN: 2617-989X

تمرين 3: لتكن $(G, *)$ زمرة حيث $G = \mathcal{R}^* x \mathcal{R}$، والقانون $*$: $(x, y) * (x', y') = (xx', xy'+y)$.

أثبت أن: $H = \mathcal{R}^{+*} x \mathcal{R}$ زمرة جزئية من $(G, *)$.

الحل: من الواضح أن $H \subset G$. كما أن العنصر $e = (1, 0) \in H$. ليكن العنصران $(x, y), (x', y')$ من المجموعة H: $(x, y) * (1/x', -y'/x') = (x/x', -xy'/x' - y'/x') \in H$ $(x/x' > 0, -xy'/x' - y'/x' \in \mathcal{R})$. وبالتالي H زمرة جزئية من $(G, *)$.

مبرهنة 5: لتكن $(G, *)$ زمرة و H_1, H_2 زمرتين جزئيتين من G. عندئذ يكون $H_1 \cap H_2$ زمرة جزئية من G.

مثال 8: $2\mathcal{Z} \cap 3\mathcal{Z} = 6\mathcal{Z}$. وبشكل عام، تقاطع عدد أياً كان من الزمر الجزئية ل G يعطي زمرة جزئية من G.

ملاحظة 4: لتكن $(G, *)$ زمرة و H_1, H_2 زمرتين جزئيتين من G. ليس من الضروري أن يكون $H_1 \cup H_2$ زمرة جزئية من G.

مثال 9: $2\mathcal{Z} \cup 3\mathcal{Z}$ ليست زمرة جزئية من $(\mathcal{Z}, +)$. تحقق من ذلك.

2-2. الزمر المنتهية Finite groups

تعريف 11: نسمي زمرة منتهية زمرة G عدد عناصرها محدود. هذا العدد هو نفسه عدد عناصر (حجم) المجموعة G، وندعوه رتبة المجموعة، ويرمز له بالرمز $|G|$ أو $Card(G)$.

مثال 10: ليكن n عدد طبيعي. الزمر الجزئية $\mathcal{U}_n$: الجذور من المرتبة n للواحد في $\mathcal{C}^*$ هي منتهية ورتبتها n.

$$\mathcal{U}_n = \{1,\ e^{2i\pi/n},\ e^{4i\pi/n},\ e^{6i\pi/n}, \dots,\ e^{2(n-1)i\pi/n}\}$$

على سبيل المثال: $\mathcal{U}_2 = \{1, -1\}$ و $\mathcal{U}_3 = \{1,\ j,\ j^2\}$ و $\mathcal{U}_4 = \{1,\ i,\ -1,\ -i\}$.

مبرهنة 6: لتكن H زمرة جزئية من زمرة منتهية G. عندئذ H منتهية، ورتبة H تقسم رتبة G.

3-2. الزمر الدوارة Cyclic groups

زمرة جزئية مولدة من عنصر واحد

فرضية 3: لتكن G زمرة و X مجموعة جزئية غير خالية من G. تقاطع كافة الزمر الجزئية من G التي تحوي X هي زمرة جزئية من G وتسمى الزمرة الجزئية من G المولدة ب X، ونرمز لها بالرمز $<X>$، وهي أصغر زمرة جزئية من G تحوي X.

تعريف 12: لتكن G زمرة. ليكن x عنصر من G. نسمي زمرة جزئية وحيدة التوليد مولدة بالعنصر x الزمرة الجزئية المولدة ب $\{x\}$. ونرمز لها بالرمز $<x>$، وهي أصغر زمرة جزئية من G تحوي x: $<x> = \{x^m \mid m \in \mathcal{Z}\}$.

تعريف 13: لتكن G زمرة. ليكن x عنصر من G. نقول عن رتبة x أنها منتهية في G عندما يوجد أعداد طبيعية m $(m \geq 1)$ بحيث $x^m = e$. في هذه الحالة، نسمي رتبة x أصغر عدد بينها. بمعنى آخر:

$$(x^n = e \text{ and } x^m \neq e \text{ if } 1 \leq m < n) \Leftrightarrow (\text{العنصر } x \text{ ذو الرتبة } n \text{ في } G)$$

ملاحظة 5: نظير العنصر x ذو الرتبة n هو $x^{-1} = x^{n-1}$.

فرضية 4: لتكن G زمرة. ليكن x عنصر من G. إذا كانت رتبة x في G منهية $n \geq 1$، عندئذ الزمرة الجزئية $<x>$ منتهية ورتبتها n، ولدينا:

$$<x> = \{e, x, x^2, x^3, \ldots, x^{n-1}\}$$

مثال 11: في الزمرة $(\mathcal{C}^*, .)$، الزمرة الجزئية $<i> = \{1, i, -1, -i\}$ منتهية.

زمرة وحيدة التوليد والزمرة الدوارة

تعريف 14: نسمي زمرة G وحيدة التوليد عندما يتم توليدها من أحد عناصرها، بمعنى أنه عندما يوجد عنصر $x \in G$ بحيث $G = <x>$. وإذا كانت رتبة x منتهية $n \geq 1$، نقول عن الزمرة أنها دوارة ورتبتها n. ولدينا:

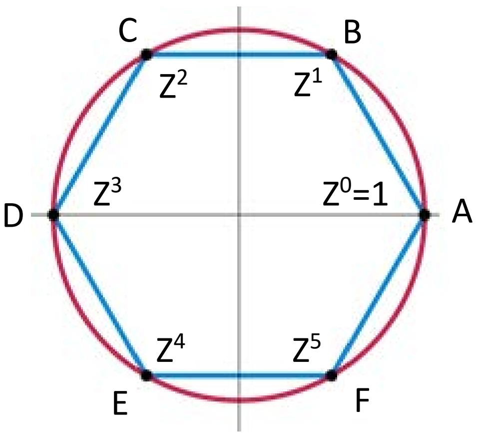
$$G = \{e, x, x^2, x^3, \ldots, x^{n-1}\}$$

ملاحظة 6: الزمرة وحيدة التوليد (وبشكل خاص دوارة) هي دائماً زمرة تبديلية.

فرضية 5 (زمرة جزئية من زمرة دوارة): كل زمرة جزئية من زمرة دوارة هي بدورها دوارة. بشكل أدق، لتكن $G = <x>$ زمرة دوارة رتبتها $n \geq 1$، عندئذ يوجد من أجل كل قاسم q ل n زمرة جزئية وحيدة رتبتها q، وهي الزمرة الجزئية الدوارة المولدة ب x^d حيث $n = dq$.

مولدات الزمرة الدوارة

تعريف 15: لتكن $G = <x>$ زمرة دوارة من المرتبة $n \geq 1$. عندئذ مولدات G هي العناصر x^k بحيث أن العددان k و n أوليان فيما بينهما (القاسم المشترك الأكبر لهما هو الواحد).



مثال 12: في $\mathcal{C}^*$، ليكن $x = e^{i\pi/3}$، والزمرة الدوارة G من المرتبة 6 $G = \{e, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$ والمولدة ب x. هذه الزمرة هي الجذور من المرتبة السادسة للواحد ضمن المجموعة $\mathcal{C}^*$. عناصرها: $e = 1, x = -j^2, x^2 = j, x^3 = -1, x^4 = j^2, x^5 = -j$. هذه

العناصر ممثلة جانباً على الدائرة المثلثية وهي عبارة عن رؤوس مسدس منتظم A, B, C, D, E, F.

لنبحث عن الزمر الجزئية الدوارة التي تولدها تلك العناصر. بالتأكيد لدينا $\{e\} = <e>$ و $G = <x>$. كما أن $<x^2> = <x^4> = \{e, x^2, x^4\}$ وتمثل الزمرة الجزئية من G من المرتبة 3، والموافقة لرؤوس المثلث ACE. أما $<x^3> = \{e, x^3\}$ فهي تمثل الزمرة الجزئية من G من المرتبة 2، والموافقة لرؤوس القطعة المستقيمة AD.وأخيراً لنبحث عن الزمرة الجزئية المولدة ب x^5 والتي تحوي العناصر التالية: $(x^5)^2 = x^{10} = x^4$ و $(x^5)^3 = x^{15} = x^3$ و $(x^5)^4 = x^{20} = x^2$ و $(x^5)^5 = x^{25} = x$ و $(x^5)^6 = x^{30} = e$، وبالتالي $G = <x^5>$. العنصر x^5 هو كالعنصر x مولد للزمرة G.

الزمرة المنتهية التي رتبتها عدد أولي

فرضية 6: لتكن G زمرة منتهية رتبتها عدد أولي p (العدد الذي يقبل القسمة على نفسه وعلى الواحد فقط). عندئذ:

1. G زمرة دوارة
2. الزمر الجزئية في G همت فقط $\{e\}$ و G
3. كل عناصر G المختلفة عن e هي عناصر مولدة ل G

4-2. مورفيزم (تشاكل) زمري Morphisms of groups

تعريف 16: $(G_1, *)$ و (G_2, T) زمرتان. نسمي مورفيزم (زمري) من G_1 إلى G_2 أي تطبيق f من G_1 إلى G_2، بحيث: أياًكان العنصران $x, y \in G_1$، فإن $f(x * y) = f(x)\ T\ f(y)$.

كما نسمي أندومورفيزم ل G مورفيزم من G إلى G $(G1 = G2 = G, * = T)$.

أمثلة 13:

- التطبيق الأسي هو مورفيزم من $(\mathcal{R}, +)$ إلى $(\mathcal{R}^*, .)$ $(2^{x+y} = 2^x.2^y)$.
- التطبيق اللوغاريتمي هو مورفيزم من $(\mathcal{R}^*, .)$ إلى $(\mathcal{R}, +)$ $(\ln(x\ .\ y) = \ln(x) + \ln(y))$.
- الطويلة هي مورفيزم من $(\mathcal{C}^*, .)$ إلى $(\mathcal{R}^*, .)$ $(|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|)$.
- القيمة المطلقة هي أندومورفيزم من $(\mathcal{R}^*, .)$ إلى $(\mathcal{R}^*, .)$ $(|x_1.x_2| = |x_1|.|x_2|)$.

فرضية 7: f مورفيزم من $(G_1, *)$ إلى (G_2, T). ليكن e_1 و e_2 العنصران الحياديان ل G_1 و G_2 على الترتيب. عندئذ:

i. $f(e_1) = e_2$

ii. أيا كان العنصر $x \in G_1$ فإن: $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$

iii. أيا كان العنصر $x \in G_1$ و $n \in \mathcal{Z}$ فإن: $f(x^n) = [f(x)]^n$

فرضية 8: $f: G \to G_1$ و $g: G \to G_2$ مورفيزمان. عندئذ $g \circ f: G \to G_2$ مورفيزم أيضاً

فرضية 9: $f: G \to G_1$ مورفيزم. لدينا:

i. إذا كانت H زمرة جزئية من G فإن $f(H)$ زمرة جزئية من G_1

ii. إذا كانت K زمرة جزئية من G_1 فإن $f^{-1}(K)$ زمرة جزئية من G

صورة ونواة مورفيزم زمري

تعريف 17: $f: G \to G_1$ مورفيزم وليكن e_1 العنصر الحيادي في G_1. لدينا:

i. نسمي نواة f المجموعة $Ker\ f = f^{-1}(\{e_1\}) = \{ x \in G | f(x) = e_1\}$

ii. نسمي صورة f المجموعة $Im\ f = f(G) = \{f(x), x \in G\}$

مبرهنة 7: $f: G \to G_1$ مورفيزم. لدينا:

i. Ker f زمرة جزئية من G

ii. Im f زمرة جزئية من G_1

أمثلة 14:

- ليكن التطبيق $f: \mathcal{C}^* \to \mathcal{R}^*$ المعرف ب $f(z) = |z|$. التطبيق f هو مورفيزم من $(\mathcal{C}^*, .)$ إلى $(\mathcal{R}^*, .)$ لأن: $f(z_1.z_2) = |z_1.z_2| = |z_1|.|z_2| = f(z_1).f(z_2)$. لنحسب نواة التطبيق f (العنصر الحيادي في $\mathcal{R}^*$ بالنسبة للضرب هو الواحد):

$Ker\ f = \{z \in \mathcal{C}^* | f(z) = 1\} = \{z \in \mathcal{C}^* |\ |z| = 1\}$، وبالتالي نواة التطبيق f هي النقاط التي تقع على الدائرة التي نصف قطرها الواحد ونرمز لها بالرمز $\mathcal{U}$، وهي زمرة جزئية من $(\mathcal{C}^*, .)$.

- القيمة المطلقة هي أندومورفيزم من $(\mathcal{R}^*, .)$ إلى $(\mathcal{R}^*, .)$. العنصر الحيادي في $\mathcal{R}^*$ بالنسبة للضرب هو الواحد، والعناصر من $(\mathcal{R}^*, .)$ التي صورتها هي الواحد $(|x| = 1)$ هما العنصران $\{-1, 1\}$. أي أن نواة أندومورفيزم القيمة المطلقة هي المجموعة $\{-1, 1\}$ وهي زمرة جزئية من $(\mathcal{R}^*, .)$.

فرضية 10: $f: G \to G_1$ مورفيزم وليكن e العنصر الحيادي في G. لدينا:

i. التطبيق f متباين إذا وفقط إذا كان $Ker\ f = \{e\}$

ii. التطبيق f غامر إذا وفقط إذا كان $Im\ f = G_1$

تعريف 18: نسمي إيزومورفيزم من G إلى G_1 كل مورفيزم تقابل من G إلى G_1. كما نسمي أوتومورفيزم من G كل أندزمورفيزم تقابل من G. كما نقول أنه يوجد تشاكل بين G و G_1 إذا وجد إيزومورفيزم بينهما.

مثال 15: الزمرتان $(\mathcal{C}, +)$ و $(\mathcal{R}^2, +)$ متشاكلتان.

مبرهنة 8: ليكن f إيزومورفيزم بين الزمرتين G و G_1. عندئذ f^{-1} إيزومورفيزم بين G_1 و G.

تمرين 4: ليكن التطبيق $f: \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ المعرف ب $f(k) = 3k$. التطبيق f مورفيزم زمري (اندومورفيزم) على الزمرة $(\mathcal{Z}, +)$ لأن $f(k + k') = 3(k + k') = 3k + 3k' = f(k) + f(k')$. لنحسب نواة التطبيق f:

$\text{Ker } f = \{k \in \mathcal{Z} | f(k) = 0\}$. $f(k) = 0$ يعطي $3k = 0$ وبالتالي $k = 0$، بالتالي: $\text{Ker } f = \{0\}$ أي أن التطبيق f متباين. لنحسب صورة التطبيق f: $\text{Im } f = \{f(k) | k \in \mathcal{Z}\} = \{3k | k \in \mathcal{Z}\} = 3\mathcal{Z}$. أي أن صورة التطبيق f هي مضاعفات العدد 3.

تمرين 5: ليكن لدينا الزمرتان $(\mathcal{R}^+, +)$ و $(\mathcal{U}, .)$ حيث $\mathcal{U} = \{z \in \mathcal{C} | \, |z| = 1\}$ وليكن التطبيق $f: \mathcal{R} \to \mathcal{U}$ المعرف ب $f(x) = e^{ix}$. لنبرهن أن التطبيق f مورفيزم زمري: $f(x+y) = e^{i(x+y)} = e^{ix}.e^{iy} = f(x).f(y)$. لنحسب الآن نواة التطبيق f: $\text{Ker } f = \{x \in \mathcal{R} | \, f(x) = 1\}$. لكن $f(x) = 1 = e^{ix}$، بالتالي $x = 0[2\pi]$. إذن $\text{Ker } f = \{2k\pi | k \in \mathcal{Z}\} = 2\pi\mathcal{Z}$. بالتالي f ليس متباين. لنحسب أيضاً صورة التطبيق f: الصورة هي $\mathcal{U}$ لأن كل عدد حقيقي طويلته واحد يكتب بالشكل $f(x) = e^{ix}$ وبالتالي التطبيق غامر.

2-5. الزمرة $\mathcal{Z}/n\mathcal{Z}$ Group $\mathcal{Z}/n\mathcal{Z}$

بفرض أن: $n\mathcal{Z} = \{nx | \, x \in \mathcal{Z}\}$ وذلك من أجل أي عدد $n \in \mathcal{Z}$.

فرضية 11: للزمرة $(\mathcal{Z}, +)$ الخواص التالية:

1. الزمرة $\mathcal{Z}$ مزودة بعملية الجمع هي زمرة وحيدة الوليد لانهائية (غير منتهية)، مولدات $\mathcal{Z}$ هي: 1 و -1.
2. من أجل كل $n \in \mathcal{Z}$، المجموعة $n\mathcal{Z}$ هي زمرة جزئية من $\mathcal{Z}$، وهي الزمرة الجزئية المولدة من n.
3. وبالعكس، من أجل كل زمرة جزئية H من $\mathcal{Z}$، يوجد عدد وحيد $n \in \mathcal{W}$ بحيث $H = n\mathcal{Z}$.

تعريف 19: ليكن x و y عددان صحيحان. نقول عن x و y أنهما متوافقان بترديد $n\mathcal{Z} \Leftrightarrow (x - y) \in n\mathcal{Z} \Leftrightarrow$ (يوجد $x \in \mathcal{Z}$ بحيث $x - y = n\mathcal{Z}$).

نسمي زمرة القسمة $\mathcal{Z}/n\mathcal{Z}$، ونرمز لعناصرها بالرمز $\bar{x} = \{x + nk; k \in \mathcal{Z}\}$، $x \in \mathcal{Z}$، وحيث $\bar{x}$ يشير إلى صف تكافؤ x بترديد n. قانون التشكيل عليها هو الجمع ولكن على الصفوف بدلاً من الأعداد، بمعنى: $\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$،

وبشكل خاص، عنصرها الحيادي هو $\bar{0}$ = $n\mathcal{Z}$ ونظير العنصر $\bar{k}$ هو $-\bar{k} = \overline{-k} = \overline{n-k}$. هذا ويمكن تعريف قانون التشكيل الضرب أيضاً بالشكل التالي: $\overline{x.y} = \bar{x}.\bar{y}$.

مثال 16: في الزمرة $\mathcal{Z}/60\mathcal{Z}$، لدينا $\overline{31} + \overline{46} = \overline{31+46} = \overline{77} = \overline{17}$

مبرهنة 9: ليكن $n > 1$

1. الزمرة $\mathcal{Z}/n\mathcal{Z}$ منتهية رتبتها n، ولدينا $\mathcal{Z}/n\mathcal{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}$.
2. الزمرة $\mathcal{Z}/n\mathcal{Z}$ دوارة رتبتها n.
3. مولدات الزمرة $\mathcal{Z}/n\mathcal{Z}$ هي الصفوف $\bar{k}$ بحيث أن k و n أوليان فيما بينهما.
4. من أجل كل قاسم q ل n، يوجد زمرة جزئية وحيدة من $\mathcal{Z}/n\mathcal{Z}$ رتبتها q، وهي الزمرة الجزئية الدوارة المولدة ب $\bar{d}$، حيث n = dq.

مثال 17: لتكن الزمرة $\mathcal{Z}/4\mathcal{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$. جدولي الجمع والضرب هو التالي:

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

.	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

من الواضح أن العنصر $\bar{1}$ يولد كافة عناصر الزمرة $(\mathcal{Z}/4\mathcal{Z}, +)$ لأن: $\bar{2} = \bar{1} + \bar{1}$ و $\bar{3} = \bar{1} + \bar{1} + \bar{1}$ و $\bar{1} + \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$، أي أن $\mathcal{Z}/4\mathcal{Z}$ = $<\bar{1}>$

العنصر $\bar{3}$ يولد $\mathcal{Z}/4\mathcal{Z}$ أيضاً، أي أن $\mathcal{Z}/4\mathcal{Z}$ = $<\bar{3}>$: $\bar{2} = \bar{6} = \bar{3} + \bar{3}$ و $\bar{1} = \bar{9} = \bar{3} + \bar{3} + \bar{3}$ و $\bar{3} + \bar{3} + \bar{3} + \bar{3} = \overline{12} = \bar{0}$.

أما العنصر $\bar{2}$ فيولد: $\bar{0} = \bar{4} = \bar{2} + \bar{2}$ و $\bar{2} = \bar{6} = \bar{2} + \bar{2} + \bar{2}$. بالتالي: $\{\bar{0}, \bar{2}\}$ = $<\bar{2}>$.

إذن مولدات الزمرة $\mathcal{Z}/4\mathcal{Z}$ هي $\bar{1}$ و $\bar{3}$ لأن 1 و 4 أوليان فيما بينهما، وكذلك الأمر بالنسبة ل 3 و 4.

3. الحلقات Rings

تعريف 20: لتكن A مجموعة مزودة بقانوني تشكيل داخليين $(+)$ و $(.)$. نقول أن $(A, +, .)$ حلقة إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:

i. البنية $(A, +)$ زمرة تبديلية حيث يرمز للعنصر الحيادي ب 0_A أو 0.

ii. قانو التشكيل الداخلي $(.)$ تجميعي.

iii. المجموعة A لها عنصر حيادي بالنسبة ل $(.)$، يرمز له عادة 1_A أو 1.

iv. القانون $(.)$ توزيعي بالنسبة ل $+$: $x.(y + z) = x.y + x.z$ and $(x + y).z = x.z + y.z$، مهما كانت العناصر $x, y, z \in A$.

إذا كان القانون $(.)$ تبديلي، نقول إن الحلقة $(A, +, .)$ تبديلية.

أمثلة 18:

- البنى $(\mathcal{Z}, +, x)$ و $(\mathcal{Q}, +, x)$ و $(\mathcal{R}, +, x)$ و $(\mathcal{C}, +, x)$ عبارة عن حلقات تبديلية.
- مجموعة كثيرات الحدود بأمثال حقيقية (نرمز لها عادة ب $\mathcal{R}[X]$) عبارة عن حلقة تبديلية.
- تشكل المجموعة $\mathcal{P}(X)$ حلقة تبديلية بالنسبة لقانوني التشكيل الداخليين الفرق التناظري Δ والتقاطع $\cap$. لأن Δ و $\cap$ تبديليان و تجميعيان وتوزيعيان أحدهما بالنسبة للآخر. بالإضافة لذلك Δ له عنصر حيادي هو $\varnothing$ لأن: $A \Delta A \Delta B = \varnothing$.

تعريف 21: لتكن A حلقة. نسمي A^* مجموعة العناصر من A التي لها نظير.

فرضية 12: لتكن $(A, +, .)$ حلقة، عندها $(A^*, .)$ تشكل زمرة.

مبرهنة 10: لتكن $(A, +, .)$ حلقة، $(a, b) \in A^2$ و $n \in \mathcal{Z}$:

i. $0_A.a = a.0_A = 0_A$.

ii. $n(a.b) = (na).b = a.(nb)$.

1-3. الحلقة التامة Integral ring

تعريف 22: نقول عن حلقة أنها تامة إذا كانت $A \neq \{0_A\}$ وإذا حققت الخاصية التالية: من أجل أي عنصرين a و b من A: $ab = 0_A \Rightarrow a=0_A$ or $b = 0_A$.

مثال 19: الحلقات $\mathcal{Z}$ و $\mathcal{Q}$ و $\mathcal{R}$ و $\mathcal{C}$ تامة.

تعريف 23: لتكن $(A, +, .)$ حلقة و $(a, b) \in A^2$. نقول عن العنصرين a و b أنهما يتبادلان إذا كان $a.b = b.a$.

فرضية 13: تكن $(A, +, .)$ حلقة و $(a, b) \in A^2$، بحيث ان العنصرين a و b يتبادلان. عندئذ:

i. $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1} = [\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}](a-b),\ n \in \mathcal{N}$

ii. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},\ n \in \mathcal{N} \cup \{0\}$

2-3. الحلقة الجزئية Subring

تعريف 24: لتكن $(A, +, .)$ حلقة و B مجموعة. نقول عن B إنها حلقة جزئية من $(A, +, .)$ إذا:

i. $(B, +)$ زمرة جزئية من $(A, +)$

ii. $1_A \in B$

iii. B مستقرة بالنسبة ل $(.)$

فرضية 14: إذا كانت B حلقة جزئية من $(A, +, .)$، فإن $(B, +, .)$ حلقة. بالإضافة إلى $1_B = 1_A$

فرضية 15: لتكن $(A, +, .)$ حلقة و B مجموعة. نقول عن B أنها حلقة جزئية من $(A, +, .)$ إذا وفقط إذا:

i. $B \subset A$

ii. $1_A \in B$

iii. $a - b \in B$ لأي عنصرين a و b من المجموعة B

iv. $a.b \in B$ لأي عنصرين a و b من المجموعة B

مثال 20: $(\mathcal{Z}, +, .)$ حلقة جزئية من $(\mathcal{Q}, +, .)$ وهي بدورها حلقة جزئية من $(\mathcal{R}, +, .)$ وهي بدورها حلقة جزئية من $(\mathcal{C}, +, .)$.

تمرين 6: أثبت أن $\mathcal{Z}[i] = \{a + ib,\ a, b \in \mathcal{Z}\}$ حلقة جزئية من $\mathcal{C}$. ماهي العناصر التي لها نظير في $\mathcal{Z}[i]$.

الحل: لدينا $1 = 1 + 0.i \in \mathcal{Z}[i]$ (العنصر الحيادي بالنسبة للضرب).

ليكن $z, z' \in \mathcal{Z}[i]$، بالتالي يوجد $a, b, a', b' \in \mathcal{Z}$ بحيث: $z = a + ib$ و $z' = a' + ib'$:

$z - z' = (a - a') + i(b - b') \in \mathcal{Z}[i]$ و $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + ba') \in \mathcal{Z}[i]$ لأن:

$a - a', b - b', aa' - bb', ab' + ba' \in \mathcal{Z}$. بالتالي $\mathcal{Z}[i]$ حلقة جزئية من $\mathcal{C}$.

ليكن $z = a + ib$ له نظير في $\mathcal{Z}[i]$، بالتالي يوجد عنصر $z' \in \mathcal{Z}[i]$ بحيث $z.z' = 1$ و $|z.z'|^2 = 1$، أي $|z|^2.|z'|^2 = 1$. لدينا $|z|^2 = a^2 + b^2 \in \mathcal{W}$ و $|z'|^2 \in \mathcal{W}$ وهذا يفرض $|z|^2 = |z'|^2 = 1$. لدينا بالتالي $a^2 + b^2 = 1$ مع $a^2, b^2 \in \mathcal{W}$ وهذا يكافئ $(a^2 = 1, b^2 = 0)$ أو $(a^2 = 0, b^2 = 1) \Leftarrow$ $(a = \pm 1, b = 0)$ أو $(a = 0, b = \pm 1)$. والعناصر التي لها نظير في $\mathcal{Z}[i]$ هي: $\{-1, 1, -i, i\}$.

تمرين 7: ليكن $d \in \mathcal{N}$ بحيث لا يكون مربع عدد صحيح. أثبت أن:

$\mathcal{Z}[\sqrt{d}] = \{x + \sqrt{d}y \in \mathcal{R}, x, y \in \mathcal{Z}\}$ حلقة جزئية من $\mathcal{R}$.

الحل: لدينا $1 = 1 + 0.\sqrt{d} \in \mathcal{Z}[\sqrt{d}]$ (العنصر الحيادي بالنسبة للضرب).

ليكن $a, b \in \mathcal{Z}[\sqrt{d}]$، بالتالي يوجد $x, y, x', y' \in \mathcal{Z}$ بحيث: $a = x + \sqrt{d}y'$ و $b = x' + \sqrt{d}y'$:

$a - b = (x - x') + \sqrt{d}(y - y') \in \mathcal{Z}[\sqrt{d}]$ و $ab = (xx' + dyy') + \sqrt{d}(xy' + yx') \in \mathcal{Z}[\sqrt{d}]$

لأن: $x - x', y - y', xx' + dyy', xy' + yx' \in \mathcal{Z}$. بالتالي $\mathcal{Z}[\sqrt{d}]$ حلقة جزئية من $\mathcal{R}$.

3-3. مورفيزم حلقة Morphisms of rings

تعريف 25: $(A, +, .)$ و $(B, \oplus, \odot)$ حلقتان. نسمي مورفيزم (حلقي) من A إلى B أي تطبيق f من A إلى B، بحيث: أياً كان العنصران $x, y \in A$، فإن:

i. $f(1_A) = 1_B$

ii. $f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$

iii. $f(a . b) = f(a) \odot f(b)$

ملاحظة 7: f مورفيزم زمري، بالتالي يمكن تعريف نواة وصورة المورفيزم الحلقي.

ملاحظة 8: بنفس الطريقة كما في الزمر يمكن تعريف أندومورفيزم و إيزومورفيزم و أتومورفيزم.

فرضية 16: $f: A \to B$ مورفيزم حلقي:

i. لتكن C حلقة جزئية من A، عندئذ f(C) حلقة جزئية من B.

ii. لتكن D حلقة جزئية من B، عندئذ $f^{-1}(D)$ حلقة جزئية من A.

فرضية 17: $f: A \to B$ مورفيزم حلقي:

iii. $\operatorname{Ker} f$ حلقة جزئية من A.

iv. $\operatorname{Im} f$ حلقة جزئية من B.

تمرين 8: التطبيق $f: \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ المعرف ب $f(z) = \bar{z}$ يمثل أتومورفيزم حلقي.

$$f(1) = \bar{1} = 1$$

$$f(z_1 + z_2) = \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} = f(z_1) + f(z_2)$$

$$f(z_1 . z_2) = \overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2} = f(z_1) . f(z_2)$$

إذن f أندومورفيزم حلقي وهو تقابل (يمكن برهان ذلك)، بالتالي f أتومورفيزم حلقي في $\mathcal{C}$.

4. الحقول Fields

تعريف 26: لتكن K مجموعة مزودة بقانوني تشكيل داخليين $(+)$ و $(.)$. نقول أن $(K, +, .)$ حقل إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:

i. $(K, +, .)$ حلقة تبديلية

ii. لكل عنصر من K مختلف عن الصفر له نظير بالنسبة لقانون الضرب

مبرهنة 11: كل حقل تام.

ملاحظة 9: يمكننا الحساب في أي حقل كما لو أننا نحسب في $\mathcal{Q}$ أو $\mathcal{R}$ أو $\mathcal{C}$.

أمثلة 21:

- $\mathcal{Q}$ و $\mathcal{R}$ و $\mathcal{C}$ حقول
- $\mathcal{Z}$ ليست حقل (2 على سبيل المثال ليس له نظير)

4-1. الحقول الجزئية Subfields

تعريف 27: ليكن $(K, +, .)$ حقل و L مجموعة. نقول عن L إنها حقل جزئي من $(K, +, .)$ إذا:

i. L حلقة جزئية من $(K, +, .)$

ii. L مستقرة بالنسبة للنظير: بمعنى من أجل أي عنصر من L مختلف عن الصفر $x^{-1} \in L$

فرضية 18: ليكن $(K, +, .)$ حقل و L حلقة جزئية من $(K, +, .)$. عندئذ $(L, +, .)$ حقل.

فرضية 19: ليكن $(K, +, .)$ حقل و L مجموعة. L حقل جزئي من $(K, +, .)$ إذا وفقط إذا:

i. $L \subset K$

ii. $1_K \in L$

iii. $x - y \in L$ لأي عنصرين x و y من المجموعة L

iv. $x.y^{-1} \in L$ لأي عنصرين x و y من المجموعة L بحيث $y \neq 0_K$

مثال 22: $(\mathcal{Q}, +, .)$ حقل جزئي من $(\mathcal{R}, +, .)$ وهو بدوره حقل جزئي من $(\mathcal{C}, +, .)$. كما أن $\mathcal{Q}$ أصغر حقل جزئي من $\mathcal{C}$.

تمرين 9: أثبت أن $\mathcal{Q}[i] = \{a + ib,\ a, b \in \mathcal{Q}\}$ حلقة جزئية من $\mathcal{C}$.

تمرين 10:

ليكن $d \in \mathcal{N}$ وبحيث لا يكون مربع لعدد صحيح. أثبت أن $\mathcal{Q}[\sqrt{d}] = \{x + \sqrt{d}y \in \mathcal{R},\ x, y \in \mathcal{Q}\}$ حقل جزئي من $\mathcal{R}$.

4-2. مورفيزم حقل Morphisms of fields

تعريف 28: $(K, +, .)$ و $(L, \oplus, \odot)$ حقلان. نسمي مورفيزم (حقلي) من K إلى L أي تطبيق حلقي f من K إلى L.

فرضية 20: $f: K \to L$ مورفيزم حقلي:

i. ليكن x عنصر من K^*، $f(x) \in K^*$ و $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.

ii. f متباين.

ملاحظة 10: بنفس الطريقة كما في الزمر يمكن تعريف أندومورفيزم و إيزومورفيزم و أتومورفيزم.

مثال 23: التطبيق $f: \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ المعرف ب $f(z) = \bar{z}$ يمثل أتومورفيزم حقلي.

أسئلة الفصل

1. أياً من القوانين التالية هي تشكيل داخلي في $\mathcal{Z}$:

a) $a * b = \frac{a+b}{a^2}$ b) $a * b = 2^{a+b}$ c) $a * b = a + b - 3ab$

2. من أجل كل عملية من العمليات التالية على الأعداد الحقيقية: هل العملية تجميعية؟ هل العملية تبديلية؟ أوجد العنصر الحيادي إن وجد. أوجد نظير العنصر a إن وجد.

a) $a * b = ab + 2$ c) $a * b = (a + 2)(b + 2)$ e) $a * b = 3(a + b)$

b) $a * b = |a + b|$ d) $a * b = a^b$ f) $a * b = |a - b|$

3. ليكن قانون التشكيل في $\mathcal{R}^2$ التالي: $(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$. هل هو قانون تشكيل داخلي؟ هل هو تجميعي؟ هل يوجد عنصر حيادي؟ أوجده إذا وجد. هل لكل عنصر نظير؟ هل هو تبديلي؟

4. ليكن قانون التشكيل في $\mathcal{Q}\backslash\{1\}$ التالي: $a * b = a - ab + b$. هل هو قانون تشكيل داخلي؟ هل هو تجميعي؟ هل يوجد عنصر حيادي؟ أوجده إذا وجد. هل لكل عنصر نظير؟

5. بين أن الأعداد الكسرية من الشكل $\frac{2a+1}{2b+1}$ حيث $a, b \in \mathcal{Z}$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية الضرب.

6. أثبت أن $(\mathcal{Z}/5\mathcal{Z}\backslash\{\bar{0}\}, .)$ زمرة. هل هي تبديلية؟

7. لتكن المجموعة $S = \{(x, y) | x, y \in \mathcal{Z}\}$، وقانون التشكيل * معرف كما يلي:
$(a, b) * (c, d) = (a + c, (-1)^c.b + d)$. أثبت أن S زمرة بالنسبة للقانون *. هل $(S, *)$ تبديلية؟ هل المجموعات التالية تمثل زمر جزئية من S بالنسبة ل *؟ $H_1 = \{(a, 0) | a \in \mathcal{Z}\}$، $H_2 = \{(0, b) | b \in \mathcal{Z}\}$.

8. أثبت أن المجموعة $\{2^n | n \in \mathcal{Z}\}$ زمرة جزئية من $(\mathcal{R}^*, .)$.

9. أوجد كافة الزمر الجزئية من الزمرة $(\mathcal{Z}/12\mathcal{Z}, +)$.

10. بين أن المجموعة $\{1, 7, 9, 15\}$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية الضرب بترديد 16 (mod 16). أوجد أيضاً رتبة كل عنصر من عناصر المجموعة. أخيراً هل الزمرة دوارة؟

11. بين أن المجموعة $S = \{1, 5, 7, 11\}$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية الضرب بترديد 12. هل الزمرة دوارة؟ أوجد كافة الزمر الجزئية من الزمرة $(S, .)$.

12. ليكن التطبيق $f: (\mathcal{Z}, +) \to (\mathcal{Q}^*, .)$ المعرف ب $f(n) = 2^n$. أثبت أن f مورفيزم زمري. أوجد نواة f. هل التطبيق f متباين؟ هل هو غامر؟

تمارين إضافية

السؤال الأول: أجب بصح أو خطأ

1. الطرح قانون تشكيل داخلي في $\mathbb{Z}$	**صح** أو خطأ
2. الطرح قانون تشكيل داخلي في $\mathbb{N}$	صح أو **خطأ**
3. $\{a\sqrt{2}; a\in\mathbb{Z}\}$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية الجمع الحقيقية	**صح** أو خطأ
4. $\{a\sqrt{2}; a\in \mathbb{N}\}$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية الجمع الحقيقية	صح أو **خطأ**
5. $\{a\sqrt{2}; a\in\mathbb{Q}\}$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية الجمع الحقيقية	**صح** أو خطأ
6. $\{-1, 1\}$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية الضرب الحقيقية	**صح** أو خطأ
7. $\{-1, 1, 1/2, 2\}$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية الضرب الحقيقية	صح أو **خطأ**
8. $\{a\sqrt{2}; a\in\mathbb{Q}\}$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية الضرب الحقيقية	صح أو **خطأ**
9. $\{a+ b\sqrt{2}; a, b\in\mathbb{Q}\}$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية الضرب الحقيقية	**صح** أو خطأ
10. $\{a\sqrt{2}; a\in\mathbb{Q}\}$ تشكل حلقة بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب الحقيقيتين	صح أو **خطأ**
11. $\{a+b\sqrt{2}; a, b\in\mathbb{Q}\}$ تشكل حلقة بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب الحقيقيتين	**صح** أو خطأ
12. $\{a\sqrt{2}; a\in\mathbb{Q}\}$ تشكل حقل بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب الحقيقيتين	صح أو **خطأ**
13. $\{a+b\sqrt{2}; a, b\in\mathbb{Q}\}$ تشكل حقل بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب الحقيقيتين	**صح** أو خطأ
14. $\{a+\pi\sqrt{2}; a, b\in\mathbb{Q}\}$ تشكل حقل بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب الحقيقيتين	صح أو **خطأ**
15. في الزمرة $(\mathcal{C}^*, .)$، الزمرة الجزئية $\langle i\rangle = \{1, i, -1, -i\}$	**صح** أو خطأ

السؤال الثاني: حل كل من المعادلات التالية:

ليكن التطبيق $f: \mathcal{R}^* \to \mathcal{R}^*$ المعرف ب $f(x) = \frac{x}{|x|}$. برهن أن f هو مورفيزم زمري من $(\mathcal{R}^*, .)$ إلى $(\mathcal{R}^*, .)$. أوجد صورته ونواته.

الجواب:

$$f(xx') = \frac{xx'}{|xx'|} = \frac{x}{|x|}.\frac{x'}{|x'|} = f(x).f(x')$$

$$\ker f = \{x \in \mathcal{R}^* | f(x) = 1\} = \{x \in \mathcal{R}^* | \, |x| = x\} = \mathcal{R}^{+*}$$

$$\mathrm{Im}\, f = \{-1, 1\}$$

السؤال الثالث:

ليكن التطبيق $f: \mathcal{C}^* \to \mathcal{C}^*$ المعرف ب $f(z) = \frac{z}{|z|}$. برهن أن f هو مورفيزم زمري من $(\mathcal{C}^*, .)$ إلى $(\mathcal{C}^*, .)$. أوجد صورته ونواته.

الجواب:

$f(zz') = \frac{zz'}{|zz'|} = \frac{z}{|z|}.\frac{z'}{|z'|} = f(z).f(z')$

$\ker f = \{z \in \mathcal{C}^* | f(x) = 1\} = \{z \in \mathcal{R}^* |\ |z| = z\} = \mathcal{R}^{+*}$

$\mathrm{Im}\, f = \{f(z) \in \mathcal{C}^* |\ |f(z)| = 1 \text{ and } \arg(f(z)) = \arg z\} =$ الدائرة الواحدية

السؤال الرابع:

لتكن $\mathcal{Z}[i] = \{a + ib, a, b \in \mathcal{Z}\}$ حلقة جزئية من $(\mathcal{C}, .)$. ماهي العناصر التي لها نظير في $\mathcal{Z}[i]$.

الجواب:

ليكن $z = a + ib$ له نظير في $\mathcal{Z}[i]$، بالتالي يوجد عنصر $z' \in \mathcal{Z}[i]$ بحيث $z.z' = 1$ و $|z.z'|^2 = 1$، أي $|z|^2.|z'|^2 = 1$. لدينا $|z|^2 = a^2 + b^2 \in \mathcal{W}$ و $|z'|^2 \in \mathcal{W}$ وهذا يفرض $|z|^2 = |z'|^2 = 1$. لدينا بالتالي $a^2 + b^2 = 1$ مع $a^2,\ b^2 \in \mathcal{W}$ وهذا يكافئ $(a^2 = 1,\ b^2 = 0)$ أو $(a^2 = 0,\ b^2 = 1) \Leftarrow$ $(a = \pm 1,\ b = 0)$ أو $(a = 0,\ b = \pm 1)$. والعناصر التي لها نظير في $\mathcal{Z}[i]$ هي: $\{-1, 1, -i, i\}$.

الفصل السابع: الفضاءات الشعاعية
Chapter 7: Vector Spaces

الكلمات المفتاحية:

فضاء شعاعي، شعاع، سلّمي، فضاء شعاعي جزئي، متتالية عددية، مصفوفة، جملة خطيه متجانسة، جمل أشعة، تركيب خطي، مولّد، الجملة المولدة، جملة مستقلة خطياً، جملة مرتبطة خطياً، قاعدة فضاء شعاعي، مجموع فضاءين شعاعيين، مجموع مباشر، فضاءين متتامين، بعد فضاء شعاعي، بعد فضاء شعاعي جزئي، رتبة جملة أشعة، تطبيق خطي، نواة، صورة تطبيق خطي، صورة جملة أشعة، تشاكل، فضاء شعاعي منهي البعد.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على بنية الفضاء الشعاعي والأمثلة الأكثر شهرة كفضاء التطبيقات وفضاء المصفوفات وفضاء المتتاليات والفضاء الإقليدي وفضاء حلول المعادلات الخطية المتجانسة وفضاء كثيرات الحدود، ودراسة الفضاءات الشعاعية الجزئية وكيفية جمعها والأشعة المستقلة والمرتبطة وقاعدة فضاء شعاعي وفضاء شعاعي مولد من جملة أشعة والفضاءات المتتامة وأبعاد الفضاءات الشعاعية. والتطبيقات الخطية بين الفضاءات الشعاعية.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- بنية الفضاء الشعاعي وأمثلة عن الفضاءات الشعاعية الأكثر شهرة
- الفضاءات الشعاعية الجزئية والعمليات عليها.
- جمل الأشعة: المرتبطة والمستقلة والمولدة والقاعدة.
- الفضاءات المتتامة.
- بعد فضاء شعاعي وشعاعي جزئي
- التطبيقات الخطية
- الفضاء الشعاعي التقليدي $\mathcal{R}^n$

مقدمة

يعتبر مفهوم الفضاء الشعاعي بنية أساسية في الرياضيات المعاصرة. إنه يهدف إلى تحديد الخواص العامة التي تشترك بها مجموعات قد تكون مختلفة جداً. على سبيل المثال يمكن إضافة شعاعين (في المستوي أو في الفراغ) وأيضاً ضرب شعاع بعدد (من أجل الحصول على شعاع أكبر أو أصغر). كما أنه يمكننا إضافة تابعين أو ضرب تابع بعدد. نفس الشيء بالنسبة لكثيرات الحدود والمصفوفات. بالتالي سيكون الهدف من الفضاءات الشعاعية الحصول على نظريات عامة يمكن تطبيقها في فضاء الأشعة التقليدية وفضاء التوابع وفضاء المصفوفات وفضاء كثيرات الحدود ...

1. بنية الفضاء الشعاعي Vector spaces structure

تعريف 1: ليكن حقلاً K و E مجموعة غير خالية مزودة بقانون تشكيل داخلي + من ExE إلى E:

$$\begin{cases} E \text{ x } E & \to \mathrm{E} \\ (u, v) & \mapsto u+v \end{cases}$$

وقانون تشكيل خارجي . من KxE إلى E:

$$\begin{cases} K \text{ x } E & \to \mathrm{E} \\ (\lambda, u) & \mapsto \lambda . u \end{cases}$$

نقول عن (.,+,E) فضاء شعاعي على الحقل K إذا تحققت الشروط التالية:

1. (E, +) زمرة تبديلية (حيث العنصر الحيادي 0_E)
2. التوزيعية للقانون . على القانون + من اليسار: $(\lambda + \mu).u = \lambda.u + \mu.u$، حيث $\lambda, \mu \in K$ و $u \in E$.
3. التوزيعية للقانون . على القانون + من اليمين: $\lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda.v$، حيث $\lambda \in K$ و $u, v \in E$.
4. $1_K.u = u$ من أجل أي عنصر $u \in E$.
5. $\lambda.(\mu.u) = (\lambda.\mu).u$، $u \in E$ و $\lambda, \mu \in K$

ندعو عناصر E بالأشعة كما ندعو عناصر K بالسلميات.

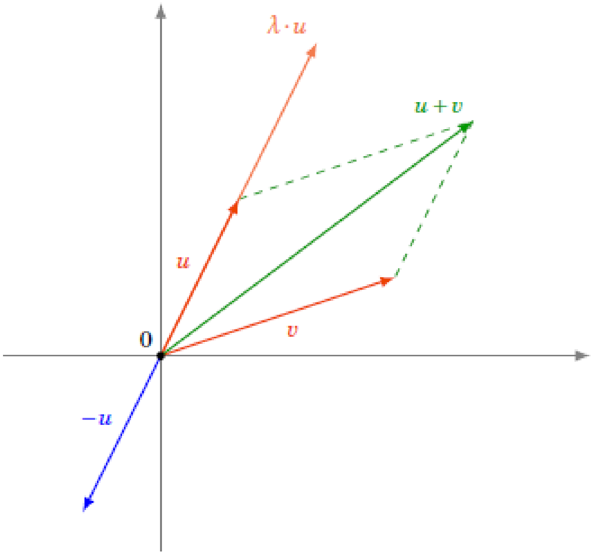
ملاحظة 1: قانون التشكيل الداخلي + على E يسمى عادة جمع شعاعين $u + u'$.

ملاحظة 2: قانون التشـــكيل الخارجي على E يســـمى عادة الضـــرب بســـلمي وغالباً يتم حذف الرمز .، فإذا كان $\lambda \in K$ و $u \in E$، نرمز غالباً λu بدلاً من $\lambda.u$.

ملاحظة 3: العنصــر الحيادي 0_E يســمى الشــعاع صــفر. يجب عدم الخلط بينه وبين العنصــر 0 للحقل K. عندما لا يكون خطر الخلط بينهما سنرمز للعنصر 0_E ب 0 للسهولة.

فرضية 1: ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K، وليكن L حقل جزئي من K، عندئذ يكون E فضاء شعاعي أيضاً على الحقل L.

أمثلة 1:



الفضاء الشعاعي $\mathcal{R}^2$ على الحقل $\mathcal{R}$

بفرض $K = \mathcal{R}$ و $E = \mathcal{R}^2$. العنصر $u \in E$ عبارة عن ثنائية (x, y) حيث $x, y \in \mathcal{R}$. أي:

$\mathcal{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathcal{R}\}$.

يعرف قانون التشكيل الداخلي كما يلي:

$(x, y) + (x', y') = (x+x', y+y')$، حيث (x, y) و (x', y') عنصران من $\mathcal{R}^2$.

كما يعرف قانون التشكيل الخارجي كما يلي:

$\lambda.(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$، حيث (x, y) عنصر من $\mathcal{R}^2$ و λ عنصر من $\mathcal{R}$.

العنصر الحيادي للجمع هو الشعاع الصفري $(0, 0)$. نظير العنصر (x, y) هو $(-x, -y)$ والذي نرمز له أيضاً $-(x, y)$.

الفضاء الشعاعي $\mathcal{R}^n$ على الحقل $\mathcal{R}$

ليكن لدينا $n \in \mathcal{N}$. بفرض $K = \mathcal{R}$ و $E = \mathcal{R}^n$. العنصر $u \in E$ له n مركبة $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ حيث $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{R}$.

نعرف قانون التشكيل الداخلي، حيث $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ و $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ عنصران من $\mathcal{R}^n$:

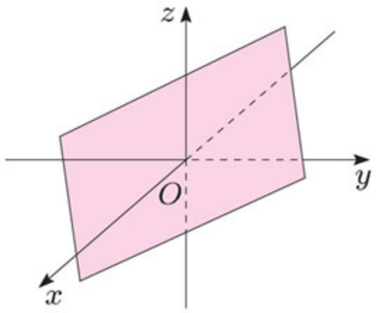
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$$

كما نعرف قانون التشكيل الخارجي، حيث $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ عنصر من $\mathcal{R}^2$ و λ عنصر من $\mathcal{R}$:

$$\lambda.(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

العنصر الحيادي لقانون التشكيل الداخلي هو الشعاع الصفري $(0, 0, \ldots, 0)$. كما أن نظير العنصر $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ هو $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ والذي نرمز له أيضاً $-(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

- بطريقة مشابهة يمكن تعريف الفضاء الشعاعي $\mathcal{C}^n$ على الحقل $\mathcal{C}$، وبشكل عام يمكن تعريف الفضاء الشعاعي K^n على الحقل K.



$ax + by + cz = 0$

- المستوي المار بالمبدأ في الفراغ $\mathcal{R}^3$ يشكل فضاء شعاعي (بالنسبة للعمليات التي نعرفها عن الأشعة). ليكن $K = \mathcal{R}$ و $E = \mathcal{P}$. معادلة المستوي $\mathcal{P}$ هي من الشكل: $ax + by + cz = 0$ حيث a, b, c إعداد حقيقية ليست جميعها تساوي الصفر.

العنصر $u \in \mathcal{P}$ له ثلاث مركبات $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ بحيث $ax + by + cz = 0$.

ليكن لدينا العنصرين $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ من المستوي $\mathcal{P}$. أي: $ax + by + cz = 0$ و $ax' + by' + cz' = 0$.

عندئذ يكون الشعاع $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$ عنصر من $\mathcal{P}$ لأن $a(x+x') + b(y+y') + c(z+z') = 0$.

الخصائص الأخرى يمكن برهانها بسهولة أيضاً: على سبيل المثال العنصر الحيادي هو الشعاع الصفري $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$؛ وإذا كان الشعاع $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ينتمي إلى $\mathcal{P}$، بالتالي $ax + by + cz = 0$، والتي يمكن إعادة كتابتها بالشكل التالي: $a(-x) + b(-y) + c(-z) = 0$. أي أن $\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$ ينتمي إلى $\mathcal{P}$ (نظير العنصر $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$).

- أي مستوي لا يمر بالمبدأ ليس فضاء شعاعي. لماذا؟

الفضاء الشعاعي للتطبيقات من $\mathcal{R}$ إلى $\mathcal{R}$

مجموعة التوابع $f: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ والتي نرمز لها ب $\mathcal{F}(\mathcal{R}, \mathcal{R})$. يتم تزويد هذه المجموعة بالقانونين التاليين:

- قانون التشكيل الداخلي: ليكن التطبيقان f و g من $\mathcal{F}(\mathcal{R}, \mathcal{R})$. نعرف $f + g$ كما يلي:
  $(f + g)(x) = f(x) + g(x), x \in \mathcal{R}$.
- قانون التشكيل الخارجي: ليكن λ عدد حقيقي و f تطبيق من $\mathcal{F}(\mathcal{R}, \mathcal{R})$. نعرف $\lambda.f$ كما يلي:
  $(\lambda.f)(x) = \lambda.f(x), x \in \mathcal{R}$.
- العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الجمع هو التطبيق الصفري، المعرف كما يلي: $f(x) = 0, x \in \mathcal{R}$. يمكن أن نرمز له بالرمز $0_{\mathcal{F}(\mathcal{R}, \mathcal{R})}$.
- نظير العنصر f بالنسبة لعملية الجمع هو التطبيق g من $\mathcal{R}$ إلى $\mathcal{R}$، المعرف ب: $g(x) = -f(x), x \in \mathcal{R}$. نرمز لنظير f ب $-f$.

الفضاء الشعاعي للمتتاليات الحقيقية على الحقل $\mathcal{R}$

نرمز $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ لمجموعة المتتاليات الحقيقية $(u_n)_{n\in\mathcal{N}}$. يمكن رؤية هذه المجموعة عل أنها مجموعة التطبيقات من $\mathcal{N}$ إلى $\mathcal{R}$؛ أي $\boldsymbol{\mathcal{S}} = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{R}, \mathcal{N})$. يتم تزويد هذه المجموعة بالقانونين التاليين:

- قانون التشــكيل الداخلي: ليكن $u = (u_n)_{n\in\mathcal{N}}$ و $v = (v_n)_{n\in\mathcal{N}}$ متتاليتان من $\boldsymbol{\mathcal{S}}$. نعرف $u + v$ على أنها المتتالية $w = (w_n)_{n\in\mathcal{N}}$ حيث حدها العام معرف كما يلي: $w_n = u_n + v_n,\ n \in \mathcal{N}$.
- قانون التشــكيل الخارجي: ليكن λ عدد حقيقي و $u = (u_n)_{n\in\mathcal{N}}$ عنصـر من $\boldsymbol{\mathcal{S}}$. نعرف $\lambda.u$ على أنها المتتالية $v = (v_n)_{n\in\mathcal{N}}$ المعرفة كما يلي: $v_n = \lambda.u_n,\ n \in \mathcal{N}$.
- العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الجمع هو المتتالية التي جميع حدودها مساوية للصفر.
- نظير $u=(u_n)_{n\in\mathcal{N}}$ بالنسبة للجمع هو المتتالية $v=(v_n)_{n\in\mathcal{N}}$ المعرفة ب: $v_n=-u_n,\ n\in\mathcal{N}$. نرمز لنظير u ب $-u$.

الفضاء الشعاعي للمصفوفات

مجموعة المصـفوفات $M_{n,p}(\mathcal{R})$ ب n سـطر و p عمود بأمثال حقيقية تشـكل فضـاء شـعاعي على الحقل $\mathcal{R}$. القانون الداخلي هو جمع مصـفوفتين. القانون الخارجي هو ضـرب مصـفوفة بعدد حقيقي. العنصـر الحيادي بالنسـبة للجمع هو المصفوفة الصفرية (كافة عناصرها تساوي الصفر). نظير المصفوفة $A = (a_{i,j})$ هو المصفوفة $(-a_{i,j})$.

الفضاء الشعاعي لكثيرات الحدود

مجموعة كثيرات الحدود$\mathcal{R}[X]$) بأمثال حقيقية $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ تشكل فضاء شــعاعي على الحقل $\mathcal{R}$. القانون الداخلي هو جمع كثيري حدود $P(X) + Q(X)$. القانون الخارجي هو ضــرب كثير حدود بعدد حقيقي $\lambda.P(X)$. العنصر الحيادي بالنسبة للجمع هو كثير الحدود الصفري (كل أمثاله تساوي الصفر). نظير كثير الحدود $P(X)$ هو كثير الحدود $-P(X)$.

قواعد الحساب في الفضاءات الشعاعية

فرضية 2: ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K. ليكن $u \in E$ و $\lambda \in K$. عندئذ:

1. $0.u = 0_E$
2. $\lambda.0_E = 0_E$
3. $(-1).u = -u$
4. $\lambda.u = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0$ أو $u = 0_E$

ملاحظة 4: العملية التي تلحق (u, v) ب $u + (-v)$ والتي يرمز لها $u - v$ تســـمى عملية الطرح. وبالتالي لدينا الخواص التالية صحيحة: $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$ و $(\lambda - \mu)u = \lambda u - \lambda u$.

2. الفضاء الشعاعي الجزئي Subspace

1-2. تعاريف وأمثلة Definitions and examples

تعريف 2: ليكن $(E, +, .)$ فضاء شعاعي على الحقل K. نقول عن F إنه فضاء شعاعي جزئي من E إذا:

1. F زمرة جزئية من $(E, +)$
2. F مستقر بالضرب بسلمي، يعني أنه من أجل أي $(\lambda, u) \in K \times F$ فإن $\lambda.u \in F$

فرضية 3: ليكن $(E, +, .)$ فضاء شعاعي على الحقل K و F فضاء شعاعي جزئي من E. عندئذ F فضاء شعاعي على الحقل K.

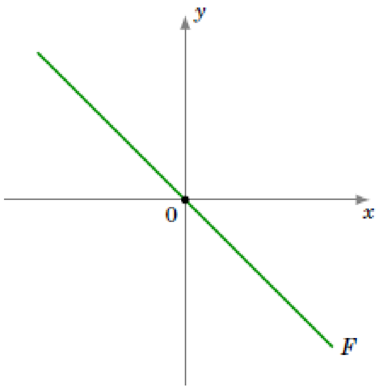
ملاحظة 5: إذا كان F فضاء شعاعي جزئي من E و G فضاء شعاعي جزئي من F، عندئذ G فضاء شعاعي جزئي من E. إذا كان F و G فضائي شعاعين جزئيين من E وكان $F \subset G$، عندئذ F فضاء شعاعي جزئي من G.

ملاحظة 6: $\{0_E\}$ و E فضائي شعاعين جزئيين من E.

مبرهنة 1: ليكن $(E, +, .)$ فضاء شعاعي على الحقل K. F فضاء شعاعي جزئي من E إذا وفقط إذا:

1. $F \subset E$
2. $0_E \in F$
3. F مستقر بالتركيب الخطي، بمعنى أنه مهما يكن $u, v \in F$ و $\lambda, \mu \in K$ فإن $\lambda u + \mu v \in F$.

مثال 2:



المجموعة $F = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 |\ x + y = 0\}$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{R}^2$.

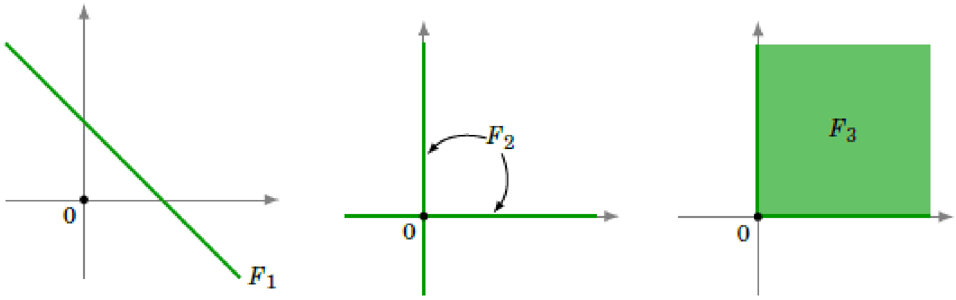
من الواضح أن $F \subset E$، وأن $0_E = (0, 0) \in F$. ليكن لدينا $u = (x, y)$ و $v = (x', y')$ و $\lambda, \mu \in \mathcal{R}$، عندئذ $x + y = 0$ بالتالي $\lambda x + \lambda y = 0$ وكذلك $x' + y' = 0$ بالتالي $\mu x' + \mu y' = 0$.

ينتج مما سبق $\lambda x + \lambda y + \mu x' + \mu y' = 0$، أو بشكل آخر $\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y' = 0$ وهكذا $\lambda u + \mu v = \lambda(x, y) + \mu(x', y') = (\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y')$ ينتمي إلى F.

مثال 3:

- المجموعة $F_1 = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 |\ x + y = 2\}$ لا تشكل فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{R}^2$. في الحقيقة العنصر الصفري $(0, 0)$ لا ينتمي إلى F_1.

- المجموعة $F_2 = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 |\ x = 0 \text{ or } y = 0\}$ لا تشـكل فضـاء شـعاعي جزئي من $\mathcal{R}^2$. في الحقيقة الشعاعان $u = (1, 0)$ و $v = (0, 1)$ ينتميان إلى F_2، لكن الشعاع $u + v = (1, 1)$ لا ينتمي إلى F_2.
- المجموعة $F_3 = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 |\ x \geq 0 \text{ and } y \geq 0\}$ لا تشـكل فضـاء شـعاعي جزئي من $\mathcal{R}^2$. في الحقيقة الشعاع $u = (1, 1)$ ينتمي إلى F_3، لكن من أجل $\lambda = -1$، الشعاع $-u = (-1, -1)$ لا ينتمي إلى F_3.



تمرين 1: هل مجموعة التوابع الزوجية (الفردية) تشكل فضاء شعاعي على $\mathcal{R}$ (قانوني الجمع والضرب بسلمي)؟

لنرمز ب$\mathcal{P}$ إلى مجموعة التوابع الزوجية و $\mathcal{I}$ مجموعة التوابع الفردية. إنهما مجموعتان جزئيتان من الفضـــاء الشـــعاعي للتطبيقات $\mathcal{F}(\mathcal{R}, \mathcal{R})$

$$\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{F}(\mathcal{R}, \mathcal{R}) \mid f(-x) = f(x),\ x \in \mathcal{R}\}$$
$$\mathcal{I} = \{f \in \mathcal{F}(\mathcal{R}, \mathcal{R}) \mid f(-x) = -f(x),\ x \in \mathcal{R}\}$$

$\mathcal{P}$ و $\mathcal{I}$ فضاءان شعاعيان جزئيان من $\mathcal{F}(\mathcal{R}, \mathcal{R})$. من السهل برهان ذلك، على سبيل المثال من أجل التوابع الزوجية $\mathcal{P}$: المجموعة $\mathcal{P}$ محتواه في المجموعة $\mathcal{F}(\mathcal{R}, \mathcal{R})$، التابع الصفري تابع زوجي، ليكن $f, g \in \mathcal{P}$ و $\lambda, \mu \in \mathcal{R}$، عندئذ $\lambda f + \mu g \in \mathcal{P}$. بالتالي $\mathcal{P}$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{F}(\mathcal{R}, \mathcal{R})$ بالتالي فضاء شعاعي حسب الفرضية 3.

تمرين 2: مجموعة المصـفوفات المتناظرة $\mathcal{S}_n$ هي مجموعة جزئية من الفضـاء الشـعاعي $M_n(\mathcal{R})$ (مصـفوفات مربعة بعدها n). هل تشكل $\mathcal{S}_n$ فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي $M_n(\mathcal{R})$؟

يكفي ملاحـظة أن المجموعة $\mathcal{S}_n$ محتواه في $M_n(\mathcal{R})$، وأن المصــفوفة الصــفرية متناظرة، وأن مجموع مصــفوفتين متناظرتين بعد ضرب كل منهما بعدد حقيقي ينتج مصفوفة متناظرة.

مثال آخر عن فضـاء شـعاعي يتمثل في مجموعة الحلول لجملة خطية متجانسـة. ليكن $AX = 0$ جملة ب n معادلة و p مجهول:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

مبرهنة 2: ليكن $A \in M_{n,p}(\mathcal{R})$. وليكن $AX = 0$ جملة خطية متجانسـة ب p متحول. عندئذ مجموعة الأشـعة حلول المعادلة تشكل فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{R}^p$.

مثال 4: ليكن لدينا الجملة التالية:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 6\\ 3 & -6 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

مجموعة الحلول $F \subset \mathcal{R}^3$ للجملة: $F = \{(x = 2s - 3t,\ y = s,\ z = t) \mid s, t \in \mathcal{R}\}$. بالاعتماد على المبرهنة السابقة، F فضاء شعاعي جزئ من $\mathcal{R}^3$، بالتالي فإن F فضاء شعاعي.

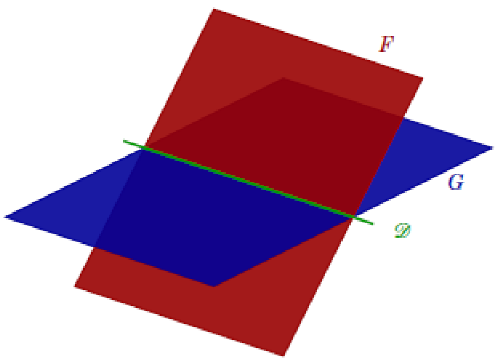
يمكن كتابة F بطريقة مختلفة: عناصـــر المجموعة F تحقق المعادلة التالية: $x = 2y - 3z$، بمعنى آخر معادلة F هي $x - 2y + 3z = 0$. وجدنا سابقاً أن معادلة من هذا النوع هي معادلة مستوي يمر بمبدأ الاحداثيات، ورأينا أيضاً أن ذلك يشكل فضاء شعاعي (أمثلة 1).

2-2. تقاطع فضاءات شعاعية جزئية Intersection of subspaces

مبرهنة 3: لتكن F و G فضـاءين شـعاعيين جزئيين من فضـاء شـعاعي $(E, +, .)$ على الحقل K. عندئذ التقاطع $F \cap G$ هو فضاء شعاعي جزئي من E.

يمكن البرهان على أن التقاطع $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n$ لعائلة من الفضاءات الشعاعية الجزئية ل E هو فضاء شعاعي جزئي من E.

ملاحظة 7: اجتماع فضاءين شعاعيين ليس بالضرورة أن يكون فضاء شعاعي جزئي.

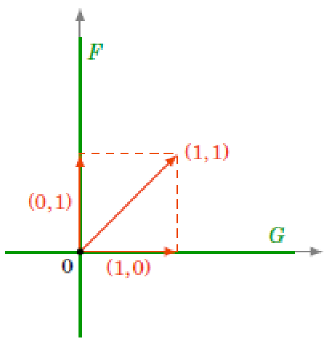


مثال 5: ليكن $\mathcal{D}$ المجموعة الجزئية من $\mathcal{R}^3$ والمعرف كما يلي:

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 \mid x+3y+z=0 \text{ and } x-y+2z=0\}$$

هل تشكل $\mathcal{D}$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{R}^3$؟

المجموعة $\mathcal{D}$ هي تقاطع F و G، المجموعتان الجزئيتان من $\mathcal{R}^3$ المعرفة كما يلي: $F = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 \mid x+3y+z=0\}$ و $G = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 \mid x-y+2z=0\}$ وهما يشـكلان مسـتويين يمران بالمبدأ، بالتالي هما فضـاءان شـعاعيان جزئيان من $\mathcal{R}^3$. هكذا فإن $\mathcal{D} = F \cap G$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{R}^3$، إنه مستقيم شعاعي.



مثال 6: لنأخذ الفضـاء الشـعاعي $E = \mathcal{R}^2$. وليكن لدينا الفضـاءين الشـعاعين الجزئيين $F = \{(x, y) \mid x = 0\}$ و $G = \{(x, y) \mid y = 0\}$. إن الاجتماع $F \cup G$ ليس بفضاء شعاعي جزئي على $\mathcal{R}^2$. لنأخذ على سبيل المثال: $(0, 1) + (1, 0) = (1, 1)$ مجموع شـعاعين أحدهما من F والآخر من G، لكن المجموع لا ينتمي إلى $F \cap G$.

3. جمل الأشعة Set of vectors

1-3. التراكيب الخطية Linear combination

تعريف 3: ليكن n عدد طبيعي، ليكن $v_1, v_2, \ldots, v_n$ n شعاع من فضاء شعاعي E. نسمي كل شعاع من الشكل $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$ (حيث $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ عناصر من الحقل K) تركيب خطي من الأشعة $v_1, v_2, \ldots, v_n$. كما نسمي السلميات $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ أمثال التركيب الخطي.

ملاحظة 8: عندما يكون $n = 1$، عندئذ $u = \lambda_1 v_1$ ونقول عندها أن u مرتبط ب v_1.

أمثلة 7:

- في الفضاء الشعاعي $\mathcal{R}^3$ على الحقل $\mathcal{R}$، الشعاع $(3, 3, 1)$ عبارة عن تركيب خطي من الشعاعين $(1, 1, 0)$ و $(1, 1, 1)$ لأن: $(3, 3, 1) = 2(1, 1, 0) + (1, 1, 1)$.
- في الفضاء الشعاعي $\mathcal{R}^2$ على الحقل $\mathcal{R}$، الشعاع $u = (2, 1)$ ليس مرتبط بالشعاع $v_1 = (1, 1)$، لأنه لو كان الأمر كذلك سيوجد عدد حقيقي λ بحيث $u = \lambda_1 v_1$، وهذا يكافئ المساواة $(2, 1) = (\lambda, \lambda)$.
- ليكن $E = \mathcal{F}(\mathcal{R}, \mathcal{R})$ الفضاء الشعاعي للتوابع الحقيقية. لتكن f_0, f_1, f_2, f_3 التوابع المعرفة ب:
$$f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = x^3,\ x \in \mathcal{R}$$
عندئذ التابع f المعرف ب: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$ هو تركيب خطي من التوابع f_0, f_1, f_2, f_3 لأنه لدينا العلاقة: $f = f_3 - 2f_2 - 7f_1 - 4f_0$.
- في الفضاء $M_{2,3}(\mathcal{R})$، لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. يمكن كتابة A تركيب خطي من المصفوفات:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

تمرين 3: ليكن $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ و $v = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ شعاعين من $\mathcal{R}^3$. أثبت أن $w = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ تركيب خطي من u و v.

الحل: نبحث عن λ و μ بحيث $w = \lambda u + \mu v$

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6\mu \\ 4\mu \\ 2\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 6\mu \\ 2\lambda + 4\mu \\ -\lambda + 2\mu \end{pmatrix}$$

بالتالي لدينا:

$$\begin{cases} 9 = \lambda + 6\mu \\ 2 = 2\lambda + 4\mu \\ 7 = -\lambda + 2\mu \end{cases}$$

حل جملة المعادلات هو: $\lambda = -3$ و $\mu = 2$. بالتالي فإن w تركيب خطي من u و v:

$$\begin{pmatrix}9\\2\\7\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}6\\4\\2\end{pmatrix}$$

تمرين 4: ليكن $u = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ و $v = \begin{pmatrix}6\\4\\2\end{pmatrix}$ شـــعاعين من $\mathcal{R}^2$. أثبت أن $w = \begin{pmatrix}4\\-1\\8\end{pmatrix}$ لا يمكن أن يكون تركيب خطي من u و v.

الحل:

$$\begin{pmatrix}4\\-1\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda + 6\mu\\2\lambda + 4\mu\\-\lambda + 2\mu\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}9 = \lambda + 6\mu\\2 = 2\lambda + 4\mu\\7 = -\lambda + 2\mu\end{cases}$$

ليس لجملة المعادلات حل بالتالي لا يمكن أن يكون الشعاع w تركيب خطي من u و v.

3-2. الفضاء الشعاعي الجزئي المولد Spanning subspaces

تعريف 4: ليكن $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ جملة أشعة من الفضاء الشعاعي E على الحقل K. نسمي تقاطع كل الفضاءات الشعاعية الجزئية من E والتي تحوي الأشعة المذكورة ب الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالأشعة $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.
إنه أصغر فضاء شعاعي جزئي (بمعنى الاحتواء) يحوي الأشعة $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

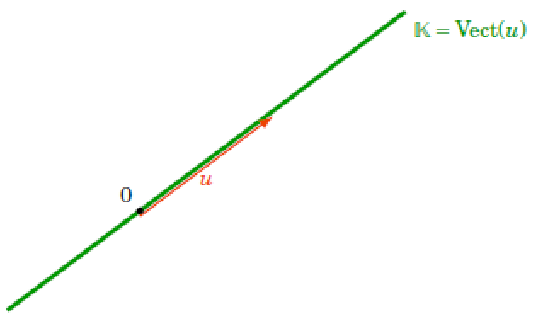
مبرهنة 4: ليكن $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ جملة أشعة من الفضـاء الشـعاعي E على الحقل K. عندئذ: مجموعة التراكيب الخطية للأشـعة $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ تشـكل فضـاء شـعاعي جزئي من E. نسـمي الفضـاء الشـعاعي الجزئي المذكور بالفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالأشعة $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. ونرمز له بالرمز $Vect(v_1, v_2, \ldots, v_n)$

$$u \in Vect(v_1, v_2, \ldots, v_n) \Leftrightarrow \text{يوجد } \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K \text{ بحيث } u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

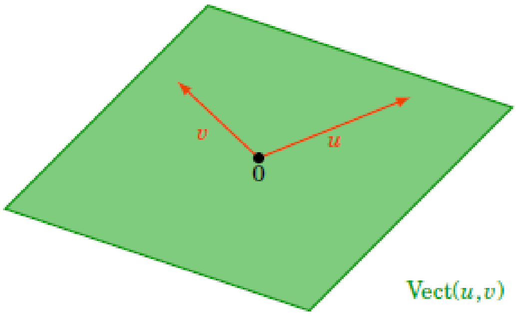
ملاحظة 9: لدينا بشكل خاص $Vect(\varnothing) = \{0_E\}$.

أمثلة 8:

- ليكن الفضـاء الشـعاعي E على الحقل K. وليكن $u \in E$، المجموعة $Vect(u) = \{\lambda u | \lambda \in K\}$ تشـكل فضـاء شـعاعي جزئي من E مولد من u. نرمز له غالباً ب Ku. إذا كان u مختلف عن الشعاع الصفري، ندعو الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالمستقيم الشعاعي.



ISSN: 2617-989X



- ليكن u و v شعاعين من E، الفضاء الشعاعي الجزئي المولد منهما: $\mathrm{Vect}(u, v) = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in K\}$.
إذا كان الشعاعين u و v غير مرتبطين، ندعو الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالمستوي الشعاعي.

- ليكن $u = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ و $v = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ شعاعين من $\mathcal{R}^3$. أوجد $\boldsymbol{\mathcal{P}} = \mathrm{Vect}(u, v)$.

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}(u, v) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \lambda u + \mu v = \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

بالتالي: $\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda + 2\mu \\ z = \lambda + 3\mu \end{cases}$. تمثل معادلات وسيطية لمستوي $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ يمر بالمبدأ ويحوي الشعاعين u و v.

يمكن كتابة معادلة المستوي بالشكل: $x - 2y + z = 0$.

مثال 9: هل يشكل $F = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3\}$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{R}^3$؟

العنصر (x, y, z) من $\mathcal{R}^3$ ينتمي إلى F إذا وفقط إذا كان $x = y + z$. بالتالي u عنصر من F إذا وفقط إذا تمت كتابته بالطريقة $u = (y+z, y, z)$. وبما أنه لدينا $(y+z, y, z) = y(1, 1, 0) + z(1, 0, 1)$. بالتالي F هو التركيب الخطي للشعاعين $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$. بالتالي F الفضاء الشعاعي الجزئي المولد منهما أي: $F = \mathrm{Vect}\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$. إذن هو مستوي شعاعي(مستوي يمر من المبدأ).

مثال 10: الشعاعان $(1, 0)$ و $(0, 1)$ يولدان $\mathcal{R}^2$، في الحقيقية، ليكن $(x, y) \in \mathcal{R}^2$، يمكن كتابته دوماً من الشكل $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$.

كما أن الأشعة $\{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ تولد أيضاً $\mathcal{R}^2$، لأن: $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) + 0(0, 0)$.

تمرين 5: ليكن E الفضاء الشعاعي للتطبيقات من $\mathcal{R}$ إلى $\mathcal{R}$، ولتكن f_0, f_1, f_2 التطبيقات المعرفة كما يلي:

$$f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2;\ x \in \mathcal{R}$$

أوجد الفضاء الشعاعي المولد ب $\{f_0, f_1, f_2\}$.

إنه الفضاء الشعاعي الجزئي من E للتوابع على شكل كثيرات حدود درجتها أقل أو يساوي 2، والتي هي من الشكل التالي: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

فرضية 4: ليكن جملتي أشعة A و B من الفضاء الشعاعي E، إذا كان $A \subset B$ فإن $\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)$.

3-3. الجملة المولدة Spanning sets

تعريف 5: ليكن n عدد طبيعي، ليكن $v_1, v_2, \ldots, v_n$ n شعاع من فضاء شعاعي E على الحقل K. نسمي الجملة $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ جملة مولدة للفضاء الشعاعي E إذا كان كل شعاع u من الفضاء E تركيب خطي من الأشعة $v_1, v_2, \ldots, v_n$. أي أنه يكتب على الشكل التالي:

$$\forall\, u \in E \quad \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K \quad u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

حيث الرموز: $\forall$ مهما يكن. $\exists$ يوجد

نقول أيضاً أن الجملة $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ تولد الفضاء الشعاعي E.

فرضية 5: ليكن $v_1, v_2, \ldots, v_n$ n شعاع من فضاء شعاعي E على الحقل K. الجملة $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ مولدة للفضاء الشعاعي E إذا وفقط إذا $E = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

أمثلة 11:

- لتكن الأشعة $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ و $v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ و $v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ من $\mathcal{R}^3$. جملة الأشعة $\{v_1, v_2, v_3\}$ هي مولدة للفضاء $\mathcal{R}^3$ لأن كل شعاع $u = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ من $\mathcal{R}^3$ يكتب على الشكل التالي: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.
- لتكن الأشعة $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ و $v_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ من $\mathcal{R}^3$. لا تشكل الأشعة $\{v_1, v_2\}$ جملة مولدة للفضاء $\mathcal{R}^3$. على سبيل المثال الشعاع $u = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ لا يوجد ضمن $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$. في الحقيقة لأنه لو وجد لتمكنا من إيجاد العددين $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{R}$ بحيث $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$. وبالتالي: $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$، أي لدينا الجملة الخطية:

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 1 = \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 0 = \lambda_1 + 3\lambda_2 \end{cases}$$

ليس لهذه الجملة الخطية حل.

- جملة الأشعة $(1, X, \ldots, X^n)$ هي مولدة للفضاء $\mathcal{R}_n[X]$ على الحقل $\mathcal{R}$ كثيرات الحدود من الدرجة أصغر أو يساوي n، بينما ليست هي مولدة للفضاء $\mathcal{R}_{n+1}[X]$.

تمرين 6: ليكن $E = \mathcal{R}^2$. هل يشكل الشعاعان $u = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ و $v = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ جملة مولدة للفضاء $\mathcal{R}^2$؟ وهل يشكل الشعاعان $v_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ و $v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ جملة مولدة للفضاء $\mathcal{R}^2$؟

الحل: من الواضح أن جملة الأشعة $\{u, v\}$ هي جملة مولدة للفضاء $\mathcal{R}^2$ لأن أي شعاع $\mathcal{R}^2$ يكتب بدلالة u و v: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

كذلك الأمر بالنسبة للشعاعين $\{v_1, v_2\}$ يشكلان جملة مولدة للفضاء $\mathcal{R}^2$. في الحقيقة ليكن شعاع من $\mathcal{R}^2$. لنبرهن أنه عبارة عن تركيب خطي من v_1 و v_2:

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ بالتالي لدينا الجملة الخطية $\begin{cases} 2\lambda + \mu = x \\ \lambda + \mu = y \end{cases}$ والتي حلها: $\lambda = x - y$ و $\mu = -x + 2y$.

4-3. الجمل المستقلة والمرتبطة Independent and dependent sets

تعريف 6: نقول عن جملة أشعة $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ من الفضاء الشعاعي E على الحقل K أنها حرة أو مستقلة خطياً إذا كان أي تركيب خطي منها يساوي الصفر: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ أدى إلى كون كافة الأمثال مساوية للصفر أي: $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

إذا وجد أحد الأمثال مختلف عن الصفر تكون جملة الأشعة $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ مرتبطة خطياً.

أمثلة 12:

- ليكن الفضاء الشعاعي $\mathcal{R}^3$ على الحقل $\mathcal{R}$. ليكن لدينا الأشعة التالية:

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

هل الجملة مستقلة أو مرتبطة خطياً؟

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

بالتالي الجملة مرتبطة خطياً

- ليكن الفضاء الشعاعي $\mathcal{R}^3$ على الحقل $\mathcal{R}$. ليكن لدينا الأشعة التالية:

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

هل الجملة مستقلة أو مرتبطة خطياً؟

لنشكل التركيب الخطي: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$، ينتج لدينا الجملة الخطية:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

بحل الجملة الخطية نحصل على: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. أي أن الجملة مستقلة خطياً.

- لتكن الأشعة $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ و $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ و $v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ من $\mathcal{R}^4$. هل الجملة مستقلة أو مرتبطة خطياً؟

الجملة مرتبطة لأن: $3v_1 + v_2 - v_3 = 0$

- كثيرات الحدود: $P_1(X) = 1 - X$ و $P_2(X) = 5 + 3X - 2X^2$ و $P_3(X) = 1 + 3X - X^2$ تشكل جملة مرتبطة في $\mathcal{R}[X]$، لأن: $3P_1(X) - P_2(X) + 2P_3(X) = 0$.

- في الفضاء الشعاعي للتطبيقات $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{R}, \mathcal{R})$ على الحقل $\mathcal{R}$، لنأخذ الجملة $\{\cos, \sin\}$. برهن أن هذه الجملة مستقلة خطياً.

ليكن التركيب الخطي: $\forall\ x \in \mathcal{R},\ \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) = \mathbf{0}$. لنأخذ $x = 0$ ينتج $\lambda = 0$، و $x = \pi/2$ ينتج $\mu = 0$. بالتالي الجملة $\{\cos, \sin\}$ مستقلة خطياً.

أما الجملة $\{\cos^2, \sin^2, 1\}$ فهي مرتبطة خطياً لأنه لدينا العلاقة الشهيرة في المثلثات $\cos^2 + \sin^2 - 1 = 0$. أمثال الارتباط الخطي هي: $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 1$ و $\lambda_3 = -1$.

جملة أشعة مرتبطة خطياً

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K. ليكن الشعاع $v \neq 0$، الجملة التي لديها شعاع واحد $\{v\}$ مستقلة (مرتبطة في حال $v = 0$).

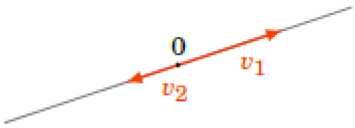
فرضية 6: جملة الأشعة $\{v_1, v_2\}$ مرتبطة إذا وفقط إذا كان v_1 مضاعف ل v_2 او العكس (v_2 مضاعف ل v_1).

فرضية 7: ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K. جملة الأشعة $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ بحيث $n \geq 2$ من E مرتبطة إذا وفقط إذا كان على الأقل أحد الأشعة من $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ هو تركيب خطي من الأشعة الأخرى من $\boldsymbol{\mathcal{F}}$.

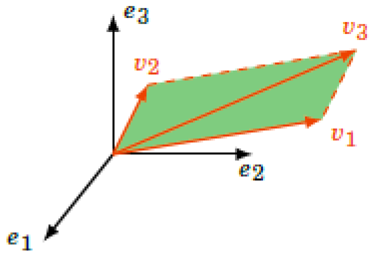
فرضية 8:

1. كل جملة أشعة مستخلصة من جملة مستقلة خطياً تكون مستقلة.
2. كل جملة أشعة تحوي جملة مرتبطة خطياً تكون مرتبطة.
3. كل جملة أشعة تحوي الشعاع الصفري تكون مرتبطة.
4. كل جملة أشعة مؤلفة من عنصر واحد مختلف عن الصفر هي جملة مستقلة.

التفسير الهندسي للارتباط الخطي



- في $\mathcal{R}^2$ أو $\mathcal{R}^3$، شعاعان مرتبطان خطياً إذا وفقط إذا كانا لهما حامل واح، أي إذا وقعا على نفس المستقيم الشعاعي.



- في $\mathcal{R}^3$، ثلاث أشعة مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا كانوا في نفس المستوي الشعاعي.

فرضية 9: لتكن جملة الأشعة $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\} = \mathcal{F}$ في الفضاء الشعاعي $\mathcal{R}^n$. إذا كانت $\mathcal{F}$ تحوي اكثر من n عنصر $(p > n)$، عندئذ الجملة $\mathcal{F}$ مرتبطة خطياً.

3-5. قاعدة فضاء شعاعي Basis of a vector space

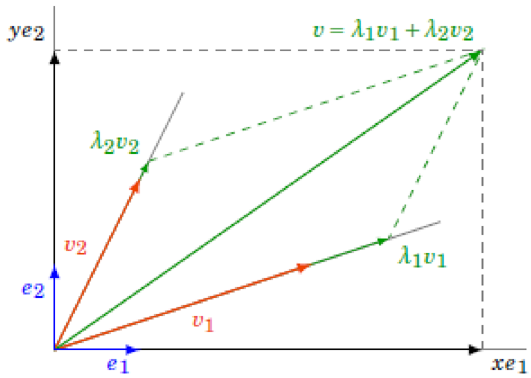
تعريف 7: ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K. جملة الأشعة $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = \mathcal{B}$ في E تشكل قاعدة في E إذا كانت الجملة $\mathcal{B}$ مستقلة خطياً ومولدة.

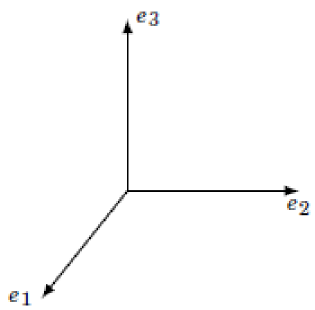
مبرهنة 5: لتكن جملة الأشعة $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = \mathcal{B}$ قاعدة في الفضاء الشعاعي E. كل شعاع $v \in E$ يكتب وبطريقة وحيدة كتركيب خطي من عناصر $\mathcal{B}$. بمعنى آخر يوجد سلميات $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ وحيدة بحيث: $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$.

نسمي السلميات $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ إحداثيات الشعاع v في القاعدة $\mathcal{B}$.

أمثلة 13:

- ليكن الشعاعان $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ و $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. عندئذ الجملة $\{e_1, e_2\}$ تشكل قاعدة في $\mathcal{R}^2$، تسمى القاعدة القانونية في $\mathcal{R}^2$.
- الأشعة $v_1 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ و $v_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. عندئذ الجملة (v_1, v_2) تشكل قاعدة في $\mathcal{R}^2$





- لتكن الأشعة $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ و $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ و $e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ من $\mathcal{R}^3$. الجملة $\{e_1, e_2, e_3\}$ تشكل قاعدة في $\mathcal{R}^3$.
- الأشعة في K^n:

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} \quad \dots \quad e_n = \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

تشكل القاعدة القانونية K^n.

- الأشعة في $\mathcal{R}^n$:

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \quad \dots \quad v_n = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\\vdots\\n\end{pmatrix}$$

برهن أن جملة الأشعة $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ تشكل قاعدة في $\mathcal{R}^n$.

- القاعدة القانونية في $\mathcal{R}_n[X]$ هي: $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, \dots, X^n\}$.
- الفضاء الشعاعي $M_2(\mathcal{R})$ المصفوفات المربعة 2 x 2 يقبل القاعدة المؤلفة من الأشعة التالية:

$$M_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} \qquad M_4 = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

من الواضح أن أي مصفوفة $M = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ من $M_2(\mathcal{R})$ يمكن كتابتها وبطريقة وحيدة بالشكل:

$$M = aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4$$

- إنه لتمرين جيد أن تبرهن أن المصفوفات الأربعة التالية تشكل أيضاً قاعدة في الفضاء الشعاعي $M_2(\mathcal{R})$:

$$M_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \qquad M_4 = \begin{pmatrix}1 & 3\\4 & 2\end{pmatrix}$$

تمرين 7: ليكن $E = \{P \in \mathcal{R}_2[X], P(1) = 0\}$. برهن أن E فراغ شعاعي جزئي من $\mathcal{R}_2[X]$. ,من ثم أوجد قاعدة له.

الحل: الشعاع الصفري ل $\mathcal{R}_2[X]$ هو كثير الحدود الصفري وبالأخص يأخذ القيمة صفر عند الواحد، بالتالي فهو ينتمي إلى E. ليكن $P, Q \in \mathcal{R}_2[X]$ بالتالي $P(1) = Q(1) = 0$. من أجل $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{R}$:

$$(\lambda_1 P + \lambda_2 Q)(1) = \lambda_1 P(1) + \lambda_2 Q(1) = 0$$

بالتالي: $\lambda_1 P + \lambda_2 Q \in E$، أي أن E فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{R}_2[X]$.

ليكن $P = aX^2 + bX + c \in E$، $P(1) = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0 \Leftrightarrow c = -a - b$، بالتالي:

$$P = aX^2 + bX - a - b = a(X^2 - 1) + b(X - 1)$$

$X^2 - 1$ و $X - 1$ كثيري حدود غير مرتبطين، بالتالي هما جملة أشعة مستقلة تولد E، أي تشكلان قاعدة في E.

تمرين 8: ليكن الشعاعين $v_1 = (1-i, i)$ و $v_2 = (2, -1+i)$ في $\mathcal{C}^2$. برهن أن الجملة (v_1, v_2) مستقلة على الحقل $\mathcal{R}$ ومرتبطة على الحقل $\mathcal{C}$.

الحل: من أجل كل $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$:

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = 0 \Rightarrow \alpha(1-i, i) + \beta(2, -1+i) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha(1-i) + 2\beta = 0 \\ \alpha i + \beta(-1+i) = 0 \end{cases}$$

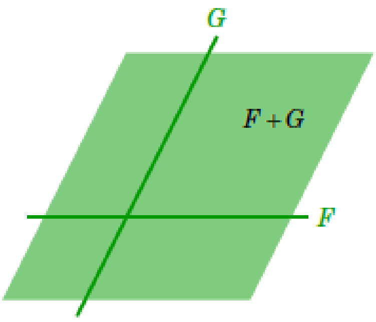
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta - \alpha i = 0 \\ -\beta + (\alpha+\beta)i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \; and - \alpha = 0 \\ -\beta = 0 \; and \; (\alpha+\beta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

بالتالي (v_1, v_2) جملة مستقلة على الحقل $\mathcal{R}$.

$$2v_1 - (1-i)v_2 = 2(1-i, i) - (1-i)(2, -1+i) = (2(1-i) - (1-i)x2, 2i - (1-i)(-1+i))$$
$$= (0, 2i - 2i) = (0, 0)$$

إذن يوجد علاقة بين الشعاعين والجملة (v_1, v_2) مرتبطة على الحقل $\mathcal{C}$.

4. مجموع فضاءين شعاعيين جزئيين Sum of subspaces



تعريف 8: ليكن F و G فضاءين شعاعيين جزئيين من فضاء شعاعي E على الحقل K. نسمي مجموعة العناصر $u + v$ حيث u عنصر من F و v عنصر من G مجموع الفضاءين الشعاعيين الجزئيين F و G. نرمز لهذا المجموع ب: $F + G$. لدينا بالتالي: $F + G = \{u + v \mid u \in F, v \in G\}$

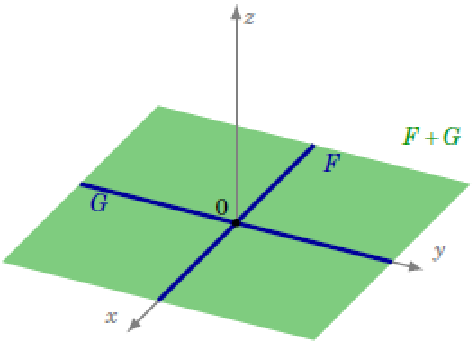
فرضية 10: ليكن F و G فضاءين شعاعيين جزئيين من فضاء شعاعي E على الحقل K.

1. $F + G$ فضاء شعاعي جزئي من E
2. $F + G$ أصغر فضاء شعاعي جزئي يحوي كل من F و G

مثال 14: حدد $F + G$ في حالة F و G فضاءين شعاعيين جزئيين من $\mathcal{R}^3$ التاليين:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 \mid y = z = 0\} \text{ and } G = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 \mid x = z = 0\}$$

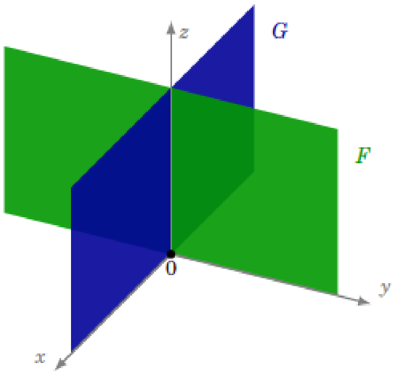
ISSN: 2617-989X



يكتب العنصر w من $F + G$ بالشكل $w = u + v$ حيث u عنصر من F و v عنصر من G. بما ان $u \in F$ يوجد $x \in \mathcal{R}$ بحيث $u = (x, 0, 0)$، وبما أن $v \in G$ يوجد $y \in \mathcal{R}$ بحيث $v = (x, 0, 0)$، وبالتالي $w = (x, y, 0)$. وبالعكس هذا العنصر $w = (x, y, 0)$ هو مجموع لكل من $(x, 0, 0)$ و $(0, y, 0)$. إذن $F + G = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 | z = 0\}$. ونرى في هذا المثال أيضاً أن أي عنصر من $F + G$ يكتب وبطريقة وحيدة مجموع عنصرين أحدهما من والآخر من G.

تمرين 9: حدد $F + G$ في حالة F و G فضاءين شعاعيين جزئيين من $\mathcal{R}^3$ التاليين:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 \,|\, x = 0\} \text{ and } G = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 \,|\, y = 0\}$$



الحل: في هذا التمرين سنحاول برهان أن $F + G = \mathcal{R}^3$.

من تعريف $F + G$، كل عنصر من $F + G$ هو عنصر في $\mathcal{R}^3$. بالعكس، ليكن العنصر $w = (x, y, z)$ عنصر من $\mathcal{R}^3$، يمكن كتابته على الشكل: $w = (x, y, z) = (0, y, z) + (x, 0, 0)$ حيث $(0, y, z) \in F$ و $(x, 0, 0) \in G$، بالتالي w ينتمي إلى $F + G$.

ملاحظة 10: في هذا التمرين عنصر من $\mathcal{R}^3$ لا يكتب بالضرورة بطريقة وحيدة كمجموع عنصرين أحدهما من F والآخر من G. على سبيل المثال:

$(1, 2, 3) = (0, 2, 3) + (1, 0, 0) = (0, 2, 0) + (1, 0, 3)$.

المجموع المباشر والفضاءات المتتامة

تعريف 9: F و G فضاءين شعاعيين جزئيين من فضاء شعاعي E. نقول عن المجموع $G + F$ أنه مباشر في E إذا:

1. $F \cap G = \{0_E\}$
2. $F + G = E$

نرمز للمجموع المباشر ب: $E = G \oplus F$. إذا كان F و G في مجموع مباشر، نقول عنهما فضاءين شعاعيين جزئيين متتامين.

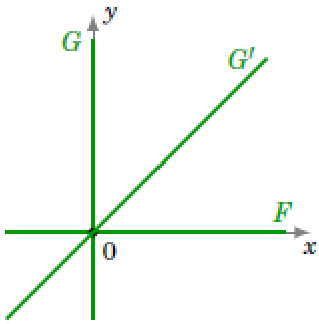
فرضية 11: F و G متتامين في E إذا وفقط إذا كان كل عنصر من E يكتب وبطريقة وحيدة مجموع عنصرين أحدهما في E والآخر في G.

أمثلة 15:

- ليكن $F = \{(x, 0) \in \mathcal{R}^2 \,|\, x \in \mathcal{R}\}$ and $G = \{(0, y) \in \mathcal{R}^2 \,|\, y \in \mathcal{R}\}$. أثبت أن $F \oplus G = \mathcal{R}^2$.

  من الواضح أن $F \cap G = \{(0, 0)\}$، وبما أن $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$، بالتالي $F + G = \mathcal{R}^2$.

- لنحتفظ ب F ولنأخذ $G' = \{(x, x) \in \mathcal{R}^2 | x \in \mathcal{R}\}$. أثبت أن $F \oplus G' = \mathcal{R}^2$.



لنبرهن أن $F \cap G' = \{(0, 0)\}$. ليكن $(x, y) \in F \cap G'$، عندئذ من جهة $(x, y) \in F$ بالتالي $y = 0$، وأيضاً $(x, y) \in G'$ بالتالي $x = y$. إذن $(x, y) = (0, 0)$.

لنبرهن الآن أن $F + G' = \mathcal{R}^2$. ليكن $u\ (x, y) \in \mathcal{R}^2$. لنبحث عن $v \in F$ و $w \in G'$ بحيث $u = v + w$. بما ان $v = (x_1, y_1) \in F$ إذن $y_1 = 0$ وبما أن $w = (x_2, y_2) \in G'$ ينتج $x_2 = y_2$. وبالتالي يصبح الهدف إيجاد x_1 و x_2 بحيث: $(x, y) = (x_1, 0) + (x_2, x_2)$. وهكذا $x = x_1 + x_2$ و $y = x_2$، بالتالي $x_1 = x - y$ و $x_2 = y$. أي: $(x, y) = (x - y, 0) + (y, y)$ وهذا يبرهن على أن أي عنصر من $\mathcal{R}^2$ هو مجموع عنصرين أحدهما من F والآخر من G'.

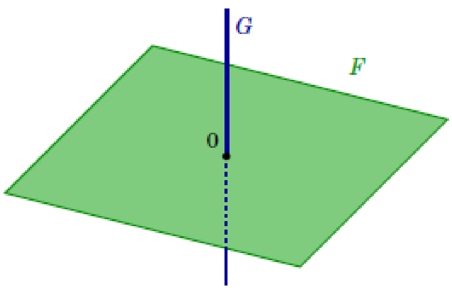
- وبشكل عام، مستقيمين مختلفين في مستوي يمر من المبدأ يشكلان فضاءين جزئيين متتامين.

تمرين 10: هل يشكل الفضاءين الشعاعيين الجزئيين من $\mathcal{R}^3$ والمعرفة كما يلي:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 | x - y - z = 0\} \text{ and } G = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 | y = z = 0\}$$

فضاءين متتامين في $\mathcal{R}^3$؟

الحل: من السهل برهان أن $F \cap G = \{0\}$. ليكن العنصر $u = (x, y, z) \in F \cap G$، إحداثيات العنصر u تحقق: $x - y - z = 0$ (u ينتمي إلى F)، و $y = z = 0$ (u ينتمي إلى G)، بالتالي: $u = (0, 0, 0)$.



بقي أن نبرهن أن $F + G = \mathcal{R}^3$. ليكن $u = (x, y, z)$ عنصر من الفضاء $\mathcal{R}^3$، يجب تحديد العنصرين v من F و w من G بحيث $u = v + w$. العنصر v من الشكل: $v = (y_1+z_1, y_1, z_1)$ والعنصر w من الشكل: $w = (x_2, 0, 0)$.

لدينا $u = v + w$ إذا وفقط إذا $y_1 = y, z_1 = z, x_2 = x - y - z$. لدينا إذن:

$$(x, y, z) = (y+z, y, z)+(x-y-z, 0, 0)$$

مع $v = (y+z, y, z)$ من F و $w = (x-y-z, 0, 0)$ من G. بالنتيجة $F \oplus G = \mathcal{R}^3$.

تمرين 11: في الفضاء الشعاعي للتطبيقات $\mathcal{F}(\mathcal{R}, \mathcal{R})$ على الحقل $\mathcal{R}$، نعتبر الفضاء الشعاعي الجزئي $\mathcal{P}$ مجموعة التوابع الزوجية والفضاء الشعاعي الجزئي $\mathcal{I}$ مجموعة التوابع الفردية. أثبت أن $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = \mathcal{F}(\mathcal{R}, \mathcal{R})$.

الحل: لنبدأ في برهان أن $\mathcal{p} \cap \mathcal{i} = \{0_{\mathcal{F}(\mathcal{R},\mathcal{R})}\}$. ليكن $f \in \mathcal{p} \cap \mathcal{i}$، أي أن f تابع زوجي وفردي في آن واحد. ليكن $x \in \mathcal{R}$، بالتالي $f(-x) = f(x)$ (f زوجي) و $f(-x) = -f(x)$ (f فردي). بالتالي $f(x) = -f(x)$ وهذا يعطي $f(x) = 0$.

لنبرهن الآن أن $\mathcal{p} + \mathcal{i} = \mathcal{F}(\mathcal{R},\mathcal{R})$. ليكن $f \in \mathcal{F}(\mathcal{R},\mathcal{R})$. ما يجب برهانه هو أن f يمكن كتابته كمجموع تابعين أحدهما زوجي والآخر فردي. إذا كان $f = g + h$، حيث $g \in \mathcal{p}$ و $h \in \mathcal{i}$. من جهة أولى لدينا $f(x) = g(x) + h(x)$، ومن جهة أخرى لدينا $f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$. بالتالي وبجمع المعادلتين وطرحهما (حل جملة معادلتين بمجهولين) نحصل على:

$$g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \qquad \text{and} \qquad h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

بالتالي فإن $\mathcal{p}$ و $\mathcal{i}$ هما في مجموع مباشر ضمن $\mathcal{F}(\mathcal{R},\mathcal{R})$: $\mathcal{p} \oplus \mathcal{i} = \mathcal{F}(\mathcal{R},\mathcal{R})$.

فرضية 12: ليكن جملتي أشعة A و B من الفضاء الشعاعي E. بالتالي: $\mathrm{Vect}(A \cup B) = \mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B)$

ملاحظة 11: ليس بالضرورة أن يكون في الحالة العامة $\mathrm{Vect}(A \cap B) = \mathrm{Vect}(A) \cap \mathrm{Vect}(B)$. لنأخذ على سبيل المثال شعاعين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مختلفين ولكن مرتبطين خطياً. ليكن $A = \{\vec{a}\}$ و $B = \{\vec{b}\}$. لدينا: $\mathrm{Vect}(A) = \mathrm{Vect}(\vec{a}) = \mathrm{Vect}(\vec{b}) = \mathrm{Vect}(B)$. ولكن $A \cap B = \emptyset$، بالتالي: $\mathrm{Vect}(A \cap B) = \{\vec{0}\}$.

5. بعد فضاء شعاعي Dimension of a vector space

5-1. تعاريف وأمثلة Definitions and examples

تعريف 10: ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K. نسمي الفضاء E منتهي البعد إذا كان يقبل قاعدة لها عدد منته من العناصر.

مبرهنة 6 (بعد الفضاء الشعاعي): كافة قاعدات فضاء شعاعي جزئي E منتهي البعد لهن نفس عدد العناصر.

تعريف 11: بعد فضاء شعاعي منتهي البعد E، ويرمز له $\dim E$، هو بالتعريف عدد عناصر قاعدة لهذا الفضاء.

أمثلة 16:

- القاعدة القانونية في $\mathcal{R}^2$ $(1,0)$ و $(0, 1)$. بعد $\mathcal{R}^2$ هو إذن 2.
- بشكل عام الفضاء K^n بعده n، لأن قاعدته القانونية $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ تحوي n عنصر.
- $\dim \mathcal{R}_n[X] = n + 1$ لأن قاعدة $\mathcal{R}_n[X]$ هي $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$، والتي تحوي $n + 1$ عنصر.
- $\mathcal{R}[X]$ بعده غير منتهي.

- فضاء التطبيقات من $\mathcal{R}$ إلى $\mathcal{R}$: $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{R}, \mathcal{R})$ بعده غير منتهي.
- فضاء المتتاليات الحقيقية $\boldsymbol{\mathcal{S}} = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{R}, \mathcal{N})$ بعده غير منتهي.

فرضية 13: ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K له قاعدة تحوي n عنصر. عندئذ:

1. أي جملة مستقلة من E لديها n عنصر على الأكثر.
2. أي جملة مولدة ل E لديها n عنصر على الاقل.

نتيجة 1: ليكن E فضاء شعاعي يقبل قاعدة من n عنصر، عندئذ أي قاعدة من E لديها n عنصر.

مبرهنة 7: ليكن E فضاء شعاعي بعده n على الحقل K، و $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ جملة أشعة من E عددها n. يوجد تكافئ بين:

1. $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ قاعدة ل E.
2. $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ جملة أشعة مستقلة خطياً من E.
3. $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ جملة مولدة ل E.

تمرين 12: من أجل أي قيم ل $t \in \mathcal{R}$ تكون جملة الأشعة (v_1, v_2, v_3) التالية تشكل قاعدة ل $\mathcal{R}^3$؟

$$v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\t\end{pmatrix} \text{ و } v_2 = \begin{pmatrix}1\\3\\t\end{pmatrix} \text{ و } v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$$

الحل: لدينا جملة أشعة عددها 3 في الفضاء الشعاعي $\mathcal{R}^3$ ذو البعد 3. لذلك من أجل برهان أن (v_1, v_2, v_3) تشكل قاعدة، يكفي أن نبرهن أنها مستقلة خطياً أو أنها مولدة. عملياً من الأسهل أن نبرهن على جملة أشعة أنها مستقلة خطياً على أنها مولدة. ما هو الشرط الذي يجب تحقيقه من قبل t حتى تكون الجملة (v_1, v_2, v_3) مستقلة خطياً؟ ليكن $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathcal{R}$، بحيث $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$. وهذا يعطي النظام الخطي:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 + t\lambda_2 + t\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

وهذا يكافئ:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ (t-4)\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 \\ (t-4)\lambda_2 + (t-4)\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

من الواضح أنه من أجل $t \neq 4$ الحل الوحيد هو: $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$ بالتالي فإن الجملة (v_1, v_2, v_3) مستقلة خطياً. إذا كان $t = 4$، عندئذ $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 0, -1)$، بالتالي الجملة (v_1, v_2, v_3) مرتبطة خطياً.

2-5. بعد الفضاء الشعاعي الجزئي Dimension of a subspace

وجدنا سابقاً أن أي فضاء شعاعي جزئي من فضاء شعاعي على الحقل K هو فضاء شعاعي على الحقل K. السؤال الذي يطرح نفسه هنا هل بعد الفضاء الشعاعي الجزئي منتهي أم لا. لنأخذ على سبيل المثال الفضاء الشعاعي للتوابع $E = \mathcal{F}(\mathcal{R}, \mathcal{R})$ من $\mathcal{R}$ إلى $\mathcal{R}$:

- يحوي الفضاء المذكور على الفضاء الشعاعي الجزئي $F_1 = \mathcal{R}_n[X]$ للتوابع التي تمثل كثيرات الحدود من الدرجة أصغر أو يساوي n، والذي بعده منتهي $(n + 1)$.
- ويحوي أيضاً على الفضاء الشعاعي الجزئي $F_2 = \mathcal{R}[X]$ للتوابع التي تمثل كثيرات الحدود، والذي بعده غير منتهي.

مبرهنة 8: ليكن E فضاء شعاعي جزئي على الحقل K بعده منتهي، عندئذ:

1. بعد كل فضاء شعاعي جزئي F من E يكون منتهي.
2. $\dim E \leq \dim F$
3. $\dim F = \dim E \Leftrightarrow F = E$

مثال 17: ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K بعده 2، الفضاءات الشعاعية الجزئية ل E:

- إما ان بعدها يساوي الصفر: إنه الفضاء الشعاعي الجزئي $\{0\}$.
- أو أن يكون بعدها يساوي الواحد: إنها المستقيمات الشعاعية، بمعنى آخر الفضاءات الجزئية من الشكل $Ku = \mathrm{Vect}\{u\}$ المولدة من الشعاع غير الصفري u.
- أو أن يكون بعدها يساوي 2: إنه الفضاء الشعاعي كله E.

نتيجة 2: ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K. وليكن F و G فضاءين شعاعيين جزئيين من E. بفرض أن بعد F منتهي وأن $F \subset G$، عندئذ: $F = G \Leftrightarrow \dim F = \dim E$.

مثال 18: مستقيمان شعاعيان F و G إما أن يكونا متساويان أو أن تقاطعهما يساوي الشعاع الصفري.

تمرين 13: ليكن الفضاءين الشعاعيين الجزئيين من $\mathcal{R}^3$:

$$F = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^3 | 2x - 3y + z = 0\right\} \qquad G = \mathrm{Vect}(u, v),\ u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ and \ v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

هل $F = G$؟

الحل: من الواضح أن الشعاعين u و v غير مرتبطين، بالتالي $\dim G = 2$. كما أنه ينتمي إلى F. من أجل إيجاد بعد الفضاء F تجدر الإشارة إلى أنه محتوى تماماً في $\mathcal{R}^3$ (على سبيل المثال الشعاع $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ لا ينتمي إلى F)، بالتالي $\dim F < \dim \mathcal{R}^3 = 3$، إذن بعد F لا يمكن أن يكون إلا 2. أخيراً برهنا أن $G \subset F$ وأن $\dim G = \dim F$، وبما أن F يحوي G بالتالي $\dim F \geq \dim G = 2$، وهذا يؤدي إلى $G = F$.

مبرهنة 9: ليكن E فضاء شعاعي بعده منتهي وأن F و G فضاءين جزئيين من E. عندئذ لدينا:

$$\dim (F + G) = \dim F + \dim G = \dim (F \cap G)$$

نتيجة 3: إذا كان $E = F \oplus G$ فإن: $\dim E = \dim F + \dim G$

نتيجة 4: كل فضاء شعاعي جزئي F من قضاء شعاعي E بعده منتهي يقبل فضاء جزئي متتم له في E.

نتيجة 5: ليكن F و G فضاءين شعاعيين جزئيين من فضاء شعاعي E بعده منتهي. عندئذ F و G متتامان في E إذا وفقط إذا تحقق على الأقل اثنان من أصل ثلاثة من:

1. $\dim F + \dim G = \dim E$
2. $F \cap G = \{0_E\}$
3. $F + G = E$

تمرين 14: ليكن $H = \{(x, x, x) \in \mathcal{R}^3 | x \in \mathcal{R}\}$ و $G = \{(0, y, z) \in \mathcal{R}^3 | y, z \in \mathcal{R}\}$. أثبت أن F و G فضاءين شعاعين جزئيين من $\mathcal{R}^3$. حدد قاعدتهما وبعديهما. هل الفضاءان متتامان؟

الحل: من السهل ملاحظة أن الشعاع $(0, 0, 0)$ ينتمي إلى كل من F و G بالتالي كل منهما ليس بالخالية.

ليكن الشعاعين $(x, x, x), (y, y, y) \in F$ و $\lambda, \mu \in \mathcal{R}$. عندئذ:

$$\lambda(x, x, x) + \mu(y, y, y) = (\lambda x+ \mu y, \lambda x+ \mu y, \lambda x+ \mu y) \in F$$

إذن F فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{R}^3$. ليكن الشعاعين $(0, y, z), (0, y', z') \in G$ و $\lambda, \mu \in \mathcal{R}$. عندئذ:

$$\lambda(0, y, z) + \mu(0, y', z') = (0, \lambda y+ \mu y', \lambda z+ \mu z') \in G$$

إذن G فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{R}^3$. نجد أيضاً أن:

$$F = \{x(1, 1, 1) | x \in \mathcal{R}\} = \mathrm{Vect}(1, 1, 1),$$
$$G = \{y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) | x, y \in \mathcal{R}\} = \mathrm{Vect}\,((0, 1, 0), (0, 0, 1))$$

بما أن الشعاع $(1, 1, 1)$ مختلف عن الصفر بالتالي مستقل خطياً بالتالي يمثل قاعدة للفضاء الجزئي F، وكذلك الشعاعين $(0, 1, 0)$ و $(0, 0, 1)$ مستقلين أيضاً (يمكن البرهان على ذلك بسهولة)، بالتالي يمثلان قاعدة للفضاء الجزئي G. نستنتج مما سبق أن $\dim F = 1$ و $\dim G = 2$. أخيراً ليكن الشعاع $(x, y, z) \in F \cap G$، بالتالي $x = y$

$z =$ لانتمائه إلى F و $x = 0$ لانتمائه إلى G، أي أن: $F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$، مما يعني أن F و G متتامان في $\mathcal{R}^3$.

3-5. رتبة جملة أشعة Rank of a set of vectors

تعريف 12: ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K ولتكن $\{v_1, \dots v_p\}$ جملة منتهية من الأشعة في E، رتبة الجملة $\{v_1, \dots v_p\}$، هو بعد الفضاء الشعاعي الجزئي $Vect(v_1, \dots v_p)$ الذي تولده الأشعة $v_1, \dots v_p$. بمعنى آخر:

$$rg(v_1, \dots v_p) = \dim Vect(v_1, \dots v_p)$$

فرضية 14: ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K ولتكن $\{v_1, \dots v_p\}$ جملة مؤلفة من p شعاع من E. عندئذ:

1. $0 \le rg(v_1, \dots v_p) \le p$: رتبة الجملة أصغر أو يساوي عدد عناصرها.
2. إذا كان بعد E منتهي فإن $rg(v_1, \dots v_p) \le \dim E$: رتبة الجملة أصغر أو يساوي بعد الفضاء E.

ملاحظة 12:

- رتبة الجملة تساوي 0 إذا وفقط إذا كانت جميع أشعة الجملة هي الشعاع الصفري.
- رتبة الجملة $\{v_1, \dots v_p\}$ تساوي p إذا وفقط إذا كانت الجملة $\{v_1, \dots v_p\}$ مستقلة خطياً.

مثال 19: ماهي رتبة جملة الأشعة التالية في الفضاء $\mathcal{R}^3$:

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m \end{pmatrix} \text{ و } v_2 = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ m \end{pmatrix} \text{ و } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m \end{pmatrix}$$

من أجل $m = 1$ نحصل على $v_1 = v_2 = v_3$ بالتالي فإن رتبة الجملة $rg(v_1, v_2, v_3) = 1$.

من أجل $m = -1/2$ يكون $v_1 = -v_2 - v_3$ بالتالي الرتبة إما 1 (الشعاع v_1 غير صفري) أو 2. لنرى إذا كانت الجملة $\{v_2, v_3\}$ مستقلة: $\alpha v_2 + \beta v_3 = 0 \Leftarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}\alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \frac{1}{2}\beta = 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta = 0 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}\alpha + \beta = 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta = 0 \end{cases} \Leftarrow$ $\alpha = \beta = 0$. بالتالي فإن رتبة الجملة $rg(v_1, v_2, v_3) = 2$.

من أجل قيم $m \ne \{1, -1/2\}$ لنرى فيما إذا كانت الجملة $\{v_1, v_2, v_3\}$ مستقلة أم لا عن طريق إيجاد حلول المعادلة: $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$

$$\begin{cases} \alpha + m\beta + m\gamma = 0 \\ m\alpha + \beta + m\gamma = 0 \\ m\alpha + m\beta + m\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + m\beta + m\gamma = 0 \\ m\alpha + \beta + m\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

بطرح المعادلة الأولى من الثالثة نحصل على $0 = (m-1)\beta + (m-1)\gamma \Leftarrow \beta + \gamma = 0$ وبطرحها من المعادلة الثالثة نحصل على $\alpha = 0$. وبنفس الطريقة نطرح المعادلة الثانية من الثالثة نحصل على: $0 = (m-1)\alpha + (m-1)\gamma \Leftarrow$ $\alpha + \gamma = 0$ نطرحها من جديد من المعادلة الثالثة نحصل على $\beta = 0$. بالتالي $\gamma = 0$. أي أن الجملة مستقلة وبالتالي فإن: $rg(v_1, v_2, v_3) = 3$.

تمرين 15: ما هي رتبة جملة الأشعة $\{v_1, v_2, v_3\}$ التالية في الفضاء $\mathcal{R}^4$:

$$v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ و } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ و } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

الحل: بما أنها أشعة من الفضاء الشعاعي $\mathcal{R}^4$ بالتالي $rg(v_1, v_2, v_3) \leq 4$. وبما أنه لا يوجد سوى 3 أشعة فإن $rg(v_1, v_2, v_3) \leq 3$. الشعاع الأول مختلف عن الشعاع الصفري بالتالي $rg(v_1, v_2, v_3) \geq 1$. من الواضح أن الشعاعين v_1 و v_2 مستقلان خطياً بالتالي $rg(v_1, v_2, v_3) \geq rg(v_1, v_2) = 2$، بقي علينا أن نحدد فيما إذا كانت الرتبة تساوي 2 أو 3. من أجل ذلك نبحث فيما إذا كانت الأشعة $\{v_1, v_2, v_3\}$ مرتبطة أو مستقلة خطياً عن طريق حل الجملة الخطية $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$. نجد أن $v_1 - v_2 + v_3 = 0$. والجملة مرتبطة. هكذا فإن $Vect(v_1, v_2, v_3) = Vect(v_1, v_2)$، بالتالي $rg(v_1, v_2, v_3) = \dim Vect(v_1, v_2, v_3) = 2$.

6- التطبيقات الخطية Linear applications

6-1. تعاريف وأمثلة Definitions and examples

تعريف 13: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K. نسمي التطبيق f من E إلى F تطبيق خطي إذا تحقق الشرطين التاليين:

1. $f(u + v)\ f(u) + f(v)$ من أجل أي عنصرين $u, v \in E$ E.
2. $f(\lambda.u) = \lambda.f(u)$ من أجل أي عنصر $u \in E$ و $\lambda \in K$.

نرمز لمجموعة التطبيقات الخطية من E إلى F ب: $\mathcal{L}(E, F)$.

ملاحظة 13: تطبيق خطي من E إلى F يسمى أيضاً مورفيزم morphism أو أومومورفيزم homomorphism فراغ شعاعي. كما أن تطبيق خطي من E إلى E يسمى أيضاً أندومورفيزم endomorphism، نرمز لمجموعة ال أندومورفيزم في E بالرمز $\mathcal{L}(E)$.

ملاحظة 14: نسمي التطبيق الخطي f من E إلى K بالشكل الخطي.

أمثلة 20:

- التطبيق $f: \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^2$ المعرف كما يلي: $f(x, y, z) = (-2x, y+3z)$ خطي. في الحقيقة، ليكن العنصران من $\mathcal{R}^3$: $u = (x, y, z)$ و $v = (x', y', z')$ و λ من $\mathcal{R}$

$$f(u + v) = f(x+x', y+y', z=z') = (-2(x+x'), y+y'+3(z+z'))$$
$$= (-2x, y+3z) + (-2x', y'+3z') = f(u) + f(v)$$
$$f(\lambda.u) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (-2\lambda x, \lambda y+3\lambda z) = \lambda.(-2x, y+3z) = \lambda.f(u)$$

- التطبيق $f: \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}$ المعرف كما يلي: $f(x, y, z) = 4x-5y+3z$ هو شكل خطي. في الحقيقة، ليكن العنصران من $\mathcal{R}^3$: $u = (x, y, z)$ و $v = (x', y', z')$ و λ من $\mathcal{R}$

$$f(u + v) = f(x+x', y+y', z+z') = 4(x+x')-5(y+y')+3(z+z') = 4x-5y+3z + 4x'-5y'+3z'$$
$$= f(u) + f(v)$$
$$f(\lambda.u) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = 4\lambda x-5\lambda y+3\lambda z = \lambda.(4x-5y+3z) = \lambda.f(u)$$

- التطبيق $f: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ المعرف كما يلي: $f(x) = 2x + 1$ ليس بخطي لأنه على سبيل المثال:

$f(2) = 3$ و $f(1) = 2$ و $f(3) = 4$، بينما $f(1+2) = f(3) = 4 \neq 5 = f(1) + f(2)$.

- التطبيق الصفري، ويرمز له $\mathbf{0}_{\mathcal{L}(E, F)}$: $f: E \to F, f(u) = 0_F$ من أجل $u \in E$ هو تطبيق خطي.
- التطبيق الواحدي، ويرمز له id_E: $f: E \to E, f(u) = u$ من أجل $u \in E$ هو تطبيق خطي (أندومورفيزم).
- ليكن $E = \mathcal{R}[X]$ الفضاء الشعاعي لكثيرات الحدود، $Q \in \mathcal{R}[X]$. التطبيق $f: \mathcal{R}[X] \to \mathcal{R}[X]$ المعرف ب: $f(P(X)) = P(X).Q(X)$ هو أندومورفيزم على $\mathcal{R}[X]$.
- التطبيق $f: \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ المعرف كما يلي: $f(x, y) = x + y + 1$ ليس بخطي. لماذا؟
- التطبيق $f: \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ المعرف كما يلي: $f(x, y) = x^2 + y^2$ ليس بخطي. لماذا؟

فرضية 15: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K. إذا كان f تطبيق خطي من E إلى F، عندئذ:

1. $f(0_E) = 0_F$
2. $f(-u) -f(u)$، من أجل أي عنصر $u \in E$

فرضية 16: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K. إذا كان f تطبيق من E إلى F. التطبيق f خطي إذا وفقط إذا ومن أجل أي عنصرين $u, v \in E$ ومن أجل السلميين $\lambda, \mu \in K$ لدينا:

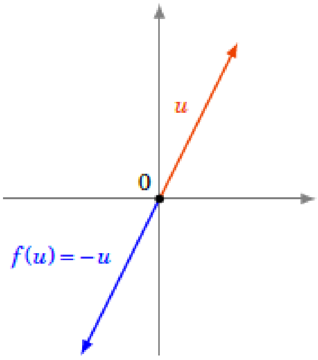
$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

مثال 21: ليكن $E = \mathcal{R}_n[X]$ الفضاء الشعاعي لكثيرات الحدود من الدرجة أصغر أو يساوي n على الحقل $\mathcal{R}$.
وليكن $E = \mathcal{R}_{n+1}[X]$ والتطبيق $f: E \to F$ المعرف كما يلي: $f(P(X)) = X.P(X)$، بمعنى آخر إذا كان $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$، فإن $f(P(X)) = a_n X^{n+1} + \cdots + a_1 X^2 + a_0 X$.

هذا التطبيق خطي لأن: $f(\lambda P(X) + \mu Q(X)) = \lambda XP(X) + \mu XQ(X) = \lambda f(P(X)) + \mu f(Q(X))$.

أمثلة هندسية

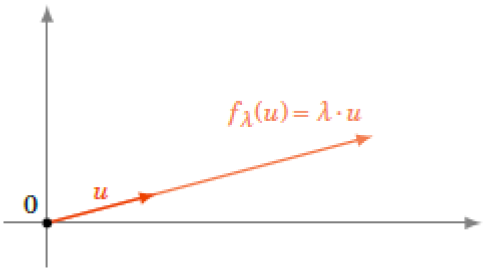
التناظر المركزي



ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K. نعرف التطبيق $f: E \to F$ المعرف كما يلي: $f(u) = -u$. f خطي ويسمى التناظر المركزي بالنسبة للمبدأ 0_E.

التحاكي

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K وليكن $\lambda \in K$. نعرف التطبيق $f_\lambda: E \to E$ ب: $f_\lambda(u) = \lambda u$.



f_λ تطبيق خطي. نسمي f_λ تحاكي نسبته λ.

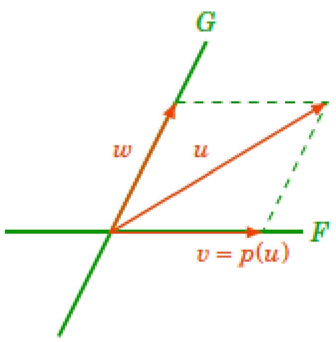
حالات خاصة:

- $\lambda = 1$، f_λ التطبيق الواحدي
- $\lambda = 0$، f_λ التطبيق الصفري
- $\lambda = -1$، f_λ التناظر المركزي

البرهان على أن f_λ تطبيق خطي:

$$f_\lambda(\alpha u + \beta v) = \lambda(\alpha u + \beta v) = \alpha(\lambda u) + \beta(\lambda v) = \alpha\, f_\lambda(u) + \beta\, f_\lambda(v)$$

الاسقاط



ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K وليكن F و G فضاءين شعاعيين جزئيين متتامين في E، بمعنى أن $E = F \oplus G$. كل شعاع u من E يمكن كتابته وبشكل وحيد $u = v + w$ حيث $v \in F$ و $w \in G$. الاسقاط على F وبشكل موازٍ ل G هو التطبيق $p: E \to E$ والمعرف ب $p(u) = v$.

الاسقاط تطبيق خطي: بالحقيقة بفرض $u, u' \in E$ و $\lambda, \mu \in K$. لنفصل u و u' باستخدام $E = F \oplus G$: $u = v + w$ و $u' = v' + w'$ مع $v, v' \in F$ و $w, w' \in G$.

$$\lambda u + \mu u' = \lambda(v + w) + \mu(v' + w') = (\lambda v + \mu v') + (\lambda w + \mu w')$$

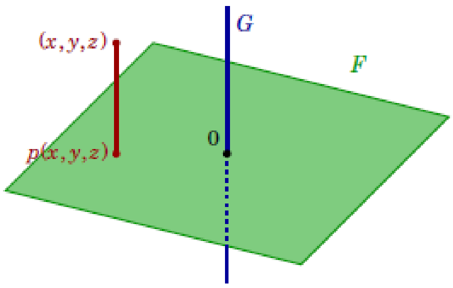
ISSN: 2617-989X

بما أن F و G فضاءين شعاعيين جزئيين من E، بالتالي $\lambda v + \mu v' \in F$ و $\lambda w + \mu w' \in G$، وهكذا:

$$p(\lambda u + \mu u') = \lambda v + \mu v' = \lambda p(u) + \mu p(u')$$

مثال 22: وجدنا سابقاً في التمرين 10 أن الفضاءين الشعاعيين الجزئيين F و G من $\mathcal{R}^3$ هما فضاءان متتامان في $\mathcal{R}^3$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 | x - y - z = 0\} \text{ and}$$
$$G = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 | y = z = 0\}$$



ووجدنا أن الفصل إلى مركبات يكتب على الشكل التالي: $(x, y, z) = (y+z, y, z)+(x-y-z, 0, 0)$.

إذا كان p المسقط على F الموازي ل G، بالتالي لدينا:

$$p(x, y, z) = (y+z, y, z)$$

مثال 23: وجدنا سابقاً في التمرين 11 أن الفضاءين الشعاعيين الجزئيين $\mathcal{p}$ التوابع الزوجية و $\mathcal{i}$ التوابع الفردية من الفضاء الشعاعي $\mathcal{F}(\mathcal{R}, \mathcal{R})$ هما فضاءان متتامان في $\mathcal{F}(\mathcal{R}, \mathcal{R})$.

ليكن ب p المسقط على $\mathcal{p}$ ومواز ل $\mathcal{i}$. إذا كان f عنصر من $\mathcal{F}(\mathcal{R}, \mathcal{R})$، لدينا $p(f) = g$، حيث $g: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ معرف كما يلي:

$$g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}.$$

6-2. الصورة والصورة العكسية لتطبيق خطي Image and inverse image of linear application

الصورة المباشرة والعكسية لفضاء شعاعي جزئي

فرضية 17: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K، وليكن $f \in \mathcal{L}(E, F)$، ليكن أيضاً G فضاء شعاعي جزئي من E و H فضاء شعاعي جزئي من F. عندئذ:

1. $f(G)$ فضاء شعاعي جزئي من F
2. $f^{-1}(H)$ فضاء شعاعي جزئي من E

صورة ونواة تطبيق خطي

تعريف 14: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K، وليكن $f \in \mathcal{L}(E, F)$

1. صورة التطبيق الخطي $\operatorname{Im} f$ والمعرفة ب $\operatorname{Im} f = f(E)$. إنها فضاء شعاعي جزئي من F
2. نواة التطبيق الخطي $\operatorname{Ker} f$ والمعرفة ب $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(0_F)$. إنها فضاء شعاعي جزئي من E

مبرهنة 10: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K، وليكن $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

ISSN: 2617-989X

1. التطبيق f غامر إذا وفقط إذا $\mathrm{Im}\, f = F$.

2. التطبيق f غامر إذا وفقط إذا $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$.

نتيجة 6: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K، وليكن $f \in \mathcal{L}(E, F)$. عندئذ صورة التطبيق الخطي Im f هي فضاء شعاعي جزئي من F، ونواة التطبيق الخطي Ker f هي فضاء شعاعي جزئي من E.

مثال 24: لنأخذ التطبيق الخطي السابق $f: \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^2$ المعرف كما يلي: $f(x, y, z) = (-2x, y+3z)$. ولنحسب نواة وصورة f.

الحل: نواة التطبيق f، ليكن $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow (-2x, y+3z) = (0, 0)$. بالتالي لدينا الجملة التالية:

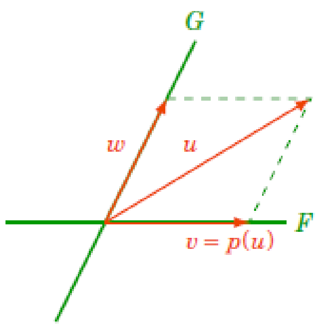
$$(x, y, z) = (0, -3z, z), z \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}.$$

إذن $\mathrm{Ker}\, f = \{(0, -3z, z) \mid z \in \mathcal{R}\}$. أو بمعنى آخر $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}\,(0, -23, 1)$. إنه مستقيم فراغي.

لنحسب الآن صورة التطبيق f: $(x', y) = f(x, y, z) \Leftrightarrow (-2x, y+3z) = (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = x' \\ y + 3z = y' \end{cases}$.
يمكننا أن نأخذ على سبيل المثال $x = -x'/2$ و $y' = y$ و $z = 0$. بالنتيجة من أجل أي عنصر $(x', y') \in \mathcal{R}^2$، لدينا $f(-x'/2, y', 0) = (x', y')$. وهذا يعني أن $\mathrm{Im}\, f = \mathcal{R}^2$، بالتالي التطبيق غامر.

تمرين 16: ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K، وليكن F و G فضاءين شعاعيين جزئيين متتامين في E، أي: $E = F \oplus G$. ليكن p التطبيق الخطي الاسقاط على F بشكل موازٍ ل G. أوجد نواة وصورة p.

الحل: إن أي شعاع u من E يكتب وبطريقة وحيدة $u = v + w$ حيث $v \in F$ و $w \in G$ ولدينا بالتعريف $p(u) = v$.



نواة التطبيق p: هي مجموعة الأشعة u من E بحيث $v = 0$، بالتالي $\mathrm{Ker}\, p = G$.

صورة التطبيق p: نعرف أن $\mathrm{Im}\, p \subset F$. وبالعكس إذا كان $u \in F$ عندئذ $p(u) = v$، بالتالي $F \subset \mathrm{Im}\, p$.

بالنتيجة $\mathrm{Ker}\, p = G$ و $\mathrm{Im}\, p = F$.

مثال 25: $n \geq 1$، ليكن التطبيق الخطي $f: \mathcal{R}_n[X] \to \mathcal{R}_{n+1}[X]$ والمعرف كما يلي: $f(P(X)) = X.P(X)$، أوجد نواة وصورة التطبيق f.

نواة التطبيق f: ليكن $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathcal{R}_n\{X\}$، بحيث $f(P(X)) = X.P(X) = 0$. أي: $a_n X^{n+1} + \cdots + a_1 X^2 + a_0 X = 0$ وبالتالي: $a_i = 0,\ i \in \{0, \ldots, n\}$ أي أن $P(X) = 0$. والنواة إذن $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$.

أما صورة التطبيق $\mathrm{Im}\ f$ فهي مجموعة كثيرات الحدود من الفضاء $\mathcal{R}_{n+1}[X]$ بدون حد ثابت، بالتالي: $\mathrm{Im}\ f = \mathrm{Vect}(X, X^2, \ldots, X^{n+1})$. مما سبق نلاحظ أن التطبيق f متباين لكن ليس غامر.

صورة جملة أشعة

فرضية 18: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K، وليكن $f \in \mathcal{L}(E, F)$. ولتكن $\{u_1, \ldots u_n\}$ جملة من الأشعة في E ($n \in \mathcal{N}$):

1. إذا كانت الجملة $\{u_1, \ldots u_n\}$ مرتبطة خطياً، فإن $\{f(u_1), \ldots f(u_n)\}$ مرتبطة أيضاً.
2. إذا كانت الجملة $\{f(u_1), \ldots f(u_n)\}$ مستقلة خطياً، فإن $\{u_1, \ldots u_n\}$ مستقلة أيضاً.
3. إذا كانت الجملة $\{u_1, \ldots u_n\}$ مستقلة و f متباين، فإن $\{f(u_1), \ldots f(u_n)\}$ مستقلة أيضاً.
4. $f(\mathrm{Vect}(u_1, \ldots u_n)) = \mathrm{Vect}(f(u_1), \ldots f(u_n))$. وبشكل خاص إذا كانت الجملة $\{u_1, \ldots u_n\}$ مولدة ل E، عندها الجملة $\{f(u_1), \ldots f(u_n)\}$ تكون مولدة ل $\mathrm{Im}\ f$.
5. إذا كانت الجملة $\{u_1, \ldots u_n\}$ قاعدة في E والتطبيق f إيزومورفيزم، عندها تكون الجملة $f(u_1), \ldots f(u_n)$ قاعدة في F.

ملاحظة 15: إذا لم يكن التطبيق f متباين، الصورة بواسطة f لجملة مستقلة ليس من الضروري أن تكون مستقلة. على سبيل المثال ليكن u شعاع من نواة التطبيق مختلف عن الصفر، بالتالي الجملة $\{u\}$ مستقلة ولكن $f(u) = \{0_F\}$ مرتبطة.

فرضية 19: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K، وليكن $f \in \mathcal{L}(E, F)$. لتكن $\{e_1, \ldots e_n\}$ قاعدة في E و $\{f_1, \ldots f_n\}$ جملة أشعة في F. عندئذ يوجد تطبيق خطي وحيد في $f \in \mathcal{L}(E, F)$ بحيث: $f(e_i) = f_i$ من أجل كل $i \in \{1, \ldots, n\}$.

3-6. الفضاء الشعاعي $\mathcal{L}(E, F)$: Space vector $\mathcal{L}(E, F)$

ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K، وليكن $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ و $\lambda \in K$. نعرف $f + g$ كما يلي:

$$f + g: E \to F$$
$$x \mapsto f(x) + f(y)$$

كما نعرف λf كما يلي:

$$\lambda f: E \to F$$
$$x \mapsto \lambda f(x)$$

فرضية 20: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K. المجموعة $\mathcal{L}(E, F)$ مزودة بقانوني الجمع والضرب الخارجي المعرفين سابقاً تشكل فضاء شعاعي على الحقل K. الشعاع الصفري ل $\mathcal{L}(E, F)$ هو التطبيق الصفري $0_{\mathcal{L}(E, F)}$.

تركيب تطبيقين خطيين

فرضية 21: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K، f تطبيق خطي من E إلى F و g تطبيق خطي من F إلى G. بالتالي $g \circ f$ هو تطبيق خطي من E إلى G.

فرضية 22: ليكن E و F و G ثلاث فضاءات شعاعية على الحقل K، f و f_1 و f_2 تطبيقات خطية من E إلى F و g و g_1 و g_2 تطبيقات خطية من F إلى G. عندئذ:

1. $g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$
2. $(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$

تعريف 15: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K. تطبيق خطي من E إلى F تقابل يسمى إيزومورفيزم. كما نسمي أوتومورفيزم على E كل أندومورفيزم تقابل. نرمز لمجموعة الأوتومورفيزمات في E ب $GL(E)$. نقول عن E و F متشاكلتان isomorph إذا وجد إيزومورفيزم من E إلى F.

فرضية 23: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K. إذا كان f إيزومورفيزم من E إلى F، بالتالي f^{-1} يكون إيزومورفيزم من F إلى E.

مثال 26: ليكن التطبيق $f: \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$ المعرف كما يلي: $f(x, y) = (2x+3y, x+y)$. من السهل أن نبرهن أن f خطي. لبرهان أن f تقابل يمكن حساب نواته وصورته. لكن هنا سنحسب التطبيق العكسي مباشرة: نبحث عن حل $f(x, y) = (x', y')$، وهذا يوافق حل المعادلة $(2x+3y, x+y) = (x', y')$ وهي جملة خطية معادلتين بمجهولين. نجد بعد الحل أن $(x, y) = (-x'+3y', x'-2y')$. بالتالي $f^{-1}(x', y') = (-x'+3y', x'-2y')$. يمكننا البرهان بسهولة أن f^{-1} هو التطبيق العكسي ل f وأن f^{-1} هو تطبيق خطي.

ملاحظة 16: بشكل خاص، $\mathcal{L}(E)$ فضاء شعاعي جزئي من الفضاء $\mathcal{L}(E, F)$.

ملاحظة 17: بشكل خاص فإن تركيب أندومورفيزمين من E هو أندومورفيزم من E. بمعنى آخر، $\circ$ يمثل قانون تشكيل داخلي على $\mathcal{L}(E)$.

نتيجة 7: تشكل البنية $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ حلقة غير تبديلية وغير تامة بشكل عام، بالإضافة إلا أن $1_{\mathcal{L}(E)} = id_E$.

ملاحظة 18: ليكن f و g أندومورفيزمين من نفس الفضاء الشعاعي E، تركيب التطبيقين $(f \circ g)$ سيرمز له أحياناً fg.

ملاحظة 19: ليكن E فضاء شعاعي جزئي على الحقل K. يمكننا من اجل أي أندومورفيزم f ومن أجل اي عدد طبيعي أو صفر تعريف الأندومورفيزم f^k كما يلي:

$$f^0 = id_E; \qquad \text{if } p \geq 1,\ f^k = f \circ f \circ \ldots \circ f \qquad (\text{k مرة})$$

فرضية 24: ليكن $f, g \in \mathcal{L}(E)$ بحيث يتبادلان، عندئذ:

1. $(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}$
2. $f^n - g^n = (f-g) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-1-k}$

4-6. التطبيقات الخطية في فضاء شعاعي منتهي البعد Linear applications in a finite dimensional vector spaces

مبرهنة 11:

1. ليكن E و F فضاءين شعاعيين متشاكلين، إذا كان بعد E منتهي، فإن بعد F منتهي أيضاً ولدينا: $\dim E = \dim F$.

2. فضاءان شعاعيان من نفس البعد متشاكلان.

مثال 27: الفضاءان الشعاعيان $\mathcal{R}^2$ و $\mathcal{C}$ على الحقل $\mathcal{R}$ متشاكلان.

ملاحظة 20: نتيجة المبرهنة السابقة لها أهمية كبيرة حيث أن كافة الفضاءات الشعاعية التي بعدها n تشاكل الفضاء الشعاعي K^n. بالتالي يمكن استبدال دراسة أي فضاء شعاعي بعده n بالفضاء K^n.

رتبة تطبيق خطي

تعريف 16: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K، وليكن $f \in \mathcal{L}(E, F)$. نسمي رتبة التطبيق الخطي، ونرمز لها بالرمز $\mathrm{rg}\, f$، بعد صورته أي أن $\mathrm{rg}\, f = \dim \mathrm{Im}\, f$.

ملاحظة 21: لتكن $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ قاعدة في E. عندئذ $\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\}$.

مبرهنة 12 (الرتبة): ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K، وليكن $f \in \mathcal{L}(E, F)$. عندئذ:

$$\dim E = \mathrm{rg}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f$$

فرضية 25: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K، وليكن $f \in \mathcal{L}(E, F)$. عندئذ:

1. يكون التطبيق f غامر إذا وفقط إذا $\mathrm{rg}\, f = \dim F$
2. يكون التطبيق f متباين إذا وفقط إذا $\mathrm{rg}\, f = \dim E$

مثال 28: ليكن التطبيق $f: \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ معرف كما يلي: $f(z) = z + 2\bar{z}$. برهن أن f أندومورفيزم للفضاء الشعاعي $\mathcal{C}$ على الحقل $\mathcal{R}$. هل f أندومورفيزم للفضاء الشعاعي $\mathcal{C}$ على الحقل $\mathcal{C}$؟ أوجد نواة وصورة التطبيق الخطي.

الحل: ليكن $z, z' \in \mathcal{C}$ و $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$:

$$f(\alpha z + \beta z') = (\alpha z + \beta z') + 2\overline{(\alpha z + \beta z')} = \alpha(z + 2\bar{z}) + \beta(z' + 2\bar{z'}) = \alpha f(z) + \beta f(z')$$

بالتالي f أندومورفيزم للفضاء الشعاعي $\mathcal{C}$ على الحقل $\mathcal{R}$. من الملاحظ أن $f(2i) = 2i - 4i = -2i$، و $f(2) = 6$. بما أن f لا يحقق $f(\alpha u) = \alpha f(u)$ ($\alpha = i$ و $u = 2$)، بالتالي f ليس أندومورفيزم للفضاء الشعاعي $\mathcal{C}$ على الحقل $\mathcal{C}$. ليكن $z \neq 0$ عدد عقدي ولنكتبه بالشكل الأسي $z = r.e^{i\theta}$ وليكن $z \in \mathrm{Ker}\ f \Leftrightarrow z + 2\bar{z} = 0 \Leftrightarrow$ $e^{i\theta} + 2e^{-i\theta} = 0 \Leftrightarrow e^{2i\theta} = -2$، لا يوجد لهذه المعادلة حل بالتالي: $\mathrm{Ker}\ f = \{0\}$. وحسب مبرهنة الرتبة فإن $\mathrm{Im}\ f = \mathcal{C}$. والتطبيق متباين وغامر وبالتالي تقابل.

فرضية 26: ليكن E و F فضاءين شعاعيين من نفس البعد المنتهي على الحقل K، وليكن $f \in \mathcal{L}(E, F)$. عندئذ الاقتراحات التالية متكافئة:

1. f تقابل
2. f متباين
3. f غامر

تمرين 17: برهن أن التطبيق $f: \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^3$ المعرف بالعلاقة التالية: $f(x, y, x) = (x+y, -x+y, z)$ أوتومورفيزم على $\mathcal{R}^3$.

الحل: من السهل البرهان على أنه خطي. لنوجد نواة f، ليكن $u = (x, y, z) \in \mathrm{Ker}\ f$ بالتالي $f(u) = 0$، أي أن $\begin{cases} x + y = 0 \\ -x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ بجمع المعادلتين الأولى وطرحهما ينتج أن $x = y = 0$. بالتالي $\mathrm{Ker}\ f = \{0\}$. والتطبيق متباين وبالتاي غامر وتطابق.

فرضية 27: ليكن E و F فضاءين شعاعيين من نفس البعد المنتهي على الحقل K، وليكن $f \in \mathcal{L}(E, F)$. عندئذ f تقابل إذا وفقط إذا وجد $g \in \mathcal{L}(E, F)$ بحيث $f \circ g = id_E$ أو $g \circ f = id_E$. في هذه الحالة $g = f^{-1}$.

ملاحظة 22: في الأبعاد المنتهية يكفي أن نبرهن العكسية من اليمين أو من اليسار.

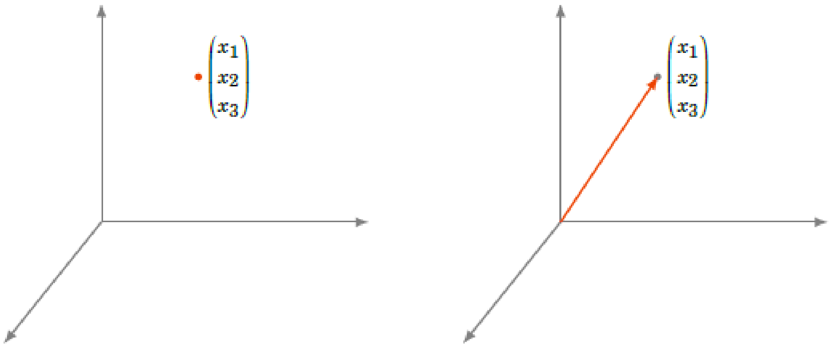
مبرهنة 13(بعد الفضاء ($\mathcal{L}$(E, F)): ليكن E و F فضاءين شعاعيين بعديهما منتهي على الحقل K. عندئذ بعد الفضاء $\mathcal{L}(E, F)$ منهي أيضاً ويساوي: $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$

7- الفضاء الشعاعي $\mathcal{R}^n$: Vector space $\mathcal{R}^n$

7-1. الأشعة في $\mathcal{R}^n$: Vectors in $\mathcal{R}^n$

العمليات على الأشعة

- مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathcal{R}$ (التي تمثل عادة بخط مستقيم)، هي فضاء شعاعي بعده واحد.
- المستوي الممثل بالثنائيات $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ من الأعداد الحقيقية. نرمز له ب $\mathcal{R}^2$، هو فضاء شعاعي بعده اثنان.
- الفراغ الممثل بالثلاثية $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ من الأعداد الحقيقية. نرمز له ب $\mathcal{R}^3$، هو فضاء شعاعي بعده 3. يمكن رؤية $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ على أنها نقطة في الفراغ أو أنها شعاع.

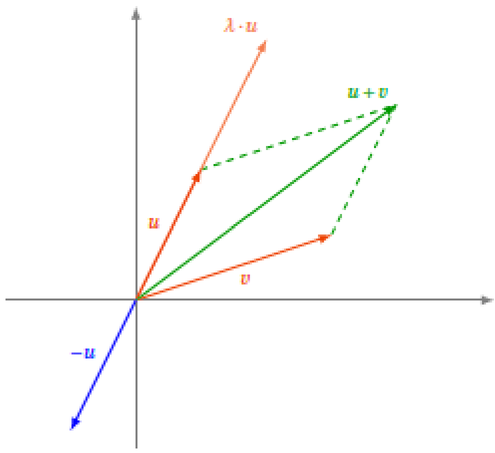


يمكن تعميم المفاهيم السابقة معتبرين فضاء بعده $n \in \mathcal{N}$، عناصر الفضاء من الشكل $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$، حيث $x_1, \ldots, x_n$ أعداد حقيقية. ليكن الشعاعين $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ و $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ من $\mathcal{R}^n$، والسلمي $\lambda \in \mathcal{R}$.

تعريف 17:

- جمع شعاعين: $u + v = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{pmatrix}$
- ضرب شعاع بسلمي: $\lambda . u = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix}$
- الشعاع الصفري في $\mathcal{R}^n$ هو: $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

ISSN: 2617-989X



- نظير العنصر $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ هو العنصر $-u = \begin{pmatrix} -u_1 \\ \vdots \\ -u_n \end{pmatrix}$

مثال 29: الفضاء $\mathcal{R}^2$ و $\lambda = 2$

مبرهنة 14: يشكل $\mathcal{R}^n$ بعمليتي الجمع والضرب الخارجي المعرفتان سابقاً فضاء شعاعي على الحقل $\mathcal{R}$.

الجداء السلمي

تعريف 18: ليكن الشعاعين $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ و $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ من $\mathcal{R}^n$. نعرف الجداء السلمي ل u و v، ونرمز له بالرمز $\langle u|v \rangle$ كما يلي: $\langle u|v \rangle = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$.

ملاحظة 23: الجداء السلمي $\langle u|v \rangle$ عدد حقيقي، كما أن الجداء السلمي لشعاع مع نفسه $\langle u|u \rangle = u_1^2 + \cdots + u_n^2$ هو مربع طويلة الشعاع، ونرمز لها بالرمز $\langle u|u \rangle = \|u\|^2$.

مثال 29: ليكن لدينا الشعاعين $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ و $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. أوجد طويلة كل منهما ثم أوجد الجداء السلمي لهما.

$$\|u\|^2 = 1^2 + (-1)^2 + 1^2 = 3 \text{ و } \|v\|^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$$

$$\langle u|v \rangle = 1(1) + (-1)1 + 1(2) = 2$$

7-2. التطبيقات الخطية Linear applications

تعريف 19: نقول عن التطبيق $f: \mathcal{R}^p \to \mathcal{R}^n$ المعرف ب $f(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$ أنه خطي إذا كان:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p \\ \vdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p \end{cases}$$

أمثلة 30:

- التطبيق الخطي $f: \mathcal{R}^4 \to \mathcal{R}^3$ المعرف كما يلي:

$$\begin{cases} y_1 = -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 7x_4 \\ y_2 = \quad 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 \\ y_1 = 7x_1 - 3x_2 + 9x_3 \end{cases}$$

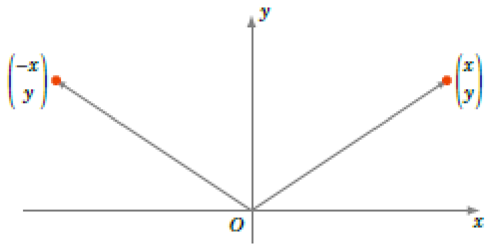
- التطبيق الخطي الواحدي $f: \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ المعرف كما يلي: $id(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n)$
- التطبيق الخطي الصفري $: \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ المعرف كما يلي: $0(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$

3-7. أمثلة عن التطبيقات الخطية Examples of linear applications

انعكاس بالنسبة للمحور Oy

التطبيق الخطي $f: \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$

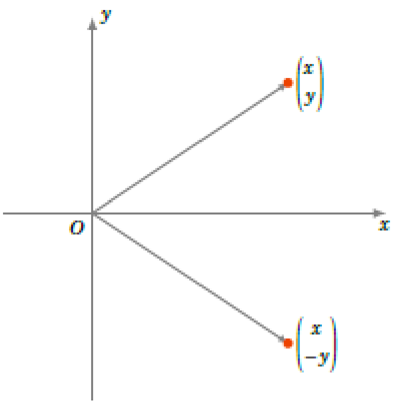
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$



انعكاس بالنسبة للمحور Ox

التطبيق الخطي $f: \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$

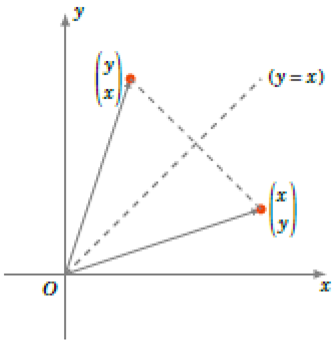
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$



انعكاس بالنسبة للمستقيم y = x

التطبيق الخطي $f: \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

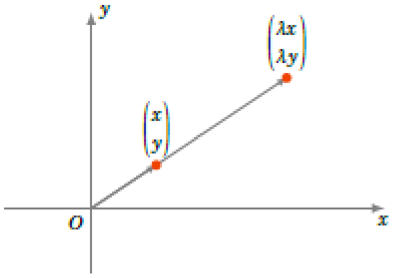


ISSN: 2617-989X

التحاكي

التحاكي الذي نسبته λ ومركزه المبدأ هو التطبيق الخطي $f: \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$



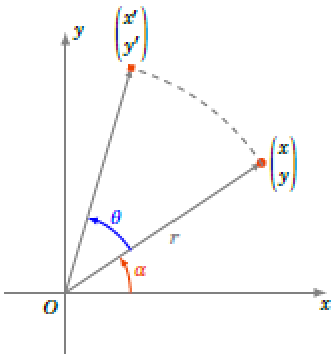
ملاحظة 24: الانسحاب بمقدار الشعاع $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$: $f: \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$ المعرف ب:

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + u_0 \\ y + v_0 \end{pmatrix}$ ليس بتطبيق خطي.

الدوران

الدوران بزاوية θ حول المبدأ هو التطبيق الخطي $f: \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$

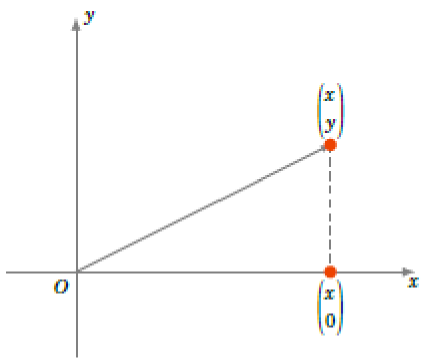
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y = x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$



الإسقاط العمودي

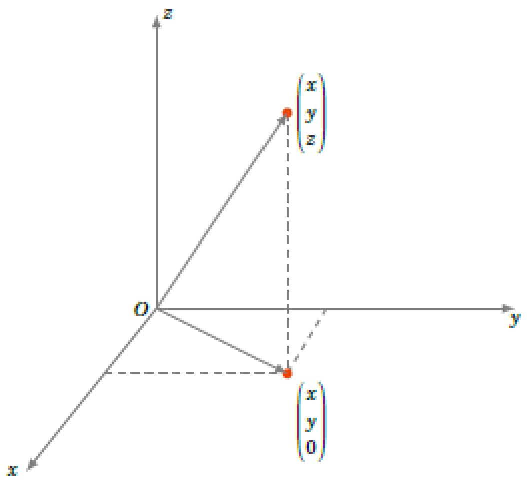
التطبيق الخطي $f: \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ يمثل اسقاط عمودي على المحور Ox



كما أن التطبيق الخطي $f: \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^3$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ يمثل اسقاط عمودي على المستوى Oxy



أسئلة الفصل

1. حدد فيما إذا كان $\mathcal{R}^2$ مزود بقوانين التشكيل الداخلية والخارجية التالية يشكل فضاء شعاعي على الحقل $\mathcal{R}$ أو لا:

a) $(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d); \lambda(a, b) = (a, \lambda b), \lambda \in \mathcal{R}$.

b) $(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d); \lambda(a, b) = (\lambda^2 a, \lambda^2 b), \lambda \in \mathcal{R}$.

c) $(a, b) + (c, d) = (c, d); \lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b), \lambda \in \mathcal{R}$.

2. بين لماذا لا تشكل المجموعات التالية فضاءات شعاعية:

a) $\{(x, y) \in \mathcal{R}^2 \,|\, xy = 0\}$

b) $\{(x, y) \in \mathcal{R}^2 \,|\, -1 \leq x \leq 1 \text{ and } |-1 \leq y \leq 1\}$

c) $\{(x, y) \in \mathcal{R}^2 \,|\, x = 1\}$

3. هل يمكن إيجاد عدد حقيقي t بحيث يكون الشعاعين مرتبطين: $(-2, \sqrt{2}, t)$ و $(-4\sqrt{2}, \sqrt{2}, t)$.

4. هل يمكن إيجاد عدد حقيقي t بحيث يكون الشعاع $(1, 3t, t)$ تركيب خطي من $(1, 3, 2)$ و $(-1, 1, -1)$؟

5. لتكن الأشعة التالية في $\mathcal{R}^3$؟ $v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (4, 1, 4), v_3 = (2, -1, 4)$. هل الجملة (v_1, v_2, v_3) مستقلة خطياً؟

6. بين أياً من المجموعات التالية تشكل فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{R}^3$:

a) $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 \,|\, 3x - 7y = z\}$

b) $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 \,|\, z(x^2 + y^2) = 0\}$

c) $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 \,|\, x + y - z = x + y + z = 0\}$

d) $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 \,|\, x^2 - z^2 = 0\}$

7. ليكن α عدد حقيقي و $f_\alpha: \mathcal{R} \to \mathcal{R}, x \mapsto e^{\alpha x}$. برهن أن الجملة $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{R}}$ مستقلة خطياً.

8. ليكن فضاءين شعاعيين جزئيين من $\mathcal{R}^3$: $E = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 \,|\, x + y - 2z = 0 \text{ and } 2x - y - z = 0\}$ و $F = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 \,|\, x + y = z\}$. ولتكن الأشعة $a = (1, 1, 1), b = (1, 0, 1), c = (0, 1, 1)$.

a. برهن أن E فضاء شعاعي جزئي في $\mathcal{R}^3$.

b. أوجد جملة مولدة في E وبرهن أنها تشكل قاعدة.

c. بين أن $\{b, c\}$ تشكل قاعدة في F.

d. بين أن $\{a, b, c\}$ جملة مستقلة في $\mathcal{R}^3$.

e. هل لدينا $E \oplus F = \mathcal{R}^3$>

f. ليكن $u = (x, y, z)$، اكتب u بدلالة القاعدة $\{a, b, c\}$.

تمارين إضافية

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة

ليكن $E = \mathcal{R}_3[X]$ فضاء كثيرات الحدود من الدرجة أصغر أو يساوي 3

1. الجملة $\mathcal{F} = \{1+3X, X+X^2, 3X+X^3\}$ هي:

a) **مستقلة** b) مولدة ل E c) قاعدة في E d) لا مولدة ولا مستقلة

2. $\mathcal{F} = \{2X+X^3, -2X+X^3, -1+X^2, 1+X^2\}$ هي:

a) مستقلة b) مولدة ل E **c) قاعدة في E** d) لا مولدة ولا مستقلة

3. $\mathcal{F} = \{X^3, 2X+X^3, -2X+X^3, -1+X^2, 1+X^2\}$ هي:

a) مستقلة **b) مولدة ل E** c) قاعدة في E d) لا مولدة ولا مستقلة

ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K، وليكن $f \in \mathcal{L}(E, F)$. ولتكن $\{u_1, \dots u_n\}$ جملة من الأشعة في E.

4. إذا كانت الجملة $\{u_1, \dots u_n\}$ مستقلة وكانت $\{f(u_1), \dots, f(u_n)\}$ مستقلة فإن التطبيق f يكون:

a) متباين b) غامر c) تقابل d) لا نعرف

5. إذا كانت الجملة $\{u_1, \dots u_n\}$ مولدة وكانت $\{f(u_1), \dots f(u_n)\}$ مولدة فإن التطبيق f يكون:

a) متباين **b) غامر** c) تقابل d) لا نعرف

6. إذا كانت الجملة $\{u_1, \dots u_n\}$ قاعدة وكانت $\{f(u_1), \dots f(u_n)\}$ قاعدة فإن التطبيق f يكون:

a) متباين b) غامر **c) تقابل** d) لا نعرف

7. إذا كانت الجملة $\{u_1, \dots u_n\}$ مرتبطة وكانت $\{f(u_1), \dots f(u_n)\}$ مرتبطة فإن التطبيق f يكون:

a) متباين b) غامر c) تقابل **d) لا نعرف**

ليكن التطبيق $f: \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^3$ المعرف كما يلي: $f(x, y) = (2x+y, x-y, x-y)$

8. التطبيق f هو:

a) خطي b) أندومورفيزم c) إيزومورفيزم d) أوتومورفيزم

9. Ker f هو:

a) $Vect((1, 1))$ **b) $\{(0, 0)\}$** c) $\mathcal{R}^2$ d) $\mathcal{R}$

10. f هو:

a) متباين b) غامر c) تقابل d) لا غامر ولا متباين

السؤال الثاني: أجب بصح أو خطأ

ليكن E فضاء شعاعي على K و F, G, K ثلاث فضاءات شعاعية جزئية من E

1. الفضاء الشعاعي المنتهي البعد يحوي على عدد منتهي من العناصر		صح أو **خطأ**
2. $G \cap F$ فضاء شعاعي جزئي من E		**صح** أو خطأ
3. $G \cup F$ فضاء شعاعي جزئي من E		صح أو **خطأ**
4. $G + F$ فضاء شعاعي جزئي من E		**صح** أو خطأ
5. إذا كان $\dim E = \dim F + \dim G$ فإن F و G متتامان في E		**صح** أو خطأ
6. $F = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 \mid 3x+2z=0 \text{ and } x+y=0\}$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{R}^3$		**صح** أو خطأ

ليكن E فضاء شعاعي على K بعده منتهي و $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_n\}$ جملة من n شعاع في E وليكن أيضاً v_{n+1} شعاع من E غير موجود في $\mathcal{F}$. i عدد صحيح بين قيمته بين 1 و n. f, g أندومورفيزمين في E.

7. إذا كانت $\mathcal{F}$ مستقلة فإن $\mathcal{F}\backslash\{v_i\}$ مستقلة أيضاً		**صح** أو خطأ
8. إذا كانت $\mathcal{F}$ مرتبطة فإن $\mathcal{F}\backslash\{v_i\}$ مرتبطة أيضاً		صح أو **خطأ**
9. إذا كانت $\mathcal{F}$ مستقلة فإن $\mathcal{F}\cup\{v_i\}$ مستقلة أيضاً		صح أو **خطأ**
10. إذا كانت $\mathcal{F}$ مرتبطة فإن $\mathcal{F}\cup\{v_i\}$ مرتبطة أيضاً		**صح** أو خطأ
11. إذا كانت $\mathcal{F}$ مستقلة فإن $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ مستقلة أيضاً		صح أو **خطأ**
12. إذا كانت $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ مستقلة فإن $\mathcal{F}$ مستقلة أيضاً		**صح** أو خطأ
13. $\mathcal{B}=\{e_1,e_2\}$ قاعدة في E. $V_1 = e_1+e_2$، $V_2 = e_1-e_2$ $\Leftarrow$ $\{V_1, V_2\}$ قاعدة في E		**صح** أو خطأ
14. $\mathcal{B}=\{e_1,e_2\}$ قاعدة في E. $V_1 = e_1+e_2$، $V_2 = e_1-e_2$ $\Leftarrow$ $\{e_1, V_1\}$ قاعدة في E		**صح** أو خطأ
15. $\{1, (X-2), (X-3)^2\}$ تشكل قاعدة في $\mathcal{R}_2[X]$		**صح** أو خطأ

السؤال الثالث:

ليكن لدينا الشعاعين $v_1 = (1, 2, 3)$ و $v_2 = (1, -2, 3)$ في $\mathcal{R}^3$. هل يمكن إيجاد x بحيث يكون الشعاع $(x, 1, 1) \in Vect(v1, v2)$? الشعاع $(1, x, 1) \in Vect(v1, v2)$?

الجواب:

$$(x, 1, 1) \in Vect(v_1, v_2) \Leftrightarrow (x, 1, 1) = \alpha(1, 2, 3) + \beta(1, -2, 3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ 1 = 2\alpha - 2\beta \\ 1 = 3\alpha + 3\beta \end{cases}$$

من المعادلتين الثانية والثالثة ينتج أن $\alpha = \frac{5}{12}$ و $\alpha = \frac{-1}{12}$ بالتعويض في المعادلة الأولى ينتج $x = \frac{1}{3}$. نعم

$$(1, x, 1) \in Vect(v_1, v_2) \Leftrightarrow (1, x, 1) = \alpha(1, 2, 3) + \beta(1, -2, 3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ x = 2\alpha - 2\beta \\ 1 = 3\alpha + 3\beta \end{cases}$$

من المعادلتين الأول والثالثة ينتج أن $3\alpha + 3\beta = 3$ و $3\alpha + 3\beta = 1$ بالتالي لا يوجد حل. لا

الفصل الثامن: المصفوفات والمحددات والجمل الخطية

Chapter 8: Matrix, determinant and systems of linear equations

الكلمات المفتاحية:

مصفوفة، مصفوفة مربعة، مصفوفة مثلثية، مصفوفة قطرية، مصفوفة متناظرة، مصفوفة تخالفية، مقلوب مصفوفة، منقول مصفوفة، أثر مصفوفة، تحويلات أولية، مصفوفة موسعة، جملة خطية، طريقة التعويض، طريقة كرامر، طرف ثاني، جملة متجانسة، مدرجة، مختزلة، طريقة غوص، رتبة مصفوفة، مصفوفة تطبيق خطي، محدد مصفوفة، مصفوفة شاذة، العامل المرافق، صغير مصفوفة.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على المصفوفات والعمليات عليها (من جمع وطرح وضرب، ...) وأنواع المصفوفات وكيفية إيجاد مقلوب مصفوفة وتطبيقاتها، ودراسة جمل المعادلات الخطية المتجانسة وغير المتجانسة والطرق المختلفة لحلها، وأخيراً التعرف على محدد مصفوفة وخواص المحددات وكيفية استخدامها لا سيما في حل المعادلات الخطية (طريق كرامر على سبيل المثال) وإيجاد رتبة مصفوفة.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- المصفوفات والعمليات عليها.
- مقلوب مصفوفة.
- جمل المعادلات الخطية.
- حل الجمل الخطية.
- محدد مصفوفة.
- تطبيقات محدد مصفوفة (حل الجمل الخطية، ...)

1. المصفوفات Matrix

1-1. تعاريف Definitions

تعريف 1: المصفوفة عبارة عن مجموعة من العناصر (من حقل K) مرتبة ضمن جدول مستطيل. نقول أنها ذات حجم n x p إذا كان الجدول يتألف من n سطر و p عمود. نرمز للعنصر الموجود في السطر i والعمود j ب $a_{i,j}$، ونرمز للجدول (المصفوفة) كما يلي:

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

كما يمكن أن نرمز للمصفوفة A ب: $A=(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ أو $(a_{i,j})$.

مثال 1: لتكن المصفوفة 2 x 3 التالية:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

على سبيل المثال، $a_{1,1}=1$ و $a_{2,3}=7$.

تعريف 2: تتساوى مصفوفتان إذا كان لهما نفس الحجم وتساوت كل عناصر المصفوفة الأولى مع مقابلاتها من المصفوفة الثانية.

تعريف 3: نسمي مجموعة المصفوفات n سطر و p عمود والعناصر من الحقل K ب $M_{n,p}(K)$. نسمي عناصر $M_{n,p}(\mathcal{R})$ بالمصفوفات الحقيقية.

مصفوفات خاصة

- **مصفوفة مربعة**: إذا كان n = p (عدد الأسطر يساوي عدد الأعمدة). نرمز لمجموعة المصفوفات المربعة ب $M_n(K)$.
  تشكل العناصر $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$ القطر الرئيسي للمصفوفة.

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

على سبيل المثال المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$

- **المصفوفة العمود**: مصفوفة لديها عمود واحد ($p = 1$). ونرمز لها ب:

$$C=\begin{pmatrix}a_{1,1}\\ a_{2,1}\\ \vdots\\ a_{n,1}\end{pmatrix}$$

على سبيل المثال المصفوفة $C=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$

- **المصفوفة السطر**: مصفوفة لديها سطر واحد ($n = 1$). ونرمز لها ب:

$$L=\begin{pmatrix}a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p}\end{pmatrix}$$

على سبيل المثال المصفوفة $L=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\end{pmatrix}$

- **المصفوفة الصفرية**: مصفوفة كافة عناصرها أصفار ونرمز لها ب $0_{n,p}$ أو 0. على سبيل المثال $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

- **المصفوفة القطرية**: مصفوفة مربعة قطرها الرئيسي عناصر من الحقل $\mathbb{K}$ وبقية العناصر أصفار $a_{i,j}=0; i\neq j$.

$$D=\begin{pmatrix}d_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & d_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & d_n\end{pmatrix}$$

على سبيل المثال المصفوفة $D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}$ أو $D'=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}$

- **المصفوفة الواحدية**: مصفوفة مربعة قطرها الرئيسي واحدات وبقية العناصر أصفار $a_{i,j}=0; i\neq j$ و $a_{i,i}=1$.

$$I_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

على سبيل المثال المصفوفة $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- **المصفوفة السلمية**: مصفوفة مربعة قطرها الرئيسي نفس العنصر وبقية العناصر أصفار $a_{i,j} = 0; i \neq j$ و $a_{i,i} = \lambda$.

$$M = \lambda I_n = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

على سبيل المثال المصفوفة $M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

- **المصفوفة المثلثية العليا**: مصفوفة مربعة بحيث $a_{i,j} = 0; i > j$.

$$U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix}$$

على سبيل المثال المصفوفة $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

- **المصفوفة المثلثية السفلى**: مصفوفة مربعة بحيث $a_{i,j} = 0; i < j$.

$$L = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & l_{n,n} \end{pmatrix}$$

على سبيل المثال المصفوفة $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

• **المصفوفة المتناظرة**: مصفوفة مربعة بحيث $a_{i,j} = a_{j,i}$.

$$S = \begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,n} \\ s_{1,2} & s_{2,2} & \cdots & s_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1,n} & s_{2,n} & \cdots & s_{n,n} \end{pmatrix}$$

على سبيل المثال المصفوفة $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

• **المصفوفة التخالفية**: مصفوفة مربعة بحيث $a_{i,j} = -a_{j,i}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ -a_{1,2} & 0 & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1,n} & -a_{2,n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

على سبيل المثال المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

2-1. العمليات على المصفوفات Matrix operations

جمع المصفوفات

تعريف 4: لتكن A و B مصفوفتين لهما نفس البعد n x p. نعرف المجموع C = A + B على أنه المصفوفة ذات البعد n x p المعرفة ب: $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$

مثال 2: لتكن $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ فإن $A + B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

بينما لو كانت المصفوفة $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ فإن A + C غير معرّف.

ضرب مصفوفة بسلمي

تعريف 5: ضرب مصفوفة $A = (a_{i,j})$ من $M_{n,p}(K)$ بالسلمي $\lambda \in K$ هو المصفوفة $(\lambda a_{i,j})$ المشكلة من ضرب كل عنصر من عناصر A ب λ. ونرمز لها ب λ.A (أو اختصاراً λA).

مثال 3: لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ و $\lambda = 3$ فإن $3A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 \\ 0 & 3 & 12 \end{pmatrix}$

ملاحظة 1: المصفوفة $(-1)A$ هي نظيرة المصفوفة A، ونرمز لها بالرمز $-A$. كما أن الفرق $A - B$ معرف ب $A + (-B)$.

مثال 4: لتكن $A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ فإن:

$$A - B = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

فرضية 1: لتكن A, B, C ثلاث مصفوفات من $M_{n,p}(K)$، وليكن $\alpha, \beta \in K$:

1. $A + B = B + A$: مجموع المصفوفات تبديلي،
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$: مجموع المصفوفات تجميعي،
3. $A + 0 = 0 + A = A$: المصفوفة الصفرية هي العنصر الحيادي بالنسبة لجمع المصفوفات،
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta B$،
5. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
6. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

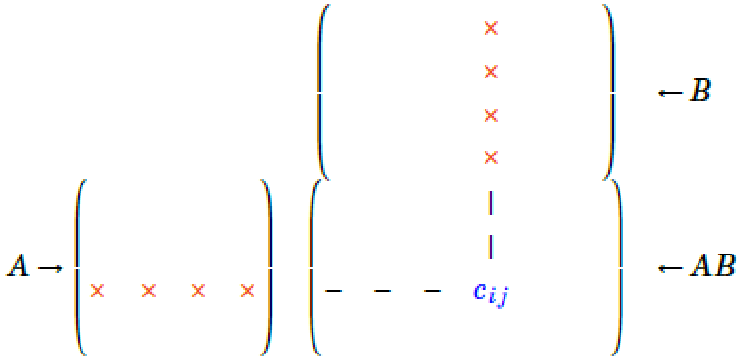
ضرب المصفوفات

يتم تعريف ضرب المصفوفتين A و B: AB إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة A يساوي عدد أسطر المصفوفة B.

تعريف 6: لتكن $A = (a_{i,j})$ مصفوفة n x p و $B = (b_{i,j})$ مصفوفة p x q. عندئذ الضرب $C = AB$ هو مصفوفة n x q حيث عناصرها $c_{i,j}$ معرفة كما يلي: $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$

ملاحظة 2: يمكن كتابة $c_{i,j}$ بالطريقة المفصلة: $c_{i,j}=a_{i,1}b_{1,j}+a_{i,2}b_{2,j}+\cdots+a_{i,p}b_{p,j}$

هذا ويمكن إجراء الحسابات على النحو التالي:



مثال 5: ليكن لدينا $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\\1&1\end{pmatrix}$ فإن: $AB=\begin{pmatrix}2&7\\3&11\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1&2\\-1&1\\1&1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}\end{array}\qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1&2\\-1&1\\1&1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}\end{array}\qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1&2\\-1&1\\1&1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2&7\\3&11\end{pmatrix}\end{array}$$

على سبيل المثال لحساب العنصر الأول: $c_{1,1}=1\times1+2\times(-1)+3\times1=2$

مثال 6: لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix}a&b&c\end{pmatrix}\in M_{1,3}(\mathcal{R})$ والمصفوفة $B=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in M_{3,1}(\mathcal{R})$ فإن:

$AB=\begin{pmatrix}a&b&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=ax+by+cz\in\mathcal{R}$. نسمي النتيجة بالضرب السلمي للشعاعين A و B

$$BA=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xa&xb&xc\\ya&yb&yc\\za&zb&zc\end{pmatrix}\in M_{3,3}(\mathcal{R})$$

ملاحظة 3: ضرف المصفوفات ليس تبديلي بشكل عام. في الحقيقة يمكن للجداء AB أن يوجد بدون أن يكون BA معرفاً، كما يمكن أن يكون كل من AB و BA معرّفين ولكن بحجمين مختلفين، وأخيراً يمكن أن يكون كل من AB و BA معرّفين ومن نفس الحجم ولكن بشكل عام $AB\neq BA$.

مثال 7:

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 1\\3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 2\\29 & -2\end{pmatrix} \quad \text{ولكن} \quad \begin{pmatrix}5 & 1\\3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 3\\-2 & -6\end{pmatrix}$$

ملاحظة 4: يمكن أن يكون $AB = 0$ بدون أن يكون $A = 0$ أو $B = 0$. أو بمعنى آخر يمكن أن يكون $A \neq 0$ و $B \neq 0$ لكن $AB = 0$.

مثال 8:

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

ملاحظة 5: يمكن أن يكون $AB = AC$ بدون أن يكون $B = C$. أو بمعنى آخر يمكن أن يكون $AB = AC$ و $B \neq C$.

مثال 9:

$$AB = AC = \begin{pmatrix}-5 & -4\\15 & 12\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{pmatrix}0 & -1\\0 & 3\end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix}4 & -1\\5 & 4\end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix}2 & 5\\5 & 4\end{pmatrix}$$

خواص ضرب المصفوفات

فرضية 2: ليكن لدينا ثلاث مصفوفات $A \in M_{n,p}(K)$ و $B \in M_{p,q}(K)$ و $C \in M_{q,r}(K)$ و $\alpha \in K$

1. الخاصة التجميعية: $A(BC) = (AB)C$
2. الخاصة التوزيعية للضرب على الجمع: $A(B+C) = AB + AC$ و $(B+C)A = BA + CA$
3. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
4. المصفوفة الصفرية عنصر ماص: $A.0 = 0.A = 0$
5. $I_n.A = A.I_n = A$

قوى المصفوفات

في مجموعة المصفوفات المربعة $M_n(K)$ ضرب المصفوفات عملية تشكيل داخلي: إذا كان $A, B \in M_n(K)$ فإن $AB \in M_n(K)$. بشكل خاص يمكن ضرب مصفوفة A بنفسها ونرمز لها $A^2 = AxA$، $A^3 = AxAxA$.

تعريف 7: من أجل كل مصفوفة $A \in M_n(K)$، يمكن تعريف قوى المصفوفة A ب $A^0 = I_n$ و $A^{p+1} = A^p \times A$ من أجل أي عدد $p \in \mathcal{N}$. بمعنى أن $A^p = AxA\ldots xA$ (p مرة).

مثال 10: لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. أوجد A^p.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad A^3 = A^2 x A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad A^4 = A^3 x A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

من الملاحظ أن $A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}$

ثنائي حد نيوتن

بما أن عملية الضرب غير تبديلية فإن العلاقة $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ وليس $A^2 + 2AB + B^2$.

فرضية 3: حساب $(A+B)^p$ عندما $AB = BA$. ليكن لدينا المصفوفتين $A, B \in M_n(K)$ القابلتين للتبديل، أي $AB = BA$، عندئذ من أجل كل $p \geq 0$، لدينا العلاقة:

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k} B^k$$

مثال 11: لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$، احسب A^p.

من الواضح أن $A = N + I$ حيث $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. لنحسب N^2 و N^3 و N^4:

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N^4 = 0$$

بما أن $A = N + I$ وأن I و N يتبادلان حسب خاصة المصفوفة الواحدية، يمكن استخدام ثنائي حد نيوتن. باستخدام أن $I^k = I$ من أجل أي k عدد طبيعي و $N^k = 0$ من أجل كل $k \geq 4$، نحصل على:

$$A^p = (I+N)^p = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} I^{p-k}N^k = I + pN + \frac{p(p-1)}{2!}N^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}N^3$$

بالتالي فإن:

$$A^p = \begin{pmatrix} 1 & p & p^2 & p(p^2-p+1) \\ 0 & 1 & 2p & p(3p-2) \\ 0 & 0 & 1 & 3p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

على سبيل المثال:

$$A^4 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 & 52 \\ 0 & 1 & 8 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 21 \\ 0 & 1 & 6 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3-1. مقلوب مصفوفة Matrix inverse

تعريف 8: لتكن A مصفوفة مربعة حجم $n \times n$. إذا وجدت مصفوفة مربعة B حجم $n \times n$ بحيث أن: $AB = BA = I$، عندئذ نقول عن A أن لها مقلوب، ونسمي B مقلوب A ونرمز لها بالرمز A^{-1}.

بشكل عام، عندما تكون A قابلة للقلب فإنه من أجل أي عدد طبيعي $p \geq 0$، نرمز:

$$A^{-p} = (A^{-1})^p = A^{-1}A^{-1}\ldots A^{-1} \text{ (مرة } p)$$

نرمز لمجموعة المصفوفات في $M_n(K)$ القابلة للقلب ب $GL_n(K)$.

مثال 12: لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. أوجد فيما إذا كان لها مقلوب؟

دراسة وجود مقلوب ل A، يعني دراسة وجود مصفوفة $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ بحيث $Ab = BA = I$

$$AB = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وهذا يكافئ: $\begin{cases} a+2c=1 \\ b+2d=0 \\ 3c=0 \\ 3d=1 \end{cases}$. حل هذه الجملة يعطي: a =1 و b = −2/3 و c = 0 و d = 1/3. بالتالي يوجد مصفوفة وحيدة $B=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. يمكن البرهان على أن BA = I، بالتالي المصفوفة A قابلة للقلب ومقلوبها هو:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

مثال 13: المصفوفة $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ ليس لها مقلوب. لأن $\begin{pmatrix} 3a+5b & 0 \\ 3c+5d & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}=BA$ لا يمكن أن يساوي المصفوفة الواحدية.

ملاحظة 6: المصفوفة الواحدية I_n قابلة للقلب ومقلوبها هو نفسها. أما المصفوفة الصفرية فهي غير قابلة للقلب. لماذا؟

فرضية 4: لتكن A مصفوفة قابلة للقلب، بالتالي مقلوبها وحيد.

فرضية 5: لتكن A مصفوفة قابلة للقلب، بالتالي مقلوبها A^{-1} قابل للقلب ولدينا: $(A^{-1})^{-1} = A$.

فرضية 6: لتكن A و B مصفوفتين قابلتين للقلب فإن AB قابل للقلب ويكون لدينا: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

وبشكل عام إذا كان لدينا المصفوفات $A_1, A_2, \ldots, A_m$ قابلة للقلب فإن:

$$(A_1A_2...A_m)^{-1}=A_m^{-1}A_{m-1}^{-1}...A_1^{-1}$$

فرضية 7: ليكن لدينا المصفوفتين $A, B \in M_n(K)$ والمصفوفة $C \in M_n(K)$ قابلة للقلب. عندئذ إذا كان AC = BC فإن A = B.

مثال 14: لتكن $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. احسب A^{-1} و B^{-1} و $(AB)^{-1}$ و $(BA)^{-1}$ و A^{-2}.

من السهل حساب $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ و $B^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ و $A^{-2}=\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{9}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{15}{2} & \frac{7}{2} \\ -13 & -6 \end{pmatrix} \qquad (BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

تمرين: لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. احسب $2A - A^2$. استنتج A^{-1}

$$2A - A^2 = 2\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2A - A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

إذن $2A - A^2 = I \Leftrightarrow A(2I - A) + I \Leftrightarrow 2I - A$ مقلوب المصفوفة A، بالتالي:

$$2I - A = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

إذن: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

مقلوب مصفوفة 2 x 2

فرضية 8: لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ وبفرض أن $ad - bc \neq 0$، عندئذ تكون المصفوفة A قابلة للقلب:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

مثال 15: أوجد مقلوب كل من $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{6-7}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

طريقة غوص في إيجاد مقلوب مصفوفة

تكمن طريقة غوص لإيجاد مقلوب مصفوفة A القيام بمجموعة من التحويلات السطرية الأولية على المصفوفة A حتى يتم تحويلها إلى مصفوفة أولية I. وفي نفس الوقت نقوم بنفس التحويلات على المصفوفة الواحدية I. نحصل في النهاية على المقلوب A^{-1}.

عملياً نقوم بعمليتي التحويل في نفس الوقت من خلال اعتماد ما يلي: إلى جانب المصفوفة A المراد قلبها نضع المصفوفة الواحدية I فيشكلان الجدول $(A\,|\,I)$ والتي نسميها المصفوفة الموسعة. نقوم بمجموعة التحويلات السطرية الأولية على المصفوفة الموسعة $(A\,|\,I)$ إلى أن نحصل في النهاية على المصفوفة الموسعة $(I\,|\,B)$. وتكون في هذه الحالة $B = A^{-1}$.

إن التحويلات السطرية الأولية على مصفوفة هي:

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ و $\lambda \neq 0$: ضرب السطر L_i بعدد حقيقي مختلف عن الصفر.
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ و $\lambda \in K$ و $i \neq j$: ضرب السطر L_j بعدد حقيقي وإضافته إلى السطر L_i.
3. $L_i \leftrightarrow L_j$: التبديل بين السطر L_i والسطر L_j.

مثال 16: احسب مقلوب المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

لنكتب المصفوفة الموسعة: $(A\,|\,I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$

للحصول على العنصر 0 في العمود الأول السطر الثاني نقوم بالتحويل السطري الأولي $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ \\ \end{array}$$

للحصول على العنصر 0 في العمود الأول السطر الثالث نقوم بالتحويل السطري الأولي $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

للحصول على العنصر 1 في العمود الثاني السطر الثاني نقوم بالتحويل السطري الأولي $L_2 \leftarrow -1/8L_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/8 & 1/2 & -1/8 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftarrow -1/8L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/8 & 1/2 & -1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 & 1/2 & 1 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/8 & 1/2 & -1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) L_3 \leftarrow 2L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7/4 & -3/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - 5/8L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 7/4 & -3/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - L_3$$

بالتالي فإن:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 7/4 & -3/4 & -5/4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -5 \\ -8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

منقول مصفوفة

تعريف 9: لتكن المصفوفة A ذات الحجم n x p. نسمي منقول المصفوفة A ويرمز لها بالرمز ${}^tA$ المصفوفة ذات الحجم p x n المعرفة بتبديل الأسطر بالأعمدة والأعمدة بالأسطر.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,p} & a_{2,p} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

مثال 17:

$${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \qquad {}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad {}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

مبرهنة 1: لتكن A, B مصفوفتان و $\alpha \in K$:

1. ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
2. ${}^t(\alpha A) = \alpha . {}^tA$
3. ${}^t({}^tA) = A$
4. ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$
5. إذا كانت A قابلة للقلب فإن ${}^tA$ قابلة للقلب أيضاً ويكون عندها $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

أثر مصفوفة

تعريف 10: لتكن A مصفوفة مربعة حجم $n \times n$. نسمي أثر المصفوفة A، ونرمز له بالرمز $\mathrm{tr}\ A$ على أنه مجموع عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة A. أي: $\mathrm{tr}\ A = a_{1,2} + a_{1,2} + \ldots + a_{n,n}$.

مثال 18:

$$\mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix} = 1 + 8 + 6 = 15$$

مبرهنة 2: لتكن A, B مصفوفتان حجم $n \times n$ و $\alpha \in K$:

1. $\mathrm{tr}\ (A + B) = \mathrm{tr}\ A + \mathrm{tr}\ B$
2. $\mathrm{tr}(\alpha . A) = \alpha . \mathrm{tr}\ A$
3. $\mathrm{tr}({}^tA) = \mathrm{tr}\ A$
4. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

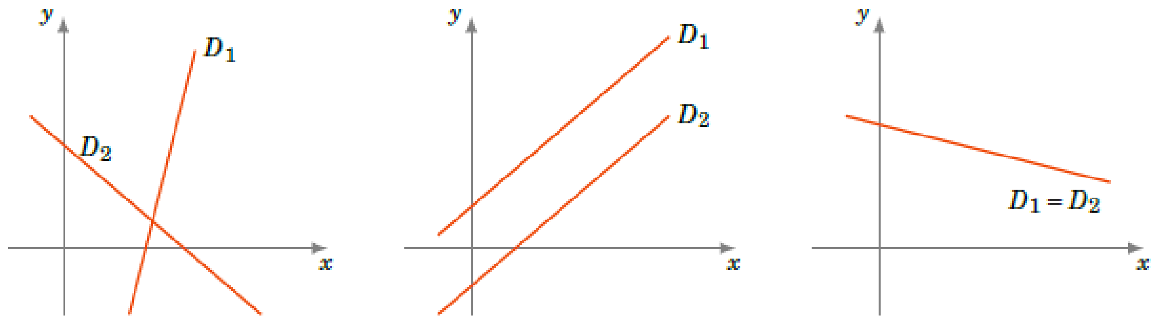
2. جمل المعادلات الخطية Systems of linear equations

1-2. مقدمة Introduction

معادلة مستقيمين في المستوي

معادلة مستقيم في المستوي Oxy تكتب على الشكل: $ax + by = e$، حيث a, b, e أعداد حقيقية. نسمي هذه المعادلة بالمعادلة الخطية حيث المتحولات (المجاهيل) هي x و y. على سبيل المثال $2x + 3y = 5$ تمثل معادلة خطية بينما المعادلات التالية ليست خطية: $2x + y^2 = 1$ و $y = \sin x$ و $x = \sqrt{y}$.

ليكن لدينا الآن مستقيمين D_1 و D_2 لنبحث عن النقاط التي تقع على المستقيمين في آن واحد. تقع النقطة (x, y) على التقاطع $D_2 \cap D_1$ إذا كانت حلاً للجملة: $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$. يمكن التمييز بين ثلاث حالات مختلفة:



1. يتقاطع المستقيمان D_1 و D_2 في نقطة واحدة، الجملة لها حل وحيد.

2. المستقيمان D_1 و D_2 متوازيان، الجملة ليس لها.

3. المستقيمان D_1 و D_2 طبوقان، الجملة لها عدد لانهائي من الحلول.

الحل بطريقة التعويض

لمعرفة وجود حل أو أكثر لجملة معادلات خطية، إحدى الطرق المعروفة هي طريقة التعويض.

مثال 19: ليكن لدينا الجملة التالية: $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x - 7y = -2 \end{cases}$

نكتب المعادلة الأولى $3x + 2y = 1$ على الشكل $y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x$ ومن ثم نعوضها في المعادلة الثانية نحصل على الجملة المكافئة التالية:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x \\ 2x - 7(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x \\ (2 + 7x\,\frac{3}{2})x = -2 + \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x \\ x = \frac{3}{25} \end{cases}$$

نعوض قيمة x في المعادلة $y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x$ نحصل على $y = \frac{3}{25}$، بالتالي جملة الحلول هي: $S = \left\{\left(\frac{3}{25}, \frac{3}{25}\right)\right\}$.

معادلة مستويين في الفراغ

معادلة مستوي في الفراغ Oxyz تكتب على الشكل: $ax + by + cz = d$، حيث a, b, c, d أعداد حقيقية. وهي معادلة خطية بثلاث مجاهيل x, y, z. تقاطع مستويين في الفراغ يوافق جملة المعادلتين الخطيتين التاليتين بثلاث مجاهيل: $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$. يمكن التمييز بين ثلاث حالات مختلفة:

1. يتقاطع المستويان في مستقيم، الجملة لها لانهاية من الحلول.

2. المستويان متوازيان، الجملة ليس لها حل.

3. المستويان طبوقان، الجملة لها لانهاية من الحلول.

أمثلة 20:

- الجملة $\begin{cases} 2x+3y-4z=7 \\ 4x+6y-8z=-1 \end{cases}$ ليس لها حل. في الحقيقة إذا ضربنا المعادلة الأولى ب 2، نحصل على الجملة الخطية المكافئة التالية: $\begin{cases} 4x+6y-8z=14 \\ 4x+6y-8z=-1 \end{cases}$. من الواضح أن المعادلتين غير متوافقتين لأنه لا يوجد أي نقطة (x, y, z) تحقق في آن واحد $4x+6y-8z=14$ و $4x+6y-8z=-1$. بالتالي: $\mathcal{S}=\varnothing$.

- الجملة $\begin{cases} 2x+3y-4z=7 \\ 4x+6y-8z=14 \end{cases}$ لها عدد لا نهائي من الحلول لأن المعادلتين تمثلان نفس المستوي، بالتالي جملة المعادلتين تكافئ معادلة واحدة $2x+3y-4z=7$ والتي يمكن كتابتها بالشكل $z=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y-\frac{7}{4}$، وبالتالي يمكن كتابة مجموعة الحلول على الشكل التالي: $\mathcal{S}=\left\{\left(x,y,\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y-\frac{7}{4}\right) \middle| x,y\in \right\}$ ، .

- الجملة $\begin{cases} 7x+2y-2z=1 \\ 2x+3y+2z=1 \end{cases}$. بطريقة التعويض:

$$\begin{cases} 7x+2y-2z=1 \\ 2x+3y+2z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\frac{7}{2}x+y-\frac{1}{2} \\ 2x+3y+2\left(\frac{7}{2}x+y-\frac{1}{2}\right)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\frac{7}{2}x+y-\frac{1}{2} \\ 9x+5y=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=\frac{7}{2}x+y-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{9}{2}x+\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\frac{17}{10}x-\frac{1}{10} \\ y=-\frac{9}{2}x+\frac{2}{5} \end{cases}$$

وبالتالي يمكن كتابة مجموعة الحلول على الشكل التالي: $\mathcal{S}=\left\{\left(x,-\frac{9}{2}x+\frac{2}{5},\frac{17}{10}x-\frac{1}{10}\right) \middle| x\in \right\}$ ، .

ملاحظة 7: تقاطع ثلاث مستويات في الفراغ إما أن تكون نقطة واحدة أو مستقيم أو مستوي أو لا يوجد تقاطع.

الحل بطريقة كرامر

نرمز ب $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ محدد المصفوفة $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (سنرى ذلك لا حقاً). ليكن لدينا جملة المعادلتين الخطيتين بمجهولين: $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$. وبفرض أن $ad - bc \neq 0$، نجد حل واحد حيث الإحداثيات (x, y) معطية ب:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

مثال 21: أوجد حل الجملة الخطية $\begin{cases} tx - 2y = 1 \\ 3x + ty = 1 \end{cases}$ حسب قيمة الوسيط $t \in \mathcal{R}$.

إن محدد الجملة $\begin{vmatrix} t & -2 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 + 6$ لا ينعدم إطلاقاً، بالتالي للجملة حل وحيد (x, y) معطى ب:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & t \end{vmatrix}}{t^2 + 6} = \frac{t + 2}{t^2 + 6} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} t & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{t^2 + 6} = \frac{t - 3}{t^2 + 6}$$

بالتالي مجموعة الحلول هي: $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{t+2}{t^2+6}, \frac{t-3}{t^2+6} \right) \right\}$.

الحل باستخدام مقلوب مصفوفة

ليكن لدينا جملة المعادلتين الخطيتين بمجهولين: $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$. يمكن كتابة الجملة باستخدام المصفوفات على الشكل التالي: $AX = Y$ حيث $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ و $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ و $Y = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$.

إذا كان محدد المصفوفة A مختلف عن الصفر أي $ad - bc \neq 0$، بالتالي تكون المصفوفة قابلة للقلب ويكون: $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. وبالتالي يكون الحل الوحيد $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ للجملة الخطية معطى بالعلاقة التالية: $X = A^{-1}Y$.

مثال 22: أوجد حل الجملة الخطية $\begin{cases} x+y=1 \\ x+t^2y=t \end{cases}$ حسب قيمة الوسيط $t \in \mathcal{R}$.

إن محدد الجملة $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t^2 \end{vmatrix} = t^2-1$.

الحالة الأولى: $t^2-1 \neq 0$ ($t \neq +1$ و $t \neq -1$)، المصفوفة A قابلة للقلب ويكون $A^{-1} = \frac{1}{t^2-1}\begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

والحل $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ يعطى ب: $X = A^{-1}Y = \frac{1}{t^2-1}\begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{t^2-1}\begin{pmatrix} t^2-1 \\ t-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t}{t-1} \\ \frac{1}{t-1} \end{pmatrix}$،

بالتالي مجموعة الحلول هي: $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{t}{t+1}, \frac{1}{t+1}\right)\right\}$.

الحالة الثانية: $t=+1$، عندها تكون الجملة $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$ والمعادلتين متطابقتين، بالتالي يوجد عدد لا نهائي من الحلول: $\mathcal{S} = \{(x, 1-x) | x \in ، \}$.

الحالة الثالثة: $t=-1$، عندها تكون الجملة $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=-1 \end{cases}$، والمعادلتين غير متوافقتين بالتالي: $\mathcal{S} = \varnothing$.

2-2. نظرية الجمل الخطية Systems of linear equations theorem

تعريف 11: نسمي المعادلة الخطية ذات p متحولاً (مجهولاً) $x_1, \ldots, x_p$ كل معادلة من الشكل: $a_1x_1+\ldots+a_px_p=b$، حيث $a_1, \ldots, a_p$ و b أعداد حقيقية معطية.

تعريف 12: من أجل العدد الصحيح $n \geq 1$، نسمي جملة من n معادلة خطية ب p متحول قائمة مؤلفة من n معادلة خطية.

الشكل العام لجملة من المعادلات الخطية ب p متحول عددها n هي من الشكل:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,p}x_p = b_i \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

الأعداد $a_{i,j};\ i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, p$ هي أمثال (معاملات) الجملة الخطية، والأعداد $b_i;\ i = 1, \ldots, n$ تمثل الطرف الثاني للجملة.

يمكن كتابة جملة المعادلات باستخدام المصفوفات على النحو التالي: $AX = B$، حيث:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

مثال 23: الجملة الخطية التالية مكونة من معادلتين بثلاث متحولات (مجاهيل): $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 9 \end{cases}$.

تعريف 13: حل جملة معادلات خطية هي قائمة من p عدد حقيقي $(s_1, \ldots, s_2)$ بحيث إذا عوضنا x_1 ب s_1 و x_2 ب s_2، ... في الجملة الخطية تتحقق المساواة (أي تجعل طرفها الأول يساوي طرفها الثاني).

مثال 24: الجملة الخطية $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 9 \end{cases}$ تقبل الحل $(-18, -6, 1)$، أي أن $x_1 = -18$ و $x_2 = -6$ و $x_3 = 1$. بالمقابل فإن $(7, 2, 0)$ لا تحقق إلا المعادلة الأولى وبالتالي ليست حلاً للجملة.

تعريف 14: نقول عن جملتين خطيتين أنهما متكافئتين إذا كان لهما نفس مجموعة الحلول.

مبرهنة 3: جملة من المعادلات الخطية إما ليس لها حل أو أن لها حل واحد أو لانهاية من الحلول.

تعريف 15: نسمي جملة خطية متجانسة الجملة التي يكون فيها الطرف الثاني مساوياً للصفر، أي $b_1 = \ldots = b_n = 0$. وتمثلها المعادلة المصفوفية $AX = 0$.

ملاحظة 8: للجملة المتجانسة الحل الصفري والذي يسمى بالحل البديهي. في حالة جملة خطية 2 x 2 (معادلتين بمجهولين) والتي توافق مستقيمين يمران من المبدأ $(0, 0)$ والذي هو دائماً حل.

3-2. الجملة الخطية المدرجة Row echelon form

تعريف 16: إن أول معامل في معادلة خطية غير معدوم يسمى معامل رائد في المعادلة.

تعريف 17: الجملة الخطية المدرجة هي جملة تحقق ما يلي: المعامل الرائد في كل معادلة (سطر) يقع إلى يمين المعامل الرائد في المعادلة التي تسبقها. أو بشكل آخر المعاملات الصفرية التي تبدأ بمعادلة تزداد معادلة بعد معادلة.

تعريف 18: الجملة الخطية المدرجة المختزلة هي بالإضافة إلى كونها مدرجة فإن المعامل الأول غير الصفري في معادلة يساوي الواحد، وهو العنصر الوحيد غير الصفري في العمود الذي ينتمي إليه.

مثال 25: الجملة التالية مدرجة ولكنها غير مختزلة: $\begin{cases} 2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 5 \\ & -x_2 & -2x_3 & & = & 4 \\ & & & 3x_4 & = & 1 \end{cases}$، بينما الجملة التالية: $\begin{cases} 2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 5 \\ & & -2x_3 & & = & 4 \\ & & x_3 & 3x_4 & = & 1 \end{cases}$ ليست مدرجة لأن السطر الأخير يبدأ بنفس متحول السطر الذي يسبقه.

مثال 26: الجملة الخطية ثلاث معادلات بأربع مجاهيل مدرجة ومختزلة: $\begin{cases} x_1 & & +2x_3 & & = & 25 \\ & x_2 & -2x_3 & & = & 16 \\ & & & x_4 & = & 1 \end{cases}$

العمليات على معادلات جملة خطية

إن العمليات الأولية على المعادلات (الأسطر) هي:

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ و $\lambda \neq 0$: يمكن ضرب معادلة بعدد حقيقي مختلف عن الصفر.
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ و $\lambda \in K$ و $i \neq j$: يمكن إضافة المعادلة L_j بعد ضربها بعدد حقيقي إلى المعادلة L_i.
3. $L_i \leftrightarrow L_j$: يمكن التبديل بين المعادلة L_i والمعادلة L_j.

العمليات الأولية المذكورة سابقاً لا تغير من حل الجملة الخطية، بمعنى آخر تلك العمليات تحول جملة خطية إلى جملة خطية أخرى مكافئة لها.

مثال 27: لنستخدم العمليات الأولية الآنفة الذكر من اجل حل الجملة الخطية التالية:

$$\begin{cases} x & +y & +7z & = & -1 & (L_1) \\ 2x & -y & +5z & = & -5 & (L_2) \\ -x & -3y & -9z & = & -5 & (L_3) \end{cases}$$

لنبدأ بالعملية $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ نحصل على الجملة الخطية المكافئة:

$$\begin{cases} x & +y & +7z & = & -1 \\ & -3y & -9z & = & -3 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -x & -3y & -9z & = & -5 \end{cases}$$

ومن ثم $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\begin{cases} x & +y & +7z & = & -1 \\ & -3y & -9z & = & -3 \\ & -2y & -2z & = & -6 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

نستمر لجعل أمثال y في المعادلة الثانية مساوياً للواحد، من أجل ذلك نقسم السطر الثاني 3-:

$$\begin{cases} x & +y & +7z & = & -1 \\ & y & +3z & = & 1 & L_2 \leftarrow -1/3L_2 \\ & -2y & -2z & = & -6 \end{cases}$$

وهكذا نستمر:

$$\begin{cases} x & +y & +7z & = & -1 \\ & y & +3z & = & 1 \\ & & z & = & -1 & L_3 \leftarrow -1/4L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & +y & +7z & = & -1 \\ & y & +3z & = & 1 \\ & & 4z & = & -4 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & +y & & = & -1 & L_1 \leftarrow L_1 - 7L_3 \\ & y & & = & 4 \\ & & z & = & -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & +y & +7z & = & -1 \\ & y & & = & 4 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \\ & & z & = & -1 \end{cases}$$

ونحصل أخيراً على جملة مدرجة مختزلة:

$$\begin{cases} x & & & = & -1 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ & y & & = & 4 \\ & & z & = & -1 \end{cases}$$

هكذا نحصل على $x = -1$ و $y = 4$ و $z = -1$ الحل الوحيد للجملة الخطية.

4-2. حل الجمل الخطية Solving system of linear equations

مبرهنة 4 (حالة الجملة غير المتجانسة): لتكن لدينا جملة خطية غير متجانسة $AX = B$ مؤلفة من n معادلة ب p مجهول مصفوفتها الموسعة $(A|B)$:

1. نرد المصفوفة الموسعة $(A|B)$ إلى الشكل المدرج.
2. ليكن r عدد العناصر الرائدة في مصفوفة مدرجة مكافئة لمصفوفة الأمثال A.
3. ليكن r' عدد العناصر الرائدة في مصفوفة مدرجة مكافئة للمصفوفة $(A|B)$، وهو دوماً يحقق المتراجحة $r' \geq r$.

عندئذ تتحقق واحدة فقط من الحالات التالية:

a) $r = r' = p$، يكون للجملة في هذه الحالة حل وحيد.

b) $r = r' < n$، يكون للجملة في هذه الحالة عدد غير منته من الحلول ب $p - r$ مجهولاً اختيارياً.

c) $r \neq r'$، والجملة ليس لها حل.

مبرهنة 5 (حالة الجملة المتجانسة): لتكن لدينا جملة خطية متجانسة $AX = 0$ مؤلفة من n معادلة ب p مجهول مصفوفتها الموسعة $(A|0)$. باتباع خطوات المبرهنة السابقة، نلاحظ أنه لدينا دوماً في هذه الحالة $r = r'$، بالتالي نميز حالتين فقط:

a) $r = p$، للجملة حل وحيد هو الحل الصفري $x_1 = \ldots = x_p = 0$.

b) $r < p$، للجملة عدد غير منته من الحلول ب $p - r$ مجهولاً اختيارياً.

مثال 28: ما هو حل الجملة المتجانسة التالية:

$$\begin{cases} 2x & -3y & +5z & = & 0 \\ x & +y & -z & = & 0 \\ x & -y & +z & = & 0 \end{cases}$$

إن مصفوفة الأمثال هي: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$، نجري العملية $L_1 \leftrightarrow L_2$ نحصل على: $A : \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

نجري العملية $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ ومن ثم $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ نحصل على: $A : \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

أخيراً نجري العملية $L_2 \frac{2}{5} - L_3 \leftarrow L_3$ نحصل على: $A:\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$

نلاحظ أن $r = p = 3$، بالتالي للجملة حل وحيد هو الحل الصفري.

مثال 29: ما هو حل الجملة المتجانسة التالية: $\begin{cases} 3x_1 & +3x_2 & -2x_3 & & -x_5 & = & 0 \\ -x_1 & -x_2 & +x_3 & +3x_4 & +x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & +2x_2 & -x_3 & +2x_4 & +2x_5 & = & 0 \\ & & x_3 & +8x_4 & +4x_5 & = & 0 \end{cases}$

بعد العمليات الأولية نحصل على الشكل المدرج المختزل: $\begin{cases} x_1 & +x_2 & & & +13x_5 & = & 0 \\ & & x_3 & & +20x_5 & = & 0 \\ & & & x_4 & -2x_5 & = & 0 \end{cases}$

نلاحظ أن $p = 5$ و $r = 3$، بالتالي للجملة عدد غير منته من الحلول ب $5 - 3 = 2$ مجهولاً اختيارياً. لنختار x_2 و x_5 المجاهيل الاختيارية بالتالي: $x_1 = -x_2 - 13x_5$ و $x_3 = -20x_5$ و $x_4 = 2x_5$. أي أن مجموعة الحلول للجملة هي: $S = \{(-x_2 - 13x_5, x_2, -20x_5, 2x_5, x_5) | x_2, x_5 \in ، \}$.

2-5. حل الجمل الخطية بطريقة غوص Systems of linear equations gauss method

مبرهنة 6: إذا كانت $(A|B)$ المصفوفة الموسعة لجملة معادلات خطية وكانت $(A'|B')$ مصفوفة مدرجة مكافئة للمصفوفة $(A|B)$ فإن جملة المعادلات الخطية الموافقة للمصفوفة $(A'|B')$ تكافئ جملة المعادلات الخطية الموافقة للمصفوفة $(A|B)$.

خوارزمية طريقة غوص لحل جملة المعادلات الخطية $AX = B$

1. نرد المصفوفة $(A|B)$ إلى الشكل المدرج $H = (A'|B')$.
2. ليكن r عدد العناصر الرائدة في مصفوفة مدرجة مكافئة لمصفوفة الأمثال A.
3. ليكن r' عدد العناصر الرائدة في المصفوفة الموسعة $(A'|B')$.
4. إذا كان $r \neq r'$، عندها يظهر في المصفوفة الموسعة $(A'|B')$ سطر يكافئ المعادلة $0 = c$، حيث $c \neq 0$، وتكون الجملة مستحيلة الحل.
5. إذا كان $r = r'$، عندئذ نكتب جملة المعادلات الموافقة للمصفوفة الموسعة $(A'|B')$

6. نحل جملة المعادلات الناتجة بطريقة التعويض من الأسفل باتجاه الأعلى. نحصل على حلول الجملة المعطاة حيث تكون وحيدة الحل عندما $r = r' = p$، أو يكون لها عدد غير منته من الحلول في حالة $r = r' < p$، ونحلها بدلالة $p - r$ مجهولاً اختيارياً.

مثال 30: حل الجملة التالية: $\begin{cases} x & +2y & = & 5 \\ 2x & -y & = & 5 \\ 3x & +y & = & 5 \end{cases}$

المصفوفة الموسعة للجملة هي: $H = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{array}\right)$

نجري العملية $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ ومن ثم $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ نحصل على: $H : \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & -10 \end{array}\right)$

كما نجري العملية $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ نحصل على: $H : \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 2 & 5 \\ 0 & \boxed{-5} & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{-5} \end{array}\right)$

إذن $r = 2$ و $r' = 3$ والجملة مستحيلة الحل ($0 = -5$)، وبالتالي مجموعة الحلول $\mathcal{S} = \varnothing$.

مثال 31: حل الجملة التالية: $\begin{cases} 2x & -y & +4z & = & -3 \\ x & -2y & -10z & = & -6 \\ 3x & & +4z & = & 7 \end{cases}$

المصفوفة الموسعة للجملة هي: $H = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & -10 & -6 \\ 3 & 0 & 4 & 7 \end{array}\right)$

نجري العملية $L_1 \leftrightarrow L_2$ نحصل على: $H : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -10 & -6 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 3 & 0 & 4 & 7 \end{array}\right)$

نجري العملية $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ ومن ثم $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ نحصل على: $H : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -10 & -6 \\ 0 & 3 & 24 & 9 \\ 0 & 6 & 34 & 25 \end{array}\right)$

نجري العملية $L_2 \leftarrow 1/3L_2$ نحصل على: $H : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -10 & -6 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \\ 0 & 6 & 34 & 25 \end{array}\right)$

نجري العملية $L_3 \leftarrow L_3 - 6L_2$ نحصل على: $H : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -10 & -6 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & -14 & 7 \end{array}\right)$

نجري العملية $L_3 \leftarrow -1/14L_3$ نحصل على: $H : \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & -10 & -6 \\ 0 & \boxed{1} & 8 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1/2 \end{array}\right)$

إذن $r = r' = p = 3$، بالتالي للجملة حل وحيد. الجملة المكافئة هي:

$$\begin{cases} x & -2y & -10z & = & -6 \\ & y & +8z & = & 3 \\ & & +z & = & -1/2 \end{cases}$$

نعوض قيمة z في المعادلة الثانية نحصل على $y = 7$. ثم نعوض قيمتي y و z في المعادلة الأولى نحصل على $x = 3$.

بالتالي مجموعة الحلول هي: $\mathcal{S} = \left\{\left(3, 7, -\frac{1}{2}\right)\right\}$.

مثال 32: حل الجملة التالية: $\begin{cases} -3x & -5y & +36z & = & 10 \\ -x & & +7z & = & 5 \\ x & +y & -10z & = & -4 \end{cases}$

المصفوفة الموسعة للجملة هي: $H = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -5 & 36 & 10 \\ -1 & 0 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & -10 & -4 \end{array}\right)$

نجري العملية $L_1 \leftrightarrow L_3$ نحصل على: $H : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -10 & -4 \\ -1 & 0 & 7 & 5 \\ -3 & -5 & 36 & 10 \end{array}\right)$

نجري العملية $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ ومن ثم $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$ نحصل على: $H : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -10 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & -2 \end{array}\right)$

نجري العملية $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$ نحصل على: $H : \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -10 & -4 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

من الملاحظ أن $r = r' = 2$ و $p = 3$، إذن $r = r' < p$ وللجملة عدد غير منته من الحلول ب $3 - 2 = 1$ مجهولاً اختيارياً. الجملة المكافئة هي: $\begin{cases} x & +y & -10z & = & -4 \\ & y & -3z & = & 1 \end{cases}$

نحلها بطريقة التعويض بدلالة مجهول اختياري وليكن z: من المعادلة الثانية نجد $y = 3z + 1$، بالتعويض في المعادلة الأولى نجد أن: $x = 7z - 5$. إذن مجموعة الحلول للجملة المعطاة هي: $\mathcal{S} = \{(7z - 5, 3z + 1, z) | z \in \mathbb{R}\}$.

6-2. مقلوب مصفوفة والجمل الخطية Matrix inverse and systems of linear equations

ليكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \cdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

وجدنا سابقاً أنه يمكن كتابة الجملة الخطية المذكورة باستخدام المصفوفات على النحو التالي: $AX = B$، بحيث:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

نسمي $A \in M_{n,p}(K)$ مصفوفة أمثال الجملة الخطية. $B \in M_{n,1}(K)$ شعاع الطرف الثاني للجملة الخطية. الشعاع $X \in M_{p,1}(K)$ هو حل الجملة الخطية إذا وفقط إذا كان $AX = B$.

مبرهنة 7: جملة معادلات خطية لها فقط إما حل واحد أو عدد غير منته من الحلول أو أنها مستحيلة الحل.

فرضية 9: إذا كانت المصفوفة A قابلة للقلب فإن حل الجملة الخطية $AX = B$ وحيد يعطى بالعلاقة: $X = A^{-1}B$.

مبرهنة 8: ليكن لدينا المصفوفة $A \in M_{n,p}(K)$، يوجد مصفوفة مدرجة مختزلة وحيدة U نحصل عليها من A بعمليات أولية على الأسطر.

مبرهنة 9: ليكن لدينا المصفوفة $A \in M_n(K)$. تكون المصفوفة A قابلة للقلب إذا وفقط إذا كان شكلها المدرج المختزل هو المصفوفة الواحدية I_n.

ملاحظة 9: وجدنا سابقاً أنه من أجل الحصول على مقلوب مصفوفة A، نشكل المصفوفة الموسعة $(A | I)$، ومن ثم نقوم بمجموعة من التحويلات السطرية الأولية على المصفوفة الموسعة $(A | I)$ إلى أن نحصل في النهاية على المصفوفة الموسعة $(I | B)$. وتكون في هذه الحالة $B = A^{-1}$.

فرضية 10: إن التعابير الثلاثة التالية متكافئة:

1. المصفوفة A قابلة للقلب
2. جملة المعادلات الخطية المتجانسة $AX = 0$ له حل وحيد هو الحل الصفري (البديهي).
3. من أجل أي طرف ثاني B، جملة المعادلات الخطية $AX = B$ لها حل وحيد X.

مثال 33: بين فيما إذا كانت المصفوفة التالية قابلة للقلب $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 12 \end{pmatrix}$

لنكتب المصفوفة الموسعة: $(A\,|\,I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

نجري العملية $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ ومن ثم $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$ نحصل على:

$$(A\,|\,I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -12 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & -12 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

نجري العملية $L_2 \leftarrow -1/11L_2$ نحصل على: $(A\,|\,I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{12}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & 0 \\ 0 & -11 & -12 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$

نجري العملية $L_3 \leftarrow L_3 + 11L_2$ نحصل على: $(A\,|\,I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{12}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$

نجري العملية $L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2$ نحصل على: $(A\,|\,I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{18}{11} & \frac{3}{11} & \frac{4}{11} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{12}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$

هذا ويمكن ملاحظة أنه ومن الخطوة السابقة لا يمكن الحصول على المصفوفة الموسعة $(I\,|\,B)$ انطلاقاً من المصفوفة الموسعة $(A\,|\,I)$ وذلك بالقيام بمجموعة من العمليات الأولية. بالتالي المصفوفة A غير قابلة للقلب.

3. المصفوفات والتطبيقات الخطية Matrix and linear application

رتبة مصفوفة

تعريف 19: نعرف رتبة مصفوفة $A \in M_{n,p}$ على أنها رتبة أشعة أعمدتها. أي أن $rg\ A = \dim Vect(v_1, \ldots, v_p)$، حيث $(v_1, \ldots, v_p)$ هي أعمدة المصفوفة A.

مثال 34: ماهي رتبة المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

من الواضح أن كل الأشعة مرتبطة بالشعاع $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$، بالتالي فإن رتبة المصفوفة $rg\ A = 1$.

رتبة مصفوفة قابلة للقلب

مبرهنة 10: مصفوفة مربعة A حجمها n قابلة للقلب إذا وفقط إذا كانت رتبتها تساوي n.

فرضية 11: رتبة مصفوفة $A \in M_{n,p}$ هي أيضاً رتبة أشعة أسطرها. أي أن $rg\ A = \dim Vect(w_1, \ldots, w_n)$، حيث أن $(w_1, \ldots, w_n)$ هي أسطر المصفوفة A.

نتيجة 1: الفضاء الشعاعي المولد من أشعة أعمدة مصفوفة والفضاء الشعاعي المولد من أشعة أسطرها لهما نفس البعد. بمعنى آخر لدينا $rg\ A = rg\ {}^tA$.

3-1. تطبيق خطي في فضاء منتهي البعد Linear application in a finite dimensional vector spaces

مبرهنة 11: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K. بفرض أن الفضاء الشعاعي E ذو بعد منتهي n وأن الأشعة $(e_1, \ldots, e_n)$ تشكل قاعدة في E. بالتالي من أجل أي جملة n شعاع $(v_1, \ldots, v_n)$ من F، يوجد تطبيق خطي وحيد $f: E \to F$، بحث أنه من أجل كل $i = 1, \ldots, n$: $f(e_i) = v_i$.

ملاحظة 10: المبرهنة السابقة لا تضع أي شرط على بعد الفضاء الشعاعي F.

مثال 35: يوجد تطبيق خطي وحيد $f: \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^3$ بحيث: $f(e_1) = e_2$ و $f(e_2) = e_3$ و $f(e_3) = e_1 + e_2$ ((e_1, e_2, e_3) القاعدة القانونية في $\mathcal{R}^3$).

من أجل أي عنصر $(x, y, x) \in \mathcal{R}^3$:

$$f(x, y, z) = f(xe_1+ye_2+ze_3) = f(xe_1) + f(ye_2) + f(ze_3) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3)$$

$= xe_2 + ye_3 + z(e_1+e_2) = x(0, 1, 0) + y(0, 0, 1) + z(1, 1, 0)$

$= (z, x+z, y)$

2-3. مصفوفة تطبيق خطي Matrix of a linear application

المصفوفة المرتبطة بتطبيق خطي

ليكن E و F فضاءين شعاعيين منتهيي البعد على الحقل K. ليكن p بعد الفضاء E و $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ قاعدة في E. ليكن n بعد الفضاء F و $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ قاعدة في F. وليكن أخيراً $f: E \to F$ تطبيقاً خطياً. إن خواص التطبيقات الخطية بين فضاءين شعاعيين تؤكد ما يلي:

- التطبيق الخطي معرف وبطريقة وحيدة عن طريق صورة قاعدة في E، أي ب $f(e_1), f(e_2), \ldots f(e_p)$.
- من أجل $j \in \{1, \ldots, p\}$، $f(e_j)$ هو شعاع من F وبالتالي يُكتب وبطريق وحيدة كتركيب خطي من أشعة القاعدة $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ في F. بالتالي يوجد n سلمي وحيدين $a_{1,j}, a_{2,j}, \ldots, a_{n,j}$ بحيث:

$$f(e_j) = a_{1,j} f_1 + a_{2,j} f_2 + \ldots + a_{n,j} f_n = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}_{B'}$$

بالتالي التطبيق f معرف كلياً بمعرفة الأمثال $(a_{i,j})$، $i \in \{1, \ldots, n\}$ و $j \in \{1, \ldots, p\}$.

تعريف 20: مصفوفة التطبيق الخطي f بالنسبة للقاعدتين $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ هي المصفوفة $(a_{i,j}) \in M_{n,p}(K)$، حيث الشعاع ذو الرتبة j يتألف من إحداثيات (مركبات) الشعاع $f(e_j)$ في القاعدة $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$:

$$\begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \ldots & f(e_j) & \ldots & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & & a_{2,j} & \ldots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & & a_{n,j} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

ملاحظة 11: حجم المصفوفة $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ يعتمد فقط على بعدي الفضاءين الشعاعيين E و F. بالمقابل أمثال المصفوفة يعتمد على اختيار القاعدة $\mathcal{B}$ في E والقاعدة $\mathcal{B}'$ في F.

مثال 36: أوجد مصفوفة التطبيق الخطي $f: \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^2$ المعرف ب $f(x, y, z) = (x+y-z, x-2y+3z)$. بالنسبة للقاعدة القانونية $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ في $\mathcal{R}^3$ والقاعدة القانونية $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2\}$ في $\mathcal{R}^2$. أي:

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\quad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\quad e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\qquad f_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad f_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 1) = f_1 + f_2$

بالتالي الشعاع الأول من المصفوفة $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ هو $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

$f(e_2) = f(0, 1, 0) = (1, -2) = f_1 - 2f_2$

بالتالي الشعاع الأول من المصفوفة $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ هو $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

$f(e_3) = f(0, 0, 1) = (-1, 3) = -f_1 + 3f_2$

بالتالي الشعاع الأول من المصفوفة $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ هو $\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$. وهكذا فإن:

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\1 & -2 & 3\end{pmatrix}$$

مثال 37: أوجد مصفوفة التطبيق الخطي السابق f بالنسبة للقاعدتين $\mathcal{B}_0 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ في $\mathcal{R}^3$ والقاعدة $\mathcal{B}'_0 = \{\phi_1, \phi_2\}$ في $\mathcal{R}^2$:

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\quad \varepsilon_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\quad \varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\qquad \phi_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad \phi_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$f(\varepsilon_1) = f(1, 1, 0) = (2, -1) = 3\phi_1 - \phi_2,\ f(\varepsilon_2) = f(1, 0, 1) = (0, 4) = -4\phi_1 + 4\phi_2$

$f(\varepsilon_3) = f(0, 1, 1) = (0, 1) = -\phi_1 + \phi_2$

بالتالي فإن:

$$Mat_{B_0,B_0'}=\begin{pmatrix}3 & -4 & -1\\-1 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

العمليات على التطبيقات الخطية والمصفوفات

فرضية 12: ليكن f, g تطبيقان خطيان من E إلى F، ولتكن $\mathcal{B}$ قاعدة في E و $\mathcal{B}'$ قاعدة في F. عندئذ:

- $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f + g) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) + Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$
- $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda f) = \lambda Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$

فرضية 13: ليكن $f: E \to F$ و $g: F \to G$ تطبيقان خطيان ولتكن $\mathcal{B}$ قاعدة في E و $\mathcal{B}'$ قاعدة في F و $\mathcal{B}''$ قاعدة في G. عندئذ:

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \text{ x } Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$$

بمعنى آخر ليكن: $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ و $B = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$ و $C = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f)$ فإن $C = B \text{ x } A$.

مثال 38: ليكن $E = \mathcal{R}^2$ قاعدته $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ و $F = \mathcal{R}^3$ قاعدته $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2, f_3\}$ و $G = \mathcal{R}^2$ قاعدته $\mathcal{B} = \{g_1, g_2\}$. وليكن $f: \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^3$ و الخطي $g: \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^2$ وبفرض أن:

$$A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3,2} \qquad B = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2,3}$$

احسب المصفوفة $g \circ f: E \to G$، $C = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f)$ بطريقتين مختلفتين.

الطريقة الأولى: علينا أن نعبر عن $g \circ f(e_j)$ بدلالة القاعدة $\{g_1, g_2\}$

$$g \circ f(e_1) = g(f(e_1) = g(1f_1 + 1f_2 + 0f_3) = g(f_1 + f_2) = g(f_1) + g(f_2)$$

$$g \circ f(e_1) = (2g_1 + 3g_2) + (-g_1 + g_2) = g_1 + 4g_2$$

$$g \circ f(e_2) = g(f(e_1) = g(0f_1 + 1f_2 + 2f_3) = g(f_2 + 2f_3) = g(f_2) + 2g(f_3)$$

$$g \circ f(e_2) = (-g_1 + g_2) + 2(0g_1 + 2g_2) = -g_1 + 5g_2$$

بالتالي: $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

الطريقة الثانية: $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = C = B \text{ x } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

مصفوفة أندومورفيزم

في هذه الحالة $E = F$، $f: E \to E$. إذا كان $\dim E = n$ فإن مصفوفة f هي مصفوفة مربعة حجمها $n \text{ x } n$. حالتان: الأولى إذا اخترنا نفس القاعدة $\mathcal{B}$ في المنطلق والمستقر نرمز ب $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ لمصفوفة f. الحالة الثانية يمكن اختيار قاعدتين مختلفتين في نفس الفضاء E، نرمز عندها لمصفوفة f ب $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

أمثلة 39:

- التطبيق الواحدي $id: E \to E$ المعرف ب $id(x) = x$، مهما كانت القاعدة $\mathcal{B}$ في E فإن: $Mat_{\mathcal{B}}(id) = I_n$.
(ليس صحيحاً إذا كانت قاعدة المنطلق مختلفة عن قاعدة المستقر).

- تطبيق التحاكي $h_\lambda: E \to E$ المعرف ب $h_\lambda(x) = \lambda.x$، $\lambda \in K$: $Mat_{\mathcal{B}}(h_\lambda) = \lambda I_n$.
- تطبيق التناظر المركزي $s: E \to E$ المعرف ب $s(x) = -x$: $Mat_{\mathcal{B}}(s) = -I_n$.
- تطبيق الدوران بزاوية θ حول المبدأ في الفضاء الشعاعي $\mathcal{R}^2$ مزود بالقاعدة القانونية $\mathcal{B}$. $r_\theta: \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$ المعرف ب $r_\theta(x, y) = (x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta)$: $Mat_{\mathcal{B}}(r_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

نتيجة 2: ليكن E فضاء شعاعي بعده منتهي و $\mathcal{B}$ قاعدة في E. ليكن $f: E \to E$ تطبيق خطي. عندئذ مهما كان p عدد طبيعي فإن: $Mat_{\mathcal{B}}(f^p) = (Mat_{\mathcal{B}}(f))^p$. بمعنى آخر إذا كانت A مصفوفة f، بالتالي فإن مصفوفة التطبيق $f^p = f \circ f \circ \ldots \circ f$ هي المصفوفة $A^p = A \times A \times \ldots \times A$.

مثال 40: ليكن r_θ مصفوفة الدوران بزاوية θ في الفضاء $\mathcal{R}^2$. فإن مصفوفة r_θ^p هي:

$$Mat_{\mathcal{B}}(r_\theta^p) = (Mat_{\mathcal{B}}(r_\theta))^p = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^p$$

يمكن البرهان على أن: $Mat_{\mathcal{B}}(r_\theta^p) = \begin{pmatrix} \cos(p\theta) & -\sin(p\theta) \\ \sin(p\theta) & \cos(p\theta) \end{pmatrix}$، وهي مصفوفة دوران بزاوية $p\theta$.

مصفوفة إيزومورفيزم

مبرهنة 12: ليكن E و F فضاءين شعاعيين نفس البعد المنتهي على الحقل K. $f: E \to F$ تطبيق خطي. لتكن $\mathcal{B}$ قاعدة في E و $\mathcal{B}'$ قاعدة في F و $A = Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$.

1. التطبيق f تقابل إذا وفقط إذا كانت المصفوفة قابلة للقلب. بمعنى آخر f إيزومورفيزم إذا وفقط إذا كانت مصفوفته $Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ قابلة للقلب.
2. بالإضافة إلى ذلك، إذا كان $f: E \to F$ تقابل فإن مصفوفة التطبيق الخطي $f^{-1}: F \to E$ هي A^{-1}. بمعنى آخر: $Mat_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f^{-1}) = (Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f))^{-1}$.

نتيجة 3: $f: E \to E$ أندومورفيزم $\mathcal{B}$ نفس القاعدة في المنطلق والمستقر و $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$:

- f تقابل إذا وفقط إذا كانت A قابلة للقلب.
- إذا كان f تقابل فإن مصفوفة f^{-1} بالنسبة للقاعدة $\mathcal{B}$ هي A^{-1}. بمعنى آخر $Mat_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (Mat_{\mathcal{B}}(f))^{-1}$.

4. المحددات Determinants

تعريف 21: المحدد هو تطبيق $\det: M_n(K) \to K$، بحيث أنه يُلحق بكل مصفوفة مربعة من $M_n(K)$ سلمي (عدد) من الحقل K.

4-1. المحددات في البعد 2x2 و3x3: Determinant 2x2 and 3x3

محدد مصفوفة 2 x 2

يتم حساب محدد مصفوفة 2 x 2 بالطريقة التالية: $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

مثال 41: $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 2(3) - 1(-1) = 6 + 1 = 7$ $\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = 2(9) - 3(6) = 18 - 18 = 0$

ملاحظة 12: إذا كان محدد مصفوفة A يساوي الصفر فإننا نسمي المصفوفة بالشاذة.

محدد مصفوفة 3 x 3

لتكن المصفوفة $A \in M_3(K)$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$، فإن محدد المصفوفة A يعطى بالعلاقة:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{23}a_{32})$$

يوجد طريقة سهلة لإيجاد محدد مصفوفة 3 x 3 تسمى قاعدة سايروس: نكرر العمود الأول والعمود والثاني، ثم نجد حاصل ضرب الأقطار الرئيسية ونطرح منها حاصل ضرب الأقطار المرافقة كما يلي:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

مثال 42: أوجد محدد المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

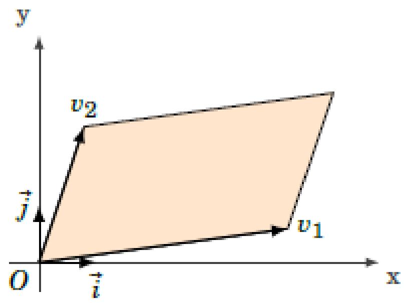
بتطبيق قاعدة سايروس $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$:

$\det A = 2x(-1)x1+1x3x3+0x1x2 - (3x(-1)x0+2x3x2+1x1x1) = 7 - 13 = -6$

التفسير الهندسي للمحدد

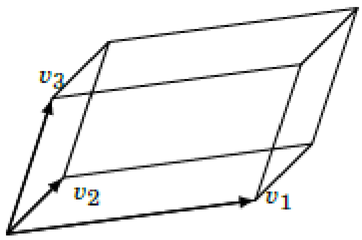
سنرى أن المحدد في المستوي يمثل المساحة وفي الفراغ يمثل الحجم.

ليكن لدينا الشعاعين $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ و $v_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ في $\mathcal{R}^2$. يمثل الشعاعين v_1 و v_2 في المستوي متوازي أضلاع:



فرضية 14: مساحة متوازي الأضلاع تعطى بالقيمة المطلقة للمحدد: $\mathcal{A} = \left|\det(v_1, v_2)\right| = \left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right|$.

بنفس الطريقة ليكن لدينا ثلاثة أشعة $v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$ و $v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$ و $v_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ في في $\mathcal{R}^3$ تمثل الأشعة v_1 و v_2 و v_3 في الفراغ متوازي مستطيلات:



فرضية 15: حجم متوازي المستطيلات تعطى بالعلاقة: $\mathcal{V} = \left|\det(v_1, v_2, v_3)\right| = \left|\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right|$.

مثال 43: أوجد مساحة متوازي الأضلاع المحدد بالشعاعين: $v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ و $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{A} = = \left|\det\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right| = 28 - 3 = 25.$$

مثال 44: أوجد مساحة متوازي المستطيلات المحدد بالأشعة: $v_1=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ و $v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$ و $v_3=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$

$$\mathcal{V} = = \left|\det\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&3\\1&4&1\end{pmatrix}\right| = |2+3+4-(1+1+24)| = |9-26| = 17$$

2-4. حساب المحددات Evaluating determinants

العامل المرافق cofactor

تعريف 22: لتكن المصفوفة المربعة $A=(a_{i,j})\in M_3(K)$:

- نرمز ب A_{ij} للمصفوفة الناتجة عن عن حذف السطر i والعمود j من المصفوفة A.
- نسمي $\det A_{ij}$ صغير المصفوفة A ذو الرتبة $n-1$.
- نسمي العدد (السلمي) $C_{ij}=(-1)^{i+j}\det A_{ij}$ العامل المرافق ل A بالنسبة للعنصر a_{ij}.

مثال 45: لتكن $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. احسب $A_{11}, C_{11}, A_{32}, C_{32}$.

$$A_{11}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix} \qquad C_{11}=(-1)^{1+1}\det A_{11}=+1$$

$$A_{32}=\begin{pmatrix}1&3\\4&1\end{pmatrix} \qquad C_{11}=(-1)^{3+2}\det A_{32}=(-1)(-11)=+11$$

النشر حسب السطر أو العمود

مبرهنة 13:

النشر حسب السطر i: $\det A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}C_{ij}$

النشر حسب العمود j: $\det A=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A_{ij}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}C_{ij}$

ملاحظة 13: يتم النشر حسب السطر أو العمود الذي يحوي أصفراً أكثر.

ISSN: 2617-989X

مثال 46: أوجد محدد المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

لننشر حسب العمود الأول على سبيل المثال:

$$\det A = 1xC_{11} + 4xC_{21} + 0xC_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (2-1) - 4(2-3) = 5$$

مثال 47: أوجد محدد المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

لننشر حسب العمود الثاني (يحوي على صفرين):

$$\det A = 0xC_{12} + 2xC_{22} + 3xC_{32} + 0xC_{42} = +2\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

نعيد النشر لكل محدد 3 x 3:

حسب العمود الأول $= +2\left(+4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right)$

حسب السطر الثاني $-3\left(-4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right)$

$$= +2(+4 \text{ x } 5 - 0 + 1 \text{ x } (-4)) - 3(-4 \text{ x } 7 + 1 \text{ x } 11 - 0) = 83$$

3-4. خواص المحددات Determinant properties

مبرهنة 14: محدد المصفوفة الواحدية I_n يساوي الواحد، أي $\det I_n = 1$. ومحدد المصفوفة الصفرية 0_n يساوي الصفر، أي $\det 0_n = 0$.

مبرهنة 15: إذا كانت عناصر أحد الصفوف أو الأعمدة أصفار فإن قيمة المحدد تساوي الصفر.

مثال 48: $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$ (العمود الثالث أصفار)

فرضية 16: لتكن المصفوفة المربعة $A = (a_{i,j}) \in M_n(K)$ أعمدتها $C_1, C_2, \ldots, C_n$. نرمز 'A للمصفوفة التي نحصل عليها بالعمليات الأولية على الأعمدة:

1. $C_i \leftarrow \lambda C_i$ و $\lambda \neq 0$: ضرب العمود C_i بعدد حقيقي مختلف عن الصفر. عندئذ $\det A' = \lambda \det A$.

2. $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ و $\lambda \in K$ و $i \neq j$: ضرب العمود C_j بعدد حقيقي وإضافته إلى العمود C_i. عندئذ $\det A' = \det A$

3. $C_i \leftrightarrow C_j$: التبديل بين العمود C_i والعمود C_j. عندئذ $\det A' = -\det A$.

مثال 49: إذا كان $5 = \det\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ فإن:

$15 = 3 \times 5 = \det\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & 12 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (لأن العمود الثالث = 3 أمثال العمود الثالث للمصفوفة السابقة).

وأن: $-5 = \det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (تم تبديل العمودين الثاني والثالث).

نتيجة 4: $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

نتيجة 5: إذا كان العمود C_i من المصفوفة تركيب خطي من الأعمدة الأخرى فإن $\det A = 0$. وبشكل خاص إذا تساوت عناصر عمودين في المصفوفة فإن قيمة المحدد تساوي الصفر.

مثال 50: $0 = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

محددات مصفوفات خاصة

فرضية 17: محدد مصفوفة مثلثية عليا أو سفلى يساوي حاصل جداء عناصر القطر الرئيسي.

مثال 51: $3 = 1 \times 1 \times 3 = \det\begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ و $24 = 2 \times 3 \times 4 = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 9 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

نتيجة 6: محدد مصفوفة قطرية يساوي حاصل جداء عناصر قطرها الرئيسي.

مثال 52: $-6 = -1 \times 2 \times 3 = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

محدد جداء مصفوفتين

مبرهنة 16: لتكن $A, B \in M_n(K)$ فإن: $\det(AB) = \det A \times \det B$

مثال 53: ليكن $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ فإن $AB = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$

$\det A = -10 - 3 = -13$ و $\det B = 6 - 0 = 6$ و $\det(AB) = -84 + 6 = -78$

من الواضح أن: $-13 \times 6 = -78$.

محدد مقلوب مصفوفة

فرضية 18: مصفوفة مربعة قابلة للقلب إذا وفقط إذا كان محددها يختلف عن الصفر. وإذا كانت قابلة للقلب فإن:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

محدد منقول مصفوفة

فرضية 19: محدد منقول مصفوفة مربعة هو: $\det({}^tA) = \det A$.

ملاحظة 14: اعتماداً على الفرضية السابقة، كل الخواص التي ذكرناها في المحددات بالنسبة للأعمدة هي صحيحة بالنسبة للأسطر أيضاً.

مثال 54: لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ فإن ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

$$\det A = 48 + 105 - (96 + 84) = -27$$

$$\det({}^tA) = 48 + 105 - (96 + 84) = -27$$

4-4. طريقة كرامر في حل جملة معادلات خطية Cramer's rule for solving system of linear equations

ليكن لدينا جملة المعادلات الخطية n معادلة ب n مجهول:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

يمكن كتابة جملة المعادلات هذه باستخدام المصفوفات على النحو التالي: $AX = B$، بحيث:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in M_n(K), \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

لنعرف المصفوفة $A_j \in M_n(K)$ على الشكل التالي:

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

بمعنى آخر المصفوفة A_j هي المصفوفة A بعد استبدال العمود ذو الرتبة j بالطرف الثاني B لجملة المعادلات الخطية. طريق كرامر تسمح لنا بحساب حل جملة المعادلات الخطية في حالة $\det A \neq 0$ بدلالة محددات المصفوفتين A و A_j.

مبرهنة 17: ليكن $AX = B$ جملة معادلات خطية n معادلة ب n مجهول. ليكن $\det A \neq 0$، عندئذ الحل الوحيد للجملة $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ يعطى بالعلاقة:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} \qquad \cdots \qquad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

مثال 55: حل جملة المعادلات الخطية

$$\begin{cases} x & & +2z & = & 6 \\ -3x & +4y & +6z & = & 30 \\ -x & -2y & +3z & = & 8 \end{cases}$$

لدينا:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

وأن: $\det A = 44$ $\quad \det A_1 = -40$ $\quad \det A_2 = 72$ $\quad \det A_3 = 152$

بالتالي: $z = \dfrac{\det A_3}{\det A} = \dfrac{152}{44} = \dfrac{38}{11}$ $\quad y = \dfrac{\det A_2}{\det A} = \dfrac{72}{44} = \dfrac{18}{11}$ $\quad x = \dfrac{\det A_1}{\det A} = -\dfrac{40}{44} = -\dfrac{10}{11}$.

المحدد وقاعدة فضاء شعاعي

مبرهنة 18: ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K بعده n، وليكن $v_1, v_2, \ldots, v_n$، n شعاع من E. لتكن A المصفوفة التي أعمدتها مكونة من إحداثيات الأشعة بالنسبة إلى قاعدة $\mathcal{B}$ في E. تشكل الأشعة $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ قاعدة في E إذا وفقط إذا كان $\det A \neq 0$.

نتيجة 7: تشكل جملة الأشعة (n شعاع) من $\mathcal{R}^n$ $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ قاعدة في $\mathcal{R}^n$ إذا وفقط إذا كان $\det(a_{ij}) \neq 0$.

مثال 56: من أجل أي قيم ل $a, b \in \mathcal{R}$ تشكل الأشعة $\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ قاعدة في $\mathcal{R}^3$.

لنحسب المحدد: $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & b & 0 \\ b & 0 & a \end{vmatrix} = -a^3 - b^3$. عندما تكون $a^3 \neq -b^3$ (المحدد يختلف عن الصفر)، تشكل الأشعة الآنفة الذكر قاعدة في $\mathcal{R}^3$. ($a = -b \Leftrightarrow a^3 = -b^3$).

صغائر minors مصفوفة

تعريف 23: لتكن $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(K)$ مصفوفة مؤلفة من n سطر و p عمود. ليكن k عدد طبيعي أصغر من n و p. نسمي صغير رتبته k محدد مصفوفة مربعة حجمها k نحصل عليها من A بعد حذف $n - k$ سطر و $p - k$ عمود.

مثال 57: لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

- صغير من المرتبة 1 هو بكل بساطة عنصر من المصفوفة A.
- صغير من المرتبة 2 هو محدد مصفوفة 2 x 2 مستخرجة من A. على سبيل المثال الحفاظ على السطرين 1 و 3 والعمودين 2 و 4 نحصل على المصفوفة $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. صغير من المرتبة 2 للمصفوفة A هو $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6$.

- صغير من المرتبة 3 هو محدد مصفوفة 3 x 3 مستخرجة من A. على سبيل المثال الحفاظ على الأعمدة ,1 ,3 4 نحصل على صغير من المرتبة 3 للمصفوفة A هو $\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\1 & 1 & 7\\0 & 6 & 5\end{vmatrix}=-28$.
- لا يوجد أي صغير من المرتبة 4 (المصفوفة لا تحوي إلا 3 اسطر).

حساب رتبة مصفوفة

مبرهنة 19: رتبة مصفوفة $A \in M_{n,p}(K)$ هو أكبر عدد طبيعي r حيث يوجد صغير مصفوفة من الرتبة r مستخلص من المصفوفة A لا يساوي الصفر.

مثال 58: ليكن a عدد حقيقي. احسب رتبة المصفوفة $A \in M_{3,4}(\mathcal{R})$:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\1 & 2 & 3 & 1\\1 & 1 & a & 1\end{pmatrix}$$

- من الواضح أن الرتبة لا يمكن ان تكون 4، لأن 4 أشعة من $\mathcal{R}^3$ لا يمكن أن تكون مستقلة.
- نحصل على صغار مصفوفة من المرتبة الثالثة بحذف عمود واحد. لنأخذ على سبيل المثال صغير من المرتبة 3 بحذف العمود الأول من المصفوفة ومن ثم نقوم بنشره حسب العمود الأول:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 3 & 1\\1 & a & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 1\\a & 1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2 & 1\\a & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 1\\3 & 1\end{vmatrix}=a-2$$

بالتالي من أجل $a \neq 2$، صغير المصفوفة من المرتبة 3 لا يساوي الصفر، بالتالي رتبة المصفوفة A هي 3.

- من أجل $a = 2$، يمكننا التحقق من أن صغار المصفوفة A الأربعة جميعها تساوي الصفر:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 3 & 1\\1 & 2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 3 & 1\\1 & 2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\1 & 2 & 3\\1 & 1 & 2\end{vmatrix}=0$$

بالتالي في هذه الحالة، رتبة المصفوفة A هي أصغر أو تساوي 2. وبما أن $\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{vmatrix}=1$ هو صغير من الرتبة الثانية مختلف عن الصفر. إذن من أجل $a = 2$ رتبة المصفوفة A هي 2.

فرضية 20: رتبة مصفوفة A تساوي رتبة منقولها ${}^tA$.

أسئلة الفصل

1. ليكن $A=\begin{pmatrix}-7 & 2\\ 0 & -1\\ 1 & -4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}21 & -6\\ 0 & 3\\ -3 & 12\end{pmatrix}, D=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. احسب كل من $3A+2C$ و $5B-4D$. أوجد a بحيث $A-aC$ يساوي المصفوفة الصفرية.

2. ليكن $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$. احسب كل من A^2, B^2, AB, BA.

3. ليكن $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$. احسب كل من A^p, B^p من أجل $p \geq 0$. أثبت أن $AB=BA$. احسب $(A+B)^p$.

4. ليكن $A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$. احسب كل من $A^{-1}, B^{-1}, (BA)^{-1}, A^{-2}$.

5. احسب مقلوب المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$

6. اجعل المصفوفات التالية مدرجة $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 0\\ -2 & -2 & -3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}$

7. ماهي رتبة الأشعة التالية بدلالة t العدد الحقيقي: $\left(\begin{pmatrix}1\\ t\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}t\\ 1\\ t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ 1\\ t\end{pmatrix}\right)$

8. احسب رتبة المصفوفة $\begin{pmatrix}2 & 4 & -5 & -7\\ -1 & 3 & 1 & 2\\ 1 & a & -2 & b\end{pmatrix}$ بدلالة a و b

9. حل الجمل الخطية التالية حسب قيمة الوسيط t: $\begin{cases}4x-3y=t\\ 2x-y=t^2\end{cases}$ و $\begin{cases}tx-y=1\\ x+(t-2)y=-1\end{cases}$

10. حل الجملة الخطية التالية: $\begin{cases}x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\\ \quad\; x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 9\\ \qquad\quad x_3 \quad 2x_4 = 0\end{cases}$

11. حل الجملة التالية باستخدام طريقة غوص: $\begin{cases} 2x & +y & +z & = & 3 \\ x & -y & +3z & = & 8 \\ x & +2y & -z & = & -3 \end{cases}$

12. لتكن (e_1, e_2, e_3) القاعدة القانونية في $\mathcal{R}^3$. أوجد $f(x, y, z)$ حيث $f: \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^3$ تطبيق خطي بحيث $f(e_1) = -e_1$ و $f(e_2) = e_1 + e_3$ و $f(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$.

13. احسب محدد المصفوفات التالية: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

14. احسب مساحة متوازي الأضلاع المعرف بالشعاعين $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

15. احسب مساحة متوازي المستطيلات المعرف بالأشعة $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

16. بالنشر حسب سطر أو عمود، احسب المحددات التالية: $\begin{vmatrix} t & 0 & 1 & 0 \\ 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

17. من أجل أي قيم حقيقية ل a و b تشكل الأشعة التالية قاعدة في $\mathcal{R}^3$ $\begin{pmatrix} 3a \\ 1 \\ -2b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2a \\ 1 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$

18. احسب رتبة المصفوفة تبعاً للقيم الحقيقية a و b: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

تمارين إضافية

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة

1. ضرب المصفوفتين AB حيث $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ هو:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -12 & -6 \\ 25 & 9 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} \mathbf{-6} & \mathbf{-12} \\ \mathbf{9} & \mathbf{25} \end{pmatrix}$ d) غير معرف

2. مقلوب المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ هو:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ d) غير معرف

3. مقلوب المصفوفة $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$ هو:

a) $\begin{pmatrix} -4 & 12 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$ **d) غير معرف**

4. محدد المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a) 6 b) -6 c) 24 d) 36

5. جملة المعادلات الخطية $\begin{cases} tx - 5ty = 3 \\ 3x - 15ty = 5 \end{cases}$ لها حل واحد من أجل قيم t:

a) $t \neq 1$ **b)** $\mathbf{t \not\in \{0, 1\}}$ c) $t \not\in \{-1,1\}$ d) $t \neq 0$

6. مصفوفة عدد عناصرها 60 عنصر، أي من الأرقام التالية لا يمكن أن يكون عدد أسطرها:

a) 20 b) 60 c) 30 **d) 18**

7. حل المعادلة $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ هو:

a) $\begin{pmatrix} 20 \\ 16 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} \mathbf{-20} \\ \mathbf{-16} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 20 \\ -16 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

8. ضرب المصفوفتين AB حيث $B=\begin{pmatrix}-6\\8\\2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & -8\end{pmatrix}$ هو:

a) $\mathbf{(12)}$ b) $\begin{pmatrix}2 & -6\\5 & 8\\-8 & 2\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}2 & 5 & -8\\-6 & 8 & 2\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}-12\\40\\-16\end{pmatrix}$

9. المصفوفة $\begin{pmatrix}1 & x\\1 & x^2\end{pmatrix}$ تكون شاذة عندما:

a) $x \neq 1$ **b)** $\mathbf{x \notin \{0, 1\}}$ c) $x \notin \{-1,1\}$ d) $x \neq 0$

10. مجموع المصفوفتين $\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ هو:

a) غير معرف b) $\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{pmatrix}$ d) (5)

السؤال الثاني: أجب بصح أو خطأ

1. المصفوفة $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 0 & 4\\0 & 0 & 5\end{pmatrix}$ لها مقلوب — صح أو **خطأ**

2. المصفوفة $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 5\end{pmatrix}$ لها مقلوب — **صح** أو خطأ

3. جملة المعادلات الخطية $\begin{cases}x-y=2\\3x-2y=9\end{cases}$ لها حل واحد — **صح** أو خطأ

4. جملة المعادلات الخطية $\begin{cases}x-y=2\\3x-3y=6\end{cases}$ ليس لها حلول — صح أو **خطأ**

5. جملة المعادلات الخطية $\begin{cases}x-y=1\\4x-4y=5\end{cases}$ لها عدد لانهائي من الحلول — صح أو **خطأ**

6. المعادلة $x+(\ln\pi)y+(\sqrt{\pi})z=2$ هي خطية — **صح** أو خطأ

7. رتبة المصفوفة $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\-1 & 3 & 2\\2 & -3 & -1\end{pmatrix}$ هي 3 — صح أو **خطأ**

8. مساحة متوازي الأضلاع المحدد بالشعاعين $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ هو 5 — صح أو خطأ

9. مساحة متوازي الأضلاع المحدد بالشعاعين $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix}$ هو 24 — صح أو خطأ

10. المصفوفة $\begin{pmatrix}1 & -a\\ a & b^2\end{pmatrix}$ لها دوما مقلوب مهما كانت قيمة كل من a و b — صح أو خطأ

السؤال الثالث:

أوجد مصفوفة التطبيق الخطي $f: \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^3$ المعرف ب $f(x, y, z) = (y+z, x+z, x+y)$. بالنسبة للقاعدة $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{f_1, f_2, f_3\}$ في المنطلق والقاعدة القانونية $\boldsymbol{\mathcal{B}}' = \{e_1, e_2, e_3\}$ في المستقر:

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad f_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad f_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad f_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

الحل:

$$f(f_1) = f(1, 1, 1) = (2, 2, 2) = 2e_1 + 2e_2 + 2e_3$$

بالتالي الشعاع الأول من المصفوفة $Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ هو $\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$.

$$f(f_2) = f(1, 1, 0) = (1, 1, 2) = 1e_1 + 1e_2 + 2e_3$$

بالتالي الشعاع الأول من المصفوفة $Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ هو $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

$$f(f_3) = f(1, 0, 0) = (0, 1, 1) = 0e_1 + 1e_2 + 1e_3$$

بالتالي الشعاع الأول من المصفوفة $Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ هو $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. وهكذا فإن:

$$Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

السؤال الرابع:

حل جملة المعادلات الخطية

$$\begin{cases} x \quad\quad +2z = 7 \\ \quad -y \quad\quad = -2 \\ x \quad +y \quad +z = 6 \end{cases}$$

الحل:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

وأن: $\det A = 1 \qquad \det A_1 = 1 \qquad \det A_2 = 2 \qquad \det A_3 = 3$

بالتالي: $z = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{3}{1} = 3 \quad y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{2}{1} = 2 \quad x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{1}{1} = 1$.