الجامعة الافتراضيّة السوريّة

SYRIAN VIRTUAL UNIVERSITY

التحليل الرياضي

الدكتور ابراهيم شعيب

ISSN: 2617-989X

Books

التحليل الرياضي

ابراهيم شعيب

من منشورات الجامعة الافتراضية السورية

الجمهورية العربية السورية 2018

ISSN: 2617-989X

Mathematical Analysis

Ibrahim Chouaib

Publications of the Syrian Virtual University (SVU)

Syrian Arab Republic, 2018

الفهرس

ISSN: 2617-989X

الفهرس

ISSN: 2617-989X

الفصل الأول: حقل الأعداد الحقيقية

ISSN: 2617-989X

الكلمات المفتاحية:

مجموعات الأعداد، الطبيعية، الصحيحة، النسبية، الحقيقية، الحقيقية الموسّعة، الحقل، الحقل المرتب، القيمة المطلقة، المجالات العددية.

الملخص:

يهتم التحليل الرياضي بدراسة التوابع الحقيقية ومفاهيم النهايات والاستمرار والمتتاليات والمتسلسلات العددية والاشتقاق والتكامل. يعرض هذا الفصل مجموعات الأعداد وخصائصها. يبدأ الفصل بتقديم مجموعة الأعداد الطبيعية التي تستخدم بشكل أساسي في العدّ وعرض خصائصها وطرق البرهان الرياضي ولاسيما طريقة الاستقراء الرياضي ويقدّم نشر ثنائي الحدود. ثم يتم تعريف مجموعة الأعداد الصحيحة التي تضم الأعداد الصحيحة الموجبة والسالبة. تعرّف مجموعة الأعداد النسبية أو العادية ويعرّف العدد الجبري الذي ينتج من حلّ معادلة كثير حدود بأمثال صحيحة ونظرية الأصفار النسبية التي تبين الشرط الذي يجب أن يحققه العدد النسبي ليشكّل حل لمعادلة عدد جبري. ويتم تعريف الحقل والحقل المرتب ومنه حقل الأعداد النسبية. بعدها يتم تقديم حقل الأعداد الحقيقية وتعريف القيمة المطلقة وخصائصها والمسافة والمجالات العددية.

الأهداف التعليمية:

يتعرّف الطالب في هذا الفصل على:

- مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ومجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$
- طرق البرهان الرياضي ولاسيما طريقة الاستقراء الرياضي
- نشر ثنائي الحدود
- الحقل والحقل المرتب
- حقل الأعداد النسبية (العادية أو الكسرية) $\mathbb{Q}$
- حقل الأعداد الحقيقية
- القيمة المطلقة والمسافة
- العنصر الراجح والعنصر القاصر والحد الأعلى $SupA$ والحد الأدنى $InfA$ وأكبر عنصر $MaxA$ وأصغر عنصر $MinA$

مقدمة

يهتم التحليل الرياضي بدراسة التوابع (الدوال) الرياضية وتحولاتها باستخدام مفاهيم النهاية، حيث تدرس خواص مثل الاستمرار والاشتقاق والتكامل والتفاضل والتقعر والانعطاف في منحنيات التوابع، وتطبق هذه المفاهيم على أعداد حقيقية أو أعداد عقدية والتوابع معرفة عليها.

سيتم في هذه الوحدة عرض المواضيع التالية:

- مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ومجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$
- طرق البرهان الرياضي ولاسيما طريقة الاستقراء الرياضي
- نشر ثنائي الحدود
- الحقل والحقل المرتب
- حقل الأعداد النسبية (العادية أو الكسرية) $\mathbb{Q}$
- حقل الأعداد الحقيقية
- القيمة المطلقة والمسافة
- العنصر الراجح والعنصر القاصر والحد الأعلى $SupA$ والحد الأدنى $InfA$ وأكبر عنصر $MaxA$ وأصغر عنصر $MinA$

يعتمد التحليل الرياضي على الفهم الدقيق للأعداد الحقيقية والعمليات التي تعرف عليها وخصائصها. يعتمد نظام العد في النظام العشري على عشرة رموز $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ وهو النظام المعتمد لمعظم العمليات الحسابية وهو المعتمد في هذه المادة (هناك أنظمة عد أخرى مثل نظام العد الثنائي ونظام العد الثماني ونظام العد الست عشري وغيرها).

يمكن توضيح كتابة العدد بالنظام العشري من خلال مثال:

$$357 = 7\times10^0 + 5\times10^1 + 3\times10^2$$

$$0.957 = 9\times10^{-1} + 5\times10^{-2} + 7\times10^{-3}$$

تشكل هذه الأرقام مجموعة الأعداد الحقيقية والتي تحوي عدد من المجموعات الجزئية التي سنبينها فيما يلي.

ISSN: 2617-989X

1. الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$

تعرّف مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ بأنها المجموعة التي تضم الأعداد الصحيحة الموجبة وتستخدم للعد. يوجد لكل عدد طبيعي n عدد يليه يسمى العدد التالي وهو $n+1$. أي أن العدد التالي للعدد 2 هو العدد 3 والعدد 37 هو العدد التالي للعدد 36. يكون ناتج الجمع $n+m$ والجداء $n\times m$ لأي عددين طبيعيين n,m هو عدد طبيعي أي أن مجموعة الأعداد الطبيعية مغلقة مع عمليتي الجمع والجداء.

يمكن تلخيص خصائص الأعداد الطبيعية بالخصائص التالية:

N1 العدد 1 ينتمي إلى $\mathbb{N}$

N2 إذا كان العدد n ينتمي إلى $\mathbb{N}$ فإن العدد التالي $n+1$ ينتمي إلى $\mathbb{N}$

N3 العدد 1 ليس عدد تالي لأي عدد من $\mathbb{N}$

N4 إذا كان n و m في مجموعة الأعداد الطبيعية ولكلاهما نفس العدد التالي أي $n+1=m+1$ عندها يكون $n=m$

N5 أي مجموعة جزئية من $\mathbb{N}$ تحوي العدد 1 وتحوي العدد $n+1$ من أجل أي عدد n ينتمي لهذه المجموعة تكون هذه المجموعة مساوية لمجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$.

نلاحظ أن الخصائص N1 حتى N4 لمجموعة الأعداد الطبيعية واضحة وبديهية، بينما الخاصية N5 تحتاج للشرح والبرهان. لشرح الخاصية N5 نفترض أنه لدينا مجموعة S جزئية من مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ حيث العدد 1 ينتمي إلى S و $n+1$ ينتمي إلى S من أجل أي عدد n ينتمي إلى S. بما أن العدد 1 ينتمي إلى S إذاً لدينا العدد 1+1=2 ينتمي إلى S. وبما أنه تبين أن العدد 2 ينتمي إلى S إذاً العدد 3=2+1 ينتمي إلى S. نلاحظ بأنه يمكننا الاستمرار بهذه الطريقة لنجد أن S تحوي أي عدد طبيعي من $\mathbb{N}$ وهذا يعني أن $S=\mathbb{N}$.

كذلك يمكن برهان الخاصية N5 بطريقة نقد الفرض. لنفترض أن N5 خاطئة أي أن المجموعة S لاتساوي مجموعة الأعداد الحقيقة مع أن العدد 1 ينتمي إلى S وتحقق الشرط ان $n+1$ ينتمي إلى S من أجل أي عدد n ينتمي إلى S. في هذه الحالة تكون مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ تحوي مجموعة جزئية S وتحقق الشرطين:

1. $1\in S$
2. عندما يكون $n\in S$ يتحقق $n+1\in S$.

ومع ذلك $S\neq\mathbb{N}$. ليكن لدينا n_0 أصغر عنصر من المجموعة $\{n\in\mathbb{N}: n\notin S\}$. بما أن العدد $1\in S$ فإن $n_0\neq 1$. أي أن n_0 هو العدد التالي لعدد من مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ وهو n_0-1. لدينا $n_0-1\in S$ لأن n_0 هو أصغر عدد طبيعي لاينتمي إلى S. ولكن من الشرط الثاني الذي تحققه المجموعة S يجب أن يكون العدد التالي ل n_0-1 أي n_0 يجب أن ينتمي إلى S وهذا تناقض مع الفرضية البدائية.

تعتبر الخاصية N5 اساس لبرهان القضايا الرياضية من خلال الاستقراء الرياضي. يمكن برهان صحة قضية رياضية من خلال الانطلاق من الفرض ونناقش منطقياً حتى نصل على صحة المطلوب، أو أن ننطلق من

نقيض المطلوب ونناقش منطقياً لنصل إلى نتيجة لايمكن قبولها وبالتالي نصل إلى صحة المطلوب بشكل غير مباشر.

أما برهان صحة قضية رياضية $P(n)$ (تتعلق بالعدد الطبيعي n) بالاستقراء الرياضي فتتم من خلال التحقق من الشرطين التاليين:

1. القضية $P(1)$ محققة (أي من أجل $n=1$).
2. إذا كانت القضية $P(n)$ صحيحة من أجل العدد الطبيعي n فإنها تكون صحيحة من أجل العدد الطبيعي التالي $n+1$.

عندها تكون القضية P صحيحة من أجل جميع الأعداد الطبيعية.

مثال 1:

برهن صحة العلاقة التالية من أجل أي عدد طبيعي n باستخدام الاستقراء الرياضي:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

البرهان:

لدينا القضية الرياضية $P(n):\left\{1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$

نجد أن هذه القضية صحيحة من أجل العدد 1 لأن: $P(1):\left\{1=\frac{1}{2}(1+1)\right\}$

لنفترض أن $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ صحيحة من أجل العدد الطبيعي n علينا أن نثبت أن القضية $P(n+1)$ صحيحة. لنجمع $n+1$ إلى طرفي المعادلة في القضية $P(n)$ فنجد:

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{1}{2}n(n+1)+(n+1)=\frac{1}{2}\left[n(n+1)+2(n+1)\right]=\frac{1}{2}\left[(n+1)(n+2)\right]$$

أن القضية $P(n+1)$ صحيحة. ونتيجة للاستقراء الرياضي تكون $P(n)$ صحيحة لأي عدد طبيعي n.

مثال 2:

كل الأعداد من الشكل 5^n-4n-1 قابل للقسمة على 16 لأي عدد طبيعي n.

الحل:

لدينا القضية $P_n:\{5^n-4n-1 \textit{ is divisable by } 16\}$

$P_1:\{5-4-1=0\}$ تقبل القسمة على 16 فهي صحيحة.

$P_2 : \{5^2 - 4\times 2 - 1 = 16\}$ تقبل القسمة على 16 فهي صحيحة.

نفرض أن P_n صحيحة علينا أن نثبت أن P_{n+1} صحيحة. نكتب:

$$5^{n+1} - 4(n+1) - 1 = 5(5^n - 4n - 1) + 16n$$

وبما أنه افترضنا أن P_n صحيحة فيمكن كتابة $5^n - 4n - 1 = 16m$ وبالتالي:

$5^{n+1} - 4(n+1) - 1 = 5(5^n - 4n - 1) + 16n = 16(5m + n)$ وبالتالي تكون P_{n+1} صحيحة.

نظرية نشر ثنائي الحدود: ليكن لدينا $n \in \mathbb{N}$ و $\neq 0$ ؛ $n! = 1\times 2\times 3 \times \dots \times n$ (n عاملي) نعرف:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, k = 0,1,2,\dots,n$$

فإن العلاقة التالية محققة دوماً:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}a.b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

$$(a+b)^n = a^n + n\cdot a^{n-1}\cdot b + \frac{1}{2}n\cdot(n-1)\cdot a\cdot b^2 + \cdots + n\cdot a\cdot b^{n-1} + b^n$$

تطبيق:

من أجل $n = 1,2,3,4$ نجد:

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2a\cdot b + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2\cdot b + 3a\cdot b^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3\cdot b + 6a\cdot b^3 + 4a\cdot b^3 + b^4$$

2. مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$

تتألف مجموعة الأعداد الصحيحة من مجموعة الأعداد الطبيعية والصفر والأعداد الصحيحة السالبة.

$$\mathbb{Z} = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$$

يمكن حل المعادلة من الشكل $x + n = m$ في المجموعة $\mathbb{Z}$ حيث n,m عددين طبيعيين ويصبح لدينا $x = m - n$ حيث تم ادخال عملية الطرح.

3. مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$

تحوي مجموعة الأعداد النسبية (أو العادية أو الكسرية) $\mathbb{Q}$ جميع الأعداد التي تكتب على شكل كسر $\frac{m}{n}$ حيث $m,n \in \mathbb{Z}$ و $n \neq 0$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

يمكن لعدة أزواج أعداد صحيحة أن تمثل نفس العدد النسبي:

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \, if \;\; n \cdot p = m \cdot q$$

يمكن تمثيل أي عدد نسبي بعدد عشري مع عدد منته من الأرقام على يمين الفاصلة أو عدد غير منته ولكن دوري لمجموعة من الأرقام.

مثال 3:

1. العدد النسبي $\frac{1}{7}$ يمثل بشكل عدد عشري مع عدد غير منته ولكن دوري من الأرقام على يمين الفاصلة:

$$\frac{1}{7} = 0.142857\;142857\;142857\;142857\;142857\;\ldots = 0.\overline{142857}$$

2. العدد النسبي:

$$\frac{1}{6} = 0.16666666666666666666666666666666\ldots = 0.1\overline{6}$$

3. العدد النسبي :

$$\frac{19}{6} = 3.16666666666666666666666666666666\ldots = 3.1\overline{6}$$

4. العدد النسبي:

$$\frac{3}{4} = 0.75$$

يمكن إجراء عمليات الجمع والجداء والطرح والقسمة في مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$.

تحوي مجموعة الأعداد النسبية الأعداد الطبيعية والصحيحة حيث يمكن تمثيل أي عدد صحيح بشكل عدد نسبي يكون المقام فيه هو العدد 1.

يوجد نقص في هذه المجموعة فلا يوجد عدد نسبي يمكن أن يكون الرقم $\sqrt{2}$ ولكن يمكن تقريب العدد $\sqrt{2}$ إلى عدد نسبي قريب مثل 1.4142 فنجد أن $(1.4142)^2 = 1.9999616$ وأن $(1.4143)^2 = 2.000244$.

ISSN: 2617-989X

1.3. تعريف العدد الجبري

يدعى أي عدد بالعدد الجبري إذا كان يحقق معادلة كثير الحدود من الشكل:

$$c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0 = 0$$

حيث الأمثال $c_0, c_1, \ldots, c_n$ أعداد صحيحة و $c_n \neq 0$ و $n \geq 1$ عدد طبيعي.

ليكن $r = \frac{m}{n}$ عدد نسبي حيث $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ فهو حل للمعادلة $nx - m = 0$. أي أن الأعداد النسبية هي أعداد جبرية دوماً ولكن العكس ليس صحيحاً أي أن الأعداد الجبرية ليست بالضرورة أعداد نسبية. إن الأعداد المعرفة بعدد نسبي مرفوع إلى أس كسري أي جذر تربيعي أو جذر تكعيبي أو غيره هي أعداد جبرية.

مثال:

الأعداد التالية هي أعداد جبرية: $\frac{4}{17}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{17}, \sqrt{2+\sqrt[3]{5}}, \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{7}}$

لأن $\frac{4}{17}$ هو حل للمعادلة $17x - 4 = 0$

و $\sqrt{3}$ هو حل للمعادلة $x^2 - 3 = 0$

و $\sqrt[3]{17}$ هو حل للمعادلة $x^3 - 17 = 0$

و $a = \sqrt{2+\sqrt[3]{5}} \Rightarrow a^2 = 2+\sqrt[3]{5} \Rightarrow a^2 - 2 = \sqrt[3]{5} \Rightarrow \left(a^2-2\right)^3 = 5 \Rightarrow a^6 - 6a^4 + 12a^2 - 13 = 0$

أي أن a هو حل للمعادلة $x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 13 = 0$

وبطريقة مشابهة بفرض $b = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{7}}$ نجد:

$$b = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{7}} \Rightarrow 7b^2 = 4 - 2\sqrt{3} \Rightarrow 2\sqrt{3} = 4 - 7b^2 \Rightarrow 12 = \left(4 - 7b^2\right) \Rightarrow 49b^4 - 56b^2 + 4 = 0$$

أي أن b هو حل للمعادلة $49x^4 - 56x^2 + 4 = 0$.

ستسمح لنا النظرية التالية (الاصفار النسبية) ببرهان أن عدد ما هو ليس من الأعداد النسبية مثل $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$.

نذكر بأن العدد الصحيح m يقبل القسمة على العدد الصحيح k إذا كان $\frac{m}{k}$ هو عدد صحيح.

2.3. نظرية الأصفار النسبية

نفترض أن r عدد نسبي والأمثال $c_0, c_1, \ldots, c_n$ أعداد صحيحة تتحقق معادلة كثير الحدود:

$$c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0 = 0 \qquad (1)$$

حيث $n \geq 1$ و $c_n \neq 0$ و $c_0 \neq 0$. ليكن $r = \frac{c}{d}$ حيث c و d عددين صحيحين بدون قاسم مشترك (أبسط شكل للعدد النسبي) و $d \neq 0$.

يكون لدينا c_0 تقبل القسمة على c و c_n تقبل القسمة على d.

يمكن القول بأن أي عدد نسبي $r = \frac{c}{d}$ يشكل حل للمعادلة (1) يجب أن يتحقق c_0 يقبل القسمة على c و c_n تقبل القسمة على d.

البرهان:

بما أن $r = \frac{c}{d}$ يحقق المعادلة (1):

بجداء طرفي المعادلة السابقة بـ d^n نجد:

$$c_n \cdot c^n + c_{n-1} \cdot c^{n-1} \cdot d + \cdots + c_1 \cdot c \cdot d^{n-1} + c_0 \cdot d^n = 0 \Rightarrow c_0 \cdot d^n = -c\left[c_n \cdot c^{n-1} + c_{n-1} \cdot c^{n-2} \cdot d + \cdots + c_1 \cdot d^{n-1}\right]$$

أي أن $c_0 \cdot d^n$ تقبل القسمة على c. بما أنه لايوجد عامل مشترك بين c و d^n فإن c_0 تقبل القسمة على c.

وبنفس الطريقة نجد:

$$c_n \cdot c^n + c_{n-1} \cdot c^{n-1} \cdot d + \cdots + c_1 \cdot c \cdot d^{n-1} + c_0 \cdot d^n = 0 \Rightarrow c_n \cdot c^n = -d\left[c_{n-1} \cdot c^{n-1} + \cdots + c_1 \cdot d^{n-2} + c_0 \cdot d^{n-1}\right]$$

أي أن $c_n \cdot c^n$ تقبل القسمة على d. بما أنه لايوجد عامل مشترك بين c^n و d فإن c_n تقبل القسمة على d.

نظرية:

ليكن لدينا معادلة كثير الحدود التالية: $x^n + c_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + c_1 \cdot x + c_0 = 0$ حيث الأمثال $c_0, c_1, \ldots, c_n$ أعداد صحيحة و $c_0 \neq 0$. أي عدد نسبي $r = \frac{c}{d}$ يمثل حل لهذه المعادلة يجب أن يكون عدد صحيح ويكون من قواسم c_0.

البرهان:

نجد من نظرية الأصفار النسبية أن المقام للعدد النسبي $r = \frac{c}{d}$ الذي يحقق حل للمعادلة يجب أن يكون من قواسم 1 (مثل x^n في المعادلة). لذلك فقيمة المقام يجب أن تكون 1. لذلك فإن $r = \frac{c}{d}$ يجب أن يكون عدد صحيح وهو من قواسم c_0 حسب نظرية الأصفار النسبية.

ISSN: 2617-989X

مثال:

العدد $\sqrt{2}$ ليس عدد نسبي.

الحل:

من نظرية الأصفار النسبية نجد أن الأعداد النسبية الوحيدة التي من الممكن ان تشكل حلول للمعادلة $x^2-2=0$ هي $\mp1,\mp2$ وهي لاتحل المعادلة $(n=2,c_2=1,c_1=0,c_0=-2)$. بما أن $\sqrt{2}$ حل للمعادلة فلا يمكن أن يكون عدداً نسبياً.

3.3. الحقل والحقل المرتب

ليكن لدينا $a,b\in\mathbb{Q}$ عددين نسبيين فلدينا ناتج الجمع عدد نسبي $(a+b)\in\mathbb{Q}$ وناتج الجداء عدد نسبي $(a\cdot b)\in\mathbb{Q}$ ولعمليتي الجمع والجداء في $\mathbb{Q}$ الخصائص التالية:

A1- الخاصة التجميعية للجمع $\forall a,b,c\in\mathbb{Q},a+(b+c)=(a+b)+c$

A2- الخاصة التبديلية للجمع $\forall a,b\in\mathbb{Q},a+b=b+a$

A3- الصفر هو العنصر الحيادي لعملية الجمع $\forall a\in\mathbb{Q},a+0=a$

A4- النظير للجمع $\forall a\in\mathbb{Q},a+(-a)=0$

M1- الخاصة التجميعية للجداء $\forall a,b,c\in\mathbb{Q},a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$

M2- الخاصة التبديلية للجداء $\forall a,b\in\mathbb{Q},a\cdot b=b\cdot a$

M3- الواحد هو العنصر الحيادي لعملية الجداء $\forall a\in\mathbb{Q},a\cdot1=a$

M4- النظير للجداء $\forall a\in\mathbb{Q}^*,a\cdot a^{-1}=1$ لكل عنصر لايساوي الصفر مقلوب في مجموعة الأعداد النسبية.

DL- توزيع الجداء على الجمع $\forall a,b,c\in\mathbb{Q},a\cdot(b+c)=a\cdot b+b\cdot c$

أي مجموعة تحوي أكثر من عنصر ومزودة بعمليتي الجمع والجداء وتحقق الخصائص السابقة تدعى حقل.

المجموعة $\mathbb{Q}$ تحوي علاقة $\le$ ترتيب تحقق المواصفات التالية:

O1- من أجل قيمتين a,b يتحقق لدينا إما $a\le b$ أو $b\le a$

O2- إذا كان لدينا $a\le b$ و $b\le a$ فإن $a=b$

O3- إذا كان $a\le b$ و $b\le c$ فإن $a\le c$

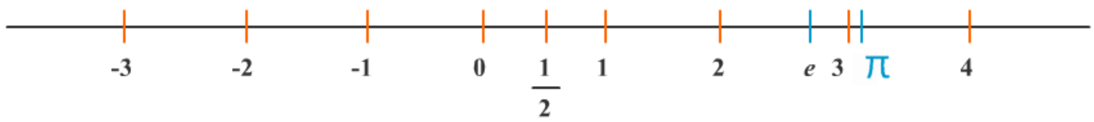
O4- إذا كان $a\le b$ فإن $a+c\le b+c$

O5- إذا كان $a\le b$ و $0\le c$ فإن $a\cdot c\le b\cdot c$

يدعى الحقل المزود بعلاقة ترتيب $\le$ ويحقق الخصائص من O1 حتى O5 حقل مرتب.

4. مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

تحوي مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ كل الأعداد النسبية والأعداد الجبرية π,e وغيرها. يمكن تمثيل مجموعة الأعداد الحقيقية بمستقيم يدعى مستقيم الأعداد الحقيقية الشكل رقم 1. ولايوجد في هذه المجموعة أي ثغرات.



الشكل رقم 1 مستقيم الأعداد الحقيقية

تعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية عمليتي الجمع والجداء وناتج جمع عددين حقيقيين a,b هو عدد حقيقي وناتج جداء عددين حقيقيين a,b هو عدد حقيقي وتحقق عملية الجمع وعملية الجداء في مجموعة الأعداد الحقيقية الخصائص A1 حتى A4 و M1 حتى M4 و DL. وتعرف علاقة الترتيب $\leq$ على $\mathbb{R}$ وتحقق الخصائص O1 حتى O5. لذلك فإن $\mathbb{R}$ هي حقل مرتب مثل $\mathbb{Q}$.

نظرية:

من خصائص الحقل نجد أن النقاط التالية محققة:

إذا كان لدينا $a+c=b+c$ فإن $a=b$

I. $\forall a\in\mathbb{R}, a\cdot 0=0$

II. $\forall a,b\in\mathbb{R}, (-a)\cdot b=-a\cdot b$

III. $\forall a,b\in\mathbb{R}, (-a)\cdot(-b)=a\cdot b$

IV. $ac=bc, c\neq 0\Rightarrow a=b$

V. $a\cdot b=0\Rightarrow a=0 \, or \, b=0$

نظرية:

نجد من خصائص الحقل المرتب:

I. إذا كان $a\leq b$ فإن $-b\leq -a$

II. إذا كان $a\leq b$ و $c\leq 0$ إذا فإن $b\cdot c\leq a\cdot c$

III. إذا كان $a\geq 0, b\geq 0$ فإن $a\cdot b\geq 0$

IV. $\forall a\in\mathbb{R}, a^2\geq 0$

V. $1>0$

VI. إذا كان $a>0$ فإن $a^{-1}>0$

VII. إذا كان $0<a<b$ فإن $0<b^{-1}<a^{-1}$

ISSN: 2617-989X

1.4. تعريف القيمة المطلقة والمسافة

تعريف القيمة المطلقة:

$$|a| = a \; if \;\; a \geq 0$$
$$|a| = -a \; if \;\; a < 0$$

تدعى $|a|$ القيمة المطلقة ل a.

تعريف المسافة:

تعرف المسافة بين عددين حقيقيين a,b كما يلي:

$$dist(a,b) = |a-b|$$

تمثل $dist(a,b)$ المسافة بين a و b.

نظرية خصائص القيمة المطلقة:

I. $\forall a \in \mathbb{R}, |a| \geq 0$

II. $\forall a,b \in \mathbb{R}, |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

III. $\forall a,b \in \mathbb{R}, |a+b| \leq |a| + |b|$

IV. $\forall a,b \in \mathbb{R}, \left||a| - |b|\right| \leq |a-b|$

نظرية:

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R}, dist(a,b) \leq dist(a,c) + dist(b,c)$$

ISSN: 2617-989X

2.4. العنصر الراجح والعنصر القاصر والحد الأعلى $SupA$ والحد الأدنى $InfA$ وأكبر عنصر $MaxA$ وأصغر عنصر $MinA$

تعريف:

لتكن A مجموعة غير خالية من $\mathbb{R}$:

1. نقول إن $z \in \mathbb{R}$ عنصر راجح على A إذا وفقط إذا كان $\forall a \in A, a \le z$
2. نقول إن $z \in \mathbb{R}$ عنصر قاصر عن A إذا وفقط إذا كان $\forall a \in A, z \le a$
3. نقول إن $z \in \mathbb{R}$ هو حد أعلى ل A ونرمز له بـ $\sup A$ إذا وفقط إذا كان:
   - z عنصر راجح على A أي $\forall a \in A, a \le z$
   - z هو أصغر عنصر راجح على A أي $\forall \varepsilon \in A, \exists b \in A, z - \varepsilon \le b$
4. نقول إن $z \in \mathbb{R}$ هو حد أدنى ل A ونرمز له بـ $\inf A$ إذا وفقط إذا كان:
   - z عنصر قاصر على A أي $\forall a \in A, z \le a$
   - z هو أكبر عنصر قاصر على A أي $\forall \varepsilon \in A, \exists b \in A, b \le z + \varepsilon$

ملاحظة:

1. إذا وجد حد أعلى لـ A ($\sup A$) فإنه يكون وحيداً.
2. إذا وجد حد أدنى لـ A ($\inf A$) فإنه يكون وحيداً.

تعريف:

- نقول عن عنصر $a \in \mathbb{R}$ إنه أكبر عنصر في A ونكتب $a = \max A$ إذا وفقط إذا كان $a \in A$ و $a = \sup A$.
- ونقول بشكل مماثل عن عنصر $b \in \mathbb{R}$ إنه أصغر عنصر في A ونكتب $b = \min A$ إذا وفقط إذا كان $b \in A$ و $b = \inf A$.

نظرية خاصية الحد الأعلى لمجموعة الأعداد الحقيقية

أي مجموعة A جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$ لها عنصر راجح (محدودة من الأعلى) يوجد لها حد أعلى $\sup A$ وهو عدد حقيقي.

ملاحظة:

لاتحقق مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ خاصية الحد الأعلى. فالمجموعة:

$$A = \left\{ r \in \mathbb{Q} : 0 \le r \le \sqrt{2} \right\} = \left\{ r \in \mathbb{Q} : 0 \le r, r^2 \le 2 \right\}$$

لاتمتلك حد أعلى في مجموعة الأعداد النسبية.

ISSN: 2617-989X

نظرية خاصية الحد الأدنى لمجموعة الأعداد الحقيقية

لكل مجموعة جزئية غير فارغة A محدودة من الأسفل (تمتلك عنصر قاصر) من $\mathbb{R}$ فهي تمتلك حد أصغر $\inf A$.

ملاحظة:

نقول عن مجموعة A أنها محدودة إذا كان لها عنصر راجح وعنصر قاصر لذلك تكون A محدودة إذا وجد عددين حقيقيين M, m بحيث $A \subseteq [m, M]$

ملاحظة:

1. إذا كان لدينا $a > 0$ يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $\frac{1}{n} < a$
2. إذا كان لدينا $b > 0$ يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $b < n$

مبرهنة خاصة أرخميدس

أياً كان العدد الحقيقي الموجب تماماً $a > 0$ وأياً كان العدد الحقيقي الموجب تماماً $b > 0$ يوجد عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}$ بحيث $n \cdot a > b$.

مثال:

تحوي كل مجموعة منتهية غير فارغة من $\mathbb{R}$ اكبر عنصر وأصغر عنصر:

$$\max\{1,2,3,4,5\} = 5; \min\{1,2,3,4,5\} = 1$$

$$\max\left\{0, \pi, -7, e, 3, \frac{4}{3}\right\} = \pi$$

$$\max\{n \in \mathbb{Z} : -4 < n \le 100\} = 100; \min\{n \in \mathbb{Z} : -4 < n \le 100\} = -3$$

3.4. المجالات العددية

لنأخذ a, b حيث $a < b$ فإن:

المجال المغلق: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$

المجال المفتوح: $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

المجال نصف المفتوح: $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$ ، $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$

ISSN: 2617-989X

ملاحظة:

1. إذا كان $a,b \in \mathbb{R}$ و $a<b$ عندها: $\max\{[a,b]\}=b; \min\{[a,b]\}=a$

$\sup\{[a,b]\}=\sup\{]a,b[\}=\sup\{]a,b]\}=\sup\{[a,b[\}=b$

مثال:

لتكن لدينا المجموعة $A=\left\{\frac{1}{n^2}: n\in\mathbb{N}, n\geq 3\right\}$ فإن A محدودة من الأسفل ومن الأعلى. تحوي هذه المجموعة اكبر عنصر ولا تحوي أصغر عنصر فلدينا: $\max A=\sup A=\frac{1}{9}; \inf A=0$

1. لاتحوي المجموعة $]a,b[$ أكبر عنصر ولا أصغر عنصر.
2. لاتحوي المجموعتين $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ أكبر عنصر ولا أصغر عنصر.
3. لاتحوي المجموعة $\mathbb{N}$ أكبر عنصر ولكن تحوي أصغر عنصر $\min\{\mathbb{N}\}=1$
4. تحوي المجموعة $\left\{r\in\mathbb{Q}: 0\leq r\leq\sqrt{2}\right\}$ أصغر عنصر وهو الصفر 0 ولكن لاتحوي أكبر عنصر لأن $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.
5. لاتحوي المجموعة التالية اكبر عنصر ولا أصغر عنصر:

$\left\{n^{(-1)^n}: n\in\mathbb{N}\right\}=\left\{1^{-1},2,3^{-1},4,5^{-1},6,7^{-1},\ldots\right\}$

مبرهنة:

إذا كان $x\in\mathbb{R}$ فيوجد عدد صحيح وحيد $E(x)$ محقق للعلاقة:

$$E(x)\leq x<E(x)+1$$

نسمي $E(x)$ الجزء الصحيح للعدد x.

مبرهنة كثافة $\mathbb{Q}$:

إذا كان $a,b\in\mathbb{R}$ و $a<b$ يوجد عدد نسبي $r\in\mathbb{Q}$ بحيث $a<r<b$. أي أن مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ كثيفة في $\mathbb{R}$.

نتيجة:

1. يوجد بين كل عددين حقيقيين مختلفين عدد لانهائي من الأعداد النسبية.
2. يوجد بين كل عددين حقيقيين مختلفين عدد لانهائي من الأعداد الحقيقية غير النسبية.

ISSN: 2617-989X

5. تعريف مجموعة الاعداد الحقيقية الموسعة

تعريف: رمزي اللانهاية $+\infty,-\infty$ هامين جداً على الرغم من أنهما لاينتميان إلى مجموعة الأعداد الحقيقية.
نعرف مجموعة الأعداد الحقيقية الموسعة $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

مبرهنة:

لكل مجموعة غير خالية من $\overline{\mathbb{R}}$ حد اعلى وحد ادنى.

تعريف العمليات الحسابية في $\overline{\mathbb{R}}$

1. $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$
2. $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$
3. أياً كان $x\in\mathbb{R}$ فإن: $\forall x\in\mathbb{R}, x+(+\infty)=(+\infty)+x=+\infty,$ $x+(-\infty)=(-\infty)+x=-\infty$
4. أياً كان $x\in\mathbb{R}_+^*\cup\{+\infty\}$ فإن: $x\cdot(+\infty)=+\infty\cdot(x)=+\infty$ ، $x\cdot(-\infty)=-\infty\cdot(x)=-\infty$
5. أياً كان $x\in\mathbb{R}_-^*\cup\{-\infty\}$ فإن: $x\cdot(+\infty)=+\infty\cdot(x)=-\infty$ ، $x\cdot(-\infty)=-\infty\cdot(x)=+\infty$
6. $(+\infty)+(-\infty)$ غير معرف.
7. ضرب الصفر 0 باللانهاية الموجبة أو السالبة غير معرف.

ISSN: 2617-989X

مذاكرة حقل الأعداد الحقيقية

العلامة العظمى: 100 **علامة النجاح: 50** **المدة: ساعة ونصف**

لكل سؤال خمس علامات

اختر الإجابة الصحيحة للأسئلة التالية:

1. العلاقة الصحيحة بين مجموعات الأعداد هي:

a) $\mathbb{Z}$ مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ التي بدورها مجموعة جزئية من $\mathbb{Q}$

b) $\mathbb{N}$ مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ التي بدورها مجموعة جزئية من $\mathbb{Z}$

c) $\mathbb{N}$ مجموعة جزئية من $\mathbb{Z}$ التي بدورها مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$

d) $\mathbb{N}$ مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ التي بدورها مجموعة جزئية من $\mathbb{Z}$

مساعدة: راجع فقرة الأعداد الحقيقية.

2. العدد 45.5678 هو عدد

a) طبيعي

b) نسبي

c) غير نسبي

d) صحيح

مساعدة: راجع فقرة الأعداد النسبية.

3. القيمة المطلقة لعدد حقيقي لايساوي الصفر تكون دوماً:

a) غير سالبة

b) نسبية

c) غير موجبة

d) غير نسبية

مساعدة: راجع تعريف القيمة المطلقة فقرة الأعداد الحقيقية.

4. العدد $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ هو عدد

a) نسبي

b) جبري

c) عشري

d) جواب آخر

ISSN: 2617-989X

مساعدة: راجع تعريف العدد الجبري فقرة مجموعة الأعداد النسبية.

5. ناتج $\frac{3^4 \times 3^8}{3^{14}}$ هو

a) $1/9$
b) $1/3$
c) 9
d) جواب آخر

مساعدة: الحل بالاستناد إلى معلومات سابقة حول العمليات الحسابية وحل المعادلات البسيطة من الدرجة الأولى والثانية.

6. ناتج $\sqrt{\frac{(5\times10^{-6})(4\times10^{2})}{8\times10^{5}}}$ هو:

a) 0.0005
b) 5×10^{-5}
c) 25×10^{-4}
d) جواب آحر

مساعدة: الحل بالاستناد إلى معلومات سابقة حول العمليات الحسابية وحل المعادلات البسيطة من الدرجة الأولى والثانية.

7. ناتج $\log_{2/3}\left(\frac{27}{8}\right)$ هو

a) -3
b) 3
c) $1/3$
d) جواب آخر

مساعدة: الحل بالاستناد إلى معلومات سابقة حول العمليات الحسابية وحل المعادلات البسيطة من الدرجة الأولى والثانية.

ISSN: 2617-989X

8. بسّط الكسر التالي $\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3}$؟

a) $\frac{x-2}{x+1}$

b) $\frac{x+2}{x+1}$

c) $\frac{x+2}{x+1}$

d) جواب آخر

مساعدة: الحل بالاستناد إلى معلومات سابقة حول العمليات الحسابية وحل المعادلات البسيطة من الدرجة الأولى والثانية.

9. ماهي قيم x التي تحقق $x+3(2-x)\geq 4-x$؟

a) $x\leq 2$

b) $x\geq 2$

c) $x\leq -2$

d) جواب آخر

مساعدة: الحل بالاستناد إلى معلومات سابقة حول العمليات الحسابية وحل المعادلات البسيطة من الدرجة الأولى والثانية.

10. ليكن لدينا p عدد فردي أي $p=2k+1;k\in\mathbb{N}$ عندئذ يكون p^n ؟

a) زوجي

b) فردي

c) غير معروف

d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة الأعداد الطبيعية برهان القضايا الرياضية طريقة الاستقراء الرياضي.

11. المتراجحة التالية $(1+h)^n\geq 1+nh$؟

a) صحيحة

b) خاطئة

مساعدة: راجع فقرة الأعداد الطبيعية برهان القضايا الرياضية طريقة الاستقراء الرياضي.

ISSN: 2617-989X

12. العلاقة $1+\sum_{k=1}^{n} 8k=(2n+1)^2$؟

a) صحيحة

b) خاطئة

مساعدة: راجع فقرة الأعداد الطبيعية برهان القضايا الرياضية طريقة الاستقراء الرياضي.

13. كل عدد من الشكل $4^{2n+1}+3^{n+2}, \forall n \in \mathbb{N}$ هو من مضاعفات؟

a) 11

b) 13

c) 17

d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة الأعداد الطبيعية برهان القضايا الرياضية طريقة الاستقراء الرياضي.

14. اللانهاية تحقق العلاقة التالية:

a) $\infty \in \mathbb{R}$

b) $\infty \in \mathbb{Q}$

c) $\infty \in \bar{\mathbb{R}}$

d) جواب آخر

مساعدة: راجع تعريف مجموعة الأعداد الحقيقية الموسعة فقرة الأعداد الحقيقية.

15. $\max([0,5])$ هو:

a) 5

b) 6

c) غير موجود

d) 0

مساعدة: راجع تعريف أكبر وأصغر عنصر ضمن مجموعة max ضمن فقرة الأعداد الحقيقية.

16. $\max(]0,5[)$ هو:

a) 5

b) 6

c) غير موجود

d) 0

ISSN: 2617-989X

مساعدة: راجع تعريف أكبر وأصغر عنصر ضمن مجموعة max ضمن فقرة الأعداد الحقيقية.

17. $\min\left(]0,1]\right)$ هو :

a) 0
b) -1
c) 1
d) غير موجود

مساعدة: راجع تعريف أكبر وأصغر عنصر ضمن مجموعة max ضمن فقرة الأعداد الحقيقية.

18. $\min\left([0,1]\right)$ هو :

a) 0
b) -1
c) 1
d) غير موجود

مساعدة: راجع تعريف أكبر وأصغر عنصر ضمن مجموعة max ضمن فقرة الأعداد الحقيقية.

19. العدد 3 هو عنصر راجح على $[0,2]$ ؟

a) صح
b) خطأ

مساعدة: تعريف العنصر القاصر والعنصر الراجح على مجموعة ضمن فقرة الأعداد الحقيقية.

20. العدد 1 هو عنصر قاصر للمجال $[-5,-1]$

a) صح
b) خطأ

مساعدة: تعريف العنصر القاصر والعنصر الراجح على مجموعة ضمن فقرة الأعداد الحقيقية.

ISSN: 2617-989X

الإجابات الصحيحة

الإجابة الصحيحة	السؤال
الخيار الثالث	1
الخيار الثاني	2
الخيار الأول	3
الخيار الثاني	4
الخيار الأول	5
الخيار الثاني	6
الخيار الأول	7
الخيار الأول	8
الخيار الأول	9
الخيار الثاني	10
الخيار الأول	11
الخيار الأول	12
الخيار الثاني	13
الخيار الثالث	14
الخيار الأول	15
الخيار الثالث	16
الخيار الرابع	17
الخيار الأول	18
الخيار الأول	19
الخيار الثاني	20

الفصل الثاني: التوابع النهايات والاستمرار

الكلمات المفتاحية:

التوابع، النهايات، الاستمرار، النهايات المحلية، النهاية المحلية الصغرى، النهاية المحلية العظمى، التوابع الخطية، القطع المكافئ، التوابع الاسية، التوابع اللوغاريتمية، التوابع المثلثية، التوابع العكسية، التوابع المتزايدة، التوابع المتناقصة، التوابع الفردية، التوابع الزوجية، التوابع الدورية، منطقة التعريف.

الملخص:

يهدف هذا الفصل إلى عرض تعريف التوابع وخصائصها ومفاهيم النهايات والاستمرار للتوابع الحقيقية. يعرّف التوابع والتوابع العكسية. ويعرض التوابع الأساسية البسيطة مثل كثيرات الحدود ومنها التوابع الخطية والتوابع من الدرجة الثانية القطع المكافئ والتوابع الاسية واللوغاريتمية والتوابع المثلثية. وتعرّف التوابع المحدودة والتوابع المطّردة المتزايدة والمتناقصة والتوابع الفردية والتوابع الزوجية والتوابع الدورية. تعرّف كذلك النهايات المحلية العظمى والصغرى. يقدّم مفهوم النهاية للتوابع وخصائصها. ويعرّف الاستمرار والشروط التي يجب أن يحققها التابع ليكون مستمراً.

الأهداف التعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- تعريف التوابع والتوابع العكسية
- التوابع الأساسية البسيطة
- التوابع المحدودة
- التوابع المتزايدة والمتناقصة والمطّردة
- التوابع الزوجية والفردية والدورية
- النهايات المحلية العظمى والصغرى
- نهايات التوابع
- استمرار التوابع

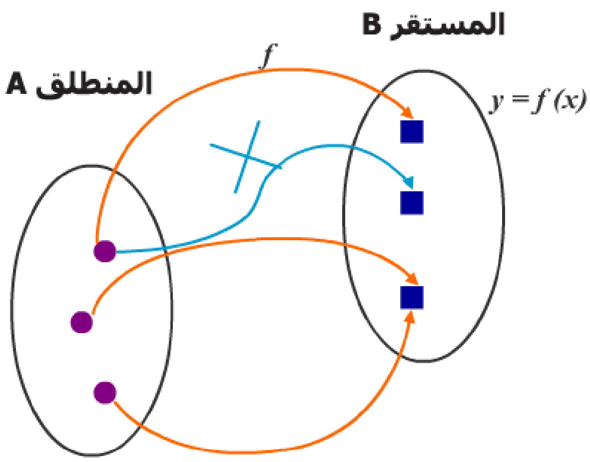
مقدمة

تعتبر التوابع وخصائصها من أهم المفاهيم الرياضية للعديد من التطبيقات الاقتصادية والهندسية. يهتم هذا الفصل بتقديم النقاط التالية:

- تعريف التوابع والتوابع العكسية
- التوابع الأساسية البسيطة
- التوابع المحدودة
- التوابع المتزايدة والمتناقصة والمطّردة
- التوابع الزوجية والفردية والدورية
- النهايات المحلية العظمى والصغرى
- نهايات التوابع
- استمرار التوابع2

1. تعريف التوابع

يتألف التابع من مجموعة منطلق ومجموعة مستقر وعلاقة ربط تعطي عنصر واحد فقط من مجموعة المستقر لكل عنصر من عناصر المنطلق. يمكن لعدة قيم من مجموعة المنطلق أن تقابل نفس القيمة في المستقر (الشكل رقم **1**).



الشكل رقم 1 علاقة التابع $f : x \to y, f(x) = y$

لايوجد قيود على طبيعة عناصر مجموعتي المطلق والمستقر ولكن في مادة التحليل سيتم التركيز على مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

يمكن تمثيل التابع بتحديد منطقة التعريف (مجموعة التعريف) بالإضافة إلى إيجاد العلاقة التي تربط بين عناصر المنطلق وعناصر المستقر. تمثّل علاقة الربط للتابع بعدة أشكال منها:

1. جدول يتم فيه ذكر عناصر مجموعة المنطلق ومجموعة المستقر الموافقة
2. بيان التابع في جملة الاحداثيات الديكارتية Oxy حيث يمثل المحور Ox الأفقي مجموعة المنطلق والمحور Oy الشاقولي مجموعة المستقر.
3. معادلة أو مجموعة معادلات وهذه هي الطريقة التحليلية.

يرمز عادة لمتحولات مجموعة المنطلق بالرمز x ولمتحولات مجموعة المستقر بالرمز y وللتابع f ولعلاقة الربط $y = f(x)$.

يدعى متحول مجموعة المنطلق x المتحول المستقل. يدعى متحول مجموعة المستقر y المتحول المرتبط.

يمكن استخدام أحرف أخرى لتمثيل x, y, f.

هناك طرق عديدة لربط عناصر مجموعتين ليست بالضرورة توابع. أي لاتعطي قيمة واحدة في المستقر لقيمة واحدة من المنطلق.

مثال:

$y^2 = x$ هناك قيمتين للمستقر y مقابل كل قيمة من المنطلق لذلك هذه العلاقة ليست تابع.

مثال:

أزواج الأرقام $(a,b),(a,c),(a,d),(a,f)$ ليست تابع لأن a من المنطلق تقابل عدة قيم من المستقر.

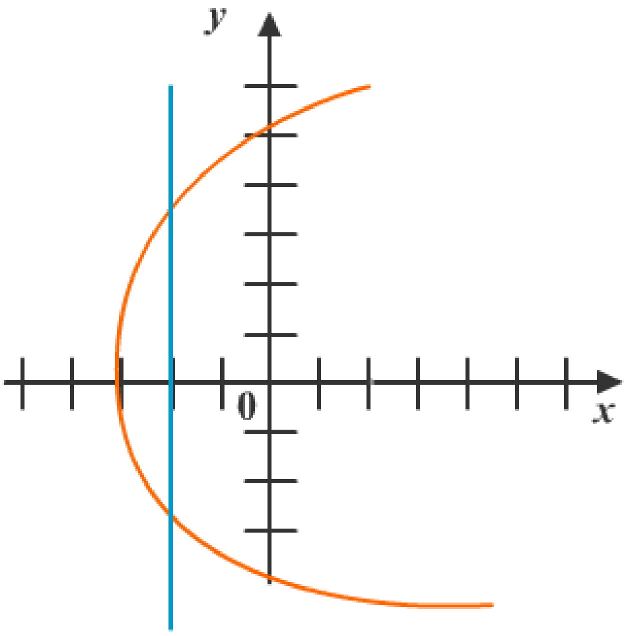
اختبار المستقيم العموديّ

نستطيع تمييز تابع عن علاقة رياضيّة أخرى لا تتمتّع بصفة تابع عن طريق هذا الاختبار. ننشئ خطّاً عموديّاً على محور الفواصل. لكي تكون العلاقة تابعاً يجب ألاّ يتقاطع هذا الخطّ مع الخطّ البيانيّ للتابع أكثر من مرّة.

ISSN: 2617-989X

مثال:

العلاقة الممثَّلة في الشّكل 2 التّالي ليست تابعاً.



الشّكل 2 اختبار المستقيم العمودي

مثال:

$y = f(x) = \frac{-4}{x-3}$ يربط بكلّ قيمة لـ x قيمة ندعوها صورة x وفق التّابع f.

مثال:

لنأخذ التابع الذي يربط مجموعة المنطلق $x \in [-1,1]$ بالعلاقة $f(x) = y = x^2$ أي أن $y \in [0,1]$. نجد مثلاً: $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

مثال:

التابع الذي يربط مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بالعلاقة $f(n) = \frac{1}{n}$.

مثال:

تابع يقدم عدد سكان بلد ما لكل عام. متحول المنطلق t العام والمستقر عدد السكان $P = f(t)$.

مثال:

يمكن أن يكون للتابع أكثر من متحول مثال التابع الذي يربط تمثيل الموضع على سطح الكرة الأرضية ممثلاً بزاوية خط العرض φ وزاوية خط الطول λ والارتفاع h أي ثلاث متحولات منطلق (φ,λ,h) بالاحداثيات الديكارتية المقابلة لها (x,y,z)، $f:(\varphi,\lambda,h)=(x,y,z)$. أي أن التابع له ثلاث متحولات منطلق وثلاث متحولات مستقر كل ثلاثة أعداد مرتبة من المنطلق يقابلها ثلاثة أعداد مرتبة من المستقر.

تدعى منطقة (مجموعة) تعريف التابع مجموعة المطلق أكبر مجموعة نستطيع تعريف علاقة الرّبط عليها.

مثال:

$f(x)=\dfrac{-4}{x-3}$ ، يجب على x ألاّ تساوي الـ 3 وإلاّ انعدم المقام. وبهذا تكون مجموعة تعريف f هي مجموعة الأعداد الحقيقيّة ماعدا 3. ونكتب ذلك:

مجموعة تعريف f هي: $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{3\}$، أو باستخدام المجالات: $D(f)=]-\infty,3[\ \cup\ ]3,\infty[$. ونكتب أيضاً: $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}$.

مثال:

$g(x)=x^3-1$ ، معرّف على $\mathbb{R}$. جميع كثيرات الحدود معرّفة على $\mathbb{R}$.

مثال:

$h(x)=\sqrt{x^3-8}$، يجب أن يكون ما داخل الجذر التربيعيّ مقداراً موجباً، أي

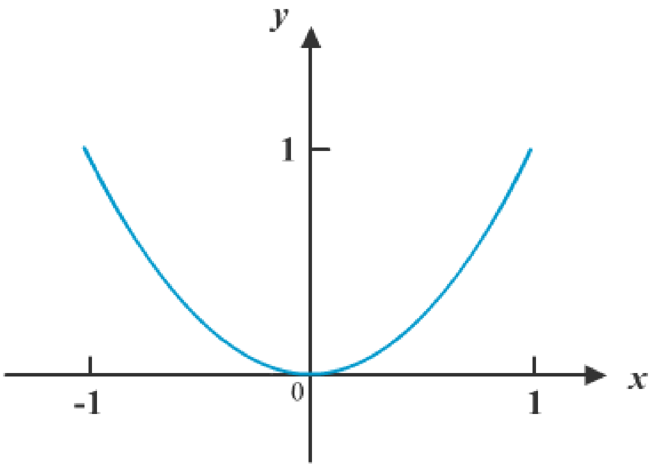
$x^3-8\ge 0 \Rightarrow x^3\ge 8 \Rightarrow x\ge 2$، أي أنّ $D(h)=[2,\infty[$.

بيان التابع

يشكل التابع مجموعة من ثنائيات الأعداد الحقيقية المرتبة (x,y). يشكل رسم هذه النقاط (x,y) على جملة الاحداثيات الديكارتية بيان التابع.

مثال:

الخط البياني للتابع $y=f(x)=x^2, -1\le x\le 1$ ممثل في الشكل رقم 3



الشكل رقم 3 بيان التابع $y = f(x) = x^2, -1 \le x \le 1$

2. التوابع العكسية

ليكن y متحول المستقر للتابع f و x هو متحول المنطلق. كذلك نفترض أنّ علاقة الربط هي عنصر واحد مقابل عنصر واحد بين المنطلق والمستقر. نعرّف التابع f^{-1} الذي يدعى التابع العكسي للتابع f الذي ينتج من التبادل بين المنطلق والمستقر للتابع f. أي أنّ $x = f^{-1}(y)$. لتسهيل التعامل مع التابع العكسي ولرسم بيانه نستخدم الكتابة $y = f^{-1}(x)$. يتحقق لدينا $f^{-1}\left[f(x)\right] = f\left[f^{-1}(x)\right]$

ملاحظة f^{-1} ليس التابع f مرفوعاً للقوة -1 وإنما التابع العكسي.

3. التوابع الأساسية البسيطة

تسمى التوابع التالية توابع أساسية بسيطة

1. تابع القوة $y = f(x) = x^n$ منطقة التعريف $x \in \mathbb{R}$

1.3. التوابع كثيرات الحدود

تأخذ التوابع كثيرات الحدود الشكل $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ حيث $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ أمثال حقيقية ثابتة و n عدد طبيعي يدعى درجة كثير الحدود عندما يكون $a_n \neq 0$.

لكل كثير حدود جذر على الأقل في مجموعة الأعداد العقدية. ويكون لكثير الحدود من الدرجة n له n جذر في مجموعة الأعداد العقدية. وبما أنّ أمثال كثير الحدود حقيقية فإنّ الجذور العقدية عند وجودها تكون بشكل أزواج مترافقة ذاتياً.

مثال:

$$x^3-5x^2+11x-15=(x-3)(x^2-2x+5)=(x-3)(x-1-2i)(x-1+2i)$$

1.1.3. التوابع الخطية المستقيمات

تمثّل المعادلة التالية تابع خطي بيانه مستقيم $f(x)=y=m\cdot x+y_0$ حيث تمثّل m ميل المستقيم و y_0 نقطة تقاطعه مع المحور Oy.

يمثل ميل المستقيم ظل الزاوية التي يصنعها المستقيم مع المحور Ox الافقي.

يمكن حساب ميل مستقيم عُلمت منه نقطتان $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ باستخدام العلاقة:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

يمكن حساب ميل مستقيم من معرفة نقطتين منه $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ حيث $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

تعطى معادلة مستقيم ميله m و يمّر بالنّقطة (x_0,y_0) بالمعادلة: $y-y_0=m\cdot(x-x_0)$

مثال:

أوجد معادلة المستقيم الذي ميله -2 ويمرّ بالنّقطة $(1,3)$.

$$y-3=-2(x-1)\Rightarrow y=-2x+5$$

معادلة مستقيم يمر من نقطتين

لتكن $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ نقطتين من مستقيم. نبدأ بإيجاد ميل المسقيم باستخدام العلاقة: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

ثمّ نطبّق ما ورد في الفقرة السابقة.

مثال:

أوجد معادلة المستقيم المارّ بالنّقطتين $(2,5),(0,3)$.

نحسب ميل المستقيم فنجد $m=\frac{5-3}{2-0}=\frac{2}{2}=1$. وتكون معادلته $y-3=1(x-0)$ أي:

$y=x+3$.

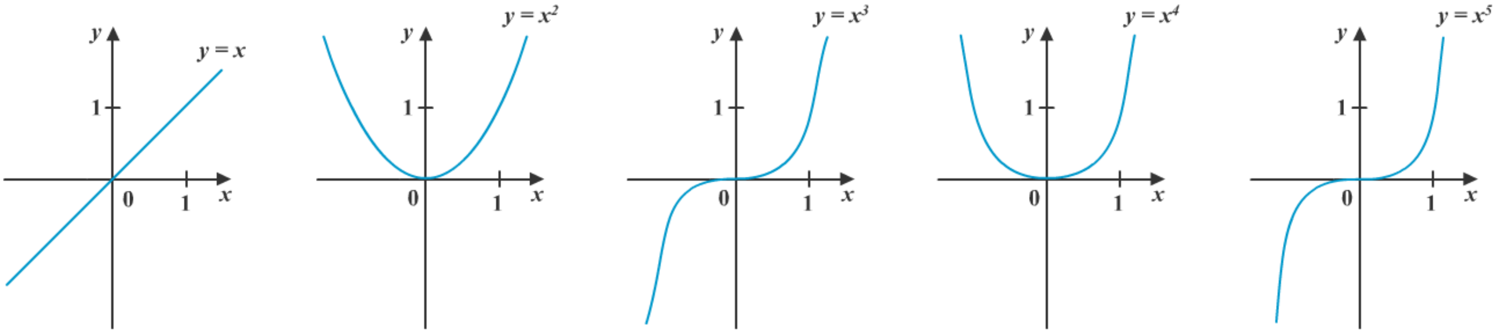
ISSN: 2617-989X

ملاحظة:

- يكون مستقيمان متوازيان إذا كان لهما نفس الميل.
- يكون مستقيمان متعامدان إذا كان جداء ميليهما يساوي $m_1 \cdot m_2 = -1$.

2.1.3. التوابع كثيرات الحدود من الدرجة الثانية

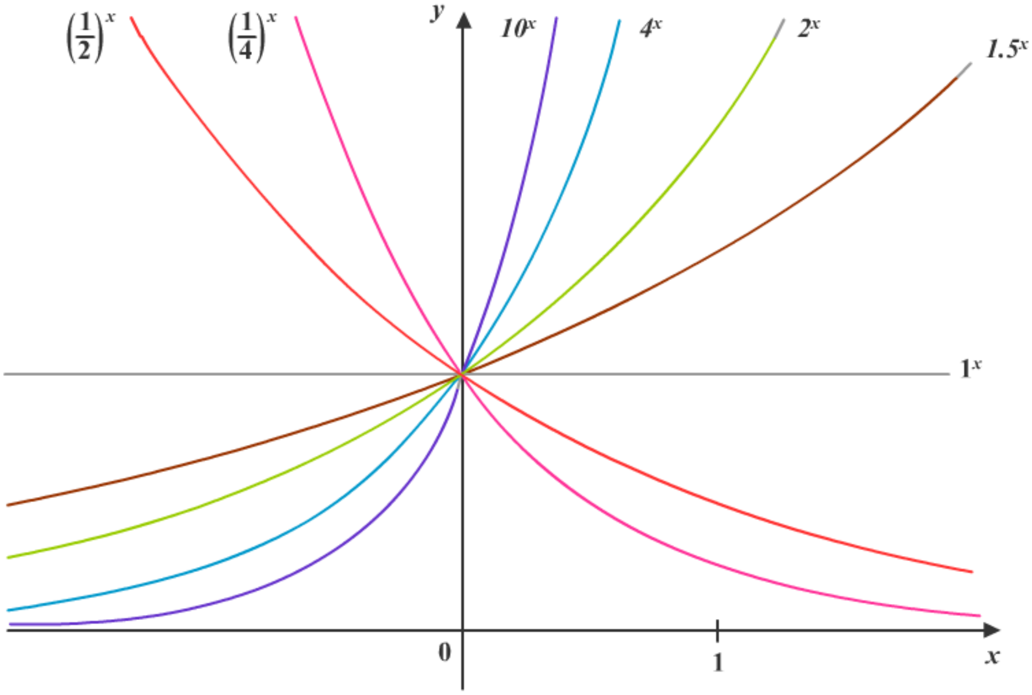
نعرّف التابع كثير الحدود من الدرجة الثانية بأنه تابع تكون فيه علاقة الربط عبارة عن كثير حدود من الدرجة الثانية. أي أنّ علاقة الربط تكون من الشكل $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث $a,b,c \in \mathbb{R}, a \neq 0$.
يشكّل بيان التابع من الدرجة الثانية قطع مكافئ وتكون جهة التقعر نحو الأعلى إذا كان $a > 0$ ونحو الأسفل إذا كان $a < 0$ ندعو ذروة القطع أعلى نقطة في القطع عندما يكون تقعره سالباً أو اخفض نقطة في القطع عندما يكون تقعرّه موجباً. يشكل المستقيم الشاقولي المار من ذروة القطع محور القطع ويكون القطع المكافئ متناظراً بالنسبة لمحور القطع.
كل تابع كثير حدود من الدرجة الثانية من الشكل $y = f(x) = a(x-h)^2 + k$ حيث $a,h,k \in \mathbb{R}, a \neq 0$ ثوابت حقيقية يعبر عن قطع مكافئ وذروته هي النقطة (h,k) ومحور القطع هو المستقيم $x = h$ وتقعرّه نحو الأعلى إذا كانت $a > 0$ ونحو الأسفل إذا كانت $a < 0$.



الشكل رقم 4 بيانات التوابع كثيرات الحدود الأساسية

2.3. التوابع الأسية

$y=f(x)=a^x$ $a\neq 0, a>0$ ثابت حقيقي ومنطقة التعريف $x\in\mathbb{R}$ ومن اهم التوابع الأسية التابع $y=f(x)=e^x$ حيث $e=2.71828\ldots$ العدد النيبري أو العدد الطبيعي.



الشكل رقم 5 التوابع الأسية

3.3. التوابع اللوغاريتمية

$y=f(x)=\log_a x$ و $a>0$ ، $a\neq 0$ يدعى أساس اللوغاريتم ومنطقة التعريف $x\in\mathbb{R}_+^*$. يدعى التابع اللوغاريتم الطبيعي $y=f(x)=\log_e x=\ln x$ حيث الأساس $a=e=2.71828\ldots$

$$y=\ln x \Leftrightarrow x=e^y$$

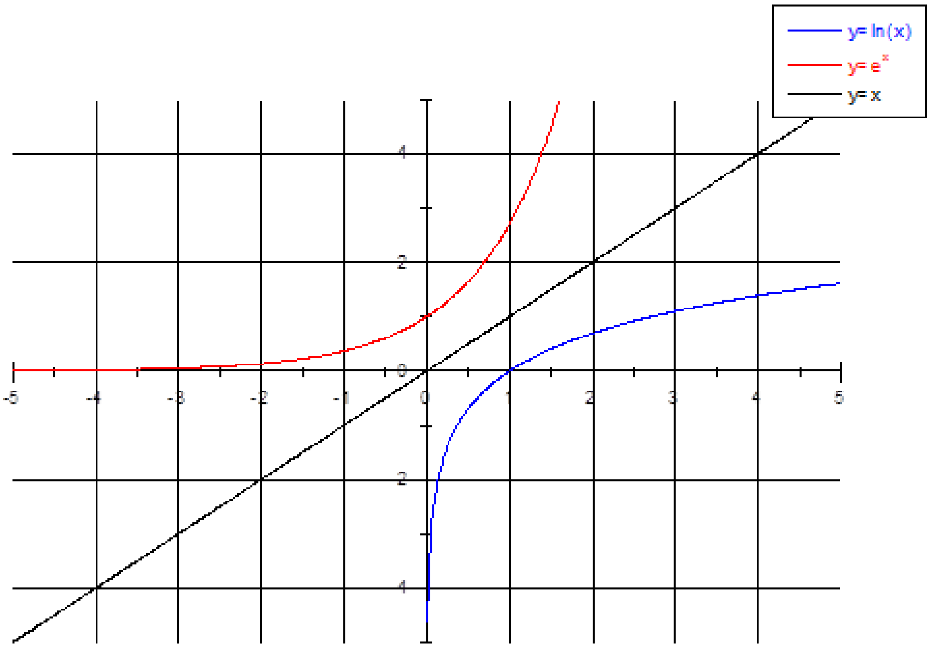
خصائص اللّوغاريتم:

1. $\log_a 1=0$
2. $\log_a a=1$
3. $\log_a a^r=r$
4. $a^{\log_a x}=x$

ISSN: 2617-989X

العمليّات على اللّوغاريتم:

1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a(x / y) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a(x^r) = r \log_a x$
4. $\log_a(x) = \dfrac{\log(x)}{\ln(a)}$ يمكن تعميمها $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$



الشكل رقم 6 التابع اللوغاريتمي

ISSN: 2617-989X

4.3.التوابع المثلثية

$$\sin x , \cos x , \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \csc = \frac{1}{\sin x}, \sec = \frac{1}{\cos x}, \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

يعبّر عن المتحول x بالراديان $\pi[rad]=180[\deg]$. يأخذ التابعين $\sin x , \cos x$ قيماً ضمن المجال $[-1,1]$ عندما تتغير قيمة المتحول ضمن مجموعة الأعداد الحقيقية.

بعض خصائص التوابع المثلثية

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x , 1+\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \csc^2 x$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y , \ \sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y , \ \cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}, \ \tan(-x) = -\tan x$$

5.3. التوابع المثلثية العكسية

$$y = \arcsin x = \sin^{-1} x , -\pi/2 \le y \le \pi/2$$
$$y = \arccos x = \cos^{-1} x , 0 \le y \le \pi$$
$$y = \arctan x = \tan^{-1} x , -\pi/2 < y < \pi/2$$
$$y = \csc^{-1} x = \sin^{-1}(1/x), -\pi/2 \le y \le \pi/2$$
$$y = \sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x), 0 \le y \le \pi$$
$$y = \cot^{-1} x = \pi/2 - \tan^{-1} x , 0 < y < \pi$$

6.3. التوابع الزائدية

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

ISSN: 2617-989X

من خصائص هذه التوابع

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$
$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sec}h^2 x$$
$$\coth^2 x - 1 = \operatorname{csc}h^2 x$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$
$$\sinh(-x) = -\sinh x$$
$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$
$$\cosh(-x) = \cosh x$$
$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$$
$$\tanh(-x) = -\tanh x$$

7.3. التوابع الزائدية العكسية

ليكن لدينا $x = \sinh y$ أي أنّ $y = \sinh^{-1} x$ التابع الزائدي العكسي للمتحول x. فيمايلي العلاقات الرياضية للتوابع الزائدية العكسية

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$
$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), x \geq 1$$
$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), |x| < 1$$

4. تعريف التوابع المحدودة

تعريف: لتكن X مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ وليكن لدينا التابع $f:X\to\mathbb{R}$ نقول إنّ:

1. f محدود من الأعلى إذا وفقط إذا وجد $M\in\mathbb{R}$ بحيث $\forall x\in X;f(x)\le M$
2. f محدود من الأدنى إذا وفقط إذا وجد $m\in\mathbb{R}$ بحيث $\forall x\in X;f(x)\ge m$
3. f محدود إذا وفقط إذا كان محدوداً من الأعلى ومن الأدنى أي إذا وجد $m\in\mathbb{R},M\in\mathbb{R}$ بحيث $\forall x\in X;m\le f(x)\le M$ ونرمز بالمقدار

$$\sup_X f=\sup\{f(x):x\in X\}\in\overline{\mathbb{R}}$$

$$\inf_X f=\inf\{f(x):x\in X\}\in\overline{\mathbb{R}}$$

ويكون لدينا:

f محدود من الأعلى $\Leftrightarrow \sup_X f\in\mathbb{R}$

f محدود من الأدنى $\Leftrightarrow \inf_X f\in\mathbb{R}$

مثال:

التابع $f(x)=3+x$ تابع محدود على المجال $x\in X=[-1,1]$.

$$\sup_X f=4,\inf_X f=2$$

مثال:

التابع $f(x)=\dfrac{1}{x}$ غير محدود على المجال $X=]0,4[$ لا يوجد حد أعلى ويوجد حد أدنى $\inf_X f=\dfrac{1}{4}$.

مبرهنة

لتكن X مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$ وليكن التابعان $f:X\to\mathbb{R}$ و $g:X\to\mathbb{R}$ و $\lambda\in\mathbb{R}_+$.

- إذا كان f محدوداً من الأعلى فإن $-f$ محدود من الأدنى ويكون: $\inf_X(-f)=-\sup_X f$
- إذا كان f و g محدودين من الأعلى فإن $f+g$ و λf محدودان من الأعلى ويكون:

$$\sup_X(\lambda f)=\lambda\sup_X f \quad \text{و} \quad \sup_X(f+g)\le\sup_X f+\sup_X g$$

- إذا كان f و g محدودين من الأعلى وموجبين فإن $f\cdot g$ محدود من الأعلى ويكون:

$$\sup_X(f\cdot g)\le\sup_X f\cdot\sup_X g$$

ISSN: 2617-989X

مثال:

يبين التابعان $f:x\to x$ و $g:x\to 1-x$ المعرفان على $X=[0,1]$ أنه عموماً ليس هناك مساواة في أي من: $\sup_X(f+g)\le \sup_X f+\sup_X g$ أو $\sup_X(f\cdot g)\le \sup_X f\cdot \sup_X g$.

5. تعريف التابع المتزايد والمتناقص والمطّرد

ليكن لدينا X مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ وليكن التابع $f:X\to\mathbb{R}$ نقول إنّ

1. التابع f متزايد إذا وفقط إذا كان $\forall x_1,x_2\in X, x_1\le x_2\Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$
2. التابع f متناقص إذا وفقط إذا كان $\forall x_1,x_2\in X, x_1\le x_2\Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$
3. التابع f متزايد تماماً إذا وفقط إذا كان $\forall x_1,x_2\in X, x_1< x_2\Rightarrow f(x_1)< f(x_2)$
4. التابع f متناقص تماماً إذا وفقط إذا كان $\forall x_1,x_2\in X, x_1< x_2\Rightarrow f(x_1)> f(x_2)$
5. التابع f مطّرد إذا كان متزايداً أو متناقصاً.

نلاحظ أنّه إذا كان $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعاً متزايداً فإنّ $(-f)$ متناقص وإذا كان $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعين متزايدين وكانت $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$ فإنّ $f+g$ و λf متزايدان. وكذلك فإنّ ناتج تركيب تابعين متزايدين أو متناقصين تابع متزايد وناتج تركيب تابع متزايد مع آخر متناقص تابع متناقص.

6. تعريف التابع الفردي والزوجي

- نقول عن مجموعة جزئية X من $\mathbb{R}$ أنها متناظرة بالنسبة إلى الصفر 0 إذا وفقط إذا كان:

$$\forall x\in X, -x\in X$$

- لتكن X من $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى 0. نقول إن التابع $f:X\to\mathbb{R}$ فردي إذا وفقط إذا كان $\forall x\in X, f(-x)=-f(x)$ ونقول إنه زوجي إذا وفقط إذا كان $\forall x\in X, f(-x)=f(x)$

مثال:

ليكن لدينا التابع $f:X\to\mathbb{R}$ نعرّف منه التابعين f_p, f_i كما يلي:

$$\begin{cases} f_p(x)=\dfrac{1}{2}(f(x)+f(-x)) \\ f_i(x)=\dfrac{1}{2}(f(x)-f(-x)) \end{cases}$$

فيكون f_p تابعاً زوجياً و f_i تابعاً فردياً و $f=f_p+f_i$

7. تعريف التابع الدوري

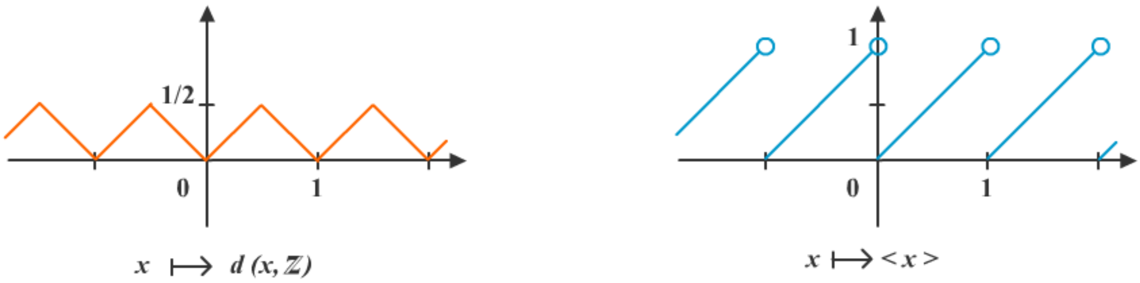
لتكن X مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ نقول إنّ التابع $f:X\to\mathbb{R}$ هو تابع T دوري حيث $T\in R_{+}^{*}$ إذا وفقط إذا $\forall x\in X,(x+T\in X)\wedge(f(x+T)=f(x))$ ونقول إنّ T هو دور التابع f.

ونقول إنّ التابع $f:X\to\mathbb{R}$ هو تابع دوري إذا وجدت قيمة T بحيث يكون f تابعاً T دورياً.

مثال:

التابع الذي يربط كل عدد $x\in\mathbb{R}$ جزأه الكسري $\langle x\rangle=x-E(x)$ هو تابع 1 دوري. وكذلك التابع الذي يربط بكل عدد $x\in\mathbb{R}$ المسافة بين x ومجموعة الأعداد الصحيحة $d(x,\mathbb{Z})=\inf\{|x-n|,n\in\mathbb{Z}\}$ هو تابع 1 دوري ونجد أنّ:

$$d(x,\mathbb{Z})=\min\left(x-E(x),1+E(x)-x\right).$$



الشكل رقم 7 تابع دوري

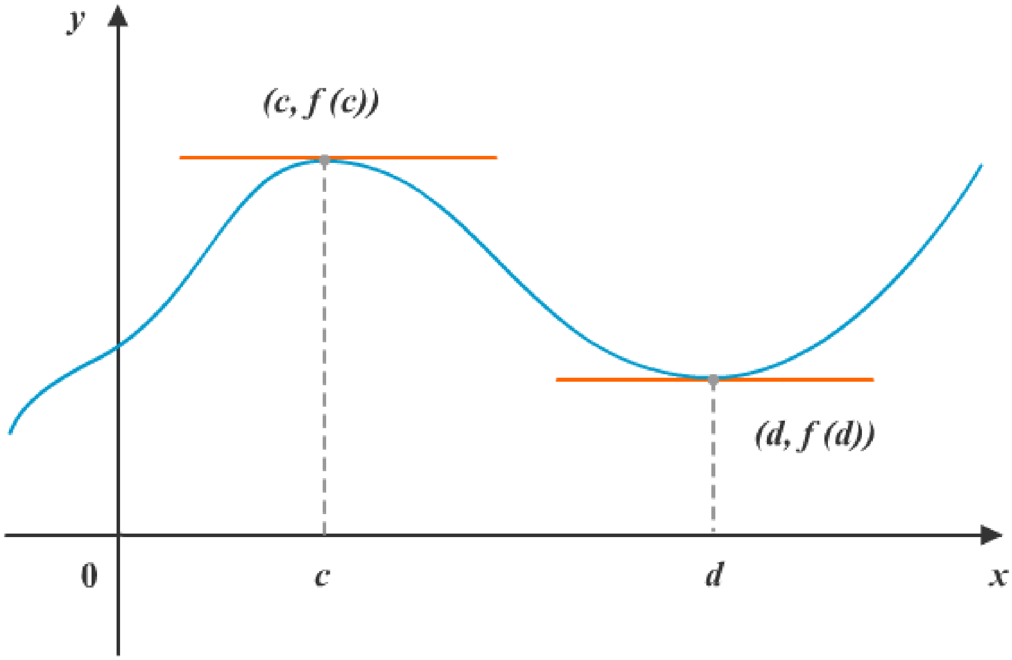
8. النهايات المحلّية

تحتاج كثير من التطبيقات حساب القيم العظمى والدنيا التي تأخذها التوابع ومن هنا برزت أهمية النهايات المحلية العظمى والصغرى.

تعريف النهاية المحلية العظمى والصغرى

لنأخذ التابع f المعرّف على المجال المفتوح $]a,b[$ الذي فيه c حيث $f(x)<f(c)$ لكل قيم x المختلفة عن c و $\forall x\in]a,b[,x\neq c$ عندها تدعى $f(c)$ نهاية محلية عظمى للتابع f. إذا كان $\forall x\in]a,b[,x\neq c,f(x)>f(c)$ عندها تكون $f(c)$ نهاية محلية صغرى للتابع f.

ISSN: 2617-989X



الشكل رقم 8 نهاية محلية عظمى ونهاية محلية صغرى

يمكن للتابع أن يكون له أكثر من نهاية محلية ويمكن أن لايكون له نهاية محلية وذلك عندما يكون التابع متزايداً تماماً أو متناقصاً تماماً.

تعريف النهاية المطلقة العظمى والصغرى

إذا كانت c ضمن مجموعة التعريف للتابع f ولكل قيم x من مجموعة التعريف الكاملة $f(x) \leq f(c)$ عندها تكون $f(c)$ نهاية مطلقة عظمى للتابع f. إذا كانت من أجل أي قيمة x من مجموعة التعريف $f(x) \geq f(c)$ عندها تكون $f(c)$ نهاية مطلقة صغرى للتابع f.

ملاحظة:

النهايات المطلقة ليست بالضرورة وحيدة. فالتابع الخطي الذي بيانه مستقيم أفقي تكون فيه كل نقطة نهاية مطلقة عظمى وصغرى.

تعريف نهايات التوابع

ليكن لدينا التابع $f(x)$ المعرّف على مجال بجوار x_0 وليس من الضرورة أن يكون معرّفاً على النقطة x_0. نقول إنّ العدد الحقيقي l هو نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من x_0 من اليمين بقيم اكبر من x_0 ومن اليسار بقيم أصغر من x_0 ونكتب $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ إذا كان من أجل أي عدد موجب صغير ε نستطيع أن نجد عدد موجب δ (يتعلق عادةً بالعدد ε) بحيث يكون $|f(x) - l| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - x_0| < \delta$. نقول في

هذه الحالة إنّ $f(x)$ تسعى لـ l عندما تسعى x إلى x_0. $f(x) \to l \; as \; x \to x_0$. أي أنّ $f(x)$ يصبح قريباً من l باختيار x قريب بشكل كاف من x_0.

مثال:

ليكن $f(x) = \begin{cases} x^2 \; if \; x \neq 2 \\ 0 \; if \; x = 2 \end{cases}$ عندها عندما تقترب x من 2 تقترب قيمة هذا التابع $f(x)$ من 4 أو $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$. نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4 \neq f(2) = 0$ أي أنّ ليس من الضرورة أن تكون نهاية التابع $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ تساوي قيمة التابع عند x_0.

عندما تكون النهاية موجودة فهي وحيدة.

النهاية من اليمين والنهاية من اليسار

يكون من المفيد أحياناً دراسة نهاية تابع $f(x)$ عندما تسعى x إلى x_0 بقيم أكبر من x_0 (من اليمين) نقول إنّ x تسعى إلى x_0^+ $(x \to x_0^+)$ أو بقيم أصغر من x_0 (من اليسار) نقول إنّ x تسعى إلى x_0^- $(x \to x_0^-)$ إذا كانت $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l_1, \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l_2$

1. تدعى l_1 نهاية من اليمين للتابع $f(x)$ عندما تنتهي x إلى x_0 من اليمين x_0^+.
2. تدعى l_2 نهاية من اليسار للتابع $f(x)$ عندما تنتهي x إلى x_0 من اليسار x_0^-.

أي إنّ تعريف النهاية من اليمين أو من اليسار هو نفسه تعريف النهاية ولكن بتحديد قيم $x > x_0$ (من اليمين) أو $x < x_0$ (من اليسار).

لدينا $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ إذا وفقط إذا كان $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$

نظريات النهايات

إذا كان لدينا $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ و $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$ يكون لدينا:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x)\right) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A + B$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) - g(x)\right) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A - B$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right) \cdot \left(\lim\limits_{x \to x_0} g(x)\right) = A \cdot B$
4. $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} +\right) = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{A}{B} if \; B \neq 0$

تبقى نفس النتائج صحيحة للنهايات من اليمين ومن اليسار.

اللانهاية:

قد يتزايد أو يتناقص التابع $f(x)$ بدون حدود. نكتب في هذه الحالة $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ أو $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$
تكون في هذه الحالة النهاية غير موجودة في مجموعة الأعداد الحقيقية. بشكل أدق نقول إنّ $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$
إذا كان لكل عدد موجب M يمكن أن نجد عدد موجب δ (يعتمد على M) بحيث $f(x)>M$ عندما $0<|x-x_0|<\delta$.
ونقول إنّ $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ إذا كان من أجل أي عدد موجب M نستطيع أن نجد عدد موجب δ بحيث $f(x)<-M$ عندما $0<|x-x_0|<\delta$.
نجد بشكل مشابه δ عندما $x\to x_0^+$ أو $x\to x_0^-$.
نحتاج في الكثير من الأحيان إلى دراسة تصرّف التابع عندما تزداد قيم x أو تتناقص قيم x بدون حدود نقول عندها إنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$ أو $f(x)\to l$ عندما $x\to+\infty$ إذا كان من أجل أي عدد ε يمكن أن نجد عدد موجب N (يعتمد على ε) بحيث $|f(x)-l|<\varepsilon$ كلما كان $x>N$. نجد تعريف $\lim_{x\to-\infty} f(x)=l$ بشكل مشابه.

نهايات خاصة

1. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1;\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)=0$
2. $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e;\ \lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x}=e$
3. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{\ln x}\right)=1;\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=1$

9. استمرار التوابع

تعريف الاستمرار

ليكن $f(x)$ تابع معرّف بجوار x_0 وعند x_0 عندها يكون التابع مستمر عند x_0 إذا كانت $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. هذا يعني أنّ هناك ثلاثة شروط يجب أن تتحقق من أجل أن يكون التابع $f(x)$ مستمراً عند x_0 وهي كما يلي:

1. $f(x_0)$ موجود أو $f(x)$ معرّف عند x_0.
2. النهاية موجودة $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$.
3. $l=f(x_0)$.

ISSN: 2617-989X

مثال:

إذا كان لدينا التابع $f(x)=\begin{cases} x^2 if\ x\neq 2 \\ 0 if\ x=2 \end{cases}$ نجد أنّ $\lim_{x\to 2} f(x)=4$ ولكن $f(2)=0$ والتابع غير مستمر (أو يوجد انقطاع) عند $x=2$.

مثال:

ليكن لدينا التابع $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=x^2$ عندها $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)=4$ والتابع $f(x)$ مستمر عند 2.

ملاحظات:

1. عندما يكون التابع $f(x)$ غير مستمر نقول أنّ هناك انقطاع أو انقطاعات في التابع $f(x)$ عند النقاط التي لايكون فيها التابع مستمراً.
2. عند رسم بيان تابع مستمر لانحتاج لرفع القلم عن الورقة بينما عندما يكون هناك انقطاع نحتاج لرفع القلم عن الورقة بسبب وجود ثغرات.

1.9. تعريف الاستمرار من اليمين ومن اليسار

إذا كان لدينا التابع $f(x)$ معرّف من أجل قيم $x\geq x_0$ نقول في هذه الحالة إنّ التابع $f(x)$ مستمر من اليمين عند $x=x_0$ إذا تحقق $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$. وبشكل مشابه إذا كان لدينا التابع $f(x)$ معرّف من أجل قيم $x\leq x_0$ نقول في هذه الحالة إنّ التابع $f(x)$ مستمر من اليسار عند $x=x_0$ إذا تحقق $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$.

تعريف استمرار التابع على مجال

نقول إنّ التابع مستمر على مجال إذا كان مستمراً على كل نقاط المجال. ليكن لدينا التابع $f(x)$ المعرّف على كل نقاط المجال المغلق $[a,b]$ يكون هذا التابع مستمراً على المجال $[a,b]$ إذا وفقط إذا كان:

$$\forall x_0\in]a,b[; \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0), \lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)\wedge \lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$$

نظريات الاستمرار

نظرية 1

إذا كان التابعان $f(x),g(x)$ مستمرين عند x_0 عندها تكون التوابع التالية مستمرة عند x_0: $f(x)+g(x), f(x)-g(x), f(x)\cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)} if\ g(x)\neq 0$. نحصل على نفس النتيجة عند تحقق الاستمرار على مجال.

نظرية 2

التوابع التالية مستمرة على كل المجالات المنتهية:

- كل كثيرات الحدود
- $\sin x , \cos x$
- $a^x , a > 0$

نظرية 3

ليكن لدينا التابع $y = f(x)$ مستمراً عند النقطة x_0 التي تنتمي إلى مجموعة تعريف التابع $f(x)$. ولنفترض أنه لدينا التابع $z = g(y)$ المستمر عند y_0 حيث $y_0 = f(x_0)$ (مجموعة تعريف التابع $g(y)$ هي مجموعة المستقر للتابع $f(x)$). عندها ندعو التابع $g[f(x)]$ الممثل بـ $z = g[f(x)]$ تابعاً مركباً ويكون هذا التابع مستمراً عند x_0 أي أنّ تركيب تابعين مستمرين هو تابع مستمر.

نظرية 4

إذا كان $f(x)$ مستمراً على مجال مغلق فهو محدود في هذا المجال.

نظرية 5

إذا كان $f(x)$ مستمراً عند x_0 وكان لدينا $f(x_0) > 0$ (أو $f(x_0) < 0$) فيوجد عندئذ مجال حول x_0 يكون فيه $f(x_0) > 0$ (أو $f(x_0) < 0$).

نظرية 6

إذا كان التابع $f(x)$ مستمر في مجال ومتزايداً تماماً أو متناقصاً تماماً في هذا المجال يكون التابع العكسي $f^{-1}(x)$ مستمراً وإمّا متزايداً تماماً أو متناقصاً تماماً على نفس المجال.

نظرية 7

إذا كان التابع $f(x)$ مستمراً في المجال $[a,b]$ وإذا كان $f(a) = A$ و $f(b) = B$ عندئذ يوجد مقابل أي عدد C بين A و B عدد $c \in [a,b]$ بحيث $f(c) = C$. تدعى هذه النظرية أحياناً بنظرية القيمة المتوسطة.

نظرية 8

إذا كان $f(x)$ مستمراً في المجال $[a,b]$ وإذا كان $f(a)$ و $f(b)$ بإشارتين متعاكستين عندئذ يوجد على الأقل عدد $c \in]a,b[$ بحيث $f(c) = 0$. هذه النظرية متعلقة بالنظرية 7.

ISSN: 2617-989X

نظرية 9

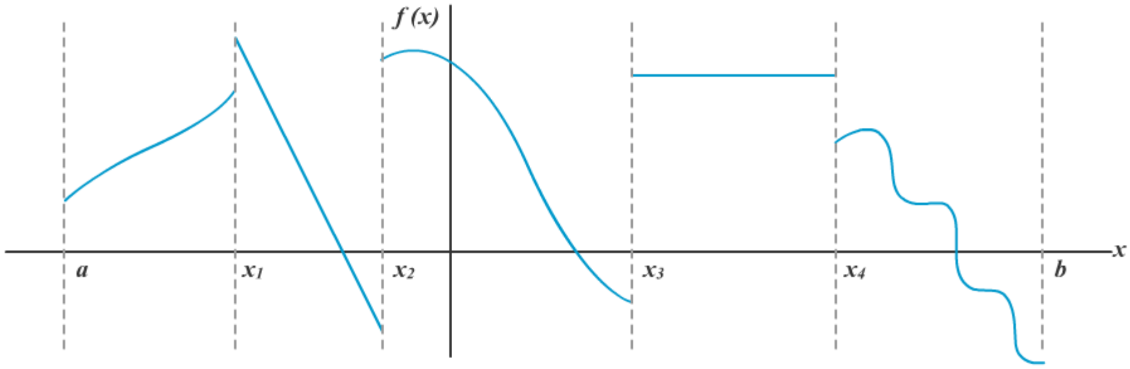
إذا كان التابع $f(x)$ مستمراً على مجال مغلق $[a,b]$ عندها يكون للتابع $f(x)$ قيمة عظمى M عند قيمة على الأقل $x\in[a,b]$ $\left(M=\max\left(f(x),x\in[a,b]\right)\right)$ ويكون للتابع $f(x)$ قيمة صغرى m عند قيمة على الأقل $x\in[a,b]$ $\left(m=\min\left(f(x),x\in[a,b]\right)\right)$. يأخذ كذلك التابع $f(x)$ كل القيم بين m و M من أجل قيمة x أو أكثر.

نظرية 10

إذا كان التابع $f(x)$ مستمراً على المجال المغلق $[a,b]$ وكان $m=\inf\left(f(x),x\in[a,b]\right)$ و $M=\sup(f(x),x\in[a,b])$ يوجد عندئذ قيمة واحدة على الأقل $x\in[a,b]$ بحيث $f(x)=M$ أو $f(x)=m$. هذه النظرية متعلقة بالنظرية 10.

2.9. الاستمرارية قطعيّاً (قطعة بقطعة)

يدعى التابع مستمر قطعيّاً في مجال $x\in[a,b]$ إذا كان يمكن تقسيم المجال إلى عدد منته من المجالات يكون في كل منها التابع مستمراص وله نهاية يمنى ونهاية يسرى. يكون لهذا التابع عدد منته من الانقطاعات.



الشكل رقم 9 التابع المستمر على قطع

مذاكرة التوابع النهايات والاستمرار

العلامة العظمى: 100 علامة النجاح: 50 المدة: ساعة ونصف

لكل سؤال خمس علامات

اختر الإجابة الصحيحة للأسئلة التالية:

1. منطقة تعريف التابع $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ هي
   a) $\mathbb{R}$
   b) $\mathbb{R}\setminus\{-2,+2\}$
   c) $]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$
   d) $[2,+\infty[$

مساعدة: راجع فقرة تعريف التوابع.

2. منطقة تعريف التابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ هي
   a) $\mathbb{R}$
   b) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
   c) $]0,+\infty[$
   d) $\mathbb{R}^+$

مساعدة: راجع فقرة تعريف التوابع.

3. منطقة تعريف التابع $f(x)=\log(x-5)$ هي
   a) $\mathbb{R}\setminus\{5\}$
   b) $\mathbb{R}\setminus\{-5,5\}$
   c) $[5,+\infty]$
   d) $]5,\infty[$

مساعدة: راجع فقرة تعريف التوابع.

4. منطقة تعريف التابع $f(x)=\sin x$ هي
   a) $\mathbb{R}$
   b) $\mathbb{R}\setminus\{\pi/2\}$
   c) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
   d) $\mathbb{R}\setminus\{\pi\}$

ISSN: 2617-989X

مساعدة: راجع فقرة تعريف التوابع.

5. التابع $f(x)=\sin x$ هو تابع

a) فردي

b) زوجي

مساعدة: راجع فقرة تعريف التابع الفردي والزوجي وفقرة تعريف التابع الدوري.

6. التابع $f(x)=\cos x$ هو تابع

a) فردي

b) زوجي

مساعدة: راجع فقرة تعريف التابع الفردي والزوجي وفقرة تعريف التابع الدوري.

7. التابع $f(x)=x$ هو تابع

a) دوري

b) زوجي

c) فردي

مساعدة: راجع فقرة تعريف التابع الفردي والزوجي وفقرة تعريف التابع الدوري.

8. نعرّف التابع $f(x)=(x-2)(8-x), 2\le x\le 8$ ماهي منطقة تعريفه؟

a) $2\le x\le 8$

b) $\mathbb{R}\setminus\{5\}$

c) $\mathbb{R}\setminus\{8\}$

d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة تعريف التوابع.

9. نعرّف التابع $f(x)=(x-2)(8-x), 2\le x\le 8$ ماهي قيمة $f(-1)$؟

a) غير معرّفة

b) -27

c) 27

d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة تعريف التوابع.

ISSN: 2617-989X

10. لدينا التابع $f(x)=\begin{cases} x^2, x\neq 2 \\ 0, x=2 \end{cases}$ ماهي قيمة نهاية التابع $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$؟

a) 4
b) 0
c) غير موجودة
d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة نهايات التوابع.

11. لدينا التابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3}, x\neq 3 \\ 0, x=3 \end{cases}$ ماهي قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$؟

a) 0
b) 1
c) -1
d) غير موجودة

مساعدة: راجع فقرة نهايات التوابع.

12. ماهي قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$؟ مساعدة: ضرب وقسمة التابع بالحد $\left(\sqrt{4+x}+2\right)$

a) $\dfrac{1}{4}$
b) ∞
c) $\dfrac{1}{6}$
d) $\dfrac{1}{8}$

مساعدة: راجع فقرة نهايات التوابع.

13. التابع $f(x)=\dfrac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1}$ مستمر على المنطقة؟

a) $\mathbb{R}\setminus\{1\}$
b) $\mathbb{R}$
c) $\mathbb{R}^*$
d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة استمرار التوابع.

14. ماهي المنطقة التي يكون عندها التابع $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ مستمراً عندها؟

a) $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

c) $\mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}$

d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة استمرار التوابع.

15. ماهي المنطقة التي يكون عندها التابع $f(x)=\frac{1+\cos x}{3+\sin x}$ مستمراً عندها؟

a) $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

c) $\mathbb{R}\setminus\{\pi\}$

d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة استمرار التوابع.

16. ماهي المنطقة التي يكون عندها التابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{10+x}}$ مستمراً عندها؟

a) $]-10,+\infty[$

b) $[-10,+\infty[$

c) $[-10,10]$

d) $]-\infty,-10[$

مساعدة: راجع فقرة استمرار التوابع.

17. ماهي المنطقة التي يكون عندها التابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x-|x|}{x}, x<0\\ 2, x=0\end{cases}$ مستمراً عندها؟

a) $\mathbb{R}^-$

b) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

c) $\mathbb{R}^+$

d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة استمرار التوابع.

ISSN: 2617-989X

.18 ليكن لدينا التابع $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}, x\neq 2$ ماهي قيمة $\left\{f\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right\}^2$؟

a) $\dfrac{1}{5}$

b) $\dfrac{1}{25}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

d) $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

مساعدة: راجع فقرة تعريف التوابع.

.19 ليكن لدينا التابع $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}, x\neq 2$ ماهي قيمة $f(x)=(2x-3)$؟

a) $\dfrac{6x-8}{2x-5}$

b) $\dfrac{6x-9}{2x-3}$

c) $\dfrac{6x+8}{2x-5}$

d) $\dfrac{6x-8}{2x+6}$

مساعدة: راجع فقرة تعريف التوابع.

.20 ماهي النهاية $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$؟

a) 4

b) 0

c) ∞

d) غير موجودة

مساعدة: راجع فقرة نهايات التوابع.

الإجابات الصحيحة

السؤال	الإجابة الصحيحة
1	الخيار الثالث
2	الخيار الثالث
3	الخيار الرابع
4	الخيار الأول
5	الخيار الأول
6	الخيار الثاني
7	الخيار الثالث
8	الخيار الأول
9	الخيار الأول
10	الخيار الأول
11	الخيار الرابع
12	الخيار الأول
13	الخيار الأول
14	الخيار الثالث
15	الخيار الأول
16	الخيار الأول
17	الخيار الأول
18	الخيار الأول
19	الخيار الأول
20	الخيار الأول

ISSN: 2617-989X

الفصل الثالث: المتتاليات الحقيقية
Real Sequences

الكلمات المفتاحية:

المتتالية الحقيقية، المتتالية الحسابية، المتتالية الهندسية، نهاية متتالية، تقارب متتالية، تباعد متتالية، المتتالية المطّردة، المتتالية المتناقصة، المتتالية المتزايدة، المتتالية المحدودة، خاصية كوشي للمتتاليات.

الملخص:

يقدّم هذا الفصل المتتاليات العددية التي تعرّف كتوابع من مجموعة الأعداد الطبيعية إلى مجموعة الأعداد الحقيقية. سيتم تعريف المتتاليات الحقيقية والحسابية والهندسية. يعرض مفهوم نهاية متتالية التي تكون متقاربة إذا انتهت إلى عدد حقيقي وإلا تكون متباعدة. تقدّم نظريات خصائص المتتاليات التي تساعد لحساب نهايات المتتاليات. تعرّف المتتاليات المتزايدة والمتناقصة والمطّردة وتبين نظرية أن المتتالية المطّردة تتقارب إذا كانت محدودة

الأهداف التعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- تعريف المتتالية الحقيقية
- المتتالية الحسابية
- المتتالية الهندسية
- نهاية متتالية
- نظرية المتتاليات
- المتتاليات المحدودة والمطردة
- نهاية الحدود العليا ونهاية الحدود الدنيا لمتتالية

مقدمة

ستقدم النقاط التالية في هذا الفصل:

- تعريف المتتالية الحقيقية
- المتتالية الحسابية
- المتتالية الهندسية
- نهاية متتالية
- نظرية المتتاليات
- المتتاليات المحدودة والمطردة
- نهاية الحدود العليا ونهاية الحدود الدنيا لمتتالية

1. تعريف المتتالية الحقيقية

نسمّي متتالية حقيقية كل تابع منطلقه مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ (أو $\mathbb{Z}^+$) ومستقره حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

نرمز عادة إلى متتالية بالرمز $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ونسمي u_n (أي صورة العدد n وفق هذا التطبيق) الحد العام للمتتالية.

تعريف المتتالية الجزئية

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية. نسمي متتالية جزئية من $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كل متتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حدّها العام v_n يساوي $u_{\varphi(n)}$ حيث φ تطبيق متزايد تماماً من $\mathbb{N}$ إلى $\mathbb{N}$.

ملاحظة:

لايجوز الخلط بين متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ومجموعة قيمها $\{u_n : n\in\mathbb{N}\}$. فمثلاً للمتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث $u_n=(-1)^n$ و $v_n=(-1)^{n(n+1)/2}$ مجموعة القيم نفسها $\{-1,+1\}$ ولكنهما مختلفتان لأنّ $u_2\neq v_2$.

سنستخدم الأقواس العادية ( ) للإشارة للمتتالية والأقواس المعترضة { } للإشارة لمجموعة القيم.

مثال:

مجموعة الأعداد $2,7,12,,17,\ldots,32,\ldots$ تشكل متتالية حقيقية حدها العام يعطى بالعلاقة

$$u_n=2+5(n-1)=5n-3$$

مثال:

5. تشكل الأعداد $1,3,5,7,9,1,\ldots$ متتالية الأعداد الطبيعية المفردة وحدها العام هو $u_n = 2n+1, n \in \mathbb{Z}^+$.

6. تشكل الأعداد $1,3,-5,-7,9,11,-13,-15,\ldots$ متتالية حدّها العام هو $u_n = (-1)^{\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]}(2n+1), n \in \mathbb{Z}^+$.

7. تشكل الأعداد $1,\left(-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{3}\right),\left(-\frac{1}{4}\right),\left(\frac{1}{5}\right),\ldots$ متتالية حدّها العام هو $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, n \in \mathbb{N}$.

8. المتتالية $s_n = \frac{1}{n^2}$ أي هي المتتالية التي تشكلها الأعداد $\left(1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16},\frac{1}{25},\ldots\right)$. أي هي التابع من مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ومقابل كل عدد طبيعي n نجد $\frac{1}{n^2}$.

9. المتتالية $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{Z}^+ (n \geq 0)$. نلاحظ أنّ الحد الأول لهذه المتتالية هو $a_0 = 1$ والمتتالية هي $(1,-1,1,-1,1,-1,1,\ldots)$. هذه المتتالية هي التابع الذي منطلقه مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $\{0,1,2,3,4,5,\ldots\}$ ومستقرّه المجموعة $\{-1,1\}$.

10. المتتالية $\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right), n \in \mathbb{N}$. الحد الأول من هذه المتتالية هو $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos(60) = \frac{1}{2}$ والمتتالية $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1,\ldots\right)$.

11. المتتالية $a_n = \sqrt[n]{n}, n \in \mathbb{N}$ أي هي $\left(1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\sqrt[4]{4},\sqrt[5]{5},\ldots\right)$ وعند تقريب هذه الأعداد إلى أربعة أرقام بعد الفاصلة نجد $(1,1.4142,1.4422,1.4142,1.3797,1.3480,1.3205,1.2968,\ldots)$ ونجد أن الحد $a_{100} = 1.0471$ والحد $a_{1000} = 1.0069$.

12. المتتالية $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}$ أي هي $\left(2,\left(\frac{3}{2}\right)^2,\left(\frac{4}{3}\right)^3,\left(\frac{5}{4}\right)^4,\ldots\right)$ أو بالتقريب لأربع أرقام بعد الفاصلة نجد $(2,2.25,2.3704,2.4414,2.4883,2.5216,2.5465,2.5658,\ldots)$ ونجد أنّ $b_{100} \approx 2.7048, b_{1000} = 2.7169$.

ISSN: 2617-989X

تمرين:

أوجد الحد العام للمتتالية التي تشكّل الأعداد $-1,-3,5,7,-9,-11,13,15,\ldots$ ؟

الجواب:

الحد العام هو $u_n=(-1)^{\left(\frac{n(n+1)}{n}\right)}(2n-1), n\in\mathbb{Z}^+$.

تمرين:

أوجد الحد العام للمتتالية التي تشكّل الأعداد $\left(\frac{3}{1}\right),\left(\frac{1}{2}\right),\left(\frac{3}{3}\right),\left(\frac{1}{4}\right),\left(\frac{3}{5}\right),\left(\frac{1}{6}\right),\left(\frac{3}{7}\right),\ldots$ ؟

الجواب:

الحد العام هو $u_n=\dfrac{\left(2+(-1)^{n-1}\right)}{n}, n\in\mathbb{N}$.

تمرين:

أوجد الحد العام للمتتالية التي تشكّل الأعداد $\left(\frac{1}{2}\right),\left(\frac{3}{3}\right),\left(\frac{1}{4}\right),\left(\frac{3}{5}\right),\left(\frac{1}{6}\right),\left(\frac{3}{7}\right),\ldots$ ؟

الجواب:

الحد العام هو $u_n=\dfrac{\left(2+(-1)^{n-1}\right)}{n}, n\geq 2$.

1.1. المتتالية الحسابية

تسمى المتتالية حسابية التي حدّها العام من الشكل $u_n=u_n+r, n\in\mathbb{Z}^+$ حيث r ثابت ويمكن كتابتها بالشكل $u_n=u_0+nr, n\in\mathbb{Z}^+$.

مثال:

المتتالية $2,5,8,11,\ldots$ متتالية حسابية حدّها الأول $u_0=2$ واساسها العدد 3.

2.1. المتتالية الهندسية

تسمى المتتالية هندسية التي حدّها العام من الشكل $u_{n+1}=u_n\times q, n\in\mathbb{Z}^+$ حيث q ثابت ويمكن كتابتها بالشكل $u_n=u_0\cdot(q)^n, n\in\mathbb{Z}^+$.

مثال:

تشكّل الأعداد $2,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots$ متتالية هندسية حدّها الأول $u_0=2$ واساسها العدد $q=-\frac{1}{2}$

2. نهاية متتالية

يمكن القول بأنّ نهاية متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بأنّه العدد الحقيقي الذي تكون القيم u_n قريبة منه من أجل قيم n كبيرة. فنجد أنّ $\left(u_n=\frac{1}{n^2}\right)$ تصبح قريبة من 0 والمتتالية $u_n=\sqrt[n]{n}$ تصبح قريبة من 1 من اجل قيم n كبيرة. بينما الوضع يختلف بالنسبة للمتتالية $(-1)^n$ فنجد أن النهاية هي 1 من اجل قيم n أعداد زوجية ونجد أنّ النهاية هي -1 من اجل n أعداد فردية لذلك سنرى بأنّ هذه المتتالية ليس لها نهاية.

تعريف:

نقول بأنّ المتتالية الحقيقية (u_n) تتقارب من العدد الحقيقي l بحيث:

$$\forall\varepsilon>0,\exists N, n>N\Rightarrow|u_n-l|<\varepsilon$$

إذا كانت (u_n) تتقارب من l نكتب $\lim_{n\to\infty}u_n=l$ أو $u_n\to l$. ندعو العدد الحقيقي l نهاية المتتالية (u_n).

تكون المتتالية التي لا تتقارب إلى عدد حقيقي متباعدة. تكون N مرتبطة باختيار ε وتزداد قيمة N كلما صغرت قيمة ε.

مبرهنة:

عندما تكون النهاية موجودة لمتتالية حقيقية فهي وحيدة أي إذا كان لدينا $\lim_{n\to\infty}u_n=l_1$ و $\lim_{n\to\infty}u_n=l_2$ فيجب أن يكون $l_1=l_2$. أي أنّه لايمكن ان تتقارب متتالية (u_n) إلى قيمتين مختلفتين من أجل قيم n كبيرة.

ISSN: 2617-989X

مثال:

المتتالية $u_n = \dfrac{3n+1}{7n-4}$ نجد انّه يمكن كتابتها على الشكل $u_n = \dfrac{3+\frac{1}{n}}{7-\frac{4}{n}}$ وعندما تكون قيم n كبيرة فإنّ $\dfrac{1}{n}$ و $\dfrac{4}{n}$ تصبح صغيرة ويمكن اهمالها أي أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \dfrac{3}{7}$. من نظريات المتتاليات التي ستعرض في الفقرة التالية نجد:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+\frac{1}{n}}{7-\frac{4}{n}}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 7 - 4\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{3+0}{7-4\times 0} = \frac{3}{7}$$

أو بالعودة إلى تعريف النهاية من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يجب أن نحدد قيم n ليتحقق لدينا $\left|\dfrac{3n+1}{7n-4} - \dfrac{3}{7}\right| < \varepsilon$.
أي أنّ $\left|\dfrac{19}{7(4n-4)}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\dfrac{21n+7-21n+12}{7(4n-4)}\right| < \varepsilon$ وبما أنّ $7n-4>0$ فيمكن ازالة القيمة المطلقة وحل المتراجحة من أجل n فنجد $\dfrac{19}{49\varepsilon}+\dfrac{4}{7} < n \Leftarrow \dfrac{19}{7\varepsilon}+4 < 7n \Leftarrow \dfrac{19}{7\varepsilon} < 7n-4$

لنختار $N = \dfrac{19}{49\varepsilon}+\dfrac{4}{7}$ فعندها نجد أنه من أجل:

$$n > N \Rightarrow n > \frac{19}{49\varepsilon}+\frac{4}{7} \Rightarrow 7n > \frac{19}{7\varepsilon}+4 \Rightarrow 7n-4 > \frac{19}{7\varepsilon} \Rightarrow \frac{19}{7(7n-4)} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{3n+1}{7n-4} - \frac{3}{7}\right| < \varepsilon$$

وهذا يثبت أنّ نهاية المتتالية $\dfrac{3n+1}{7n-4}$ هي $\dfrac{3}{7}$.

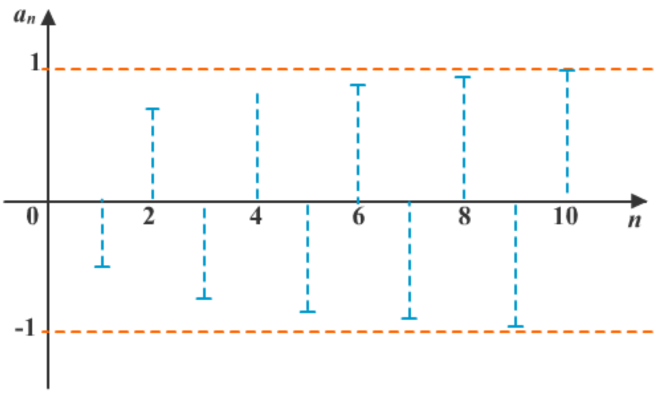
مثال:

1. المتتالية $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ منتهية ونهايتها 0.
2. نهاية المتتالية $(-1)^n$ غير موجودة.
3. نهاية المتتالية $\cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$ غير موجودة.
4. نهاية المتتالية $n^{1/n}$ هي 1.
5. نهاية المتتالية $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ هو العدد النبيري $e \approx 2.7182818$.
6. نهاية المتتالية $\left(e^{1/n}-1\right)n$ هو العدد 1.

مثال:

لتكن لدينا المتتالية $a_n = (-1)^n \cdot n/(n+1)$ هذه المتتالية ليس لها نهاية. لأن قيمها تتأرجح بين $1-$ و $1+$ عندما $n \to \infty$.

n	$a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$
1	$-\frac{1}{2}$
2	$+\frac{2}{3}$
3	$-\frac{3}{4}$
4	$+\frac{4}{5}$
5	$-\frac{5}{6}$
⋮	⋮



1.2. نظريات المتتاليات

لتكن لدينا المتتاليتين الحقيقيتين (a_n) و (b_n) حيث $\lim_{n\to\infty} a_n = A, \lim_{n\to\infty} b_n = B$ فإننا نجد:

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n) = A + B$
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) - \lim_{n\to\infty}(b_n) = A - B$
3. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(b_n) = A \cdot B$
4. $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim_{n\to\infty}(a_n)}{\lim_{n\to\infty}(b_n)} = \dfrac{A}{B}, B \neq 0$

- إذا كانت $B = 0$ و $A \neq 0$ فالنهاية $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ غير موجودة.
- إذا كانت $B = 0$ و $A = 0$ فالنهاية $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ قد تكون موجودة وقد تكون غير موجودة.

5. $\forall p \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty}(a_n)^p = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^p = A^p$ عندما تكون A^p موجودة.
6. $\forall p \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty}\left(p^{a_n}\right) = p^{\lim_{n\to\infty}(a_n)} = p^A$ عندما تكون p^A موجودة.

اللانهاية

1. تكون $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ إذا كان من أجل أي عدد موجب M يمكن أن نجد عدد موجب N (يتعلق بـ M) حيث $\forall n > N, a_n > M$.
2. بشكل مشابه نكتب $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ إذا كان من أجل أي عدد M يمكن أن نجد عدد موجب N (يتعلق بـ M) حيث $\forall n > N, a_n < -M$.
3. نذكر بأنّ $\{+\infty, -\infty\}$ ليسا عددين حقيقيين ولذلك نقول في الحالتين السابقتين أن المتتالية غير متقاربة أو أن المتتالية متباعدة والنهاية غير موجودة في مجموعة الأعداد الحقيقية.

مثال:

ماهي نهاية المتتالية $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+4n}{2n-1}$؟

يمكن كتابة المتتالية بالشكل التالي:

$$\frac{3n^2+4n}{2n-1} > \frac{3n^2}{2n} = \frac{3n}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

وبالتالي نجد $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+4n}{2n-1} = \infty$.

مثال:

1. نهاية المتتالية n^2 هو اللانهاية ∞ ونقول عن هذه المتتالية أنها متباعدة.
2. نهاية المتتالية $2^n / n^2$ هو اللانهاية ∞ ونقول عن هذه المتتالية أنها متباعدة.

3. المتتاليات المحدودة والمطّردة

1. نقول عن المتتالية الحقيقية (u_n) أنها محدودة من الأعلى إذا وجد عنصر $M \in \mathbb{R}$ راجح على مجموعة قيمها $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \le M$ حيث M عدد ثابت لايتعلق بـ n ويدعى M حد أعلى للمتتالية (u_n).
2. نقول عن المتتالية الحقيقية (u_n) أنها محدودة من الأدنى إذا وجد عنصر $m \in \mathbb{R}$ قاصر عن مجموعة قيمها $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \ge m$ حيث m عدد ثابت لايتعلق بـ n ويدعى m حد أدنى للمتتالية (u_n).
3. نقول عن المتتالية الحقيقية (u_n) أنها محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأدنى $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m, M : m \le u_n \le M$. تكون كل متتالية متقاربة محدودة ولكن العكس ليس صحيحاً.
4. نقول عن المتتالية الحقيقية (u_n) أنها متزايدة إذا كان $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \ge u_n$ وتكون متزايدة تماماً إذا كان $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$.

ISSN: 2617-989X

5. نقول عن المتتالية الحقيقية (u_n) أنها متناقصة إذا كان $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \le u_n$ وتكون متناقصة تماماً إذا كان $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$. أو نقول عن المتتالية الحقيقية (u_n) أنها متناقصة (أو متناقصة تماماً) إذا كانت المتتالية $(-u_n)$ متزايدة (أو متزايدة تماماً).
6. نقول عن المتتالية u_n أنها مطردة إذا كانت متزايدة أو متناقصة.

مثال:

1. المتتالية $(1, 1.1, 1.11, 1.111, 1.1111, \ldots)$ محدودة ومتزايدة تماماً.
2. المتتالية $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$ محدودة ولكن ليست مطردة.
3. المتتالية $(-1, -1.5, -2, -2.5, -3, \ldots)$ متناقصة ومحدودة من الأعلى فقط وليست محدودة.
4. المتتالية $u_n = \frac{1}{n}$ متناقصة تماماً.

نظرية:

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية مطّردة (متزايدة أو متناقصة). تكون $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة إذا وفقط إذا كانت محدودة. وفي هذه الحالة تكون نهايتها $\sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ إذا كانت متزايدة ونهايتها $\inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ إذا كانت متناقصة.
أمّا إذا كانت المتتالية متزايدة وغير محدودة من الأعلى فإنّ $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ وإذا كانت متناقصة وغير محدودة من الأدنى فإنّ $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

نتيجة:

لكل متتالية مطّردة من $\overline{\mathbb{R}}$ نهاية في $\overline{\mathbb{R}}$.

ISSN: 2617-989X

تمرين:

هل المتتالية التي حدها العام هو $u_n = \frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}$ متقاربة؟

الجواب:

يمكن برهان أن هذه المتتالية متقاربة إذا استطعنا اثبات أنها محدودة وأنها مضطردة.

لنأخذ الحد $u_{n+1} = \frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$ ومنه نجد:

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}>0$$

أي أنّ المتتالية متزايدة تماماً ولدينا أيضاً أن هذه المتتالية محدودة من الأعلى:

$$u_n = \frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n} < n\times\frac{1}{n+1}<1$$

وهي محدودة من الاسفل: $u_n = \frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}>0$

فهي متقاربة.

تمرين:

هل المتتالية التالية متقاربة: $n\in\mathbb{N}$; $u_n = \frac{\left[1+n+(-1)^n\times n\right]}{n}$؟

الجواب:

نلاحظ أنّه من أجل n فردية النهاية 0 ومن أجل n زوجية النهاية 2 أي ان النهاية غير موجودة.

4. نهاية الحدود العليا ونهاية الحدود الدنيا لمتتالية

تعريف:

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية ولنعرّف إنطلاقاً منها المتتاليتين $(a_n)_{n\in\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\overline{\mathbb{R}}$ على النحو التالي:

$$a_n = \sup\{u_k : k\geq n\}\in\overline{\mathbb{R}}$$

$$b_n = \inf\{u_k : k\geq n\}\in\overline{\mathbb{R}}$$

نلاحظ أنّ المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة وأنّ المتتالية $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة. يوجد عنصران $\Omega,\omega\in\overline{\mathbb{R}}$ بحيث:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \Omega, \lim_{n\to\infty} b_n = \omega$$

نسمي ω نهاية الحدود الدنيا للمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ونرمز لها بالرمز $\liminf_{n\to\infty} u_n$ أو $\underline{\lim}$.

نسمي Ω نهاية الحدود العليا للمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ونرمز لها بالرمز $\limsup_{n\to\infty} u_n$ أو $\overline{\lim}$.

مثال:

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية التي حدها العام $u_n=(-1)^n$ نلاحظ أنّ

$$\limsup_{n\to\infty} u_n=1, \liminf_{n\to\infty} u_n=-1$$

علماً أنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متباعدة.

ملاحظة:

تكون نهاية الحدود الدنيا ونهاية الحدود العليا لأي متتالية حقيقية موجودتين في مجموعة الأعداد الحقيقية الموسّعة $\overline{\mathbb{R}}$ وذلك بغض النظر عن تقارب تلك المتتالية أو تباعدها.

مبرهنة:

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية ولتكن $\liminf_{n\to\infty} u_n=\omega$ نهاية الحدود الدنيا و $\limsup_{n\to\infty} u_n=\Omega$ نهاية الحدود العليا فيكون لدينا:

1. إذا كانت $(u_{\nu(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية جزئية من $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ وتسعى هذه المتتالية الجزئية نحو $a\in\overline{\mathbb{R}}$ فإنّ $\omega\le a\le\Omega$.
2. توجد متتالية جزئية $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ من $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث تكون نهايتها $\lim_{n\to\infty} u_{\varphi(n)}=\omega$.
3. توجد متتالية جزئية $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ من $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث تكون نهايتها $\lim_{n\to\infty} u_{\psi(n)}=\Omega$.

ملاحظة:

إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية يكون لدينا عندئذ $\liminf_{n\to\infty} u_n=-\limsup_{n\to\infty}(-u_n)$ و

$\limsup_{n\to\infty} u_n=-\liminf_{n\to\infty}(-u_n)$.

نتيجة:

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية عندئذ $\liminf_{n\to\infty} u_n\le\limsup_{n\to\infty} u_n$ وتتحقق المساواة إذا وفقط إذا تقاربت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إلى عنصر من $\overline{\mathbb{R}}$ ويكون لدينا في هذه الحالة $\liminf_{n\to\infty} u_n=\limsup_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty} u_n$.

مبرهنة Bolzano Weir Strauss:

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية محدودة. يوجد تطبيق متزايد تماماً $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ بحيث تكون المتتالية الجزئية $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.

ملاحظة:

لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية ولنعرّف $\sigma_n=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ أياً كانت $n\in\mathbb{N}$ فإذا سعت المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إلى $a\in\overline{\mathbb{R}}$ فإنّ $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=a$. ولكن العكس ليس صحيحاً كما تبين المتتالية التي حدها العام $(-1)^n$.

المجالات المتداخلة

لنأخذ مجموعة من المجالات $[a_n,b_n],n=1,2,3,\ldots$ بحيث كل مجال محتوى في المجال السابق و $\lim(a_n-b_n)=0$. تدعى هذه المجالات بالمجالات المتداخلة. عندئذ يوجد عدد حقيقي واحد ينتمي إلى جميع هذه المجالات.

خاصية تقارب كوشي

إنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة إذا وفقط إذا من أجل أي عدد $\forall\varepsilon>0$ يمكن أن نجد عدد N بحيث $\left|u_q-u_p\right|<\varepsilon$ لكل $p,q>N$. تفيد هذه الخاصية بأننا لانحتاج لمعرفة النهاية لبرهان التقارب.

أي أنّ المسافة بين أي حدين من المتتالية ترتيبهما أكبر من N تكون أصغر من ε ويمكن أخذ $p=n,q=n+q$ فيصبح الشرط $\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N,\forall q\in\mathbb{N},\left|u_{n+q}-u_n\right|<\varepsilon$.

مثال:

هل المتتالية التي حدّها العام $u_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\frac{1}{2^n}$ متقاربة؟

الجواب:

لدينا $u_{n+q}-u_n=\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots\frac{1}{2^{n+q}}\le q\times\frac{1}{2^{n+1}}$ لنأخذ N الذي يحقق العلاقة:

$$2^{N+1}>\frac{q}{\varepsilon}\Rightarrow\frac{q}{2^{N+1}}<\varepsilon\Rightarrow N>\frac{\log q-\log\varepsilon-\log 2}{\log 2}$$

أي أنّ لدينا: $\forall\varepsilon>0,\exists N>\frac{\log q-\log\varepsilon-\log 2}{\log 2},\forall n>N,q\in\mathbb{N},\left|u_{n+q}-u_n\right|<\varepsilon$

والمتتالية متقاربة حسب تقارب كوشي.

ISSN: 2617-989X

مذاكرة المتتاليات الحقيقية

العلامة العظمى: 100 علامة النجاح: 50 المدة: ساعة ونصف

لكل سؤال خمس علامات

اختر الإجابة الصحيحة للأسئلة التالية:

4. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ؟

a) 0

b) $\frac{1}{2}$

c) غير موجودة

d) 1

مساعدة: راجع فقرة نهاية متتالية.

5. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ؟

a) 0

b) $\frac{2}{3}$

c) غير موجودة

d) 1

مساعدة: راجع فقرة نهاية متتالية.

6. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{1-2n}\right)$ ؟

a) $-\frac{1}{2}$

b) 0

c) غير موجودة

d) 1

مساعدة: راجع فقرة نهاية متتالية.

7. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)$ ؟

a) $-\frac{1}{2}$

b) 0

c) غير موجودة

d) 1

مساعدة: راجع فقرة نهاية متتالية.

8. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n^2+3}\right)$ ؟

a) $\frac{2}{3}$

b) 0

c) غير موجودة

d) 1

مساعدة: راجع فقرة نهاية متتالية.

9. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n^5+n}{3n^5+1}\right)$ ؟

a) 6

b) 2

c) 0

d) ∞

مساعدة: راجع فقرة نهاية متتالية.

10. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin 2n}{\sqrt{n}}$ ؟

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

b) 0

c) 2

d) 1

مساعدة: راجع فقرة نظريات المتتاليات.

.11 ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2n}{\ln n}$ ؟

a) 2
b) 1
c) 0
d) ∞

مساعدة: راجع فقرة نظريات المتتاليات.

.12 ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty} 7^{\frac{3}{n}}$ ؟

a) 0
b) 1
c) 7
d) ∞

مساعدة: راجع فقرة نظريات المتتاليات.

.13 ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5n^3}$ ؟

a) $\sqrt{5}$
b) 1
c) 0
d) ∞

مساعدة: راجع فقرة نظريات المتتاليات.

.14 ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{1+2e^n}$ ؟

a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{1}{2}$
c) 0
d) 1

مساعدة: راجع فقرة نظريات المتتاليات.

ISSN: 2617-989X

15. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty}\frac{e^{2n}}{\left(1+2e^{n}\right)^{2}}$ ؟

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{4}$

c) 0

d) 1

مساعدة: راجع فقرة نظريات المتتاليات.

16. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{2n}$ ؟

a) $\frac{\pi}{4}$

b) $\frac{1}{2}$

c) 0

d) $\frac{\pi}{2}$

مساعدة: راجع فقرة نظريات المتتاليات.

17. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{n}+1}{e^{n}-1}\right)$ ؟

a) 1

b) 2

c) 0

d) $\frac{1}{2}$

مساعدة: أخذ لوغاريتم المتتالية ومنه يتم الحصول على النهاية. راجع فقرة نظرية المتتاليات.

18. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n}}$ ؟

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

b) 2

c) $\sqrt{2}$

d) 0

مساعدة: راجع فقرة نظريات المتتاليات.

ISSN: 2617-989X

19. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$ ؟

a) ∞
b) $\frac{3}{2}$
c) 1
d) 0

مساعدة: راجع فقرة نظريات المتتاليات.

20. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ ؟

a) e^x
b) e
c) e^{-x}
d) e^{-1}

مساعدة: راجع فقرة نظريات المتتاليات.

21. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$ ؟

a) 1
b) e
c) e^2
d) e^{-1}

مساعدة: راجع فقرة نظريات المتتاليات.

22. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n$ ؟

a) 1
b) e
c) e^2
d) $e^{\frac{3}{2}}$

مساعدة: راجع فقرة نظريات المتتاليات.

23. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+3}\right)^n$ ؟

a) e
b) e^{-3}
c) e^{3}
d) e^{-1}

مساعدة: راجع فقرة نظريات المتتاليات.

ISSN: 2617-989X

الإجابات الصحيحة

السؤال	الإجابة الصحيحة
1	الخيار الأول
2	الخيار الأول
3	الخيار الأول
4	الخيار الثالث
5	الخيار الثاني
6	الخيار الثاني
7	الخيار الثاني
8	الخيار الثاني
9	الخيار الثاني
10	الخيار الثاني
11	الخيار الثاني
12	الخيار الثاني
13	الخيار الرابع
14	الخيار الثالث
15	الخيار الثالث
16	الخيار الأول
17	الخيار الأول
18	الخيار الأول
19	الخيار الثاني
20	الخيار الثاني

ISSN: 2617-989X

الفصل الرابع: المتسلسلات (Series)

الكلمات المفتاحية:

المتسلسلة، نهاية متسلسلة، تقارب متسلسلة، اختبارات التقارب للمتسلسلات، نشر التوابع، متسلسلات القوى، نشر تايلور، نظرية تايلور، كثيرات حدود تايلور.

الملخص:

يقدم هذا الفصل المتسلسلات التي تشكّل من جمع عناصر متتالية حقيقية. يقدّم بداية كتابة الجمع وخصائص الجمع. وتعرّف المتسلسلة ونهاية المتسلسلة وتقارب وتباعد المتسلسلة. ستقدم اختبارات لمعرفة تقارب المتسلسلة. ستعرّف المتسلسلة المتقاربة بالاطلاق التي تستبدل فيها مجموع عناصر المتتالية بمجموع القيم المطلقة لهذه العناصر والمتقاربة شرطياً التي لاتحقق التقارب بالاطلاق. وتقدّم كتابة التوابع باستخدام متسلسلات ولاسيما متسلسلات القوى ونشر التوابع باستخدام متسلاسلات القوى. تعرض نظرية تايلور لنشر التوابع باستخدام متسلسلات القوى. وتقدّم بعض التوابع المعرّفة بمتسلسلات.

الأهداف التعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على النقاط التالية:

- كتابة الجمع وخصائص الجمع
- تعريف المتسلسلة
- تقارب المتسلسلة
- المتسلسلات المتقاربة بالاطلاق والمتقاربة شرطياً
- كتابة التوابع بشكل متسلسلات
- العمليات على متسلسلات القوى
- نشر التوابع بمتسلسلات القوى
- نظرية تايلور
- نشر بعض التوابع
- التوابع المعرّفة بمتسلسلات

مقدمة

تنتج المتسلسلة (السلاسل) من جمع حدود المتتاليية ويمكن الحصول على الخصائص الأساسية للمتسلسلات من خلال معالجة المتتاليات. ستعرض النقاط التالية في هذا الفصل:

- كتابة الجمع وخصائص الجمع
- تعريف المتسلسلة
- تقارب المتسلسلة
- المتسلسلات المتقاربة بالاطلاق والمتقاربة شرطياً
- كتابة التوابع بشكل متسلسلات
- العمليات على متسلسلات القوى
- نشر التوابع بمتسلسلات القوى
- نظرية تايلور
- نشر بعض التوابع
- التوابع المعرّفة بمتسلسلات

1. كتابة الجمع وخصائص الجمع

تختصر الكتابة $\sum_{k=m}^{n} a_k$ مجموع الحدود $a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$ حيث الرمز $\sum$ يدل على عملية الجمع ويتم استبدال k بالقيم $m, m+1, \ldots, n$.

مثال:

1. $$\sum_{k=2}^{5} \frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{2^2+2} + \frac{1}{3^2+3} + \frac{1}{4^2+4} + \frac{1}{5^2+5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$$
2. $$\sum_{k=0}^{n} 2^{-k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^k}$$
3. $$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots$$

ISSN: 2617-989X

مثال:

أوجد المجاميع التالية:

1. $\sum_{i=1}^{5} 3i = 3(1+2+3+4+5) = 3\times 15 = 45$
2. $\sum_{k=3}^{6}\left(1+k^2\right) = \left(1+3^2\right)+\left(1+4^2\right)+\left(1+5^2\right)+\left(1+6^2\right) = 10+17+26+37 = 90$
3. $$\sum_{i=0}^{8}\left(\frac{1}{i\,!}\right) = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}$$
$$= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}+\frac{1}{5040}+\frac{1}{40320} \approx 2.71828 \approx e$$

نجد أنّ هذا المجموع قريب من العدد النيبري $e = 2.7182818284591...$ وكلما ازدادت قيمة i بالمجموع $\frac{1}{i\,!}$ اقترب المجموع من e.

خصائص الجمع

ليكن c عدد ثابت فنجد:

1. $\sum_{i=1}^{n} c = n\cdot c$
2. $\sum_{i=1}^{n} c\cdot a_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$
3. $$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i + b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$
$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i - b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

2. المتسلسلة

تتطلب الكثير من التطبيقات جمع عدد محدود أو غير محدود من حدود متتالية يدعى هذا المجموع متسلسلة.

تعريف المتسلسلة

ليكن لدينا المتتالية الحقيقية $(x_n)_{n\geq 0}$ نعرّف متتالية مجاميعها الجزئية $(S_n)_{n\geq 0}$ بأنّها المتتالية الحقيقية التي يعطى حدّها العام بالعلاقة $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ ونقول إنّ المتسلسلة التي حدّها العام x_n (ونكتب $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$) متقاربة وتقبل S مجموعاً لها إذا تقاربت المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ وكانت نهايتها S ونكتب عندئذ $S = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$.

ISSN: 2617-989X

مثال:

أوجد مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)(n+4)}$

لإيجاد المجموع يجب تحليل الكسر إلى مجموع عناصر كسرية بسيطة حيث نكتب:

$$\frac{1}{n(n+2)(n+4)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{(n+2)}+\frac{C}{(n+4)}$$

يتم حساب الثوابت A,B,C بتوحيد المقامات ومطابقة أمثال n,n^2,n^3 بين طرفي العلاقة السابقة. لتسريع الحساب يمكن ضرب طرفي العلاقة بمقام الكسر البسيط الأول n لحساب A فيصبح لدينا:

$$\frac{n}{n(n+2)(n+4)}=n\frac{A}{n}+n\frac{B}{(n+2)}+n\frac{C}{(n+4)}\Rightarrow\frac{1}{(n+2)(n+4)}=A+n\frac{B}{(n+2)}+n\frac{C}{(n+4)}$$

بتعويض $n=0$ نجد $A=\frac{1}{8}$.

بشكل مشابه نضرب العلاقة بمقام الكسر البسيط الثاني $(n+2)$ لحساب B فنجد:

$$\frac{n+2}{n(n+2)(n+4)}=(n+2)\frac{A}{n}+(n+2)\frac{B}{(n+2)}+(n+2)\frac{C}{(n+4)}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{n(n+4)}=\frac{A}{n}(n+2)+B+(n+2)\frac{C}{(n+4)}$$

نعوض $n=-2$ نجد $B=-\frac{1}{4}$.

بشكل مشابه نضرب العلاقة بمقام الكسر البسيط الثالث $(n+4)$ لحساب C فنجد:

$$\frac{n+4}{n(n+2)(n+4)}=(n+4)\frac{A}{n}+(n+4)\frac{B}{(n+2)}+(n+4)\frac{C}{(n+4)}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{n(n+2)}=\frac{A}{n}(n+4)+(n+4)\frac{B}{(n+2)}+C$$

نعوض $n=-4$ نجد $C=\frac{1}{8}$.

وبالتالي يمكن أن نكتب:

$$\frac{1}{n(n+2)(n+4)}=\frac{1}{8n}-\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{(n+2)}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(n+4)}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+2)}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{(n+4)}-\frac{1}{(n+2)}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+2)(n+4)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+2)}\right)-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{8}\left(\frac{1}{(n+2)}-\frac{1}{(n+4)}\right)$$
$$=\frac{1}{8}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N+1}\right)+\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+2}\right)\right]+$$
$$-\frac{1}{8}\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\left(\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+3}\right)+\left(\frac{1}{N+2}-\frac{1}{N+4}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{8}\left[1+\frac{1}{2}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}\right]-\frac{1}{8}\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{N+3}-\frac{1}{N+4}\right]\Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+2)(n+4)}=\frac{N(N+5)(11N^2+55N+62)}{96(N+1)(N+2)(N+3)(N+4)}\Rightarrow$$
$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{n(n+2)(n+4)}=\frac{11}{96}$$

1.2. تقارب متسلسلة

تكون متتالية متقاربة إذا وفقط إذا حققت شرط كوشي ومنه نجد تكافؤ الخواص التالية:

- $\sum_{n=0}^{\infty}x_n$ متقاربة
- $(S_n)_{n\geq 0}$ تحقق شرط كوشي: $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},n\geq N_\varepsilon,m\in\mathbb{N}\Rightarrow\left|\sum_{k=n}^{n+m}x_k\right|<\varepsilon$

تكمن ميزة هذا المعيار لتقارب متسلسلة في أنّه يسمح باثبات تقارب متسلسلة دون معرفة مجموعها. إذا لم تتقارب المتسلسلة نقول إنّها متباعدة.

ملاحظة:

إنّ تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}x_n$ يقتضي تقارب متتالية حدّها العام x_n نحو الصفر إلا أنّ هذا الشرط غير كاف.

مثال:

ليكن لدينا $x_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ وبالتالي $S_n=\sum_{k=0}^{n}x_k=\sqrt{n+1}$ فالمتسلسلة متباعدة بينما:

$$x_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=0$$

مبرهنة:

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ متسلسلتين متقاربتين عندئذ تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda \cdot x_n + y_n)$ متقاربة أيّاً كان $\lambda \in \mathbb{R}$ ويكون لدينا $\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda \cdot x_n + y_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty}(x_n) + \sum_{n=0}^{\infty}(y_n)$.

مبرهنة:

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ متسلسلتين ونفترض أنّ $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leq a_n$ وأنّ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ متقاربة عندئذ تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ متقاربة.

مبرهنة:

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ متسلسلة حدودها موجبة تكون متقاربة إذا وفقط إذا كانت متتالية مجاميعها الجزئية محدودة.

مثال:

ليكن $a \in \mathbb{R}^+$ تتقارب المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ إذا وفقط إذا كانت $a \in [0,1[$ لأنه إذا كانت $a \geq 1$ فإنّ متتالية الحد العام $(a^n)_{n \geq 0}$ لاتتقارب من الصفر وبالتالي تكون $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ متباعدة. بينما إذا كان $a \in [0,1[$ فإنّ $S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \Rightarrow \lim_{n \to \infty}(S_n) = \frac{1}{1-a}$.

مثال:

لتكن $\alpha \in \mathbb{R}$ تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ التي تدعى متسلسلة ريمان Riemann متقاربة إذا وفقط إذا كان $\alpha \in]1, +\infty[$.

ISSN: 2617-989X

مبرهنة:

ليكن لدينا المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حدودهما موجبة:

1. إذا كان $\forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq v_n$ وكانت $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ متقاربة فإنّ $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ متقاربة وإذا كانت $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ متباعدة فإنّ $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ متباعدة.
2. إذا وجد عددان موجبان تماماً $a,b>0$ بحيث $\forall n \geq n_0, a \leq \frac{u_n}{v_n} \leq b$ فإنّ للمتسلسلتين $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ الطبيعة نفسها متقاربتان معاً أو تتباعدان معاً.
3. إذا كان $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ و $l \in \mathbb{R}_+^*$ فإنّ للمتسلسلتين $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ الطبيعة نفسها متقاربتان معاً أو تتباعدان معاً.
4. إذا كان $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ و $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ متقاربة فإنّ $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ متقاربة.
5. إذا كان $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$ و $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ متباعدة فإنّ $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ متباعدة.

مثال:

يمكن باستخدام اختبار المقارنة اثبات أنّ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$ متباعدة.

لدينا: $1 \geq \frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \geq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ و

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} \geq \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

وبالتالي يمكن كتابة: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) \cdots \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$ وبما أنّ المجموع للحدود $\frac{1}{2}$ متباعد فالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$ متباعدة.

مثال:

لتكن لدينا المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2n^3 - 1}$ هل هي متباعدة أم متقاربة؟

بما أنّ $\ln < n$ و $\frac{1}{2n^3 - 1} \leq \frac{1}{n^3}$ فإنّ $\frac{\ln n}{2n^3 - 1} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ وبما أنّ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة فإنّ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2n^3 - 1}$ متقاربة.

نظرية:

إذا كان $\lim_{n\to\infty} n^p \cdot u_n = l$ يكون لدينا:

1. إذا كان $p > 1$ و $l \in \mathbb{R}$ منته تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ متقاربة.
2. إذا كان $p \le 1$ و $l \in \mathbb{R}, l \neq 0$ أو $l = \infty$ تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ متباعدة.

مثال:

المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4n^3 - 2}$ متقاربة لأنّ $\lim_{n\to\infty}\left(n^2 \cdot \frac{n}{4n^3 - 2}\right) = \frac{1}{4}$.

مثال:

المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n+1}}$ متباعدة لأنّ $\lim_{n\to\infty}\left(n^{0.5} \frac{\ln n}{\sqrt{n+1}}\right) = \infty$.

مثال:

ليكن لدينا المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ حيث $u_n = \frac{2n^2 + 1}{2n} - \sqrt{n^2 + 1}$.

$$u_n = n - \sqrt{n^2 + 1} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} + \frac{-1}{n + \sqrt{n^2 + 1}} = \frac{\sqrt{n^2 + 1} - n}{2n\left(n + \sqrt{n^2 + 1}\right)} = \frac{1}{2n\left(n + \sqrt{n^2 + 1}\right)^2}$$

ونجد أنّ $\lim_{n\to\infty} n^3 \cdot u_n = \frac{1}{8} \neq 0$ وبالتالي المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ متباعدة.

الاختبار التكاملي

ليكن لدينا التابع $f(x)$ موجب ومستمر ومتناقص من أجل $x \ge N$ ولتكن لدينا المتتالية $u_n = f(x), n = N, N+1, N+2, \ldots$ يمكن معرفة طبيعة المتسلسلة $\sum_{n=N}^{\infty} u_n$ إذا كانت متقاربة أو متباعدة بناءً على تقارب أو تباعد التكامل المحدود $\int_N^{\infty} f(x)dx = \lim_{M\to\infty}\left(\int_n^M f(x)dx\right)$ يمكن كحالة خاصة أخذ $N = 1$. يعرّف تقارب أو تباعد التكامل بشكل مشابه لتقارب أو تباعد المتسلسلة.

مثال:

ليكن لدينا المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ يمكن اثبات تقاربها باستخدام الاختبار التكاملي لأنّ حدودها متناقصة ولدينا:

$\lim_{M\to\infty}\left(\int_1^M\frac{dx}{x^2}\right)=\lim_{M\to\infty}\left[1-\frac{1}{M}\right]=1$ أي أنّ النهاية موجودة للتكامل وبالتالي المتسلسلة متقاربة.

اختبار المتسلسلات المتناوبة

تدعى المتسلسلة متناوبة إذا كانت حدودها المتتالية موجبة ثم سالبة. تتقارب متسلسلة متناوبة إذا تحقق الشرطين التاليين:

1. $|u_{n+1}|\le|u_n|$, $\forall n\ge N$ حيث $N\in\mathbb{N}$ ويؤخذ عادة $N=1$.
2. $\lim_{n\to\infty}u_n=0$ أو $\lim_{n\to\infty}|u_n|=0$.

وينتج عند إيقاف أي متسلسلة متناوبة تحقق الشرطين السابقين خطأ عددي قيمته أقل من القيمة المطلقة للحد التالي.

مثال:

ليكن لدينا المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$ فنجد أنّ $u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\Rightarrow|u_n|=\frac{1}{n}$ ولدينا:

$|u_{n+1}|=\frac{1}{n+1}\Rightarrow\forall n\ge1,|u_{n+1}|\le|u_n|$ كذلك لدينا $\lim_{n\to\infty}|u_n|=0$ وبالتالي فإنّ هذه المتسلسلة متقاربة.

إذا توقفنا عند الحد الرابع للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$ فالخطأ الناتج أصغر من $\frac{1}{5}=0.2$.

2.2. المتسلسلات المتقاربة بالإطلاق والمتسلسلات المتقاربة شرطياً

تعريف

1. نقول عن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ أنها متقاربة بالاطلاق إذا كانت المتسلسلة ذات الحدود الموجبة $\sum_{n=0}^{\infty}|u_n|$ متقاربة.
2. نقول عن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ أنها نصف متقاربة إذا كانت متقاربة دون أن تكون متقاربة بالاطلاق.

ISSN: 2617-989X

نظرية:

إذا تقاربت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}|u_n|$ تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ متقاربة. أي أنّ المتسلسلة المتقاربة بالاطلاق تكون متقاربة.

مثال:

إنّ المتسلسلة $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots$ متقاربة بالاطلاق لأنّ متسلسلة القيم المطلقة $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$ متقاربة.

مثال:

إن المتسلسلة $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$ متقاربة ولكن $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$ متباعدة لذلك فإنّ المتسلسلة $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$ ليست متقاربة بالاطلاق فهي نصف متقاربة.

ملاحظة:

يمكن استخدام كل اختبارات المتسلسلات ذات الحدود الموجبة لاختبار التقارب بالاطلاق. من المفيد استخدام اختبار مقارنة الحدود المتتالية.

اختبار النسبة

ليكن $\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)=L$ عندها تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$:

1. تتقارب بالاطلاق إذا كانت $L<1$.
2. متباعدة إذا كانت $L>1$.
3. لاينجح هذا الاختبار إذا كانت $L=1$.

مثال:

أوجد تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-n^2}$ باستخدام اختبار النسبة؟

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^4 e^{-(n+1)^2}}{n^4 e^{-n^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^4 e^{-(n^2+2n+1)}}{n^4 e^{-n^2}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \cdot e^{-(2n+1)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \cdot \lim_{n\to\infty} e^{-(2n+1)} = 1\times 0 = 0$$

أي أنّ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-n^2}$ متقاربة بالاطلاق.

اختبار الجذر من المرتبة n

لتكن $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|u_n|}\right) = L$ تكون عندئذ المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$:

1. متقاربة بالاطلاق إذا كانت $L<1$.
2. متباعدة إذا كانت $L>1$.
3. غير معروف التقارب أو التباعد إذا كان $L=1$.

مثال:

لتكن لدينا المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 + 2r + r^2 + 2r^3 + r^4 + \cdots$ حيث $r\in\mathbb{R}$ ثابت. هل هي متقاربة أم متباعدة؟

ادرس الحالات $r = 2/3, r = -2/3, r = 4/3$.

لدينا الحد $u_n = 2r^n$ من أجل n فردي و $u_n = r^n$ من أجل n زوجي.

وبالتالي:
$$\sqrt[n]{|u_n|} = \begin{cases} \sqrt[n]{2|r^n|} = \sqrt[n]{2}\cdot|r^n|, & n \text{ فردي} \\ \sqrt[n]{|r^n|} = |r|, & n \text{ زوجي} \end{cases}$$

وبما أنّ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2} = 1$ نجد $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = |r|$

أي أنه تتقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 + 2r + r^2 + 2r^3 + r^4 + \cdots$ إذا كانت $|r|<1$ وتتباعد هذه المتسلسلة إذا كانت $|r|>1$.

وبالتالي تكون متقاربة من أجل الحالتين $r = 2/3 < 1$ و $r = -2/3 \Rightarrow |r| = 2/3 < 1$ ومتباعدة من أجل $r = 4/3 > 1$.

نظرية:

يمكن إعادة ترتيب حدود متسلسلة متقاربة بالاطلاق بأي ترتيب ونحصل على متسلسلات متقاربة بنفس المجموع. بينما عند إعادة ترتيب الحدود من أجل متسلسلة نصف متقاربة يمكن للمتسلسلة الناتجة أن تتباعد أو أن تتقارب.

نظرية:

نحصل عند جمع أو طرح أو جداء متسلسلتين متقاربتين بالاطلاق على متسلسلة متقاربة بالاطلاق.

3. كتابة التوابع بشكل متسلسلات

يمكن تمثيل علاقة الربط لتابع بمتسلسلة مثال:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

حيث: $\sin x = \lim_{n\to\infty} S_n$ ولدينا $S_1 = x , S_2 = x - \frac{x^3}{3!}, \ldots, S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$

ملاحظة:

كانت المتتاليات والمتسلسلات حتى الآن تعتمد على تغير n فقط. وعندما أدخلت التوابع تم إضافة متغير جديد هو المتحول x.

تعريف التقارب المنتظم

ليكن لدينا المتتالية $\{u_n(x)\}, n = 1,2,3,\ldots$ لتوابع معرفة ضمن المجال $x \in [a,b]$.نقول إنّ المتتالية تسعى للتابع $F(x)$ أو لها النهاية $F(x)$ ضمن المجال $x \in [a,b]$ إذا كان $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [a,b]$ يمكن إيجاد $N > 0$ بحيث $|u_n(x) - F(x)| < \varepsilon$ لكل $n > N$ ونكتب في هذه الحالة $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = F(x)$ وتتعلق عادة N بقيمة ε وبقيمة x. إذا كانت N تتعلق فقط بقيمة ε فقط ولا تتعلق بقيمة x نقول عنها أنها تسعى إلى $F(x)$ بانتظام في المجال $x \in [a,b]$ أو متقاربة بانتظام على نفس المجال.

تعريف تقارب متسلسلة توابع

لتكن لدينا المتسلسلة من التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots$ نقول عنها أنها متقاربة في المجال $x \in [a,b]$ إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n(x)\}, n = 1,2,3,\ldots$ حيث $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$ متقاربة في المجال $x \in [a,b]$. ونكتب في هذه الحالة $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$ ويدعى $S(x)$ مجموع المتسلسلة.

أي أنّ متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots$ تسعى نحو $S(x)$ في المجال $x \in [a,b]$ ويكون لدينا $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [a,b]$ يمكن ايجاد $N > 0$ بحيث $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \forall n > N$. وتدعى متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots$ متقاربة بانتظام إذا كان حساب N يتعلق فقط بقيمة ε ولا يتعلق بقيمة x.

نكتب $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ الباقي من المتسلسلة بعد n حد. يمكن القول إنّ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ متقاربة بانتظام في المجال $x \in [a,b]$ إذا كان $\forall \varepsilon > 0$ يمكن ايجاد N يتعلق بقيمة ε فقط ولا يتعلق بقيمة x بحيث $|R_n(x)| < \varepsilon$ لكل $n > N$ وذلك $\forall x \in [a,b]$.

ملاحظة:

يمكن اختيار مجال مفتوح $]a,b[$ أو نصف مفتوح $]a,b]$ أو $[a,b[$ عوضاً عن المجال المغلق $[a,b]$.

مثال:

ليكن لدينا المتتالية $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$ و $x \in [-0.5, 1]$ ولنأخذ التابع الثابت $F(x) = 0$ المعرّف على هذا المجال. نجد إنّ $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [-0.5, 1]$ يوجد N بحيث $\forall n > N, |u_n(x) - F(x)| < \varepsilon$ أي $\left|\dfrac{x^n}{n}\right| < \varepsilon$

بما أنّ N لا تتعلق بقيمة x فالمتتالية $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$ متقاربة بانتظام ضمن المجال $x \in [-0.5, 1]$.

مثال:

ليكن لدينا المتتالية $u_n(x) = x^n$ و $0 \le x \le 1$ هذه المتتالية ليست متقاربة بانتظام ضمن المجال $0 \le x \le 1$ لأنّنا إذا أخذنا التابع $F(x) = \begin{cases} 0, if \ x \in [0,1[\\ 1, if \ x = 1 \end{cases}$ نجد إنّ $|x^n - 0| < \varepsilon \Rightarrow x^n < \varepsilon$

$n \ln x < \ln \varepsilon$ وبما أنّ $\ln \varepsilon < 0, \ln x < 0$ سالبين (لأنّ $0 < x < 1, 0 < \varepsilon < 1$) نجد $n > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln x}$

$\dfrac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/x)} = \dfrac{\ln 1 - \ln \varepsilon}{\ln 1 - \ln x} = \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln x}$ وبالتالي يجب اختيار N التي تحقق $n > N > \dfrac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/x)}$ أي أنّ N تتعلق بقيمة ε وبقيمة x وهي غير متقاربة بانتظام.

اختبارات التقارب المنتظم للمتسلسلات

1. اختبار Weierstrauss

إذا كان يمكن ايجاد متتالية من أرقام ثابتة وموجبة $M_1, M_2, M_3, \ldots$ بحيث يتحقق لدينا من أجل $x \in [a,b]$ الشرطين التاليين:

- $n = 1, 2, 3, \ldots, |u_n(x)| \le M_n$
- $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ متقاربة

عندها تكون $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ متقاربة بانتظام وبالاطلاق في المجال $x \in [a,b]$.

مثال:

ليكن لدينا المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ فهي متقاربة بانتظام وبالاطلاق في المجال $x \in [0, 2\pi]$ لأنّ $\left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة.

ملاحظة:

يشكل الاختبار السابق Weierstrauss شرط كاف ولكن غير لازم أي أنه من الممكن أن تكون المتسلسلة متقاربة بانتظام بدون أن يكون من الممكن تحقيق الاختبار عليها.

ملاحظة:

خاصية التقارب بانتظام مستقلة عن خاصية التقارب بالاطلاق أي أنه يمكن أن تكون المتسلسلة متقاربة بانتظام بدون أن تكون متقاربة بانتظام أو بالعكس.

2. اختبار Dirichlet لتكن لدينا:

- المتتالية $\{a_n\}$ متناقصة لأعداد ثابتة وموجبة نهايتها الصفر 0
- يوجد عدد ثابت P بحيث من أجل $x \in [a,b], n > N$ يتحقق $|u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)| < P$

عندئذ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot u_n(x) = a_1 \cdot u_1(x) + a_2 \cdot u_2(x) + \cdots$ متقاربة بانتظام في المجال $x \in [a,b]$.

نظرية:

إذا كانت المتتالية $\{u_n(x)\}, n=1,2,3,\dots$ مستمرة ضمن المجال $x\in[a,b]$ وإذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ متقاربة بانتظام إلى المجموع $S(x)$ مع $x\in[a,b]$ عندئذ يكون المجموع $S(x)$ مستمراً على نفس المجال $x\in[a,b]$.

أي أنّ المتسلسلات المتقاربة بانتظام لتوابع مستمرة تكون توابع مستمرة. وعندما يكون التابع الناتج المجموع فيه انقطاع يمكن بذلك برهان أن المتسلسلة غير متقاربة بانتظام.

أي أنه إذا كان $x\in[a,b]$ فلدينا: $\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$

نظرية:

إذا كانت المتتالية $\{u_n(x)\}, n=1,2,3,\dots$ توابع مستمرة في المجال $x\in[a,b]$ وإذا كان كانت $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ متقاربة بانتظام إلى المجموع $S(x)$ مع $x\in[a,b]$ عندئذ يكون لدينا:

$$\int_a^b S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx$$

$$\int_a^b\left\{\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right\}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx$$

أي أنّه يمكن مكاملة كل حد من حدود المتسلسلة المتقاربة بانتظام لتوابع مستمرة.

نظرية:

إذا كانت المتتالية $\{u_n(x)\}, n=1,2,3,\dots$ توابع مستمرة في المجال $x\in[a,b]$ ومشتقاتها مستمرة في نفس المجال وإذا كان كانت $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ متقاربة المجموع $S(x)$ في $x\in[a,b]$ وإذا كانت متسلسلة المشتقات $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ متقاربة بانتظام في $x\in[a,b]$ عندئذ يكون لدينا:

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}u_n(x)$$

تبين هذه النظرية الشرط المطلوب لاشتقاق كل حد من حدود المتسلسلة.

ISSN: 2617-989X

ملاحظة:

يمكن بشكل مشابه تطبيق نظريات مشابهة للمتتاليات. فإذا كان لدينا المتتالية $\{u_n(x)\}, n=1,2,3,\dots$ متقاربة بانتظام في المجال $x\in[a,b]$ عندئذ يكون لدينا: $\lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n(x)dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} u_n(x)dx$ أي أنّه من الممكن مكاملة كل حد من حدود المتسلسلات المتقاربة بانتظام لتوابع مستمرة.

1.3. تعريف متسلسلات القوى

تعريف متسلسلات القوى:

تدعى المتسلسلة من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^n+\cdots$ حيث $a_0,a_1,a_2,a_3,\dots$ ثوابت، متسلسلة قوى بالمتحول x. يمكن كتابة المتسلسلة بالشكل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

تتقارب متسلسلة القوى في الحالة العامة من أجل $|x|<R$ وتتباعد من أجل $|x|>R$ حيث R ثابت يدعى نصف قطر التقارب للمتسلسلة. قد تتقارب أو تتباعد المتسلسلة من أجل $|x|=R$. يدعى المجال $|x|<R$ مجال التقارب للمتسلسلة.

عندما تكون $R=0$ تتقارب المتسلسلة من أجل $x=0$ فقط ولذلك عندما نقول إنّ المتسلسلة متقاربة تكون $R>0$.

عندما تكون $R=\infty$ تتقارب المتسلسلة من أجل أي قيمة للمتحول x أي $x\in\mathbb{R}$.

يمكن استبدال المتحول x بالمتحول $(x-a)$ في علاقة متسلسلة القوى فتصبح $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (a-x)^n$.

نظرية:

تتقارب متسلسلة القوى بانتظام وبالاطلاق ضمن أي مجال محتوى كلياً في مجال التقارب.

نظرية:

يمكن اشتقاق أو مكاملة متسلسلة قوى كل حد على حدة ضمن أي مجال محتوى كلياً في مجال التقارب.

نظرية:

عندما تتقارب متسلسلة قوى ضمن مجال التقارب إلى نقطة بطرف المجال يكون مجال التقارب المنتظم يتضمن هذه النقطة.

ISSN: 2617-989X

نظرية:

إذا تقاربت متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ عند $x = x_0$ التي قد تكون ضمن أو بطرف مجال التقارب عندئذ يكون لدينا: $\lim_{x \to x_0} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \lim_{x \to x_0} a_n x^n \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$.

2.3. العمليات على متسلسلات القوى

1. يمكن جمع أو طرح متسلسلتي قوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ كل حد مع الحد الموافق له من أجل أي قيمة من المتحول x مشتركة بين مجالي التقارب للمتسلسلتين.
2. يمكن جداء متسلسلتي قوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ ونحصل على المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ حيث:
3. $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0$ تصلح هذه النتيجة لأي قيمة للمتحول x ضمن مجال التقارب المشترك للمتسلسلتين $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.
4. إذا تمت قسمة متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ على المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ حيث $b_0 \neq 0$ يمكن كتابة الكسر الناتج كمتسلسلة قوى متقاربة من أجل قيم صغيرة بشكل كاف للمتحول x.
5. إذا كان لدينا $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ عندئذ باخذ $x = \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n$ يمكن الحصول على المعاملات $b_n, n = 0,1,2,\dots$ بدلالة $a_n, n = 0,1,2,\dots$ ونكون بذلك قد عكسنا المتسلسلة.

نظرية:

لتكن متسلسلة القوة من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ نكتب $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \beta$ و $R = \frac{1}{\beta}$.

إذا كانت $\beta = 0$ تكون $R = +\infty$ وإذا كانت $\beta = \infty$ تكون $R = 0$ ويكون لدينا:

1. تتقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ من أجل $|x| < R$ أي أنّ R هو نصف قطر التقارب.
2. تتباعد المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ من أجل $|x| > R$.

مثال:

لتكن لدينا متسلسلة القوة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ماهو نصف قطر تقاربها؟

بما أنّ $a_n = \frac{1}{n!}$ نجد $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0 = \beta$ وبالتالي نصف قطر التقارب هو ∞ وهذه المتسلسلة متقاربة من أجل $x \in \mathbb{R}$.

ISSN: 2617-989X

مثال:

لتكن لدينا متسلسلة القوة $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ماهو نصف قطر تقاربها؟

نجد $R = 1 \Leftarrow \beta = 1$ أي أنّ المتسلسلة متقاربة من أجل $x \in]-1,1[$.

مثال:

لتكن لدينا متسلسلة القوة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ماهو نصف قطر تقاربها؟

نجد $\beta = 1$ و $R = 1$ وهي تتباعد من أجل $x = 1$ وتتقارب من أجل $x = -1$ أي أنّ مجال التقارب هو $x \in [-1,1[$.

مثال:

لتكن لدينا متسلسلة القوة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ماهو نصف قطر تقاربها؟

نجد $\beta = 1$ و $R = 1$ وتتقارب من أجل $x = 1, x = -1$ أي أنّ محال التقارب هو $x \in [-1,1]$.

مثال:

لتكن لدينا متسلسلة القوة $\sum_{n=0}^{\infty} (n!) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ماهو نصف قطر تقاربها؟

نجد $\beta = +\infty$ و $R = 0$ أي أنّها تتقارب من أجل $x = 0$ فقط.

3.3. نشر التوابع بمتسلسلات القوى

يمثل نشر التوابع باستخدام المتسلسلات الفائدة الرئيسية في التحليل من مفهوم المتسلسلات. تمثل التوابع باشكال مختلفة الأشهر منها هو نشر تايلور. يمكن تمثيل التوابع باستخدام متسلسلات قوى. ليكن لدينا التابع $f(x)$ الذي يمكن كتابته بالشكل:

$$f(x) = A_0 + A_1 \cdot (x-c) + A_2 \cdot (x-c)^2 + A_3 \cdot (x-c)^3 + \cdots + A_n \cdot (x-c)^n + \cdots$$

نحصل على القيم $A_n, n = 0,1,2,3,\ldots$ بالمطابقة مع مشتقات التابع $f(x)$ فنجد:

$$A_0 = f(c), A_1 = f'(c), A_2 = \frac{1}{2!} f''(c), \ldots, A_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c), \ldots$$

أي أنّ نشر تابع $f(x)$ يمكن كتابته بالشكل:

$$f(x) = f(c) + f'(c) \cdot (x-c) + \frac{1}{2!} f''(c) \cdot (x-c)^2 + \frac{1}{3!} f'''(c)(x-c)^3 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(x-c)^n + \cdots$$

نسمي كثيرات الحدود التالية كثيرات حدود تايلور للتابع $f(x)$:

$$P_0(x)=f(c), P_1(x)=f(c)+f'(c)\cdot(x-c),$$
$$P_2(x)=f(c)+f'(c)\cdot(x-c)+\frac{1}{2!}f''(c)\cdot(x-c)^2,\ldots$$
$$P_n(x)=f(c)+f'(c)\cdot(x-c)+\frac{1}{2!}f''(c)\cdot(x-c)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(c)\cdot(x-c)^n$$

4.3. نشر تايلور

نظرية: ليكن لدينا التابع $f(x)$ ومشتقاته موجودة ومستمرة حتى المرتبة n $f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots, f^{(n)}$ ضمن المجال المغلق $x\in[a,b]$ ولنفترض أنّ المشتق $f^{(n+1)}$ موجود ضمن المجال المفتوح $x\in]a,b[$. عندئذ يكون لدينا من أجل $c\in[a,b]$: $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$ حيث $P_n(x)$ هو كثير حدود تايلور ويمثّل $R_n(x)$ بقية الحدود التي تمّ اهمالها ويمكن كتابته $R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-c)^{n+1}$ حيث تقع ξ بين c و x. تدعى هذه العلاقة بنشر تايلور.

كذلك يمكن كتابة المتسلسلة التي تدعى متسلسلة تايلور $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(c)\cdot(x-c)^n$.

مثال:

يمكن تحديد قيمة التابع $\sin x$ بشكل هندسي لعدد من النقاط مثل $0,\pi/6,\pi/3,\ldots$ وغيرها. يمكن حساب قيمة هذا التابع لنقاط أخرى باستخدام متسلسلات تايلور حول إحدى النقاط المعروفة. إذا اخذنا $c=0$ عندئذ:

$$f(0)=\sin 0=0, f'(0)=\cos 0=1, f''(0)=-\cos 0=-1, f^{(4)}(0)=\sin 0=0, f^{(5)}(0)=\cos 0=1$$

لنأخذ علاقة تايلور للحدود الخمسة الأولى $\sin x=0+x-0+\frac{1}{3!}x^3+0-\frac{1}{5!}x^5+\cdots$ بما أنّ الحد الرابع هو 0 فكثيرات حدود تايلور $P_4(x)=P_3(x)$ متساوية فنجد $P_3(x)=P_4(x)=x-\frac{x^3}{3!}$ والباقي $R_4(x)=\frac{1}{5!}\cos\xi\cdot x^5$. ليكن المطلوب حساب $\sin x=\sin 0.3, x=0.3[rad]$ فنجد $P_4(0.3)=0.3-\frac{1}{6}(0.3)^3\approx 0.2945$ ويمكن معرفة الدقة لهذا التقريب من خلال الباقي:

$$|R_4|=\left|\frac{1}{5!}\cos\xi\cdot(0.3)^5\right|\le\frac{1}{120}\cdot\frac{243}{10^5}<0.000021$$

أي أنّ تقريب $\sin(0.3)=P_4(0.3)$ صحيح لأربع أرقام عشرية بعد الفاصلة.

ISSN: 2617-989X

5.3. نشر بعض التوابع

$$\sin x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots, -\infty < x < +\infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots, -\infty < x < +\infty$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots, -\infty < x < +\infty$$

$$\ln|1+x| = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, -1 < x \le 1$$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{|1+x|}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots, -1 < x < 1$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots, -1 \le x \le 1$$

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

والعلاقة الأخيرة تمثل متسلسلة ثنائي الحدود وفق الحالات التالية:

1. إذا كانت p عدد طبيعي تكون متسلسلة منتهية.
2. إذا كانت $p > 0$ وليس عدد طبيعي تتقارب المتسلسلة بالاطلاق من أجل $-1 \le x \le 1$
3. إذا كانت $-1 < p < 0$ تتقارب المتسلسلة من أجل $-1 < x < 1$
4. إذا كانت $p \le -1$ تتقارب المتسلسلة من أجل $-1 < x < 1$
5. مهما كانت قيمة p تتقارب المتسلسلة من أجل $-1 < x < 1$

مثال:

يمكن تطبيق نشر تايلور للتابع e^x لحساب قيمة التكامل:

$$\int_0^1 e^{x^2}dx = \int_0^1 \left[1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + e^{\xi}\frac{x^{10}}{5!}\right]dx$$

حيث: $P_4(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!}$ و $R_4(x) = e^{\xi}\frac{x^{10}}{5!}, 0 < \xi < x$ فنجد:

$$\int_0^1 P_4(x)dx = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \times 2!} + \frac{1}{7 \times 3!} + \frac{1}{9 \times 4!} \approx 1.4618$$

$$\left|\int_0^1 R_4(x)dx\right| \le \int_0^1 \left|\frac{e^{\xi}}{5!}x^{10}\right|dx \le e\int_0^1 \frac{x^{10}}{5!}dx = \frac{e}{11.5} < 0.0021$$

أي أنّ الخطأ الاعظمي أقل من 0.0021 وقيمة التكامل بدقة رقمين بعد الفاصلة.

ISSN: 2617-989X

4. التوابع المعرفة بمتسلسلات

يمكن أن يظهر تابع معرف كمتسلسلة في تطبيق وعلى الأغلب عند حل معادلة تفاضلية.

مثال:

$$J_p(x)=\frac{x^p}{2^p\cdot p!}\left\{1-\frac{2}{2(2p+2)}+\frac{x^4}{2\times 4(2p+2)(2p+4)}-\cdots\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x/2)^{p+2n}}{n!(n+p)!}$$

هذا التابع هو حل لمعادلة بيسيل التفاضلية $x^2y''+xy'+\left(x^2-p^2\right)y=0$ ويدعى تابع بيسيل من الدرجة p.

مثال:

$$F(a,b,c,x)=1+\frac{a\cdot b}{1\times c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{1\times 2\times c(c+1)}x^2+\cdots$$

هذا التابع هو حل لمعادلة غوص التفاضلية:

$$x(1-x)y''+\{c-(a+b+1)x\}y'-a\times b\times y=0$$

5. المتسلسلات العقدية

لنأخذ متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ حيث $z=x+i\cdot y$ $\left(i=\sqrt{-1}\right)$ هو العدد العقدي) و a_n حقيقي أو عقدي.

يمكن معالجة هذه المتسلسلات بشكل مشابه للمتسلسلات الحقيقية. تتقارب هذه المتسلسلات من اجل $|z|<R$ أي ضمن دائرة التقارب $x^2+y^2=R^2$ حيث R نصف قطر دائرة التقارب.

المتسلسلات لتوابع بمتحولين أو أكثر

هي من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,y)$ يمكن التعامل معها بشكل مشابه للمتسلسلات بمتحول واحد.

متسلسلة القوى بمتحولين x,y يمكن كتابتها بالشكل:

$$a_{00}+\left(a_{10}x+a_{01}y\right)+\left(a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2\right)+\cdots$$

حيث يستخدم رقمين لتعريف كل مثل من أمثال المتحولين ويمكن نشر التوابع بمتحولين بطريقة تايلور بشكل مشابه لنشر التوابع بمتحول واحد.

6. نظرية تايلور للتوابع بمتحولين

نظرية: ليكن $f(x,y)$ تابع للمتحولين x,y. إذا كانت كل المشتقات الجزئية من المرتبة n مستمرة ضمن منطقة مغلقة وإذا كانت المشتقات الجزئية من المرتبة $(n+1)$ موجودة ضمن المنطقة المفتوحة عندئذ يكون لدينا:

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)+R_n$$

حيث: $R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta\cdot h,y_0+\theta\cdot k),0<\theta<1$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)=h\cdot f_x(x_0,y_0)+k\cdot f_y(x_0,y_0)$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)=h^2\cdot f_{xx}(x_0,y_0)+2\cdot h\cdot k\cdot f_{xy}(x_0,y_0)+k^2 f_{yy}(x_0,y_0)$$

أي نقوم بنشر ثنائي الحدود $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n$.

ملاحظة:

1. يمكن كتابة $h=\Delta x=x-x_0,k=\Delta y=y-y_0$.
2. إذا كان $R_n\to 0,n\to\infty$ نجد نشر تايلور.

7. المتسلسلة المزدوجة

ليكن لدينا مصفوفة من الأرقام أو التوابع:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \cdots \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}$$

ولدينا: $S_{mn}=\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}u_{pq}$ يمثل مجموع الحدود من أوّل m سطر وأوّل n عمود من المصفوفة السابقة.

تكون المتسلسلة المزدوجة $S_{mn}=\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}u_{pq}$ متقاربة للمجموع S إذا كانت $\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}S_{mn}=S$ وإلا تكون متباعدة.

ISSN: 2617-989X

مذاكرة المتسلسلات (السلاسل) Series

العلامة العظمى: 100 **علامة النجاح: 50** **المدة: ساعة ونصف**

لكل سؤال خمس علامات

اختر الإجابة الصحيحة للأسئلة التالية:

1. ماهي قيمة المجموع $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k(k+2)}$ ؟

a) 3
b) 2
c) 1
d) 0

مساعدة: عليك كتابة الكسر على شكل مجموع كسرين بسيطين $\frac{4}{k(k+2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+2}$ عليك ايجاد قيم الثابتين A, B

2. ماهي قيمة المجموع $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k(k+1)}$ ؟

a) 4
b) 2
c) 1
d) 0

مساعدة: عليك كتابة الكسر على شكل مجموع كسرين بسيطين $\frac{4}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$ عليك ايجاد قيم الثابتين A, B

3. ماهي قيمة المجموع $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{k(k+1)}$ ؟

a) 5
b) 2
c) 1
d) 0

مساعدة: عليك كتابة الكسر على شكل مجموع كسرين بسيطين $\frac{5}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$ عليك ايجاد قيم الثابتين A, B

4. ماهي قيمة المجموع $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+3)}$؟

a) $\frac{11}{8}$

b) $\frac{1}{3}$

c) 1

d) 0

مساعدة: عليك كتابة الكسر على شكل مجموع كسرين بسيطين $\frac{5}{k(k+1)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}$ عليك ايجاد قيم الثابتين A,B

5. بتطبيق اختبار التقارب نجد أنّ المتسلسلة التالية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}$ هي متسلسلة:

a) متقاربة

b) متباعدة

c) غير معروف إذا كانت متقاربة أو متباعدة

مساعدة: راجع فقرة تقارب متسلسلة.

6. بتطبيق اختبار التقارب نجد أنّ المتسلسلة التالية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+5}$ هي متسلسلة:

a) متقاربة

b) متباعدة

c) غير معروف إذا كانت متقاربة أو متباعدة

مساعدة: راجع فقرة تقارب متسلسلة.

7. بتطبيق اختبار التقارب نجد أنّ المتسلسلة التالية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$ هي متسلسلة:

a) متقاربة

b) متباعدة

c) غير معروف إذا كانت متقاربة أو متباعدة

مساعدة: راجع فقرة تقارب متسلسلة.

ISSN: 2617-989X

8. بتطبيق اختبار النسبة على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{3^n}$ نجد أنّها:

a) متقاربة

b) متباعدة

c) غير محدد

مساعدة: راجع فقرة تقارب متسلسلة.

9. بتطبيق اختبار النسبة على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^n}$ نجد أنّها:

a) متقاربة

b) متباعدة

c) غير محدد

مساعدة: راجع فقرة تقارب متسلسلة.

10. بتطبيق اختبار النسبة على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{\pi^n}$ نجد أنّها:

a) متقاربة

b) متباعدة

c) غير محدد

مساعدة: راجع فقرة تقارب متسلسلة.

11. بتطبيق اختبار النسبة على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ نجد أنّها:

a) متقاربة

b) متباعدة

c) غير محدد

مساعدة: راجع فقرة تقارب متسلسلة.

12. ماهو نصف قطر تقارب متسلسلة القوة $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{n}$ ؟

a) $R=0$
b) $R=\infty$
c) $R=1$
d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة كتابة التوابع بشكل متسلسلة.

13. ماهو نصف قطر تقارب متسلسلة القوة $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2}\right)x^{n}$ ؟

a) $R=0$
b) $R=\infty$
c) $R=1$
d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة كتابة التوابع بشكل متسلسلة.

14. ماهو نصف قطر تقارب متسلسلة القوة $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n}}{2n!}\right)x^{n}$ ؟

a) $R=0$
b) $R=\infty$
c) $R=1$
d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة كتابة التوابع بشكل متسلسلة.

15. ماهي قيم x التي تتقارب عندها المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+3^{n}}\right)x^{n-1}$ ؟

a) $x=0$
b) $x\in[-3,3[$
c) $x\in[-1,1[$
d) $x\in\mathbb{R}$

مساعدة: راجع فقرة كتابة التوابع بشكل متسلسلة.

16. ماهي قيم x التي تتقارب عندها المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+3^n}\right)x^{n-1}$؟

- $x=0$
- $x\in[-3,3[$
- $x\in[-1,1[$
- $x\in\mathbb{R}$

مساعدة: راجع فقرة كتابة التوابع بشكل متسلسلة.

17. ماهي قيم x التي تتقارب عندها المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2^n(3n-1)}\right)(x-1)^n$؟

a) $x=0$

b) $x\in]-1,3[$

c) $x\in[-1,1[$

d) $x\in\mathbb{R}$

مساعدة: راجع فقرة كتابة التوابع بشكل متسلسلة.

18. ماهو نشر تايلور للتابع $f(x)=\ln x$ بجوار $a=1$:

a) $f(x)=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\cdots$

b) $f(x)=(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{(x-1)^3}{3!}+\frac{(x-1)^4}{4!}+\cdots$

c) $f(x)=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{(x-1)^3}{3!}-\frac{(x-1)^4}{4!}+\cdots$

- جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة نظرية تايلور.

19. ماهو نشر تايلور للتابع $f(x)=\frac{1}{x}$ بجوار $a=1$؟

a) $f(x)=(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{(x-1)^3}{3!}+\frac{(x-1)^4}{4!}+\cdots$

b) $f(x)=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{(x-1)^3}{3!}-\frac{(x-1)^4}{4!}+\cdots$

c) $f(x)=1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+(x-1)^4+\cdots$

d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة نظرية تايلور.

.20 ماهو نشر تايلور للتابع $f(x)=\sin x$ بجوار $a=\frac{\pi}{4}$؟

(a $f(x)=\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\cdots$

(b $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\cdots\right)$

(c $f(x)=1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\cdots$

(d جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة نظرية تايلور.

الإجابات الصحيحة

الإجابة الصحيحة	السؤال
الخيار الأول	1
الخيار الأول	2
الخيار الأول	3
الخيار الأول	4
الخيار الثاني	5
الخيار الثاني	6
الخيار الثاني	7
الخيار الأول	8
الخيار الثاني	9
الخيار الأول	10
الخيار الثالث	11
الخيار الثالث	12
الخيار الثالث	13
الخيار الثاني	14
الخيار الثاني	15
الخيار الثاني	16
الخيار الثاني	17
الخيار الأول	18
الخيار الثالث	19
الخيار الثاني	20

الفصل الخامس: المشتقات

الكلمات المفتاحية:

مشتق التابع، المشتق من اليمين، المشتق من اليسار، الاشتقاق الضمني، قواعد الاشتقاق، درجة الاشتقاق، نقطة لانعطاف، السرعة الخطية، طريقة نيوتن.

الملخص:

يقدم هذا الفصل اشتقاق التوابع الرياضية حيث يبدأ بتعريف المشتق كنهاية معدل التغير اللحظي للتابع ومفهومه الهندسي ميل المماس للتابع في النقطة التي يحسب عندها المشتق وشروط وجود المشتق والحالات التي لا يكون فيها المشتق موجوداً. ويعرّف الاشتقاق من اليمين ومن اليسار. وتقدم قواعد الاشتقاق لتسهيل حساب المشتق للتوابع المختلفة والاشتقاق للتوابع المركبة وللتوابع الضمنية. وتقدم استخدامات الاشتقاق لحساب تزايد وتناقص التوابع والنهايات المحلية العظمى والصغرى والمشتقات من الدرجات الأعلى وحساب نقاط الانعطاف وقواعد اضافية لحساب نهاية متتالية باستخدام المشتقات. وحساب السرعة الآنية لنقطة متحركة باستخدام مشتق تابع المسافة بالنسبة للزمن. وتقدم طريقة نيوتن العددية لحل المعادلات الجبرية باستخدام المشتق. وتقدم أمثلة على حساب المشتقات للتوابع المختلفة.

الأهداف التعليمية:

يتعرّف الطالب في هذا الفصل على النقاط التالية:

- تعريف المشتق والمشتق من اليمين والمشتق من اليسار
- اشتقاق التابع المركب
- اشتقاق التابع الضمني
- قواعد الاشتقاق
- مشتقات التوابع البسيطة
- الاشتقاق ضمن مجال
- المشتقات من الدرجات الأعلى
- النهايات المحلية والانعطاف
- حساب السرعة باستخدام المشتق
- طريقة نيوتن لحل المعادلات الجبرية
- تطبيقات لحساب المشتقات

مقدمة

يعتبر الاشتقاق من أهم المفاهيم الأساسية في التحليل. نشأت مسألة الاشتقاق من مسألة تعريف وتمثيل المستقيم المماس لبيان تابع عند نقطة من نقاطه ومن مسألة تمثيل السرعة الآنية لجسم متحرك. ستقدم النقاط التالية في هذا الفصل:

- تعريف المشتق والمشتق من اليمين والمشتق من اليسار
- اشتقاق التابع المركب
- اشتقاق التابع الضمني
- قواعد الاشتقاق
- مشتقات التوابع البسيطة
- الاشتقاق ضمن مجال
- المشتقات من الدرجات الأعلى
- النهايات المحلية والانعطاف
- حساب السرعة باستخدام المشتق
- طريقة نيوتن لحل المعادلات الجبرية
- تطبيقات لحساب المشتقات

1. تعريف المشتق

لتكن النقطة $P_0(x_0,f(x_0))$ من بيان التابع $y=f(x)$ ولتكن $P(x,f(x))$ نقطة مجاورة من بيان نفس التابع. يدعى المستقيم المار بين النقطتين P_0,P المستقيم القاطع للبيان وميله يعطى من العلاقة:

$$m_s=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$ حيث $\Delta y=f(x)-f(x_0)$ و $\Delta x=x-x_0$.

ويمكن كتابة علاقة الميل من العلاقة:

$$m_s=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ حيث $h=x-x_0=\Delta x$.

نحصل على ميل المستقيم المماس للتابع عند النقطة $P_0(x_0,f(x_0))$ من خلال ايجاد نهاية العلاقة السابقة عندما تسعى h نحو الصفر $h\to 0$ وعندما تكون هذه النهاية موجودة تكون هي قيمة مشتق التابع أي:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

ISSN: 2617-989X

تدعى هذه النهاية مشتق التابع $f(x)$ عند النقطة x_0 من مجموعة تعريفه.

إذا كانت النهاية موجودة من أجل كل نقطة من نقاط مجموعة تعريف التابع نقول عنه أنّه قابل للاشتقاق على هذه المجموعة وينتج لدينا تابع جديد هو التابع المشتق $f'(x)$. وتكون قيمة التابع المشتق $f'(x)$ عند كل نقطة تساوي ميل المستقيم المماس للتابع $f(x)$ عند هذه النقطة.

إذا كانت النهاية غير موجودة يكون المشتق غير موجود أو التابع غير قابل للاشتقاق عند هذه النقطة.

يمكن كتابة التابع المشتق بعدة طرق:

$$f'(x)=y'=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)=Df(x)=D_x f(x)$$

مثال:

ليكن لدينا التابع $f(x)=\frac{1}{x}$ ماهو مشتق التابع عند النقطة a؟

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a-(a+h)}{h\cdot a(a+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h\cdot a\cdot(a+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{a(a+h)}=-\frac{1}{a^2}$$

نظرية

إذا كان التابع $f(x)$ قابل للاشتقاق عند نقطة من مجموعة تعريفه فهو مستمر عند هذه النقطة ولكن العكس ليس صحيحاً.

تعريف المشتق من اليمين ومن اليسار

نعرّف المشتق من اليمين للتابع $f(x)$ عند $x=x_0$ بالعلاقة التالية:

$$f'_+(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

وذلك عندما تكون النهاية موجودة عندما تسعى h نحو الصفر بقيم موجبة تماماً.

يمكن بشكل مشابه تعريف المشتق من اليسار للتابع $f(x)$ عند $x=x_0$ بالعلاقة التالية:

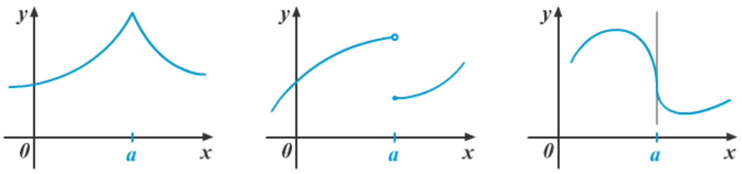
$$f'_-(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

وذلك عندما تكون النهاية موجودة عندما تسعى h نحو الصفر بقيم سالبة.

يكون التابع $f(x)$ قابلاً للاشتقاق عند النقطة $x=x_0$ إذا وفقط إذا كان المشتق من اليمين موجود ويساوي المشتق من اليسار للتابع عند النقطة $x=x_0$ أي $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$.

حالات عدم وجود المشتق

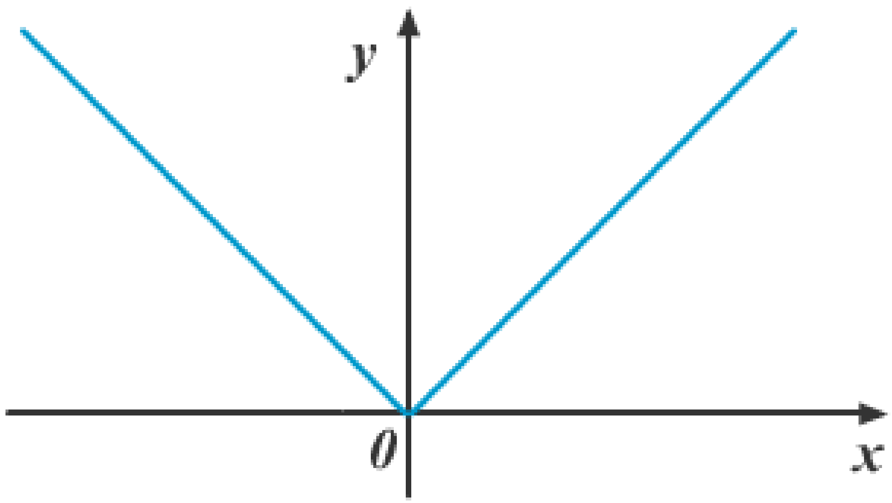
يمثل الشكل التالي حالات عدم وجود المشتق عند النقطة a من نقاط التابع:



مماس عمودي   انقطاع   زاوية

مثال:

التابع $f(x)=|x|$ غير قابل للاشتقاق عند النقطة $x=0$.



(a) $y=f(x)=|x|$

حيث: $f'(x)=\begin{cases} 1 if & x>0 \\ -1 if & x<0 \end{cases}$

وعندما تكون $x=0$ نجد أن المشتق من اليمين لايساوي المشتق من اليسار $f'_{+}(0)=1, f'_{-}(0)=-1$.

2. اشتقاق التابع المركب

يمكن كتابة التوابع كتركيب لتوابع أبسط. ليكن لدينا مثلاً: $u=f(x)=x^3, y=g(u)=\sin u=\sin x^3$ نحصل على التابع المركب $y=F(x)=g(f(x))$. تعطى علاقة الاشتقاق للتابع المركب كمايلي:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=F'(x)=g'(u)\cdot f'(x)$$

بشرط وجود المشتقين $f'(x),g'(u)$ فنجد $\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(\sin x^3\right)}{dx}=\left(3x^2\right)\cdot\cos\left(x^3\right)$.

3. الاشتقاق الضمني

تعطى علاقة الربط للتابع أحياناً بشكل ضمني وليس بشكل مباشر مثل $x^2+4xy^5+7xy+8=0$ التي لايمكن كتابتها بالشكل $y=f(x)$ في هذه الحالة يمكن اشتقاق التابع y من المعادلة السابقة كمايلي:

$$2x+4\left(y^5+5xy^4\frac{dy}{dx}\right)+7\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=0.$$

4. قواعد الاشتقاق

ليكن لدينا التوابع $f(x),g(x),h(x)$ القابلة للاشتقاق عندئذ يكون لدينا:

9. مشتق مجموع تابعين: $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)=f'(x)+g'(x)$

10. مشتق فرق تابعين: $\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=\frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)=f'(x)-g'(x)$

11. مشتق جداء ثابت C بالتابع $f(x)$: $\frac{d}{dx}\{C\cdot f(x)\}=C\cdot\frac{d}{dx}f(x)=C\cdot f'(x)$

12. مشتق جداء تابعين:

13. $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=f(x)\frac{d}{dx}g(x)+g(x)\frac{d}{dx}f(x)=f(x)\cdot g'(x)+g(x)\cdot f'(x)$

14. مشتق قسمة تابعين:

15. $\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=\frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x)-f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2}=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2},g(x)\neq 0$

16. مشتق التابع المركب $y=f(u)=f[g(x)],u=g(x)$ يعطى بالعلاقة:

17. $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(u)\cdot\frac{du}{dx}=f'(g(x))\cdot g'(x)$

ويمكن أن يكون أكثر من تابعين بشكل مشابه إذا كان $y=f(u),u=g(v),v=h(x)$ فيكون مشتق التابع المركب $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$

.18 إذا كان لدينا التابع $y = f(x)$ وتابعه العكسي $x = f^{-1}(y)$ فيكون لدينا $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}$

.19 إذا كان لدينا $x = f(t)$ و $y = g(t)$ نجد $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$

1.4. مشتقات التوابع البسيطة

.1 مشتق التابع الثابت معدوم $\frac{d}{dx}C = 0, C \in \mathbb{R}$

.2 مشتق تابع القوة $y = u^n, n \in \mathbb{R}$ يعطى بالعلاقة $\frac{d}{dx}u^n = n \cdot u^{n-1} \cdot \frac{du}{dx}$

.3 مشتق تابع الجيب $\frac{d}{dx}\sin u = \cos u \cdot \frac{du}{dx}$

.4 مشتق تابع التجيب $\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u \cdot \frac{du}{dx}$

.5 مشتق تابع الظل $\frac{d}{dx}\tan u = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot \frac{du}{dx}$

.6 مشتق تابع اللوغاريتم الطبيعي $\frac{d}{dx}\log_e u = \frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$

.7 مشتق تابع اللوغاريتم لاساس $a > 0, a \neq 1$: $\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{\log_a e}{u} \cdot \frac{du}{dx}$

.8 مشتق التابع الاسي $\frac{d}{dx}a^u = a^u \cdot \ln a \cdot \frac{du}{dx}$

.9 مشتق تابع الاس الطبيعي $\frac{d}{dx}e^u = e^u \cdot \frac{du}{dx}$

الاشتقاق ضمن مجال

إذا كان التابع $y = f(x)$ يقبل الاشتقاق في كل نقاط مجال نقول أنه قابل للاشتقاق على هذا المجال. إذا كان التابع $y = f(x)$ معرّف على المجال المغلق $[a,b]$ نقول أنّ هذا التابع يقبل الاشتقاق على المجال المغلق $[a,b]$ إذا وفقط إذا كان $f'(x_0)$ موجوداً لكل $x \in]a,b[$ و $f'_-(b), f'_+(a)$ موجودين.

إذا كان مشتق التابع مستمراً يدعى قابل للاشتقاق باستمرار.

المشتقات من الدرجات الأعلى

ليكن لدينا التابع $y=f(x)$ وبفرض أنه قابل للاشتقاق ضمن مجال ونحصل على التابع $y'=f'(x)$ الذي يدعى المشتق الأول للتابع $y=f(x)$ فإذا كان التابع المشتق بدوره $y'=f'(x)$ قابل للاشتقاق ضمن المجال باشتقاقه نحصل على المشتق الثاني $y''=f''(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}$ وهكذا يمكن الحصول على المشتقات من المرتبات الأعلى حتى الدرجة n إذا كان موجوداً نكتب $f^{(n)}(x)=y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n}$.

نظرية

إذا كان التابع $f(x)$ مستمراً ضمن المجال $x\in[a,b]$ وقابلاً للاشتقاق ضمن المجال $]a,b[$ وإذا كان $f(a)=f(b)=0$ عندئذ يوجد $\xi\in]a,b[$ بحيث ينعدم مشتق التابع $f'(\xi)=0$.

نظرية القيمة الوسطى:

إذا كان التابع $f(x)$ مستمراً ضمن المجال $x\in[a,b]$ وقابلاً للاشتقاق ضمن المجال $]a,b[$ عندئذ يوجد $\xi\in]a,b[$ بحيث $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

نجد من هذه النظرية أنّ النظرية السابقة حالة خاصة منها حيث $f(a)=f(b)=0$.

لنأخذ x,x_0 ضمن المجال $]a,b[$ عندئذ نجد من نظرية القيمة الوسطى:

$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)\cdot(x-x_0)$ وتكون ξ بين x و x_0.

يمكن كذلك أخذ $b=a+h$ و $\xi=a+\theta h$ حيث $0<\theta<1$ فنجد: $f(a+h)=f(a)+h\cdot f'(a+\theta\cdot h)$

نظرية كوشي القيمة الوسطى المعممة

إذا كان لدينا تابعين $f(x),g(x)$ مستمرين في المجال $[a,b]$ وقابلين للاشتقاق في المجال $]a,b[$ عندئذ يوجد $\xi\in]a,b[$ بحيث: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)};a<\xi<b$ بفرض أن $g(b)\neq g(a)$ و $f'(x),g'(x)$ ليسا منعدمين معاً.

قواعد اضافية لحساب النهايات

إذا كان لدينا $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ و $\lim_{x\to x_0} g(x)=B$ حيث A,B كلاهما 0 أو ∞ عندئذ يكون لدينا $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ تشكل حالة عدم تعيين $0/0$ أو ∞/∞ لحل هذه المشكلة يمكن تقدير نهاية نسبة التابعين كما يلي:

1. إذا كان $f(x),g(x)$ قابلين للاشتقاق ضمن المجال $]a,b[$ (ممكن مع أو بدون قابلية الاشتقاق عند $x=x_0$ وإذا كان $g'(x)\neq 0$ من أجل $x\neq x_0$ عندئذ يكون لدينا:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2. إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ و $\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$ يمكن تطبيق نفس العلاقة السابقة:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

5. استخدام المشتقات لايجاد النهايات المحلية لتابع ونقاط الانعطاف

نفرض أن التابع $f(x)$ قابل للاشتقاق على كل نقاط المجال $]a,b[$ يمكن معرفة تزايد وتناقص هذا التابع $f(x)$ من خلال معرفة إشارة المشتق الأول $f'(x)$ ضمن هذا المجال ونميز الحالات التالية:

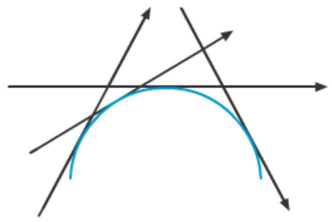
1. نقول أنّ التابع $f(x)$ متزايد ضمن المجال $]a,b[$ إذا كان $f'(x)>0$ من أجل كل قيم $x\in]a,b[$ أي أنّ ميل المماس موجب.

2. نقول أنّ التابع $f(x)$ متناقص ضمن المجال $]a,b[$ إذا كان $f'(x)<0$ من أجل كل قيم $x\in]a,b[$ أي أنّ ميل المماس سالب.

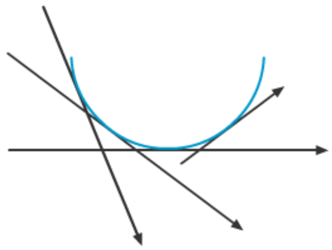
3. نقول أنّ التابع $f(x)$ ثابت ضمن المجال $]a,b[$ إذا كان $f'(x)=0$ من أجل كل قيم $x\in]a,b[$ أي أنّ ميل المماس معدوم أو المماس أفقي.

ليكن لدينا التابع $f(x)$ قابل للاشتقاق على كل نقاط المجال $]a,b[$ ولتكن $P_1(x_1,y_1)$ نقطة في المستوي من بيان التابع حيث $x_1\in]a,b[$. لنأخذ مستقيم مماس لبيان التابع يتحرك من اليسار لليمين ويمر عبر $P_1(x_1,y_1)$ إذا كانت $P_1(x_1,y_1)$ نهاية محلية صغرى يدور المستقيم المماس عكس عقارب الساعة ويكون ميل المماس سالباً على يسار النهاية المحلية الصغرى $P_1(x_1,y_1)$ وموجباً على يمينها وينعدم عندها $P_1(x_1,y_1)$. وبشكل مشابه يكون للتابع نهاية محلية عظمى عند $P_1(x_1,y_1)$ إذا دار المماس باتجاه عقارب الساعة وتغيرت إشارة الميل للماس من الموجب إلى السالب.

نهاية محلية عظمى دوران المماس مع عقارب الساعة



نهاية محلية صغرى دوران المماس عكس عقارب الساعة



أي أنّه من أجل تابع $f(x)$ تكون النقطة $P_1(x_1, y_1 = f(x_1))$ نهاية محلية صغرى عندما يكون:

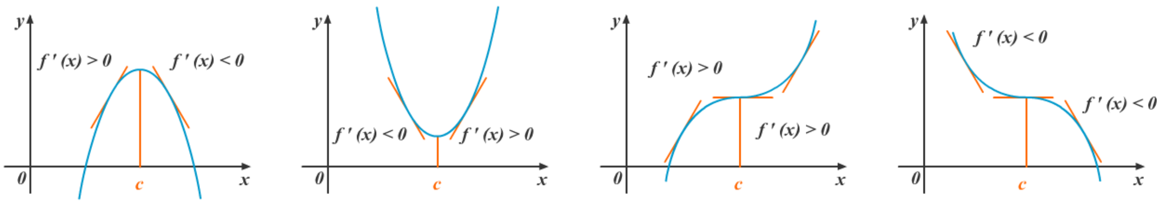
1. $f'(x) < 0$ من أجل $x < x_1$ و x في جوار x_1

2. $f'(x) > 0$ من أجل $x > x_1$ و x في جوار x_1

وتكون النقطة $P_1(x_1, y_1 = f(x_1))$ نهاية محلية عظمى عندما يكون:

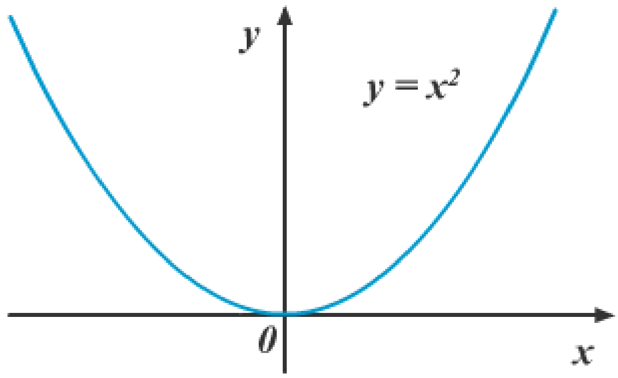
1. $f'(x) > 0$ من أجل $x < x_1$ و x في جوار x_1

2. $f'(x) < 0$ من أجل $x > x_1$ و x في جوار x_1



مثال:

ليكن لدينا التابع $f(x)=x^2$ نجد أنّ النقطة $(0,0)$ هي نهاية محلية صغرى لهذا التابع. لأنّ $f(x)\geq f(0)$



نظرية:

ليكن لدينا $x_1\in]a,b[$ ضمن مجموعة تعريف التابع $f(x)$ ومشتقه $f'(x)$ موجود ومستمر ومشتقه الثاني $f''(x)$ موجود وإذا كان $f'(x_1)=0$ و $f''(x_1)\neq 0$ تكون $f(x_1)$ نهاية محلية:

1. صغرى إذا كان $f''(x_1)>0$

2. عظمى إذا كان $f''(x_1)<0$

يمكن تعميم هذه النظرية بفرض أنّ المشتقات موجودة ومستمرة وبفرض أنّ

$f'(x_1)=f''(x_1)=f'''(x_1)=\cdots=f^{(2p-1)}=0$ و $f^{(2p)}\neq 0$ حيث p عدد طبيعي يكون عندئذ:

1. $f(x_1)$ نهاية محلية صغرى إذا كان $f^{(2p)}(x_1)>0$.

2. $f(x_1)$ نهاية محلية عظمى إذا كان $f^{(2p)}(x_1)<0$.

ملاحظة:

يمكن أن ينعدم مشتق التابع عند النقطة P_1 وأن يكون المشتق ميل المماس للتابع موجب (سالب) على يسار النقطة P_1 ويبقى موجباً (سالباً) على يمين النقطة P_1. عندئذ لاتكون النقطة P_1 نهاية محلية للتابع وإنّما نقطة انعطاف ويكون لدينا $f'(x_1)=0, f''(x_1)=0, f'''(x_1)\neq 0$.

مثال:

ليكن لدينا التابع $y=x^3$ نجد أنّ $y'=3x^2, y''=6x, y'''=6$ وبذلك يمكن التحقق بأنّ النقطة $(0,0)$ ليست نهاية محلية وإنّما هي نقطة انعطاف.

6. حساب السرعة باستخدام المشتق

ليكن x يمثّل المسافة التي تقطعها نقطة مادية من المبدأ و t يمثّل الزمن عندئذ يكون لدينا $x=f(t)$ تابع يمثل موضع النقطة المادية في اللحظة t على المحور Ox. نحصل على قيمة السرعة الآنية من العلاقة $\frac{dx}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$.

7. طريقة نيوتن لحل المعادلات الجبرية

يصعب حلّ المعادلات الجبرية عندما تكون من درجة أكبر من الدرجة الثانية ولكن من الواضح أنّ بيان التابع $y=f(x)$ لمعادلة جبرية $f(x)=0$ يقطع المحور الأفقي Ox عند كل حل حقيقي للمعادلة $f(x)=0$. يمكن بطريقة تجريبية تقدير أعداد طبيعية تقع بينها حلول المعادلة. نستطيع باستخدام طريقة نيوتن تقدير قيمة جذر حقيقي للمعادلة باستخدام المشتق وذلك وفق مايلي: ليكن التابع $y=f(x)$ قابلاً للاشتقاق و r جذر حقيقي للمعادلة أي $f(r)=0$ ولتكن x_0 نقطة للمتحول x قريبة من الجذر r يمكن أن تكون x_0 مثلاً العدد الطبيعي السابق أو التالي. ليكن $f'(x_0)$ ميل المماس للتابع عند النقطة $P_0(x_0,f(x_0))$. ولتكن النقطة $Q_1(x_1,0)$ تقاطع المستقيم المماس للتابع $y=f(x)$ عند النقطة $P_0(x_0,f(x_0))$ مع المحور Ox عندئذ يكون لدينا: $\frac{0-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\Rightarrow x=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ وباستبدال x_1 عوضاً عن x نجد $x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ بأخذ المستقيم المماس للتابع عند النقطة $P_1(x_1,f(x_1))$ وباعادة نفس الحساب نجد $x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$.

وبالمتابعة بنفس الطريقة نجد $x_n=x_0-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$.

يمكن الحصول على تقريب للحل للمعادلة r بالدقة المطلوبة بأخذ x_n. يعتمد نجاح طريقة نيوتن على شكل التابع بجوار جذر المعادلة.

ISSN: 2617-989X

8. تطبيقات لحساب المشتقات

1. $f(x)=x$ في هذه الحالة يكون لدينا المشتق $y'=1$
2. $f(x)=x^2$ في هذه الحالة يكون لدينا المشتق $\frac{d}{dx}\left(x^2\right)=2x$
3. $f(x)=x^3$ في هذه الحالة يكون لدينا المشتق $\frac{d}{dx}\left(x^3\right)=3x^2$
4. $f(x)=x^4$ في هذه الحالة يكون لدينا المشتق $\frac{d}{dx}\left(x^4\right)=4x^3$
5. $f(x)=x^n$ في هذه الحالة يكون لدينا المشتق $\frac{d}{dx}\left(x^n\right)=nx^{n-1}$
6. $f(x)=x^6 \Rightarrow f'(x)=6x^5$
7. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}$
8. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

مثال:

ماهو مشتق التابع التالي: $f(x)=\frac{1}{x^2}$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(x^{-2}\right)=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$$

مثال:

ماهو مشتق التابع التالي: $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(x^{2/3}\right)=\frac{2}{3}x^{2/3-1}=\frac{2}{3}x^{-1/3}$$

مثال:

ماهو مشتق التابع $f(x)=x\sqrt{x}$

$$f(x)=x\sqrt{x}=x\cdot x^{1/2}=x^{3/2}\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^{3/2-1}=\frac{3}{2}x^{1/2}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

ISSN: 2617-989X

مثال:

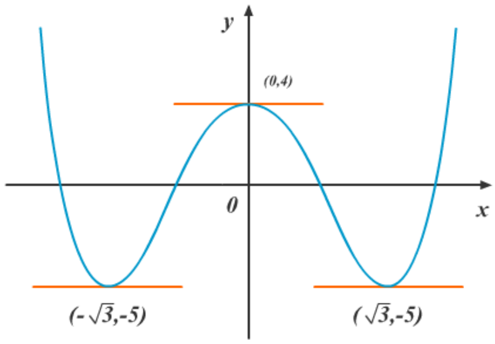
أوجد النقاط للتابع $f(x)=x^4-6x^2+4$ التي يكون فيها المماس أفقياً؟

الحل:

يكون المماس أفقياً عندما يكون ميله يساوي الصفر أي أن $f'(x)=4x^3-12x+0=4x(x^2-3)$

وهذا يكون محققاً عندما تكون: $x=0 \Rightarrow f(x)=4$

أو عندما يكون $x^2-3=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$



مثال:

أوجد مشتق التابع التالي: $h(x)=\sqrt{x^2+1}$

نلاحظ أن هذا التابع هوعبارة عن تابع مركب من تابعين $h(x)=f(g(x))$

حيث: $f(g(x))=\sqrt{g(x)}$ و $g(x)=x^2+1$

$$h'(x)=g'(x)\cdot f'(g(x))$$

لدينا $g'(x)=2x$ و $f'(g(x))=\dfrac{2}{2\sqrt{x^2+1}}$

$$h'(x)=2x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

مثال:

أوجد مشتق التابع $f(x)=x^8+12x^5-4x^4+10x^3-6x+5$

$$f'(x)=8x^7+12(5x^4)-4(4x^3)-6+0$$

$$f'(x)=8x^7+60(x^4)-16(x^3)-6$$

ISSN: 2617-989X

مثال:

لنفرض أنه لدينا $C(x)$ تابع الكلفة الكلية لانتاج x وحدة من منتج معين. زيادة عدد الواحدات من x_1 إلى x_2 تؤدي إلى زيادة بالكلفة: $\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$ و $x_2 = x_1 + \Delta x$

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$

تابع الكلفة الهامشية هو مشتق تابع الكلفة الكلية أي أنّ:

$$C'(x) = \frac{dC}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

بما أن x تأخذ قيماً طبيعية لايمكن أخذ Δx قريبة من الصفر ولكن نأخذها تساوي 1 مع $x = n$ كبيرة:

$$C'(n) \approx C(n+1) - C(n)$$

عادة نمثل تابع الكلفة بكثير حدود: $C(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$

a تمثل الكلفة الثابتة (أجار، تدفئة، صيانة،...) وبقية الحدود تمثل الكلفة المتغيرة (مواد أولية، أجور يد عاملة،.....).

تطبيق:

$$C(x) = 10000 + 5x + 0.01x^2$$

$$\Rightarrow C'(x) = 5 + 0.02x$$

الكلفة الهامشية عند انتاج 500 وحدة هي:

$$C'(500) = 5 + 0.02(500) = 15$$

بينما باستخدام العلاقة التقريبية نجد:

$$C'(500) \approx C(501) - C(500) = \left[10000 + 5(501) + 0.01(501)^2\right] - \left[10000 + 5(500) + 0.01(500)^2\right] = 15.01$$

وبالتالي نجد أنّ:

$$C'(500) \approx C(501) - C(500)$$

ISSN: 2617-989X

مثال:

أوجد مشتق التابع التالي: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$

يمكن كتابة هذا التابع بالشكل $f(x)=\left(x^2+x+1\right)^{-1/3}$ وبالتالي يصبح مشتقه:

$$f'(x)=-\frac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{-4/3}\frac{d}{dx}\left(x^2+x+1\right)=-\frac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{-4/3}(2x+1)$$

مثال:

أوجد مشتق التابع $f(t)=\left(\dfrac{t-2}{2t+1}\right)^9$

بتطبيق اشتقاق التابع المركب نجد:

$$f'(t)=9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8\frac{d}{dt}\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)=9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8\frac{(2t+1)-2(t-2)}{(2t+1)^2}=\frac{45(t-2)^8}{(2t+1)^{10}}$$

مثال:

أوجد مشتق التابع التالي:

$$f(x)=(2x+1)^5\left(x^3-x+1\right)^4$$

$$f'(x)=(2x+1)^5\frac{d}{dx}\left(x^3-x+1\right)^4+\left(x^3-x+1\right)^4\frac{d}{dx}(2x+1)^5$$

$$f'(x)=(2x+1)^5\cdot 4\left(x^3-x+1\right)^3\frac{d}{dx}\left(x^3-x+1\right)+\left(x^3-x+1\right)^4\cdot 5(2x+1)^4\frac{d}{dx}(2x+1)$$

$$f'(x)=4(2x+1)^5\left(x^3-x+1\right)^3\left(3x^2-1\right)+10\left(x^3-x+1\right)^4(2x+1)^4$$

ISSN: 2617-989X

مذاكرة المشتقات Derivatives

العلامة العظمى: 100　　　علامة النجاح: 50　　　المدة: ساعة ونصف

لكل سؤال خمس علامات

اختر الإجابة الصحيحة للأسئلة التالية:

1. مشتق التابع $f(x)=3\sqrt{x}$ هو:

a) $f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$

b) $f'(x)=\dfrac{3}{\sqrt{x}}$

c) $f'(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

d) $f'(x)=3\sqrt{x}$

مساعدة: راجع فقرة قواعد الاشتقاق وفقرة اشتقاق التوابع البسيطة.

2. مشتق التابع $f(x)=\dfrac{4}{x^5}$ هو:

a) $f'(x)=-20\dfrac{1}{x^6}$

b) $f'(x)=-20x^6$

c) $f'(x)=-20x^4$

d) $f'(x)=\dfrac{4}{5x^6}$

مساعدة: راجع فقرة قواعد الاشتقاق وفقرة اشتقاق التوابع البسيطة.

3. مشتق التابع $f(x)=\dfrac{-2}{\sqrt[3]{x}}$ هو:

a) $f'(x)=\dfrac{2}{3}x^{-4/3}$

b) $f'(x)=-\dfrac{2}{3}x^{-4/3}$

c) $f'(x)=-6x^{-4/3}$

d) $f'(x)=\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

مساعدة: راجع فقرة قواعد الاشتقاق وفقرة اشتقاق التوابع البسيطة.

.4 مشتق التابع $f(x)=\frac{5}{x^{100}}-4x^{-1/3}$ هو:

a) $f'(x)=-500x^{-101}+\frac{4}{3}x^{-4/3}$

b) $f'(x)=500x^{101}-\frac{4}{3}x^{-4/3}$

c) $f'(x)=-500x^{101}+x^{4/3}$

d) $f'(x)=500x^{101}-\frac{4}{3}x^{4/3}$

مساعدة: راجع فقرة قواعد الاشتقاق وفقرة اشتقاق التوابع البسيطة.

.5 مشتق التابع $f(x)=-2x^{1/3}+3x^{5}-6$ هو:

a) $f'(x)=-\frac{2}{3}x^{-2/3}+15x^{4}$

b) $f'(x)=\frac{2}{3}x^{-2/3}-15x^{4}$

c) $f'(x)=\frac{2}{3}x^{2/3}+15x^{4}$

d) $f'(x)=\frac{1}{3}x^{1/3}+15x^{4}$

مساعدة: راجع فقرة قواعد الاشتقاق وفقرة اشتقاق التوابع البسيطة.

.6 مشتق التابع $f(x)=(2x+1)^{10}$ هو:

a) $f'(x)=20(2x+1)^{9}$

b) $f'(x)=10(2x+1)^{9}$

c) $f'(x)=20(2x+1)^{10}$

d) $f'(x)=10(2x+1)^{10}$

مساعدة: راجع فقرة اشتقاق التابع المركب.

ISSN: 2617-989X

7. مشتق التابع $f(x)=\sqrt{x}\cos x$ هو:

a) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x-\sqrt{x}\sin x$

b) $f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x}\cos x-\sqrt{x}\sin x$

c) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x-\sqrt{x}\cos x$

d) $f'(x)=\cos x-\sqrt{x}\sin x$

مساعدة: راجع فقرة قواعد الاشتقاق.

8. مشتق التابع $f(x)=\frac{\sin x+x^2}{e^x}$ هو:

a) $f'(x)=\frac{\cos x+2x-\sin x-x^2}{e^x}$

b) $f'(x)=\frac{-\cos x-2x+\sin x+x^2}{e^{2x}}$

c) $f'(x)=\frac{\cos x+2x+\sin x+x^2}{e^{2x}}$

d) $f'(x)=\frac{\sin x-2x-\cos x-x^2}{e^x}$

مساعدة: راجع فقرة قواعد الاشتقاق.

9. مشتق التابع $f(x)=\log_2\left(x^2+12\right)$ هو:

a) $f'(x)=\frac{2x}{\left(x^2+12\right)\ln 2}$

b) $f'(x)=\frac{2x}{\ln\left[\left(x^2+12\right)2\right]}$

c) $f'(x)=\frac{2x}{\left(x^2+12\right)}\ln 2$

d) $f'(x)=\frac{2x}{\left(x^2+12\right)}$

مساعدة: راجع فقرة اشتقاق التابع المركب.

10. مشتق التابع $f(x)=\sec(x)=\dfrac{1}{\cos x}$ هو:

a) $f'(x)=-\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

b) $f'(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

c) $f'(x)=-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

d) $f'(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$

مساعدة: راجع فقرة قواعد الاشتقاق.

11. مشتق التابع $f(x)=\left(1+\left(1+(1+x)^2\right)^2\right)^2$ هو:

a) $f'(x)=8\left(1+\left(1+(1+x)^2\right)^2\right)\cdot\left(1+(1+x)^2\right)\cdot(1+x)$

b) $f'(x)=\left(1+\left(1+(1+x)^2\right)^2\right)\cdot\left(1+(1+x)^2\right)$

c) $f'(x)=\left(1+\left(1+(1+x)\right)\right)\cdot\left(1+(1+x)^2\right)\cdot(1+x)$

d) $f'(x)=8\left(1+\left(1+(1+x)^2\right)^2\right)\cdot(1+x)$

مساعدة: راجع فقرة اشتقاق التابع المركب.

12. يوجد للتابع $f(x)=x^3-3x+2$ مماسان أفقيان عند النقاط:

a) $(-1,4),(1,0)$

b) $(1,4),(-1,0)$

c) $(1,-4),(-1,0)$

d) $(1,4),(1,0)$

مساعدة: المشتق يجب ان يكون معدوم ليصبح المماس أفقي فقرة تعريف المشتق

ISSN: 2617-989X

13. مشتق التابع $f(x)=2\sqrt{6x^2+4x+26}$ هو:

a) $f'(x)=\dfrac{12x+4}{\sqrt{6x^2+4x+26}}$

b) $f'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{12x}{\sqrt{6x^2+4x+26}}$

c) $f'(x)=-\dfrac{+4}{2\sqrt{6x^2+4x+26}}$

d) $f'(x)=\dfrac{12x+4}{6x^2+4x+26}$

مساعدة: راجع فقرة اشتقاق التابع المركب.

14. مشتق التابع $f(x)=5(9x+25)^8$ هو:

a) $f'(x)=360(9x+25)^7$

b) $f'(x)=63(9x+25)^7$

c) $f'(x)=360(9x+25)^8$

d) $f'(x)=36(9x+25)^8$

مساعدة: راجع فقرة اشتقاق التابع المركب.

15. لدينا التابع $f(x)=\dfrac{3+x}{3-x}$ قيمة مشتقه $f'(2)$ تصبح:

a) $f'(2)=6$

b) $f'(2)=2$

c) $f'(2)=3$

d) $f'(2)=1$

مساعدة: راجع فقرة قواعد الاشتقاق.

16. لدينا التابع $f(x)=\sqrt{2x-1}$ قيمة مشتقه $f'(5)$ تصبح:

a) $f'(5)=\dfrac{1}{3}$

b) $f'(5)=\dfrac{1}{9}$

c) $f'(5)=1$

d) $f'(5)=3$

مساعدة: راجع فقرة اشتقاق التابع المركب.

17. لدينا التابع $f(x)=\begin{cases} x^2\sin(1/x), x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$ قيمة مشتقه $f'(0)$ تصبح:

a) $f'(0)=0$

b) $f'(0)=1$

c) $f'(0)=-1$

d) المشتق غير موجود عند 0.

مساعدة: راجع فقرة تعريف المشتق

18. ليكن لدينا التابع المعرّف ضمنياً بالمعادلة $xy^3-3x^2=xy+5$ فيكون $y'=\frac{dy}{dx}$ يساوي:

a) $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{(6x-y^3+y)}{(3xy^2-x)}$

b) $y'=\frac{dy}{dx}=(6x-y^3+y)$

c) $y'=\frac{dy}{dx}=(3xy^2-x)$

d) $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{(x+y^3)}{(xy-x)}$

مساعدة: راجع فقرة الاشتقاق الضمني.

19. ماهي قيمة النهاية $\lim_{x\to\infty} x^2\cdot e^{-x}$؟

a) ∞

b) -1

c) 1

d) 0

مساعدة: راجع فقرة قواعد اضافية لحساب النهايات.

20. ماهي قيمة النهاية $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+5}{5x^2-6x-3}$؟

a) $\frac{3}{5}$

b) 0

c) $\frac{5}{3}$

d) ∞

مساعدة: راجع فقرة قواعد اضافية لحساب النهايات.

الإجابات الصحيحة

السؤال	الإجابة الصحيحة
1	الخيار الأول
2	الخيار الأول
3	الخيار الأول
4	الخيار الأول
5	الخيار الأول
6	الخيار الأول
7	الخيار الأول
8	الخيار الأول
9	الخيار الأول
10	الخيار الأول
11	الخيار الأول
12	الخيار الأول
13	الخيار الأول
14	الخيار الأول
15	الخيار الأول
16	الخيار الأول
17	الخيار الأول
18	الخيار الأول
19	الخيار الرابع
20	الخيار الثاني

الفصل السادس: التكاملات Integrals

ISSN: 2617-989X

الكلمات المفتاحية:

التكامل المحدود، التكامل غير المحدود، التابع الاصلي، خصائص التكامل، التكامل بتغيير المتحول، التكامل بالتجزئة، الطرق العددية لحساب التكاملات المحدودة، المعادلات التفاضلية، المعادلات التفاضلية الخطية، المعادلات التفاضلية الخطية من الدرجة الاولى والثانية بامثال ثابتة، المعادلة المتجانسة، المعادلة غير المتجانسة، الحل العام لمعادلة تفاضلية متجانسة، الحل الخاص لمعادلة تفاضلية، الشروط الابتدائية.

الملخص:

يقدم هذا الفصل المفاهيم الأساسية للتكامل المحدود والتكامل غير المحدود أو التابع الأصلي. تقدم خصائص التكاملات المحدودة ونظرية القيمة الوسطى للتكاملات. يعرّف التابع الأصلي أو التكامل غير المحدود لتابع وتقدّم النظرية الأساسية للحساب. تعرض التوابع الاصلية أو التكاملات غير المحدودة لبعض التوابع الاساسية. تقدّم طريقة التكامل بتغيير المتحول وطريقة التكامل بالتجزئة وطريقة تكامل التوابع الكسرية. تقدم ثلاث طرق عددية لحساب التكاملات المحدودة هي طريقة المستطيلات وطريقة شبه المنحرف وطريقة سمبسون. يعرض تطبيق حساب طول قوس باستخدام التكامل المحدود لتابع. تقدّم المعادلات التفاضلية الخطية بامثال ثابتة من الدرجة الأولى والثانية وطرق حلها.

الأهداف التعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على النقاط التالية:

- خصائص التكاملات المحدودة
- نظريتي القيمة الوسطى للتكاملات
- التابع الأصلي أو التكامل غير المحدود والنظرية الأساسية في الحساب
- التوابع الاصلية لبعض التوابع المعروفة
- التكامل بتغيير المتحول والتكامل بالتجزئة ومكاملة التوابع الكسرية
- الطرق العددية لحساب التكاملات
- المعادلات التفاضلية الخطية مع أمثال ثابتة من الدرجة الأولى ومن الدرجة الثانية وحلها

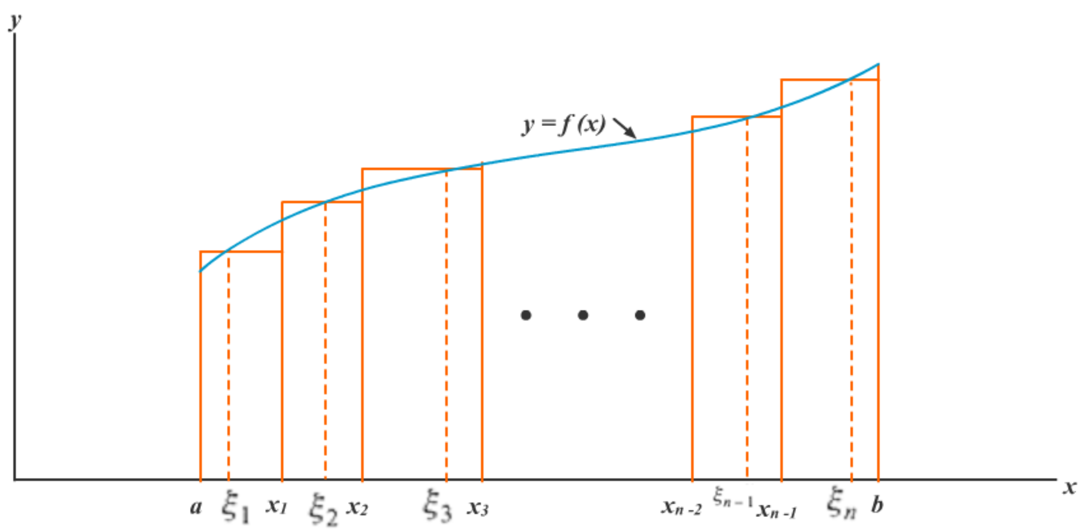
مقدمة :

التكامل هو العملية العكسية للاشتقاق. إذا كان لدينا التابع $f(x)$ والتابع $F(x)$ بحيث $F'(x)=f(x)$ نقول أنّ التابع $F(x)$ هو التابع الأصلي للتابع $f(x)$. تطورت التكاملات لحل مسائل تحديد أطوال ومساحات وحجوم. ستقدم النقاط التالية في هذا الفصل:

- خصائص التكاملات المحدودة
- نظريتي القيمة الوسطى للتكاملات
- التابع الأصلي أو التكامل غير المحدود
- النظرية الأساسية في الحساب
- التوابع الاصلية لبعض التوابع المعروفة
- التكامل بتغيير المتحول
- التكامل بالتجزئة
- مكاملة التوابع الكسرية
- الطرق العددية لحساب التكاملات
- المعادلات التفاضلية الخطية مع أمثال ثابتة من الدرجة الأولى ومن الدرجة الثانية

1. التكامل المحدود

ليكن المطلوب تحديد المساحة المحصورة بين بيان التابع $y=f(x)$ والمحور الأفقي Ox والمستقيمين العمودين $x=a, x=b$ (الشكل 1).



الشكل 1 التوصيف الهندسي للتكامل المحدود

ISSN: 2617-989X

لنقسّم المجال $x \in [a,b]$ إلى n مجال جزئي بالنقاط $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ ونختار في كل مجال جزئي $]a, x_1[,]x_1, x_2[,]x_2, x_3[,]x_3, x_4[, \ldots,]x_{n-1}, b[$ نقطة ليصبح لدينا n نقطة ولتكن $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ ونشكّل المجموع $f(\xi_1)(x_1 - a) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)(b - x_n)$ ونكتب $x_0 = a, x_n = b, \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ نجد $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$ يمثّل هذا المجموع مساحة كل المستطيلات في الشكل 1. لنزيد عدد المجالات الجزئية n بحيث يصبح لدينا $\Delta x_k \to 0$ وبذلك نحصل على التكامل المحدود بين a و b للتابع $f(x)$ ونكتب:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

يدعى المجال $[a,b]$ مجال التكامل وتدعى النقطتان a و b طرفي التكامل. يمكن إيجاد النهاية في العلاقة السابقة إذا كان التابع مستمراً على المجال $x \in [a,b]$ (أو مستمرّاً بشكل قطّعي). نقول أنّ التابع $f(x)$ قابل للتكامل على المجال $[a,b]$ إذا كانت النهاية السابقة موجودة.

هندسياً تمثّل قيمة هذا التكامل المحدود المساحة المحصورة بين بيان التابع $y = f(x)$ والمحور Ox والمستقيمين الشاقوليين $x = a, x = b$ وذلك إذا كان $y = f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$. إذا كانت قيم التابع $y = f(x)$ موجبة وسالبة عندئذ تمثّل قيمة التكامل المحدود الجمع الجبري بين قيم المساحات الموجودة أعلى وأسفل المحور Ox بحيث تكون قيم المساحات أعلى المحور Ox موجبة والمساحات أسفل المحور Ox سالبة.

تعريف القياس الصفري:

نقول عن مجموعة من النقاط أنّ قياسها صفر إذا كان مجموع أطوال المجالات التي تحوي جميع النقاط يمكن أن تكون صغيرة (أصغر من أي عدد موجب ε). يمكن البرهان على أنّ أي عدد قابل للعد من النقاط من محور الأعداد الحقيقية قياسها صفر.

نظرية:

إذا كان التابع $f(x)$ محدوداً ضمن المجال $x \in [a,b]$ فيكون الشرط اللازم والكافي لوجود التكامل المحدود $\int_a^b f(x)dx$ هو أن تكون مجموعة نقاط الانقطاع للتابع $f(x)$ قياسها صفر.

نظرية:

إذا كان التابع $f(x)$ مستمراً على المجال $x \in [a,b]$ فيكون لدينا:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx$$

أي بذلك نكون قد أخذنا المجالات بطول واحد $\Delta x = (b-a)/n$ والنقاط $\xi_k = a + \dfrac{k(b-a)}{n}$ فيكون لدينا:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx .$$

مثال:

اكتب النهاية $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ كتكامل محدود؟

لنأخذ $a = 0, b = 1$ وبتطبيق النظرية السابقة نجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$$

مثال:

اكتب التكامل المحدود $\int_0^1 x^2 dx$ كنهاية مجموع واحسب قيمته؟

لدينا $\frac{k^2}{n^2} = \left(\frac{k}{n}\right)^2 = f\left(\frac{k}{n}\right), f(x) = x^2$ ومن المثال السابق نجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} = \int_0^1 x^2 dx$$

ولكن لدينا:

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \frac{3^2}{n^2} + \cdots + \frac{n^2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+1/n)(2+1/n)}{6} = \frac{1}{3}$$

لأنّه يمكن البرهان بالاستقراء الرياضي أنّ:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

فالعلاقة صحيحة من أجل $n = 1$ حيث $1^2 = \frac{1}{6}(1)(2)(3) = 1$

ISSN: 2617-989X

لنفترض أنّ العلاقة صحيحة من أجل $n=k$ فنجد $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

بجمع $(k+1)^2$ لطرفي العلاقة السابقة نجد:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2=(k+1)\left[\frac{1}{6}k(2k+1)+(k+1)\right]=$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

أي أن العلاقة صحيحة من أجل $n=k+1$ وبما أنها صحيحة من أجل $n=1$ فهي صحيحة من أجل $n=2$ ومن أجل $n=3, n=4, n=5, \ldots$.

ونتيجة حساب التكامل المحدود في هذا المثال تبين أنّ المساحة المحصورة بين بيان التابع $f(x)=x^2$ والمحور Ox والمستقيمين $x=0, x=1$ تساوي $\int_0^1 x^2 dx=\frac{1}{3}$.

ملاحظة: يمكن ايجاد النتيجة في المثال السابق من خلال معرفة التابع الأصلي للتابع x^2 ونجد:

$\int_0^1 x^2 dx=x^3/3\Big]_0^1=1^3/3-0^3/3=1/3$.

1.1. خصائص التكاملات المحدودة

ليكن لدينا التابعين $f(x), g(x)$ قابلين للتكامل المحدود على المجال $x\in[a,b]$ لدينا:

1. التكامل المحدود لمجموع أو طرح تابعين $\int_a^b \{f(x)\pm g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

2. تكامل جداء ثابت A بتابع $\int_a^b Af(x)dx=A\int_a^b f(x)dx, A\in\mathbb{R}$

3. إذا كان التابع $f(x)$ قابل للتكامل المحدود في المجالين $x\in[a,c], x\in[c,b]$ يكون لدينا

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

4. التكامل على مجال طوله صفر يساوي الصفر $\int_a^a f(x)dx=0$

5. لدينا $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

6. إذا كانت قيم التابع $m\le f(x)\le M$ محدودة بين قيمتين من أجل $a\le x\le b$ حيث m, M ثابتين يكون لدينا $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

7. إذا كان لدينا $f(x) \le g(x), \forall x \in [a,b]$ يكون لدينا $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

8. القيمة المطلقة للتكامل المحدود $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \, , a<b$

مثال:

أوجد قيمة نهاية التكامل المحدود $\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{x^2+n^2}dx$ ؟

لدينا $\left|\int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{x^2+n^2}dx\right| \le \int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin nx}{x^2+n^2}\right|dx \le \int_0^{2\pi}\frac{1}{n^2}dx = \frac{2\pi}{n^2}$

وبالتالي: $\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{x^2+n^2}dx\right| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{x^2+n^2}dx = 0$

2.1. نظريتي القيمة الوسطى للتكاملات

تعمم النظرية الأولى فكرة إيجاد متوسط حسابي لمجموعة أعداد إلى متوسط تابع مستمر ضمن مجال. تشكّل النظرية الثانية توسعة للنظرية الأولى وتعرّف وسطي متقّل لتابع مستمر.

لنأخذ عملية حساب المتوسط الحسابي لدرجات الحرارة عند الساعة الثانية عشر ظهراً في مكان محدد لفترة أسبوع. يمكن ذلك بقياس سبع درجات حرارة وجمعها وتقسيم ناتج الجمع على سبعة. لنعمم مفهوم المتوسط الحسابي للحصول على متوسط درجة الحرارة خلال أسبوع عندئذ تصبح المسألة أكثر تعقيداً لأنّ الحرارة تابع مستمر. يمكن استخدام التكامل المحدود لحل هذه المسألة.

ليكن لدينا التابع $y=f(x)$ مستمراً ضمن المجال $x\in[a,b]$ وقيمه موجبة تماماً $f(x)>0$ ضمن هذا المجال. نضيف مجموعة من النقاط تقسّم المجال $x\in[a,b]$ إلى قطع متساوية الطول $a=x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n=b$ عندئذ كل القيم $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ متساوية نرمز لها $\Delta x_k = \Delta x$ ونجد $b-a=n\cdot\Delta x$. لتكن ξ_k النقطة الوسطى من المجال x_{k-1},x_k وقيمة التابع عند هذه النقطة $f(\xi_k)$ يكون وسطي قيم التابع عند هذه النقاط هو:

$$\frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)+f(\xi_3)+\cdots+f(\xi_n)}{n} = \frac{[f(\xi_1)+f(\xi_2)+f(\xi_3)+\cdots+f(\xi_n)]\cdot\Delta x}{n\cdot\Delta x} = \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta\xi_k$$

تقدم العلاقة السابقة القيمة الوسطى للتابع عند القيم الوسطى للمجالات ونجد:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta\xi_k = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

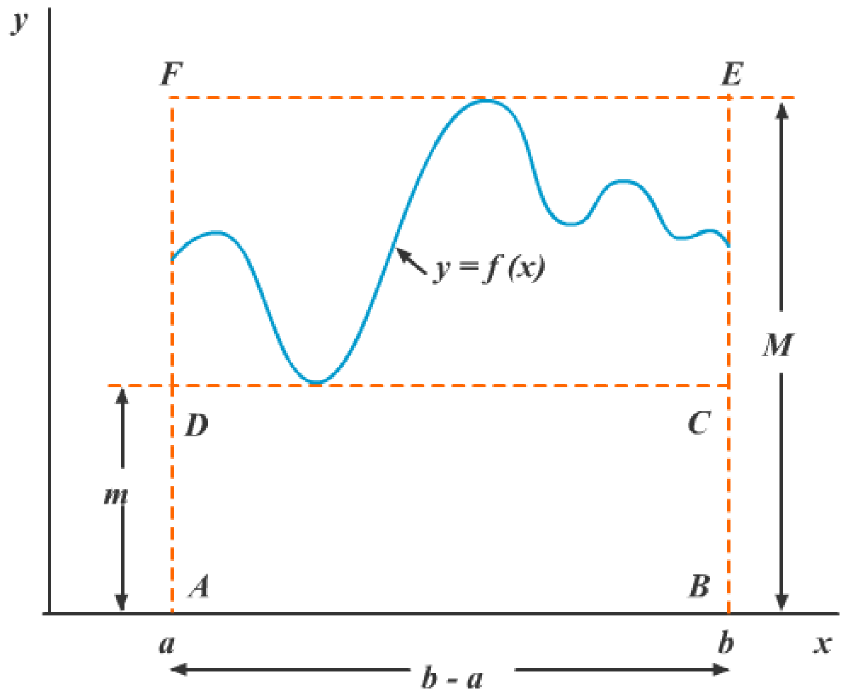
تعرّف هذه العلاقة القيمة الوسطى للتابع المستمر $f(x)$ ضمن المجال $x\in[a,b]$.

ISSN: 2617-989X

بما أنّ التابع $f(x)$ مستمر ضمن المجال $x \in [a,b]$ فيوجد قيمتين صغرى وعظمى للتابع ضمن هذا المجال بحيث $m \le f(x) \le M \,, \forall x \in [a,b]$ ولدينا العلاقة التالية:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

وبالتالي: $m \le \dfrac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx \le M$



الشكل 2 التكامل المحدود

بما أنّ التابع مستمر على المجال $[a,b]$ توجد نقطة $\xi = x$ بحيث $\xi \in [a,b]$ و $m \le f(\xi) \le M$ بحيث: $f(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

نظرية القيمة الوسطى:

إذا كان التابع $f(x)$ مستمراً على المجال $[a,b]$ توجد نقطة $\xi \in [a,b]$ بحيث: $\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(\xi)$.

نظرية القيمة الوسطى المعممة:

إذا كان التابعين $f(x),g(x)$ مستمرين على المجال $[a,b]$ والتابع $g(x)$ لا يغير إشارته ضمن المجال $[a,b]$ عندئذ توجد نقطة $\xi\in[a,b]$ بحيث:

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

نجد أنّ هذه العلاقة تعيد علاقة النظرية السابقة من أجل $g(x)=1$.

2. التابع الأصلي أو التكامل غير المحدود

التكامل المحدود أو إيجاد التابع الأصلي هي عملية معاكسة لعملية الاشتقاق.

تعريف: يدعى التابع $F(x)$ الذي يحقق $F'(x)=f(x)$ بالتابع الأصلي أو التكامل غير المحدود للتابع $f(x)$. وهذا التابع $F(x)$ غير وحيد لأنّ إضافة أي ثابت له يبقى تابع أصلي لأنّ:

$$\left(F(x)+c\right)'=F'(x)=f(x)$$

وبالتالي نكتب $\int f(x)dx=F(x)+c$

نظرية: أي تابعين أصليين $F(x),G(x)$ للتابع $f(x)$ يختلفان على الأكثر بثابت أي:

$F(x)-G(x)=c$.

مثال: ماهو التابع الأصلي للتابع $f(x)=x^2$؟

$$F(x)=\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+c$$

ملاحظة: يمكن تمثيل التكامل غير المحدود (التابع الأصلي) بتكامل محدود وفق العلاقة التالية:

$$\int f(x)dx=\int_c^x f(t)dt$$

يظهر متحول التابع كحد أعلى للتكامل المحدود. تبين العلاقة السابقة أنّ التكامل المحدود لتابع يعتمد على طرفي التكامل والتابع ويمكن تغيير اسم متحول التكامل.

3. النظرية الأساسية للحساب

نظرية:

ليكن التابع $f(x)$ قابل للتكامل على المجال المغلق $[a,b]$ وليكن $a \le c \le b$ نعرّف التابع:

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt, a \le x \le b$$

ويكون المشتق $F'(x)$ موجود عند كل نقطة من نقاط المجال المفتوح $]a,b[$ حيث $f(x)$ مستمر و $F'(x) = f(x)$.

نظرية:

نفترض أنّ التابع $f(x)$ قابل للتكامل على المجال المغلق $[a,b]$ ومستمر على المجال المفتوح $]a,b[$. ليكن $F(x)$ أي تابع أصلي يحقق $F'(x) = f(x)$ لكل $x \in]a,b[$. إذا كان $a < c < b$ عندئذ لأي $x \in]a,b[$ نجد $\int_c^x f(t)dt = F(x) - F(c)$

وإذا كان التابع $f(x)$ مستمر على المجال المغلق $[a,b]$ يكون لدينا:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

هذه العلاقة تبين أنّ التكامل المحدود للتابع $f(x)$ نحصل عليه من فرق قيمتي التابع الأصلي بين طرفي مجال التكامل ولذلك لا يظهر ثابت التكامل في التكامل المحدود.

مثال: أوجد $\int_1^2 x^2 dx$ ؟

نلاحظ أنّ $F'(x) = x^2$ وبالتالي $F(x) = \frac{x^3}{3} + c$ أي أنّ:

$$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{2^3}{3} + c\right] - \left[\frac{1^3}{3} + c\right] = \frac{7}{3}$$

نجد أنّ ثابت التكامل غير المحدود يختفي بسبب عملية الطرح لذلك يمكن حذفه من البداية وكتابة:

$$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{2^3}{3}\right] - \left[\frac{1^3}{3}\right] = \frac{7}{3}$$

ملاحظة:

يمكن أن يكون طرفي مجال التكامل للتكامل المحدود متحولان. إذا كان لدينا $F'(x) = f(x)$ يكون لدينا:

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = F(v(x)) = F(u(x))$$

مثال:

$$\int_{\sin x}^{\cos x} t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{\sin x}^{\cos x} = \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)/2$$

4. التوابع الأصلية لبعض التوابع المألوفة

يمكن الحصول على التوابع الاصلية التالية مع ملاحظة أنّه يجب اضافة ثابت تكامل c لكل نتيجة والتحقق يتم باشتقاق التابع الأصلي ويجب ان يكون الناتج التابع المطلوب مكاملته:

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$
- $\int \sin x dx = -\cos x$
- $\int \cos x dx = \sin x$
- $\int \tan x dx = -\ln|\cos x|$
- $\int \cot x dx = -\ln|\sin x|$
- $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| = \ln|\tan(u/2 + \pi/4)|$

تذكرة: $\csc x = \frac{1}{\sin x}, \sec x = \frac{1}{\cos x}, \cot = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$

- $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| = \ln|\tan u/2|$
- $\int \sec^2 x dx = \tan x$
- $\int \csc^2 x dx = -\cot x$
- $\int \sec x \tan x dx = \sec x$
- $\int \csc x \cot x dx = -\csc x$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}, a > 0, a \neq 1$
- $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}, a \in \mathbb{R}^*$
- $\int \sinh x dx = \cosh x$
- $\int \cosh x dx = \sinh x$
- $\int \tanh x dx = \ln \cosh x$
- $\int \coth x dx = \ln|\sinh x|$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x, x \in]-1,1[$

ISSN: 2617-989X

- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$

- $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right), x \in]1,\infty[$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = -\ln\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right), x \in]-\infty,-1[$$

- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$

مثال: أوجد النهاية التالية $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right\}$؟

يمكن كتابة النهاية بالشكل التالي:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{1+1/n}+\frac{1}{1+2/n}+\frac{1}{1+3/n}+\cdots+\frac{1}{1+n/n}\right\} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x|\Big]_0^1 = \ln 2$$

لأنّه قد وجدنا في مثال سابق أنّ:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$$

مثال: برهن أنّ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\sin\frac{t}{n}+\sin\frac{2t}{n}+\sin\frac{3t}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)t}{n}\right\} = 1-\cos t$؟

لنأخذ $a=0, b=t, f(t)=\sin x$ في العلاقة:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{kt}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{kt}{n}\right) = \int_0^t \sin(x)dx = 1-\cos t$$

ولكن نلاحظ أنّ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin t}{n} = 0$ بالتالي

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{kt}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{kt}{n}\right) = \int_0^t \sin(x)dx = 1-\cos t$$

ISSN: 2617-989X

5. التكامل بتغيير المتحول

يمكن في بعض الحالات أن يكون حساب التكامل غير المحدود $\int f(x)dx$ غير سهل مباشرة. قد يكون من المفيد تغيير المتحول x إلى t عبر التحويل $x=g(t)$ وبالتالي $g'(t)=\frac{dx}{dt}$ فيصبح لدينا $\int f(x)dx=\int f(g(t))\cdot g'(t)dt$ وبعد إيجاد الحل نعوض $t=g^{-1}(x)$.

يمكن تطبيق نفس الطريقة للتكامل المحدود $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))\cdot g'(t)dt$ حيث $g(\alpha)=a, g(\beta)=b$ وبالتالي $\alpha=g^{-1}(a), \beta=g^{-1}(b)$ يجب أن يكون التابع $f(x)$ مستمر على المجال $[a,b]$ والتابع $g(t)$ يجب أن يكون مستمر ومشتقه مستمر على المجال $t\in[\alpha,\beta]$.

مثال: يمكن من قاعدة تغيير المتحول ايجاد التكاملات التالية بسهولة:

$$\int f'(x)\cdot e^{f(x)}dx=e^{f(x)}+c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln(|f(x)|)+c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx=2\sqrt{f(x)}+c$$

مثال: أوجد التكامل غير المحدود للتابع $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$؟

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\sqrt{x^2+1}+c$$

مثال: أوجد التابع الأصلي للتابع $f(x)=\frac{x^2+1}{x^3+3x+1}$؟

$$\int f(x)dx=\frac{1}{3}\int \frac{3(x^2+1)}{x^3+3x+1}dx=\frac{1}{3}\ln(|x^3+3x+1|)+c$$

مثال: أوجد التكامل غير المحدود للتابع $(x+2)\sin(x^2+4x-6)$؟

$\int (x+2)\sin(x^2+4x-6)dx$ نأخذ المتحول $u=x^2+4x-6$ وبالتالي نجد:

$$du=(2x+4)dx \Rightarrow (x+2)dx=\frac{1}{2}du$$

وبالتالي:

$$\frac{1}{2}\int \sin u\, du=-\frac{1}{2}\cos u+c=-\frac{1}{2}\cos\left(x^2+4x-6\right)+c$$

ISSN: 2617-989X

أو بطريقة أخرى يمكن كذلك كتابة:

$$\int (x+2)\sin(x^2+4x-6)dx = \frac{1}{2}\int f(g(x))\cdot g'(x)dx$$

حيث: $g(x)=x^2+4x-6 \Rightarrow g'(x)=2(x+2)$ وبالتالي:

$$\int (x+2)\sin(x^2+4x-6)dx = \frac{1}{2}\int f(g(x))\cdot g'(x)dx = -\frac{1}{2}\cos(x^2+4x-6)+c$$

مثال: أوجد التكامل غير المحدود $\int \frac{\cot(\ln x)}{x}dx$

نلاحظ أنّ هذا التكامل من الشكل $\int f(g(x))\cdot g'(x)dx$ حيث $g(x)=\ln x \Rightarrow g'(x)=\frac{1}{x}$

وبالتالي $\int \frac{\cot(\ln x)}{x}dx = \ln|\sin(\ln x)|+c$

6. التكامل بالتجزئة

ليكن لدينا التابعين $f(x),g(x)$ مستمرين وقابلين للاشتقاق ونلاحظ أنّه لدينا مشتق جداء التابعين يعطى بالعلاقة:

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

أي أنّ $f(x)\cdot g(x)$ هو تابع أصلي للتابع $f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$ ويمكن أن نكتب:

$$\int g(x)\cdot f'(x)dx = f(x)\cdot g(x)-\int f(x)\cdot g'(x)dx$$

ويمكن تطبيق العلاقة على المجال $[a,b]$ لنحصل على علاقة التكامل المحدود:

$$\int_a^b g(x)\cdot f'(x)dx = f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx$$

مثال: أوجد $I=\int_0^1 x\arctan x dx$

يمكن اختيار $g(x)=\arctan x$ و $f'(x)=x \Rightarrow f(x)=\frac{1+x^2}{2}$ وبالتالي يمكن كتابة:

$$\int_0^1 g(x)\cdot f'(x)dx = f(x)\cdot g(x)]_0^1 - \int_0^1 g'(x)\cdot f(x)dx$$

$$I=\int_0^1 x\arctan x dx = \frac{1+x^2}{2}\arctan x\Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1+x^2}{2}dx = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

مثال: أوجد التكاملات المحدودة $I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx , n \in \mathbb{Z}^+$

نلاحظ أنّ $I_0 = 1$ وأنّ $I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x \Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

ومن أجل $n \geq 1$ فإنّ:

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx - \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} dx = \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx = \int_0^1 x \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}} dx$$

ولكن لدينا:

$$\left(\frac{1}{\left(1+x^2\right)^n} \right)' = -2n \cdot \frac{x\left(1+x^2\right)^{n-1}}{\left(1+x^2\right)^{2n}} = -2n \cdot \frac{x}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}$$

وبالتالي:

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^1 x \cdot \frac{x}{\left(1+x^2\right)^{n+1}} dx = \int_0^1 x \cdot \left(\frac{1}{\left(1+x^2\right)} \right)' dx$$

$$I_n - I_{n+1} = -\frac{1}{2n} \left(\frac{x}{\left(1+x^2\right)^n} \Bigg]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n} dx \right) = \frac{1}{2n} I_n - \frac{1}{n \cdot 2^{n+1}}$$

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{1}{n \cdot 2^{n+1}} , \forall n \geq 1$$

وهكذا نكون قد حصلنا على قيم التكاملات المطلوبة بعلاقة تدريجية فاصبح لدينا

$$I_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I_2 = \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2^2} = \frac{2+\pi}{8} \Rightarrow I_3 = \frac{3}{4} I_2 + \frac{1}{2^4} = \frac{8+3\pi}{32}$$

مثال:

ليكن $a,b \in \mathbb{R}$ بحيث $a<b, p \in \mathbb{R}^*$ والمطلوب إيجاد:

$$I = \int_a^b e^{px} \sin x dx , J = \int_a^b e^{px} \cos x dx$$

نلاحظ أنّ:

$$I = \int_a^b e^{px} \sin x dx = \int_a^b e^{px} \left(-\cos x\right)' dx = -e^{px} \cos x \Big]_a^b + p \int_a^b e^{px} \cos x dx$$

$$\Rightarrow I = e^{pa} \cos a - e^{pb} \cos b + pJ$$

وبشكل مشابه نجد:

$$J = \int_a^b e^{px} \cos x dx = \int_a^b e^{px} \left(\sin x\right)' dx$$

ISSN: 2617-989X

$$J = e^{px}\sin x\Big]_a^b - p\int_a^b e^{px}\sin x\,dx$$

$$J = e^{pb}\sin b - e^{pa}\sin a - pI$$

ومن علاقتي I, J نجد:

$$I = \frac{1}{p^2+1}\left(e^{pa}\left(\cos a - p\sin a\right) - e^{pb}\left(\cos b - p\sin b\right)\right)$$

$$J = \frac{1}{p^2+1}\left(e^{pb}\left(\sin b + p\cos b\right) - e^{pa}\left(\sin a + p\cos a\right)\right)$$

7. مكاملة التوابع الكسرية

ليكن التابع الكسري $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ حيث $P(x)$ و $Q(x)$ كثيري حدود أوليين فيما بينهما ودرجة $Q(x)$ أكبر تماماً من الصفر ودرجة $P(x)$ أصغر من درجة $Q(x)$. يمكن كتابة هذا التابع كمجموع توابع كسرية بسيطة من الشكل الأول $\dfrac{A}{(ax+b)^r}$ أو من الشكل الثاني $\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^r}$.

مثال: أوجد $\displaystyle\int \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)}dx$

$$\frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x+5}$$

لحساب A نضرب طرفي العلاقة السابقة بـ$(x-3)$ ونعوض $x=3$ فنجد:

$$\frac{6-x}{(2x+5)} = \frac{A}{1} + \frac{B}{2x+5}(x-3) \Rightarrow \frac{6-3}{(2\times 3+5)} = A \Rightarrow A = \frac{3}{11}$$

ولحساب B بشكل مشابه نضرب طرفي العلاقة السابقة بـ$(2x+5)$ ونعوض $x = -5/2$ فنجد:

$$\frac{6-x}{(x-3)} = \frac{A}{(x-3)}(2x+5) + \frac{B}{(2x+5)}(2x+5) \Rightarrow \frac{6-(-5/2)}{(-5/2-3)} = B \Rightarrow B = \frac{17/2}{-11/2} = -\frac{17}{11}$$

وعندها يمكن حساب التكامل:

$$\int \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)}dx = \int \frac{3/11}{x-3}dx + \int \frac{-17/11}{2x+5}dx = \frac{3}{11}\ln|x-3| - \frac{17}{22}\ln|2x+5| + c$$

ISSN: 2617-989X

مثال: أوجد $\int_3^4 \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$

نقوم بكتابة الكسر كمجموع كسرين بسيطين:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

لحساب A نضرب طرفي المساواة بـ$(x-1)$ ثم نعوض $x=1$ فنجد $A=-1$

ولحساب B نضرب طرفي المساواة بـ$(x-2)$ ثم نعوض $x=2$ فنجد $B=1$ وبالتالي:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$ نعوض بالتكامل

$$\int_3^4 \frac{dx}{(x-1)(x-2)} = \int_3^4 \frac{-1}{x-1}dx + \int_3^4 \frac{1}{x-2}dx = -\ln(x-1)\Big]_3^4 + \ln(x-2)\Big]_3^4 = -[\ln 3 - \ln 2] + [\ln 2 - \ln 1]$$

$$= -\ln 3 + \ln 4 = \ln\frac{4}{3}$$

8. التكاملات المعتلّة

إذا كان مجال التكامل $[a,b]$ غير منته أو إذا كان التابع $f(x)$ غير معرّف أو غير محدود عند نقطة أو أكثر من المجال $[a,b]$ عندئذ يدعى التكامل معتلّ. يمكن استخدام مفهوم النهاية لهذه الحالات.

مثال:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{M\to\infty} \arctan x\Big]_0^M = \lim_{M\to\infty} \arctan M = \frac{\pi}{2}$$

مثال:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(2-2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2$$

مثال:

$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln x\Big]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(-\ln\varepsilon)$ النهاية غير موجودة والتكامل متباعد أو غير موجود.

9. الطرق العددية لحساب التكاملات المحدودة

تستخدم طرق عددية لتقدير التكاملات المحدودة عندما يكون من غير الممكن حساب التكامل بشكل تحليلي دقيق. تعتمد الطرق العددية التالية على تقسيم مجال التكامل $[a,b]$ إلى n مجال جزئي باطوال متساوية $\Delta x=\frac{(b-a)}{n}$. نكتب للتبسيط $f(a+k\Delta x)=f(x_k)=y_k, k=0,1,2,3,\dots,n$. تتحسن دقة الحساب بالحالة العامة كلما ازدادت قيمة n.

1.9. طريقة المستطيلات

تعتبر أبسط طريقة تكامل عددي ويعطى التكامل المحدود لهذه الطريقة من العلاقة التالية:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x\{y_0+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\}$$

وتسمى هذه العلاقة بقاعدة اليد اليسرى لأنها تستخدم النقاط على يسار المجال.

أو يمكن أن يحسب التكامل وفق قاعدة اليد اليمنى التالية:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x\{y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n\}$$

2.9. طريقة شبه المنحرف

نحصل على التكامل وفق هذه الطريقة بتقريب بيان التابع $f(x)$ إلى قطع مستقيمة ونستخدم العلاقة التالية:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{2}\{y_0+2y_1+2y_2+2y_3+\cdots+2y_{n-1}+y_n\}$$

3.9. طريقة سيمبسون

نحصل على التكامل المحدود بطريقة سيمبسون من العلاقة التالية:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}\{y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+4y_5+\cdots+2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n\}$$

تعتمد هذه الطريقة على تقريب بيان التابع $y=f(x)$ إلى مجموعة أجزاء أقواس قطع مكافئ كل واحد منها من الشكل $y=ax^2+bx+c$ لدينا:

$$\int_{-h}^{h}\left[ax^2+bx+c\right]dx=\frac{h}{3}\left[2ah^2+6c\right]$$

تحسب ثوابت القطع a,b,c بأخذ ثلاث نقاط من نقاط القطع وهي $(-h,y_0),(0,y_1),(h,y_2)$ وبالتالي:

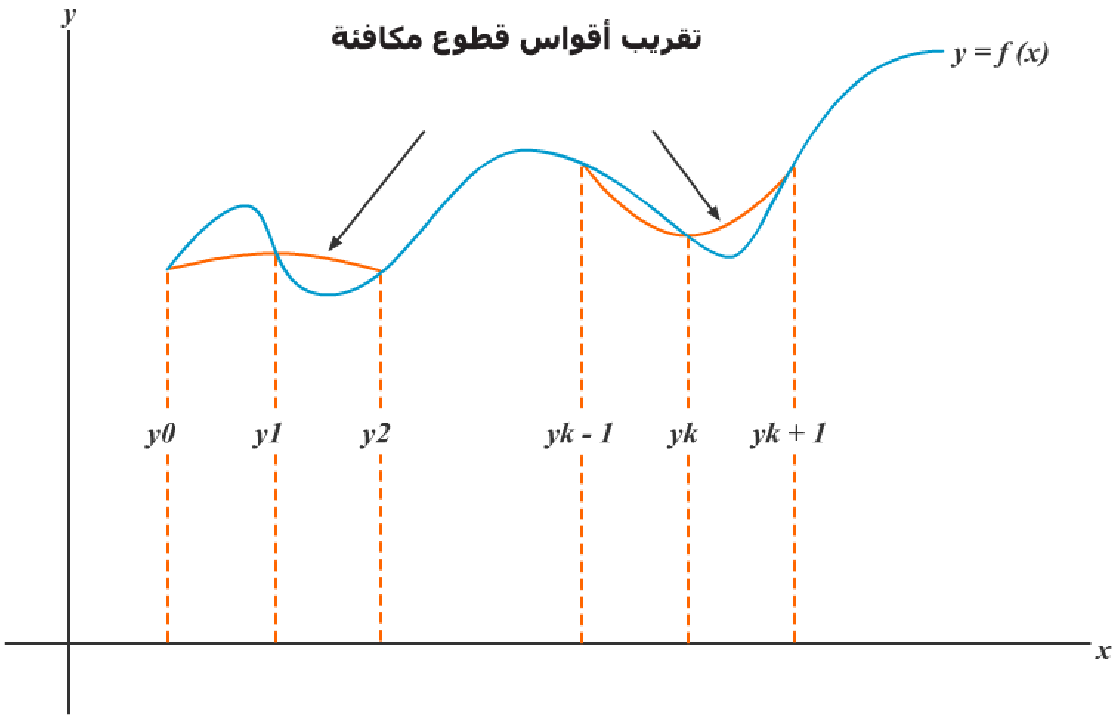
ISSN: 2617-989X

$$y_0 = a(-h^2) + b(-h) + c$$
$$y_1 = c$$
$$y_2 = ah^2 + bh + c$$
$$\Rightarrow y_0 + 4y_1 + y_2 = 2ah^2 + 6c$$

وبالتالي نحصل على التكامل:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{h}{3}(y_{k-1} + 4y_k + y_{k+1}) = \frac{\Delta x}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n]$$

تعطي طريقة سيمبسون تقريباً أفضل من الطريقتين السابقتين للمنحنيات.



الشكل رقم 3 أقواس قطوع مكافئة طريقة سيمبسون

مثال:

احسب تقريب للتكامل المحدود $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ باستخدام طريقة شبه المنحرف وطريقة سيمبسون مع تقسيم المجال $[0,1]$ إلى أربع قطع متساوية.

التابع $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ولدينا $\Delta x = \frac{b-a}{4} = \frac{1-0}{4} = 0.25$ سنستخدم أربعة أرقام بعد الفاصلة لتمثيل جميع القيم العددية التالية.

$$y_0 = f(0) = 1.0000, y_1 = f(0.25) = 0.9412, y_2 = f(0.5) = 0.8000,$$
$$y_3 = f(0.75) = 0.6400, y_4 = f(1) = 0.5000$$

طريقة شبه المنحرف:

$$\frac{\Delta x}{2}\{y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4\} = \frac{0.25}{2}\{1.0000 + 2(0.9412) + 2(0.8000) + 2(0.6400) + 0.5000\} = 0.7828$$

طريقة سيمبسون:

$$\frac{\Delta x}{3}\{y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4\} = \frac{0.25}{2}\{1.0000 + 4\times 0.9180 + 2\times 0.8000 + 4\times 0.6400 + 0.5000\} = 0.7854$$

القيمة الدقيقة لهذا التكامل هي $\frac{\pi}{4} \approx 0.7854$.

10. حساب طول قوس

يمكن تقدير قوس مع الفرضيات التالية:

1. لايتقاطع القوس مع نفسه.
2. يوجد مستقيم مماس لكل نقطة من نقاط القوس
3. يتغير المماس بشكل مستمر على القوس.

وبفرض أنه في المستوي ومن الممكن استخدام تمثيل احداثيات القوس باستخدام متحول مساعد $x = f(t), y = g(t)$ يتم تقريب طول القوس إلى مجموع أطوال قطع مستقيمة ونحصل على طول كل قطعة k من العلاقة $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ حيث $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ ويحسب الطول الكلي للقوس من العلاقة التالية $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}\right\}$ أو $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\right\}\Delta x_k$ ونجد:

$$L = \int_a^b \left\{\sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\right\}dt = \int_a^b \left\{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\right\}dt$$

أو بتغيير المتحول يمكن الحصول على العلاقة: $L = \int_{f(a)}^{f(b)} \left\{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2\right\}dx$

مثال: أوجد طول القوس من القطع المكافئ $y = x^2$ بين $x = 0$ و $x = 1$؟

طول القوس المطلوب يعطى بالعلاقة التالية:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+(dy/dx)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx$$

لحساب هذا التكامل نغير المتحول $u = 2x \Rightarrow u^2 = 4x^2$ وكذلك $du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$ وحدود التكامل $x = 0 \Rightarrow u = 0$ و $x = 1 \Rightarrow u = 2$ وبالتالي:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+u^2}\,du = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}u\cdot\sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2}\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right\}_0^2$$

$$L = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$$

11. المعادلات التفاضلية الخطية مع أمثال ثابتة من الدرجة الأولى ومن الدرجة الثانية

تعريف: المعادلة التفاضلية هي علاقة ربط بين المتحول x والتابع المجهول y وعدد من مشتقاته $y', y'', y''', \ldots$. أي أن حل المعادلة التفاضلية أو تكامل المعادلة التفاضلية هو ايجاد علاقة الربط للتابع $y = f(x)$ وليس ايجاد عدد. ويحقق هذا التابع مع مشتقاته المعادلة التفاضلية. وتدعى المعادلة التفاضلية من الدرجة n حيث n هي أكبر مرتبة اشتقاق تظهر للتابع ضمن المعادلة.

مثال:

معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى $y' = -32x$

معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى $y' + 5y = 12e^{7x}$

معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية $y'' + 8y' + 16y = 0$

تعريف: نعرّف المعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الثانية بامثال ثابتة بأنها المعادلة التي لها الشكل العام التالي: $a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x), a_2 \neq 0$ حيث a_0, a_1, a_2 ثوابت حقيقية.

تدعى المعادلة التفاضلية متجانسة عندما تكون من الشكل $a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$ (أي الطرف الأيمن من المعادلة $f(x) = 0$).

وتدعى معادلة تفاضلية غير متجانسة عندما تكون من الشكل $a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x) \neq 0$ الطرف الأيمن للمعادلة غير معدوم.

نعرّف المعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الأولى بأمثال ثابتة بأنها المعادلة التي لها الشكل العام التالي: $a_1y' + a_0y = f(x), a_1 \neq 0$ حيث a_0, a_1 ثوابت حقيقية.

ملاحظة: تنتج المعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الأولى كحالة خاصة من المعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الثانية بجعل $a_2 = 0$.

مثال: ليكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية $y''=-g$ بالتالي نجد $y=-\frac{1}{2}gt^2+C_1x+C_2$ يتم تحديد الثابتين C_1,C_2 من خلال شروط بدائية يحققها التابع.

ملاحظة: يحوي الحل العام للمعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية ثابتي تكامل مجهولين. ويحوي الحل العام للمعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى ثابت تكامل واحد مجهول.

حل المعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الثانية مع أمثال ثابتة:

لتكن لدينا المعادلة غير المتجانسة $a_2y''+a_1y'+a_0y=f(x), a_2\neq 0, f(x)\neq 0$ حيث a_0,a_1,a_2 ثوابت حقيقية.

ليكن y_c حل عام للمعادلة المتجانسة $a_2y''+a_1y'+a_0y=0$

وليكن y_p حل خاص للمعادلة غير المتجانسة $a_2y''+a_1y'+a_0y=f(x), a_2\neq 0, f(x)\neq 0$

عندئذ يكون الحل العام للمعادلة $y=y_c+y_p$.

أي أنه لحل المعادلة التفاضلية لابد من ايجاد الحل العام للمعادلة المتجانسة ثم ايجاد حل خاص للمعادلة غير المتجانسة.

إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الدرجة الأولى:

لتكن لدينا المعادلة $a_1y'+a_0y=0, a_1\neq 0$ نجد:

$$a_1y'=-a_0y \Rightarrow y'=-\frac{a_0}{a_1}y \Rightarrow y=C\cdot e^{r_1x}, r_1=-\frac{a_0}{a_1}$$

يمكن تحديد قيمة الثابت الحقيقي C من خلال شرط ابتدائي تعطى فيه قيمة نقطة من نقاط التابع (شرط ابتدائي) وبتعويض هذه النقطة يمكن حساب الثابت C.

مثال: أوجد حل المعادلة التفاضلية المتجانسة من الدرجة الأولى $y'+5y=0$ علماً بأن $y=1$ من أجل $x=0$.

نجد $r_1=-\frac{a_0}{a_1}=-\frac{5}{1}=-5$ وبالتالي $y=C\cdot e^{r_1x}=C\cdot e^{-5x}$ وبتعويض النقطة المعطاة نجد $1=C\cdot e^0=C$ أي أنّ الثابت $C=1$ ويكون الحل هو $y=e^{-5x}$.

إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الدرجة الثانية:

لتكن لدينا المعادلة $a_2y''+a_1y'+a_0y=0$ نشكّل المعادلة المساعدة من الدرجة الثانية:

$$a_2r^2+a_1r+a_0=0$$

ونقوم بحلها فنجد $r_{1,2}=\frac{-a_1\mp\sqrt{a_1^2-4a_2a_0}}{2a_2}$ ونحصل على الحالات الثلاث التالية:

ISSN: 2617-989X

الحالة الأولى: $a_1^2 - 4a_2a_0 > 0$ لدينا حلين حقيقيين مختلفين $r_1 \neq r_2$ ونحصل على حل المعادلة التفاضلية:

$$y = C_1 \cdot e^{r_1 x} + C_2 \cdot e^{r_2 x}$$

الحالة الثانية: $a_1^2 - 4a_2a_0 = 0$ لدينا حل مضاعف $r = r_1 = r_2$ ونحصل على حل المعادلة التفاضلية:

$$y = e^{r \cdot x}\left(C_1 + C_2 x\right)$$

الحالة الثالثة: $a_1^2 - 4a_2a_0 < 0$ لدينا حلين عقديين $r_1 = a + jb, r_2 = a - jb$ ونحصل على حل المعادلة التفاضلية: $y = e^{ax}\left(C_1 \cos(bx) + C_2 \sin(bx)\right)$.

مثال: أوجد حل المعادلة التفاضلية $2y'' + 7y' + 3y = 0$؟

نبحث عن جذور المعادلة المساعدة $2r^2 + 7r + 3 = 0$ فنجد جذرين حقيقيين مختلفين $r_1 = -0.5, r_2 = -3$

ويكون الحل: $y = C_1 \cdot e^{-0.5x} + C_2 \cdot e^{-3x}$. حيث C_1, C_2 عددين ثابتين مجهولين.

مثال: أوجد حل المعادلة التفاضلية $y'' + 4y' + 13y = 0$؟

نبحث عن جذور المعادلة المساعدة $r^2 + 4r + 13 = 0$ فنجد جذرين عقديين:

$$r_1 = -2 + 3j, r_2 = -2 - 3j$$

ويكون لدينا الحل هو التابع: $y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$ حيث C_1, C_2 عددين ثابتين مجهولين.

إيجاد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من الدرجة الثانية:

علينا إيجاد حل خاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة التالية:

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x), a_2 \neq 0, f(x) \neq 0$$

الحالة الأولى: $f(x) = C$ الطرف الأيمن ثابت عندئذ يمكن أخذ الحل الخاص $y_p = \dfrac{C}{a_0}, a_0 \neq 0$.

مثال: $y'' + y = 5$ نأخذ $y_p = 5 \Rightarrow y_p' = 0$.

الحالة الثانية: $f(x) = a + bx + cx^2 + \cdots$ كثير حدود عندئذ يكون الحل الخاص كثير حدود من نفس الدرجة $y_p = A + Bx + Cx^2 + \cdots$ ونحصل على الثوابت للتابع y_p من خلال الاشتقاق والتعويض في المعادلة التفاضلية والمطابقة.

مثال: $y'' - 3y' + 2y = 3 - 2x^2$ بما أنّ $f(x) = 3 - 2x^2$ كثير حدود من الدرجة الثانية نأخذ: $y_p = A + Bx + Cx^2$ ونجد $y_p' = B + 2Cx, y_p'' = 2C$ بالتعويض بالمعادلة التفاضلية نجد:

$$2C - 3(B + 2Cx) + 2(A + Bx + Cx^2) = 3 - 2x^2$$

بمطابقة الأمثال نجد من أمثال x^2 أنّ $2C = -2 \Rightarrow C = -1$ ومن أمثال x نحصل على: $-6C + 2B = 0 \Rightarrow B = -3$ ومن الأمثال الثابتة نجد $2C - 3B + 2A = 3 \Rightarrow A = -2$ ويصبح لدينا الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة هو: $y_p = -2 - 3x - x^2$.

تحديد الثوابت لحلول المعادلات التفاضلية الخطية من خلال الشروط الابتدائية

المعادلات التفاضلية الخطية من الدرجة الأولى

لتكن لدينا المعادلة $a_1 y' + a_0 y = 0$ نجد $r_1 = -a_0 / a_1$ والحل هو التابع $y = C \cdot e^{r_1 x}$ لإيجاد الثابت C نعتمد على معلومة عن التابع أو مشتقه عند نقطة معينة وهي على الأغلب تكون عند اللحظة $t = 0$ لذلك يدعى شرط ابتدائي.

مثال: ما هو حل المعادلة التفاضلية $y' + 3y = 0$ التي تحقق $x = 0, y = 2$.

نجد الحل العام $y = C \cdot e^{-3x}$ بتعويض النقطة المعطاة نجد $2 = C \cdot e^{0} \Rightarrow C = 2$ وبالتالي:

$y = 2 \cdot e^{-3x}$.

المعادلات التفاضلية الخطية من الدرجة الثانية

يحتوي الحل العام للمعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية ثابتين يجب تحديدهما. لذلك نحتاج إلى شرطين ابتدائيين لحساب الثابتين. الشرطين يمكن أن يكونا نقطة أولى $x = x_1, y = y_1$ ونقطة ثانية $x = x_2, y = y_2$ أو مشتق نقطة ثانية $x = x_2, y' = y_2'$.

مذاكرة التكاملات Integrals

العلامة العظمى: 100 علامة النجاح: 50 المدة: ساعة ونصف

لكل سؤال خمس علامات

اختر الإجابة الصحيحة للأسئلة التالية:

1. أوجد نتيجة التكامل $\int (x+2)\sin(x^2+4x-6)dx$

a) $-\frac{1}{2}\cos(x^2+4x-6)+C$

b) $\cos(x^2+4x-6)+C$

c) $\sin(x^2+4x-6)+C$

d) $(x+2)\sin(x^2+4x-6)+C$

مساعدة: راجع فقرة التكامل بتغيير المتحول

2. أوجد نتيجة التكامل $\int\left(x^5-3x+2\sqrt[3]{x}-\frac{7}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$

a) $\frac{1}{6}x^6-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x^{4/3}-\frac{35}{2}x^{2/5}+C$

b) $\frac{1}{6}x^6-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{4}x^{1/3}+\frac{35}{2}x^{2/5}+C$

c) $\frac{1}{6}x^6-\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x^{1/3}+\frac{35}{4}x^{2/5}+C$

d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة التوابع الأصلية لبعض التوابع المعروفة

3. أوجد نتيجة التكامل $\int \sin(3x)dx$

a) $-\frac{1}{3}\cos 3x+C$

b) $-\cos x+C$

c) $-\cos 3x+C$

d) $-3\cos 3x+C$

مساعدة: راجع فقرة التكامل بتغيير المتحول

ISSN: 2617-989X

4. أوجد نتيجة التكامل $\int x^2 dx$

(a $\frac{1}{3}x^3 + C$

(b $x^3 + C$

(c $2x^2 + C$

(d جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة التوابع الأصلية لبعض التوابع المعروفة

5. نتيجة التكامل المحدود $\int_1^4 x^2 dx$ هي

(a 21

(b 63

(c 22

(d 64

مساعدة: راجع فقرة التوابع الأصلية لبعض التوابع المعروفة

6. نتيجة التكامل المحدود $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$ هي

(a 1

(b -1

(c 0

(d 2

مساعدة: راجع فقرة التوابع الأصلية لبعض التوابع المعروفة

7. نتيجة التكامل المحدود $\int_1^2 (x^2 + 1) dx$ هي

(a $\frac{10}{3}$

(b 10

(c 9

(d 8

مساعدة: راجع فقرة التوابع الأصلية لبعض التوابع المعروفة

8. نتيجة التكامل المحدود $\int_{2}^{3} \frac{1}{x^2} dx$ هي

a) $\frac{1}{6}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{3}{2}$
d) 3

مساعدة: راجع فقرة التوابع الأصلية لبعض التوابع المعروفة

9. نتيجة التكامل المحدود $\int_{1}^{2} e^x dx$ هي

a) $e^2 - e$
b) e^3
c) e
d) e^2

مساعدة: راجع فقرة التوابع الأصلية لبعض التوابع المعروفة

10. نتيجة التكامل المحدود $\int_{-1}^{1} \left(1+x^2\right) dx$ هي

a) 2.667
b) $2/3$
c) $3/2$
d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة التوابع الأصلية لبعض التوابع المعروفة

11. نتيجة التكامل المحدود $\int_{0}^{3} e^{2x} dx$ هي

a) 198
b) 200
c) 197
d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة التوابع الأصلية لبعض التوابع المعروفة

12. نتيجة التكامل $\int_0^{\infty} e^{-x}dx$ هي

a) 1
b) -1
c) 0
d) ∞

مساعدة: راجع فقرة التكاملات المعتلة

13. نتيجة التكامل $\int_0^{\infty} e^{-2x}dx$ هي

a) $\frac{1}{2}$
b) $-\frac{1}{2}$
c) 1
d) ∞

مساعدة: راجع فقرة التكاملات المعتلة

14. نتيجة التكامل $\int_0^{4} 5x^2dx$ هي

a) $\frac{760}{3}$
b) 152
c) 760
d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة التوابع الأصلية لبعض التوابع المعروفة

15. نتيجة التكامل $\int_0^{5} 3\sqrt{x}\,dx$ هي

a) $2\times 5^{3/2}$
b) $5^{3/2}$
c) $2\times 5^{-3/2}$
d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة التوابع الأصلية لبعض التوابع المعروفة

16. نتيجة التكامل $\int_{2}^{4}\left(4x^{3}+2x^{1/3}\right)dx$ هي

a) 245.74
b) 305.25
c) 225.45
d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة التوابع الأصلية لبعض التوابع المعروفة

17. نتيجة التكامل $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^{4}}dx$ هي

a) $\frac{1}{3}$
b) $-\frac{1}{3}$
c) 0
d) ∞

مساعدة: راجع فقرة التوابع الأصلية لبعض التوابع المعروفة

18. نتيجة التكامل $\int_{1}^{\infty}\frac{\ln x}{x^{2}}dx$ هي (مساعدة استخدم التكامل بالتجزئة)

a) 1
b) 0
c) -1
d) $\frac{1}{2}$

مساعدة: راجع فقرة التكامل بالتجزئة

19. التكامل $\int\frac{x+2\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}}dx$ هو:

a) $\frac{2}{3}x^{3/2}+2x+14x^{0.5}+C$
b) $\frac{2}{3}x^{-3/2}+2x+7x^{-0.5}+C$
c) $x^{3/2}+2x+14x^{-0.5}+C$
d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة مكاملة التوابع الكسرية

ISSN: 2617-989X

20. التكامل $\int \frac{3x+1}{x-3}dx$ هو؟

a) $3x+10\ln(x-3)+C$

b) $3-10\ln(x-3)+C$

c) $x+10\ln(x)+C$

d) $3x+\ln(3x+1)+C$

مساعدة: راجع فقرة مكاملة التوابع الكسرية

ISSN: 2617-989X

الإجابات الصحيحة

السؤال	الإجابة الصحيحة
1	الخيار الأول
2	الخيار الأول
3	الخيار الأول
4	الخيار الأول
5	الخيار الأول
6	الخيار الأول
7	الخيار الأول
8	الخيار الأول
9	الخيار الأول
10	الخيار الأول
11	الخيار الأول
12	الخيار الأول
13	الخيار الأول
14	الخيار الأول
15	الخيار الأول
16	الخيار الأول
17	الخيار الأول
18	الخيار الأول
19	الخيار الأول
20	الخيار الأول