الجامعة الافتراضية السورية

SYRIAN VIRTUAL UNIVERSITY

بحوث العمليات

الدكتور أحمد حاتم عبد الله

ISSN: 2617-989X

Books & Refrences

بحوث العمليات

أحمد حاتم عبد الله

من منشورات الجامعة الافتراضية السورية

الجمهورية العربية السورية 2018

Operational Researches

Ahmed Hatem Abdullah

Publications of the Syrian Virtual University (SVU)

Syrian Arab Republic, 2018

ISSN: 2617-989X

الفهرس

ISSN: 2617-989X

ISSN: 2617-989X

مخطط المقرر

الفصل الأول: مدخل إلى بحوث العمليات

1- مقدمة عامة
2- مفهوم بحوث العمليات

البرمجة الخطية

1- مفهوم البرنامج الخطي
2- مشاكل الأمثلية (الحل الأمثل)
3- الشكل الرياضي للبرنامج الخطي في حال التعظيم
4- الرياضي للبرنامج الخطي في حال التدنئة
5- مشاكل البرمجة الخطية
6- بناء البرنامج الخطي

الفصل الثاني : طرائق حل البرنامج الخطي بيانياً

1- مقدمة.
2- حل البرنامج الخطي بيانياً في حال التعظيم.
3- حل البرنامج الخطي بيانياً في حال التدنئة.

الفصل الثالث : حل البرنامج الخطي بطريقة السمبليكس

1- مقدمة
2- حل البرنامج في حال التعظيم
3- حل البرنامج في حال التدنئة

الفصل الرابع: البرنامج المرافق أو الثنائي

1- البرنامج المرافق المماثل.
2- البرنامج المرافق غير المماثل.

الفصل الخامس: برمجة الأعداد الصحيحة

1- برمجة الأعداد الصحيحة

الفصل السادس : برمجة الأعداد الصحيحة - مسألة النقل

1- طريقة عرض المسألة النقل بأقل التكاليف و تحويلها إلى الشكل الرياضي.
2- التوزيع بطريقة الزاوية الشمالية الغربية و التأكد بطريقة التخطي أو التأكد بطريقة التوزيع المعدل
3- طريقة التكلفة الدنيا و التأكد بطريقة التخطي أو التأكد بطريقة التوزيع المعدل
4- طريقة فوقل و التأكد بطريقة التخطي أو التأكد بطريقة التوزيع المعدل
5- طريقة عرض مسألة النقل بتعظيم الأرباح وتحويلها إلى الشكل الرياضي

الفصل السابع : مسألة التخصيص

1- مسألة التخصيص في حال التكلفة الدنيا
1-1-الطريقة الأولى : طريقة الحصر الاحتمالي في حال التكلفة الدنيا
1-2- الطريقة الثانية : الطريقة الهنغارية في حال التكلفة الدنيا
2- مسألة التخصيص في حال تعظيم الأرباح
2-1- الطريقة الأولى : طريقة الحصر الاحتمالي للحل في حال تعظيم الأرباح
2-2- الطريقة الثانية : الطريقة الهنغارية في حال الربح الأعظمي

الفصل الأول: مدخل إلى بحوث العمليات

كلمات مفتاحية : بحوث العمليات Operations research, البرمجة الخطية Linear Programming, تقليل التكاليف Expenses ، تعظيم الأرباح Profits

ملخص الفصل :

يتناول هذا الفصل بعض المفاهيم الأساسية في بحوث العمليات، تاريخها و مفهومها بما يمكن الطالب من فهم البرمجة الخطية و طرائق حسابها, حيث يبدأ الفصل باستعراض مفهوم بحوث العمليات ثم البرمجة الخطية, ثم الانتقال إلى كتابة النموذج الرياضي الموافق للحالة.

المخرجات و الأهداف التعليمية:

1- التعرف على استخدامات بحوث العمليات في المجال الاقتصادي .
2- يستطيع الطالب فهم معنى البرمجة الخطية.
3- يستطيع الطالب أن يفرق بين البرنامج الخطي في حال التدنئة و في حال تعظيم الأرباح.
4- يستطيع كتابة الشكل الرياضي للبرنامج الخطي .
5- يستطيع الطالب كتابة الشكل المصفوفي للبرنامج الخطي.
6- يعد الهدف الرئيسي في هذا الفصل هو قدرة الطالب على صياغة برنامج خطي بشكل صحيح

مخطط الفصل :

مقدمة عامة introduction

مفهوم بحوث العمليات The concept of Operations Research

البرمجة الخطية Linear Programming

1- مفهوم البرنامج الخطي The concept of linear programming
2- مشاكل الأمثلية (الحل الأمثل) The best solution problems
3- الشكل الرياضي للبرنامج الخطي في حال التعظيم linear mathematical form of the program in the case of Maximum
4- الشكل الرياضي للبرنامج الخطي في حال التدنئة linear mathematical form of the program in the case of Minmum
5- مشاكل البرمجة الخطية The problems of Linear programming
6- بناء البرنامج الخطي Build of Linear Programming

مقدمة:

لا يوجد تعريف محدد و كافي لبحوث العمليات إنما كان هنالك العديد من التعاريف، فقد قام كل من G.Kimball and P.Morse بتعريفها على أنها "طريقة علمية لإمداد الإدارة التنفيذية بأساس كمي للقرارات الخاصة بالعمليات تحت رقابتهم". كما عرف كل من R.Ackoff and G.Chorchman بحوث العمليات بـ "استخدام الطرق العلمية و الأساليب و الأدوات لحل المشاكل التي تحتوي على عمليات النظم لإمداد المدراء بالحلول المثلى للمشاكل"، أما العالمان M.Starr and M.Miller فعرفها بـ " نظرية القرارات التطبيقية و استخدام الطرق العلمية و الرياضية في حل المشاكل التي تواجه المنفذين". كما يوجد العديد من التعاريف الأخرى إلا أن معظمهم اشتركت في المصطلحات الأساسية و من أهم هذه المصطلحات التي شملتها هذه التعاريف هي : الطريقة العلمية و الأساليب و الأدوات و المقصود بها الأساليب الرياضية و الإحصائية المتبعة في بحوث العمليات كذلك شملت المصطلحات على مشاكل المدراء و القرارات و الحلول المثلى و هي تعبر عن فهم الباحث لبحوث العمليات. و قد تطور هذا المفهوم في العصر الحديث ليضيف على مادة بحوث العمليات صفة العلمية و ذلك لتطورها المستمر و استخدامها لأساليب البحث العلمي، فقد عرفها الدكتور موفق محمد الكبيسي في كتابه بقوله "إن علم بحوث العمليات هو عبارة عن مجموعة من الطرق و الوسائل التي تساعد في عملية اتخاذ القرارات في مجالات متنوعة بصدد تحقيق الاستخدام الأفضل للموارد البشرية المتاحة" .

جاءت تسمية بحوث العمليات كون أول البحوث و تطبيقاتها تم إجراؤها على العمليات الحربية و كانت بدايتها في بريطانيا سنة 1936 إلا أن بعض المؤرخين قالوا إن نشوءها الحقيقي كان خلال الحرب العالمية الثانية عندما اجتمع مجموعة من العلماء من جامعة مانشيستر البريطانية برئاسة الأستاذ Blackett و خصص هذا الاجتماع لدراسة المشاكل التقنية و الإستراتيجية المتعلقة بالدفاعين الجوي و الأرضي لبريطانيا وكان الهدف الرئيسي هو الاستخدام الأمثل للموارد الحربية و قد نجحت تلك البحوث

ISSN: 2617-989X

في تحسين منظومة الرادار و الدفاع المدني وبالتالي قامت إدارة الحرب الأمريكية بإجراء أبحاث مماثلة برئاسة كل من B.James رئيس لجنة بحوث الدفاع و B.Annevar رئيس لجنة الأسلحة و المعدات الجديد و ذلك كونهم شاهدا طريقة استخدام هذا الأسلوب في بريطانيا أثناء إقامتهم بها خلال الحرب العالمية الثانية.

بعد النجاح الذي حققه هذا الأسلوب في إدارة العمليات الحربية خلال الحرب العالمية الثانية تم نقله للإدراة المدنية و بشكل خاص إلى إدارة الأعمال و المشاريع الاقتصادية و أسس في عام 1948 أول نادي لبحوث العمليات و قد تم تحويله إلى جمعية بحوث العمليات للمملكة المتحدة و أصدر أول مجلة علمية في مجال بحوث العمليات سنة 1950. و قد قامت الولايات المتحدة الأمريكية بتأسيس جمعية بحوث العمليات الأمريكية و معهد الإدارة العلمية في عام 1950 و كذالك مجلة بحوث العمليات التي أصدرت أول أبحاثها في عام 1952 و هذا ساعد و بشكل كبير جداً بتنمية هذا الأسلوب و استخداماته في مجالات اتخاذ القرارات.

مفهوم بحوث العمليات:

يعتمد بحوث العمليات على المنهج العلمي و ذلك من بناء النموذج فحله فاختباره فتطبيقه و ذلك وفق المراحل التالية :

1- تحديد المشكلة و تحليلها إلى عناصرها الأولية .
2- بناء النموذج الرياضي المناسب و الذي يتماشى مع طبيعة المشكلة .
3- اختبار مدى صحة النموذج.
4- إيجاد حل للنموذج بعد معرفة الطريقة التي تخضع لها المشكلة.
5- اختبار مدى مناسبة الحل.
6- تنفيذ خطة الحل المتوصل إليها.

البرمجة الخطية (*Linear Programming*) – مفهومها و تطبيقاتها

تعتبر البرمجة الخطية واحدة من أكبر إنجازات منتصف القرن العشرين حيث أن مسألة السمبليكس (Simplex) وفرت الملايين من الأموال و ساعات العمل للعديد من الشركات و المنشآت الإنتاجية المستخدمة لهذا الفرع من فروع بحوث العمليات. تعالج البرمجة الخطية مشاكل توزيع الموارد المحددة على الأنشطة المتنافسة داخل المنشأة, و تبرز هذه المشاكل بصورة جلية في شركات الإنتاج و النقل بأنواعها المختلفة.

1- مفهوم البرنامج الخطي :

البرنامج الخطي عبارة عن صيغة رياضية تمثل مشكلة معينة هدفها البحث عن أمثلية الاستخدام باستخدام دالة رياضية مكونة من مجموعة من المتغيرات من الدرجة الأولى تسمى بدالة الهدف أو الدالة الاقتصادية مع مجموعة من القيود تكون على شكل معادلات أو متراجحات أو هما معاً من الدرجة الأولى أيضاً.

2- مشاكل الأمثلية *Optimization Problems*:

يبحث الفرد في مشاكل الأمثلية عن أكبر أو أصغر قيمة لدالة تعتمد على متغير أو متغيرات و تسمى هذه الدالة بدالة الهدف Objective Function و تخضع هذه الدالة إلى قيود متمثلة في معادلات أو متراجحات تربط المتغيرات ببعضها بشروط فعلى سبيل المثال :

مثال 1-1 :

أوجد أكبر قيمة لدالة الهدف :

$$Max \quad Z= \quad 2X_1+4X_2+3X_3 \qquad \text{Objective function}$$

مع العلم أن :

$$\left.\begin{array}{l} 2X_1 + 2X_2 + X_3 \le 5 \\ 2X_1 + X_2 + X_3 \le 6 \end{array}\right\} \quad \text{الشروط}$$

نطلق على المتغيرات X_1, X_2, X_3 بمتغيرات القرار Decision Variables و هي التي نبحث عن قيمها لتعظيم دالة الهدف.

دالة الهدف : و هي التي تعبر عن الهدف التي تسعى المؤسسة للوصول له كتعظيم الأرباح أو تعظيم الإنتاج أو تعظيم الإيرادات أو تدنئة التكاليف أو تدنئة ساعات العمل .... الخ و هي مؤلفة من متغيرات من الدرجة الأولى .

$$Max \quad Z= \quad 2X_1+4X_2 +3X_3 \qquad \text{Objective function}$$

القيود : وهو عبارة عن مجموعة من المتراجحات أو المعادلات أو كلاهما معاً, و التي تسعى المؤسسة من خلالها أن توجد حلاً لدالة الهدف ضمن هذه الشروط. تتألف القيود من شقين الشق الأيسر و هو عبارة عن مجموعة من القيم مضروبة بمجموعة من المتغيرات من الدرجة الأولى

$$\begin{array}{l} 2X_1 + 2X_2 + X_3 \\ 2X_1 + X_2 + X_3 \end{array}$$

أما الشق الأيمن فهو عبارة عن أرقام ثابتة موجبة

شرط عدم السلبية: و تعني أن جميع المتغيرات أكبر أو تساوي الصفر كونها تتعلق بكميات مادية وضمناً الكميات المادية يجب أن لا تساوي الصفر و لكن إن لم يتواجد هذا الشرط فإن هنالك معالجة خاصة سنقوم بشرحها لاحقاً.

3-الشكل الرياضي للبرنامج الخطي في حال التعظيم :

يعطى البرنامج الخطي بشكل عام في حال التعظيم بالشكل:

$$Max: Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$S/C\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ a_{31}x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{3n}x_n \le b_3 \\ \ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_n \ge 0 \end{cases}$$

حيث Z هي دالة الهدف و يجب أن تكون في أعظم قيمة لها.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$: هي المتغيرات التي يجب البحث عن قيمها و يشترط أن تكون غير سالبة و التي تحقق تابع الهدف.

$c_1, c_2, \ldots, c_n$: و هي معاملات الدالة المراد تعظيمها شريطة تحقيق القيود.

$a_{11}, a_{12}, \ldots\ldots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \ldots\ a_{mn}$: و هي معاملات القيود و يمكن أن تأخذ أي قيمة (موجبة أو سالبة).

$b_1, b_2, \ldots, b_n$: و هو شعاع الثوابت و يشترط أن تكون قيمه موجبة.

S/C : تعني تابع الهدف تحت الشروط .

و بالتالي يمكننا كتابة البرنامج بالشكل المصفوفي :

$$Max: Z = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \ldots & c_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$S/C \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}$$

و بالتالي يمكننا كتابة البرنامج بالشكل :

$$Max: Z = C'X$$
$$S/C \begin{cases} AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

حيث :

C' : هو منقول مصفوفة المعاملات الخاصة بالدالة الاقتصادية .

X : هو شعاع المتغيرات .

A : مصفوفة معاملات القيود.

B : شعاع الثوابت.

مثال 1−2:

أكتب البرنامج التالي بالشكل المصفوفي :

$$Max: Z = 10x_1 + 15x_2$$
$$S/C\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 12 \\ 2x_1 + x_2 \le 7 \\ 7x_1 + 3x_2 \le 21 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

الحل:

تكتب دالة الهدف (الدالة الاقتصادية) بالشكل :

$$Max: Z = \begin{bmatrix} 10 & 15 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

أما القيود فتكتب بالشكل :

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 21 \end{bmatrix}$$

أما قيود عدم السلبية فتكتب بالشكل :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

مثال 1-3:

أكتب البرنامج الخطي للشكل المصفوفي :

$$Max: Z = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 12 \\ 14 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$Max : Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$S/C \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 12 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 14 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 16 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4- الشكل الرياضي للبرنامج الخطي في حال التدنئة:

إن شكل البرنامج الخطي في حال التدنئة بشكل عام هو :

$$Min : Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

$$S/C \begin{cases} a_{11} x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n} x_n \ge b_1 \\ a_{21} x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n} x_n \ge b_2 \\ a_{31} x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{3n} x_n \ge b_3 \\ \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn} x_n \ge b_m \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n \ge 0 \end{cases}$$

حيث Z هو تابع الهدف (الدالة الاقتصادية) و الشكل المصفوفي للبرنامج هو :

$$Min: Z = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \dots & c_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$S/C \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

أما الشكل المختصر فتأخذ الشكل:

$$Min: Z = C'X$$

$$S/C \begin{cases} AX \geq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

مثال 1-4:

أكتب البرنامج التالي بالشكل المصفوفي :

$$Min: Z = 10x_1 + 15x_2$$

$$S/C\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ 2x_1 + x_2 \geq 7 \\ 7x_1 + 3x_2 \geq 21 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

تكتب دالة الهدف (الدالة الاقتصادية) بالشكل :

$$Min: Z = \begin{bmatrix} 10 & 15 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

أما القيود فتكتب بالشكل :

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 21 \end{bmatrix}$$

أما قيود عدم السلبية فتكتب بالشكل :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

مثال 1−5:

أكتب البرنامج الخطي للشكل المصفوفي :

$$Min: Z = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 12 \\ 14 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$Min: Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$S/C \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ 4x_1 + 5x_2 \geq 14 \\ 5x_1 + 6x_2 \geq 16 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

5- مشاكل البرمجة الخطية Linear Programming Problems:

إن تشكيل البرنامج هو من أهم الأمور المتعلقة بالحل الصحيح للمشكلة فالبرنامج الخطي الذي ذكرناه سابقاً في الفقرتين الثانية و الثالثة يكتب من مسائل واقعية و طرق حل هذا البرنامج و الوصول إلى الحل الأمثل هي الموضوعات التي تدرسها البرمجة الخطية و من أهم الأشياء هو صياغة المشكلة بشكل رياضي و يمكننا ذلك وفق الخطوات التالية:

1- حدد الكميات أو القيم التي تحتاج إلى القيم المثلى (الدالة الاقتصادية) و عبر عنها بشكل رياضي و في هذه الخطوة تكون قد حددت المتغيرات المؤثرة في دالة الهدف(الدالة الاقتصادية).

2- ادرس المطالب و القيود و جميع الشروط المؤثرة و عبر عنها رياضياً إما بمعادلات أو متراجحات.

3- حدد شروط عدم السلبية للمتغيرات التي يجب أن تكون موجبة.

و يمكن تحديد البرامج الخطية في المجال الاقتصادي في حال التعظيم في :

- تعظيم الأرباح.
- تعظيم الإنتاج.
- تعظيم طاقات التخزين.
- تعظيم استخدام رؤوس الأموال.
- تعظيم استخدام اليد العاملة.

و في بعض الأمور الواقعية التي يكون هدفها الرئيسي التعظيم .

أما البرامج الخطية في حال التدنئة في المجال الاقتصادي فتستخدم في مجالات :

- تدنئة التكاليف.
- تدنئة الخسائر.

- تدنئة عدد الموظفين .
- تدنئة الأجور .

و العديد من الأماكن الاقتصادية المتعلقة بتدنئة استخدام الموارد.

6-بناء البرنامج الخطي:

و هو الخطوة الأهم في البرمجة الخطية فهو تحويل من واقع الكلام المسرود إلى نموذج رياضي مكون من دالة هدف و قيود و لتوضيح هذه النقطة سنقوم بإعطاء المثال التالي:

مثال 1-6:

تقوم شركة اقتصادية بإنتاج ثلاث أصناف مختلفة من البضائع (A,B,C) و كل صنف من هذه الأصناف يمر عبر ثلاث ورش تصنيع على النحو التالي:

الورشة الأولى: طاقة العمل القصوى 36 ساعة (6 عمال كل عامل يعمل 6 ساعات) مع العلم أن المنتج A يتطلب 3 ساعات عمل داخل الورشة و المنتج B يتطلب 4 ساعات عمل داخل الورشة و المنتج C يحتاج 3 ساعات عمل داخل الورشة.

الورشة الثانية : طاقة العمل القصوى 28 ساعة (4 عمال كل عامل يعمل 7 ساعات) مع العلم أن المنتج A يتطلب 2 ساعة عمل داخل الورشة و المنتج B يتطلب 3 ساعات عمل داخل الورشة و المنتج C يحتاج 3 ساعات عمل داخل الورشة.

الورشة الثالثة : طاقة العمل القصوى 18 ساعة عمل (3 عمال كل عامل يعمل 6 ساعات) مع العلم أن المنتج A يتطلب 1 ساعة عمل داخل الورشة و المنتج B يتطلب 2 ساعات عمل داخل الورشة و المنتج C يحتاج 3 ساعات عمل داخل الورشة.

كما أن الربح الصافي للوحدة الواحدة من كل صنف هي :

- الصنف A : 50 ل.س

- الصنف B : 60 ل.س
- الصنف C : 62 ل.س

و المطلوب أكتب الصيغة الرياضية لهذه المسألة و التي من شأنها إيجاد الكميات الواجب إنتاجها من كل صنف لأجل تعظيم ربح الشركة.

الحل:

تعد الخطوة الأولى في كتابة الصيغة الرياضية هي تحديد المتغيرات :

بما أن الشركة تبحث عن الكميات المثلى الواجب إنتاجها من كل منتج لتعظيم الأرباح فإن المتغيرات هي الأصناف و هي :

- المنتج A هو المتغير x_1
- المنتج B هو المتغير x_2
- المنتج C هو المتغير x_3

الخطوة الثانية : نقوم بإنشاء جدول مساعد يحتوي على القيود و العناصر المشكلة لدالة الهدف و يمكننا كتابته بالشكل :

المنتج	الوقت المستغرق في كل ورشة			الطاقة القصوى للورشات
	A	B	C	
الورشة 1	3	4	3	36
الورشة 2	2	3	3	28
الورشة 3	1	2	3	18
ربح الواحدة	50	60	62	

و بالتالي يمكننا صياغة القيود

بالشكل الرياضي على الشكل :

$$S/C\begin{cases}3x_1+4x_2+3x_3\le 36\\2x_1+3x_2+3x_3\le 28\\x_1+2x_2+3x_3\le 18\\x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0\end{cases}$$

و يعني القيد الأول أن الوقت المستغرق في إنتاج الكميات في الورشة الأولى يجب أن لا يتجاوز 36 ساعة و كذلك بالنسبة للورشة الثانية لا يتجاوز 28 ساعة و الورشة الثالثة لا يتجاوز 18 ساعة. و بما أن المتغيرات هي عبارة عن كميات فيستحيل أن تكون هذه الكميات سالبة لذلك جاء القيد الأخير بعدم السلبية.

كما يظهر لدينا أيضاً من الجدول أن ربح الوحدة الواحدة من المنتج الأول هو 50 وحدة نقدية و ربح الوحدة الواحدة من المنتج الثاني هو 60 وحدة نقدية أما المنتج الثالث فربح الوحدة الواحدة 62 وحدة نقدية

و عليه فإن تابع الهدف يمكننا كتابته بالشكل :

$$Max: Z=50x_1+60x_2+62x_3$$

أي أن الهدف الرئيسي من هذا البرنامج الرياضي هو إيجاد قيم x_i التي تجعل تابع الهدف في أعظم قيمة دون تجاوز القيود.

و عليه يكون البرنامج الخطي بالشكل النهائي هو :

$$Max: Z=50x_1+60x_2+62x_3$$

$$S/C\begin{cases}3x_1+4x_2+3x_3\le 36\\2x_1+3x_2+3x_3\le 28\\x_1+2x_2+3x_3\le 18\\x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0\end{cases}$$

و عندها نكون قد انتقلنا من الشكل الوصفي إلى الشكل الرياضي.

تمارين الفصل الأول

مثال 1:

مؤسسة لصنع الأثاث المنزلي تنتج نوعين من الأسرة, غير أن طاقة تموينها بمادة الخشب محدودة إذ لا تُتاح لها أسبوعياً سوى 12 صفيحة خشبية في الأسبوع , كما أن الورشة لا تستطيع العمل لأكثر من 72 ساعة عمل خلال الأسبوع إذا علمت أن :

- السرير الواحد من النوع الأول يحتاج صفيحتين من الخشب و 10 ساعات عمل.
- السرير الواحد من النوع الثاني يحتاج صفيحة واحدة من الخشب و 8 ساعات عمل.

- ثمن السرير الواحد من النوع الأول هو 1300 ليرة سورية و ثمن السرير الواحد من النوع الثاني هو 800 ليرة سورية.
- كلفة السرير الواحد من النوع الأول 300 ليرة سورية و تكلفة السرية الواحد من النوع الثاني هو 200 ليرة سورية.

و المطلوب :

1- أكتب البرنامج الخطي الذي من شأنه تعظيم إيراد المؤسسة .

2- أكتب البرنامج الخطي الذي من شأنه تعظيم الأرباح للمؤسسة.

الحل:

1- بما أن المؤسسة تبحث عن الكميات المثلى الواجب إنتاجها من كل منتج لتعظيم الإيرادات فإن المتغيرات هي الأسرة و هي :

- السرير من النوع الأول هو المتغير x_1

- السرير من النوع الثاني هو المتغير x_2

نقوم بإنشاء جدول مساعد يحتوي على القيود و العناصر المشكلة لدالة الهدف و يمكننا كتابته بالشكل :

المنتج	متطلبات الأسرة		الطاقة القصوى
	النوع الأول	النوع الثاني	
صفائح	2	1	12
ساعات عمل	10	8	72
إيراد السرير الواحد	1300	800	

و بالتالي يمكننا صياغة البرنامج الخطي بالشكل الرياضي :

$$Max: Z = 1300x_1 + 800x_2$$

$$S/C\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ 10x_1 + 8x_2 \leq 72 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2- بما أن المؤسسة تبحث عن الكميات المثلى الواجب إنتاجها من كل منتج لتعظيم الأرباح فإن المتغيرات هي الأسرة و هي :

- السرير من النوع الأول هو المتغير x_1

- السرير من النوع الثاني هو المتغير x_2

نقوم بإنشاء جدول مساعد يحتوي على القيود و العناصر المشكلة لدالة الهدف و يمكننا كتابته بالشكل :

المنتج	متطلبات الأسرة		الطاقة القصوى
	النوع الأول	النوع الثاني	
صفائح	2	1	12
ساعات عمل	10	8	72
ربح الواحدة	1000	600	

و بالتالي يمكننا صياغة البرنامج الخطي بالشكل الرياضي :

$$Max: Z = 1000x_1 + 600x_2$$

$$S/C \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ 10x_1 + 8x_2 \leq 72 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

مثال 2:

قرر محل لبيع و تربية الحيوانات أن كل حيوان يجب أن يحصل على الأقل على 70 وحدة من البروتين و 100 وحدة من الكربوهيدرات و 20 وحدة من الدهون يومياً و كان لدى المحل 6 أنواع من الغذاء لتلك الحيوانات و الموضحة بالجدول

تكلفة ألف ليرة سورية	دهون	كربوهيدرات	بروتين	النوع
2	4	50	20	A
3	9	30	30	B
5	11	20	40	C
6	10	25	40	D
8	9	50	45	E
8	10	20	30	F

و المطلوب :

1- أكتب البرنامج الخطي الذي يفي بمتطلبات الحيوانات من البروتين و الكربوهيدرات و الدهون و ذلك بأقل تكلفة ممكنة.

2- كتابة البرنامج بالشكل المصفوفي

الحل:

-1

- الغذاء من النوع الأول A هو المتغير x_1
- الغذاء من النوع الثاني B هو المتغير x_2
- الغذاء من النوع الثالث C هو المتغير x_3
- الغذاء من النوع الرابع D هو المتغير x_4
- الغذاء من النوع الخامس E هو المتغير x_5
- الغذاء من النوع السادس F هو المتغير x_6
- و بالتالي يمكننا صياغة البرنامج الخطي بالشكل الرياضي :

$$Min : Z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 8x_5 + 8x_6$$

$$S/C\begin{cases} 20x_1 + 30x_2 + 40x_3 + 40x_4 + 45x_5 + 30x_6 \geq 70 \\ 50x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 25x_4 + 50x_5 + 20x_6 \geq 100 \\ 4x_1 + 9x_2 + 11x_3 + 10x_4 + 9x_5 + 10x_6 \geq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

ISSN: 2617-989X

2− كتابة البرنامج بالشكل المصفوفي:

$$Min: Z = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 & 8 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 20 & 30 & 40 & 40 & 45 & 30 \\ 50 & 30 & 20 & 25 & 50 & 20 \\ 4 & 9 & 11 & 10 & 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 70 \\ 100 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

الفصل الثاني : طرائق حل البرنامج الخطي بيانياً

كلمات مفتاحية :الحل البياني, حل جملة معادلتين.

ملخص الفصل :

يتناول هذا الفصل طريقة حل البرنامج الخطي باستخدام أساليب الرسم البياني و طريقة المربعات الصغرى في حل جملة معادلتين كما يعتمد في حل تلك المعادلات على إيجاد الحل الأمثل للبرنامج الخطي ضمن الشروط الموضوعة في البرنامج.

المخرجات و الأهداف التعليمية :

1- التعرف على طرائق تحويل المتراجحات إلى معادلات و رسم المستقيمات.
2- تحديد منطقة القبول للحل و منطقة الرفض.
3- تحديد الحل الأمثل من نقاط القبول و تحديد قيم الحل.
4- التأكد من الحل بواسطة التعويض في المتراجحات.

مخطط الفصل :

1- مقدمة Introduction
2- حل البرنامج الخطي بيانياً في حال التعظيم. Solve the linear program graphically in the case of Maximum.
3- حل البرنامج الخطي بيانياً في حال التدنئة solve the linear program graphically in the case of Minimum

1- مقدمة:

نعني بحل البرنامج الخطي هو إيجاد قيم المتغيرات التي تجعل دالة الهدف في أفضل قيمة لها مع الاحتفاظ بشرط القيود و عدم تجاوزها و يمكن إيجاد حل البرنامج الخطي بطريقتين الطريقة الأولى و هي الطريقة البيانية أما الطريقة الثانية فهي طريقة السمبليكس أو طريقة الجداول و سنتناول في هذا الفصل الطريقة البيانية في الحل.

الطريقة البيانية في الحل شائعة الاستخدام و بشكل كبير فقط في البرامج التي تحوي على متغيرين فقط و ذلك لاعتمادها على الرسم البياني و الذي يصعب استخدامه في حال كان المتغيرات أكثر من أثنين و يمكننا استخدام الطريقة البيانية في حال التعظيم أو في حال التدنئة.

و يمكن حل المسألة كالتالي :

1- رسم المستقيمات و إيجاد منطقة الحلول الممكنة (المنطقة التي تحقق فيها متغيرات القرار جميع القيود في آن واحد).

2- تحديد نقاط الأركان لمنطقة الحلول الممكنة (إيجاد إحداثيات هذه النقاط)

3- التعويض بنقاط الأركان في دالة الهدف و اختيار النقطة التي تعطي الحل الأمثل (أكبر قيمة لدالة الهدف أو أصغر قيمة).

نظرية: إذا وجد حل أمثل لبرنامج خطي ذي متغيرين فإن هذا الحل يوجد عند أحد رؤوس مضلع منطقة الحل الممكن.

2- حل البرنامج الخطي بيانياً في حال التعظيم:

لحل البرنامج الخطي بالطريقة البيانية في حال التعظيم نتبع الخطوات التالية:

1- نحول كل متراجحات القيود إلى معادلات.

2- نرسم الخطوط المستقيمة لمعادلات الخطوة الأولى على مستقيمين متعامدين و تسمى هذه المستقيمات بالمستقيمات المولدة و هي قد تشكل لنا مضلع متعدد الرؤوس.

3- نحدد منطقة القبول التي تحقق جميع الشروط و هي بالغالب مضلع.

4- نجعل دالة الهدف معدومة و نرسم مستقيمها على نفس المعلم و يمر هذا المستقيم من نقطة المبدأ Δ .

5- نحرك المستقيم Δ باتجاه رؤوس المضلع و بصفة متوازية و النقطة التي تحقق أكبر قيمة للدالة الاقتصادية هي أخر نقطة يصل إليها المستقيم Δ عند سحبه إلى الأعلى و هذه النقطة هي حاصلة من تقاطع عدد من المستقيمات المولدة.

6- نوجد قيم الأزواج المرتبة لهذه النقطة و ذلك إما هندسياً بإنزال شاقول من هذه النقطة على المحور الأفقي فنحصل على قيمة المتغير الأول و نمد من هذه النقطة أيضاً مستقيماً موازياً للمحور الأفقي فيقاطع المحور العمودي عند نقطة هي قيمة المتغير الثاني. أما جبرياً بإيجاد الحل المشترك لمعادلات المستقيمات المتقاطعة فنحصل على قيمة المتغيرين.

7- في حال كان لدينا عدد من النقاط المتقاربة و لم نستطع تحديد النقطة المثلى بدقة نقوم بإيجاد الأزواج المرتبة لكل تلك النقاط و نعوضها في دالة الهدف و نأخذ النقطة التي تعطي أكبر قيمة لها.

8- نعوض قيمة المتغيرين المحصل عليهما في دالة الهدف فنحصل على القيمة العظمى لهذه الدالة.

مثال 2-1

أوجد حل البرنامج التالي باستخدام الطريقة البيانية

$$Max: Z = 4x_1 + 5x_2$$

$$S/C\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 \le 2 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

لإيجاد حل هذا البرنامج نتبع الخطوات التالية :

1- نحول المتراجحات إلى معادلات و ذلك لايجاد المستقيمات المولدة و هي :

$$x_1 + 2x_2 = 4$$
$$2x_1 + 3x_2 = 6$$
$$x_1 = 2$$
$$-x_1 + x_2 = 1$$

2- نرسم هذه المستقيمات على معلم متعامد و لرسمها يكفي أن نجد نقطتين من كل مستقيم و نصل بينهم و هي على الشكل التالي:

المستقبم 1

$x_1 + 2x_2 = 4$	
x_1	x_2
0	2
4	0

المستقيم 2

$2x_1 + 3x_2 = 6$	
x_1	x_2
0	2
3	0

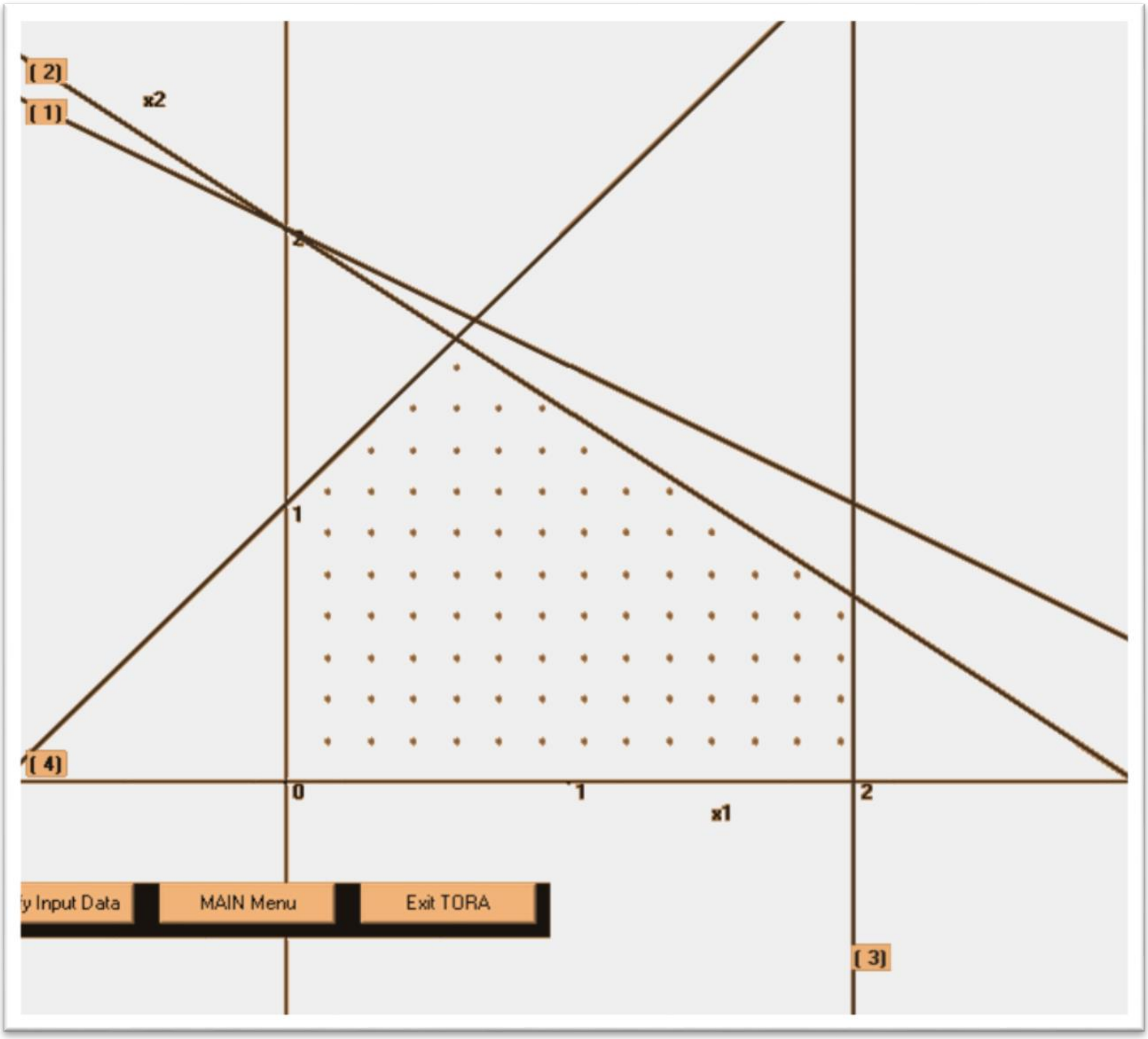
المستقبم 3

$x_1 = 2$	
x_1	x_2
2	0
2	مهما تكن

المستقيم 4

$-x_1 + x_2 = 1$	
x_1	x_2
0	1
-1	0

نرسم الشكل :



شكل 2-1

3- نلاحظ أن نقاط الحل هي خمس نقاط داخل منطقة القبول و هي على التسلسل :

(0,0) و (2,0) و تقاطع المستقيم 2 مع المستقيم 3 , تقاطع المستقيم 4 مع المستقيم 2 و أخيراً النقطة (0,1) .

4- بإيجاد نقاط الحل و تعويضيها في دالة الهدف و إيجاد النقطة التي تحقق أعظم قيمة لدالة الهدف نحصل على الحل أي :

- النقطة الأولى (0,0) تعطي دالة الهدف القيمة 0 .

- النقطة الثانية $(2,0)$ تعطي دالة الهدف القيمة 8 $Z = 4x_1 + 5x_2 = 4 \times 2 = 8$

- النقطة الثالثة عبارة عن تقاطع المستقيمين 2 و 3 بالحل المشترك :

$$2x_1 + 3x_2 = 6$$

$$x_1 = 2$$

نجد $x_1 = 2,\ x_2 = 2/3$ بالتعويض في دالة الهدف :

$$Z = 4x_1 + 5x_2 = 4 \times 2 + 5 \times 2/3 = 34/3 = 11.33$$

- النقطة الرابعة عبارة عن تقاطع المستقيم 2 مع المستقيم 4 و بالحل المشترك :

$$2x_1 + 3x_2 = 6$$

$$-x_1 + x_2 = 1$$

بضرب المعادلة الثانية بـ2 و الجمع $5x_2 = 8,\ \ x_2 = 8/5$ بالتعويض بالمعادلة الثانية نجد :

$x_1 = 3/5$ و بالتعويض في دالة الهدف نجد :

$$Z = 4x_1 + 5x_2 = 4 \times 3/5 + 5 \times 8/5 = 52/5 = 10.4$$

- النقطة الخامسة و هي $(0,1)$ و بالتعويض في دالة الهدف نجد:

$$Z = 4x_1 + 5x_2 = 4 \times 0 + 5 \times 1 = 5$$

نختار من النقاط الخمسة النقطة التي تعطي دالة الهدف القيمة العظمى و هي النقطة

$x_1 = 2,\ x_2 = 2/3,\ \ z = 34/3$ و هو الحل الأمثل نعوض في البرنامج الخطي من أجل التأكد:

$$S/C\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 + 2 \times 2/3 = 10/3 \le 4 \\ 2x_1 + 3x_2 = 2 \times 2 + 3 \times 2/3 = 6 \le 6 \\ x_1 = 2 \le 2 \\ -x_1 + x_2 = -2 + 2/3 = -4/3 \le 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

المتراجحات محققة و شرط عدم السلبية أيضاً محقق و بالتالي هو الحل الأمثل.

3- حل البرنامج الخطي بيانياً في حال التدنئة:

لحل البرنامج الخطي بالطريقة البيانية في حال التدنئة نتبع الخطوات التالية:

1- نحول كل متراجحات القيود إلى معادلات.

2- نرسم الخطوط المستقيمة لمعادلات الخطوة الأولى على مستقيمين متعامدين و تسمى هذه المستقيمات بالمستقيمات المولدة و هي قد تشكل لنا مضلع متعدد الرؤوس.

3- نحدد منطقة القبول التي تحقق جميع الشروط و هي بالغالب توجد على يمين المستقيمات المولدة, و تسمى هذه المنطقة بمنطقة الحلول الممكنة أو حيز الامكان و غالباً ما تكون غير محدودة.

4- نجعل دالة الهدف معدومة و نرسم متستقيمها على نفس المعلم و يمر هذا المستقيم من نقطة المبدأ Δ .

5- نحرك المستقيم Δ باتجاه رؤوس المضلع و بصفة متوازية و النقطة التي تحقق أقل قيمة للدالة الاقتصادية هي أول نقطة يصل إليها المستقيم Δ عند سحبه إلى الأعلى و هذه النقطة هي حاصلة من تقاطع عدد من المستقيمات المولدة.

6- نوجد قيم الأزواج المرتبة لهذه النقطة و ذلك إما هندسياً بإنزال شاقول من هذه النقطة على المحور الأفقي فنحصل على قيمة المتغير الأول و نمد من هذه النقطة أيضاً مستقيماً موازياً للمحور الأفقي فيقاطع المحور العمودي عند نقطة هي قيمة المتغير الثاني. أما جبرياً بإيجاد الحل المشترك لمعادلات المستقيمات المتقاطعة فنحصل على قيمة المتغيرين.

7- في حال كان لدينا عدد من النقاط المتقاربة و لم نستطع تحديد النقطة المثلى بدقة نقوم بإيجاد الأزواج المرتبة لكل تلك النقاط و نعوضها في دالة الهدف و نأخذ النقطة التي تعطي أصغر قيمة لها.

8- نعوض قيمة المتغيرين المحصل عليهما في دالة الهدف فنحصل على القيمة الأدنى لهذه الدالة.

مثال 2-2

أوجد حل البرنامج التالي باستخدام الطريقة البيانية

$$Min: Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$S/C\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

لإيجاد حل هذا البرنامج نتبع الخطوات التالية :

1- نحول المتراجحات إلى معادلات و ذلك لايجاد المستقيمات المولدة و هي :

$$2x_1 + 2x_2 = 4$$
$$x_1 + 2x_2 = 6$$
$$-x_1 + x_2 = 1$$
$$x_1 = 1$$

2- نرسم هذه المستقيمات على معلم متعامد و لرسمها يكفي أن نجد نقطتين من كل مستقيم و نصل بينهم و هي على الشكل التالي:

المستقيم 1

$2x_1 + 2x_2 = 4$	
x_2	x_1
2	0
0	2

المستقيم 2

$x_1 + 2x_2 = 6$	
x_2	x_1
3	0
0	6

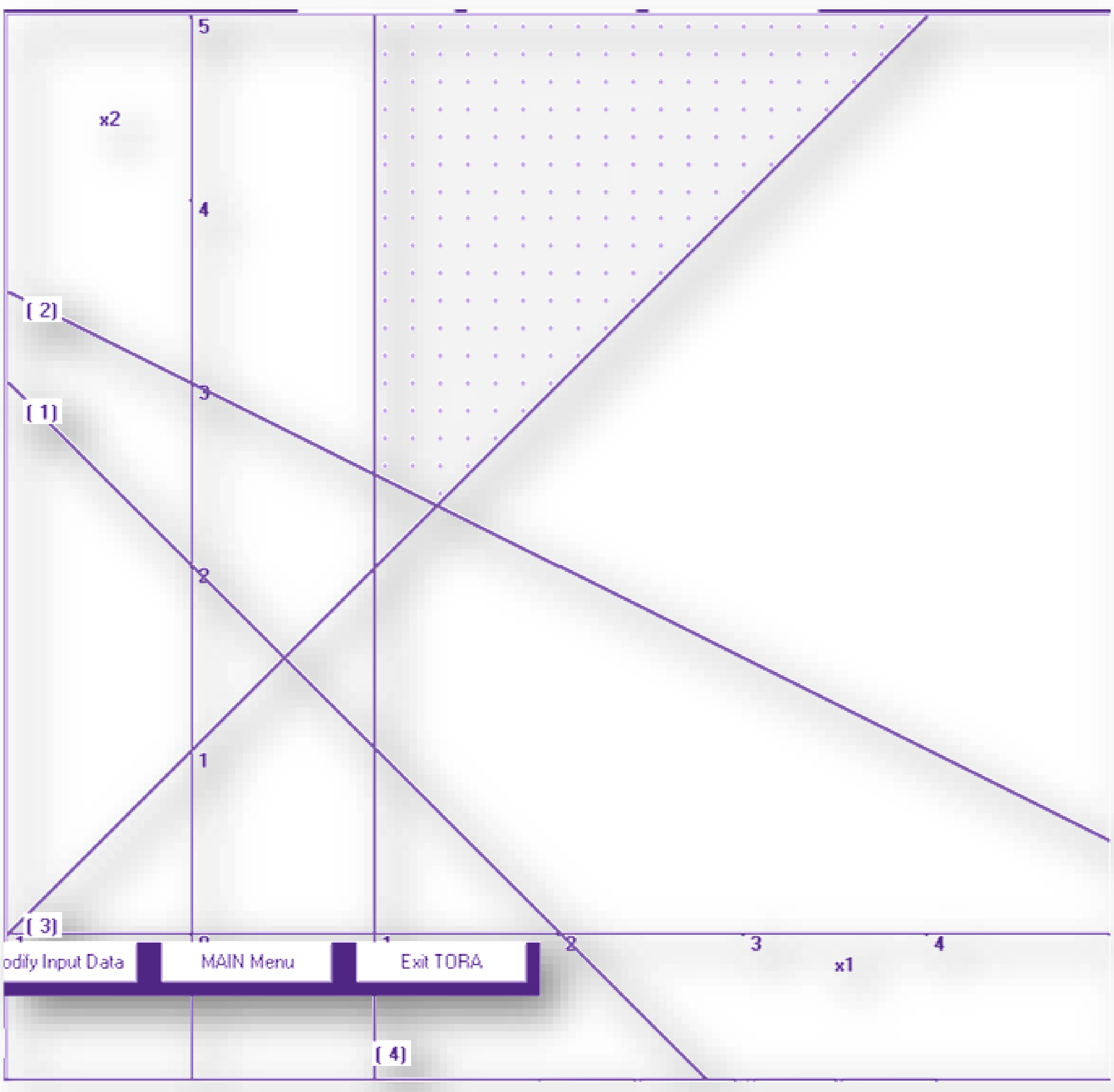
المستقيم 3

$-x_1+x_2=1$	
x_1	x_2
0	1
-1	0

المستقيم 4

$x_1=1$	
x_1	x_2
1	0
1	مهما تكن

نرسم الشكل :



3- نلاحظ أن نقاط الحل هي نقطتين داخل منطقة القبول و هي على التسلسل :

تقاطع المستقيم 2 مع المستقيم 3 , تقاطع المستقيم 4 مع المستقيم 2.

4- بإيجاد نقاط الحل و تعويضيها في دالة الهدف و إيجاد النقطة التي تحقق أدنى قيمة لدالة الهدف

نحصل على الحل أي :

- النقطة الأولى تقاطع المستقيم 2 مع المستقيم 4 بالحل المشترك :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 6 \\ -x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

بالجمع نجد $3x_2 = 7,\ x_2 = 7/3$ و بالتعويض في المعادلة الأولى نجد : $x_1 = 4/3$

بالتعويض في دالة الهدف :

$$Z = 2x_1 + 3x_2 = 2\times 4/3 + 3\times 7/3 = 29/3$$

- النقطة الثانية عبارة عن تقاطع المستقيم 2 مع المستقيم 4 و بالحل المشترك :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 6 \\ x_1 &= 1 \end{aligned}$$

نجد : $x_1 = 1,\quad x_2 = 5/2$ و بالتعويض في دالة الهدف نجد :

$$Z = 2x_1 + 3x_2 = 2\times 1 + 3\times 5/2 = 19/3$$

نختار من النقاط السابقة النقطة التي تعطي دالة الهدف القيمة الادنى و هي النقطة

$x_1 = 1,\ x_2 = 5/2,\ z = 19/3$ و هو الحل الأمثل نعوض في البرنامج الخطي من أجل التأكد:

$$S/C\begin{cases} 2\times 1 + 2\times 5/2 = 7 \geq 4 \\ 1 + 2\times 5/2 = 6 \geq 6 \\ -1 + 5/2 = 1.5 \geq 1 \\ 1 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

المتراجحات محققة و شرط عدم السلبية أيضاً محقق و بالتالي هو الحل الأمثل.

تمارين الفصل الثاني

1- أوجد حل البرنامج التالي باستخدام الطريقة البيانية

$$Min: Z = 5x_1 + 4x_2$$

$$S/C \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2- أوجد حل البرنامج التالي باستخدام الطريقة البيانية

$$Max: Z = 5x_1 + 4x_2$$

$$S/C \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3- أوجد حل البرنامج التالي باستخدام الطريقة البيانية

$$Max: Z = 50x_1 + 100x_2$$

$$S/C \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4- أوجد حل البرنامج التالي باستخدام الطريقة البيانية

$$Min: Z = 40x_1 + 35x_2$$

$$S/C\begin{cases}2x_1 + x_2 \geq 7 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 9 \\ -2x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{cases}$$

الفصل الثالث : حل البرنامج الخطي بطريقة السمبليكس

كلمات مفتاحية :

سمبليكس Simplex, البرمجة الخطية Linear Programming, تقليل التكاليف Expenses ، تعظيم الأرباح Profits , Big M

ملخص الفصل :

يتناول هذا الفصل طرائق حل البرنامج الخطي بالشكل الرياضي طريقة السمبليكس في حال التعظيم و حال سمبليكس Big M في حال التدنئة و تعرض طريقة سيرورة الحل و كيفية استنتاج الجدول النهائي و ايجاد الحل الأمثل و طرائق التأكد من الحل الأمثل. و في نهاية الفصل وجود دراسة لبعض الحالات الخاصة في استخدام مسألة السمبليكس.

المخرجات و الأهداف التعليمية :

1- معرفة طرائق الحل في حال تعظيم الأرباح (الايرادات)
2- معرفة طرائق الحل في حال تدنئة التكاليف.

مخطط الفصل :

1- مقدمة Introduction
2- حل البرنامج في حال التعظيم Solve the linear program by Simplex in the case of Maximum
3- حل البرنامج في حال التدنئة Solve the linear program by Simplex in the case of Minimum

1. مقدمة:

تستخدم طريقة السمبليكس أو ما يعرف بطريقة الجداول بحل البرنامج الخطي سواء كان عدد المتغيرات اثنين أو أكثر و ذلك باستخدام خوارزمية تسمى خوارزمية السمبليكس و للحل نتبع الخطوات التالية :

أولاً : الصيغة القانونية للبرنامج الخطي :

حسب ما سبق لدينا نوعين للصيغة القانونية للبرنامج الخطي و هي :

أ- في حال التعظيم :

و الصيغة القانونية له هي :

أ- دالة الهدف في حال التعظيم .

ب-جميع القيود حالة أصغر أو تساوي عدد ثابتاً و موجباً .

ت-جميع المتغيرات في البرنامج الخطي غير سالبة .

و الشكل المصفوفي القانوني تكتب بالشكل :

$$Max : Z = C'X$$

$$S/C \begin{cases} AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

ب_ في حال التدنئة :

و الصيغة القانونية له هي :

- دالة الهدف في حال تدنئة .
- جميع القيود حالة أكبر أو تساوي عدد ثابتاً و موجباً .
- جميع المتغيرات في البرنامج الخطي غير سالبة .

و الشكل المصفوفي القانوني تكتب بالشكل :

$$Min: Z = C'X$$

$$S/C\begin{cases} AX \geq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

ثانياً : الصيغة المختلطة :

و هي الصيغة التي تكون فيها دالة ا لهدف إما تعظيم أو تدنئة و لكن القيود مختلطة بحيث تحوي متراجحات أكبر من و متراجحات أصغر من و معادلات كل هذه الحالات أو حالتين على الأقل.

مثال 3−1:

البرنامج الخطي التالي مكتوب بالصيغة المختلطة :

$$Max: Z = 7x_1 + 5x_2$$

$$S/C\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

ثالثاً : الصيغة النموذجية :

وفي هذه المرحلة يتم تحويل جميع المتراجحات إلى شكل معادلات و تعتبر هذه الخطوة ضرورية جداً لإيجاد الحل الأساسي للبرنامج بطريقة السمبليكس .

يتم ايجاد الصيغة النموذجية في حال كان القيد متراجحة عبر إدخال متغيرات صورية جديدة على البرنامج بإضافتها أو طرحها حسب الحالة لتتحول القيود إلى معادلات و تسمى هذه المتغيرات بمتغيرات الفجوة و يتم ذلك وفق الحالات التالية:

أ− الحالة الأولى : إذا كان القيد على الشكل :

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

بالتالي يمكننا تحويله إلى معادلة و ذلك بإضافة متغير صوري و يسمى متغير الفجوة و بالتالي تصبح المعادلة بالشكل :

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + x_{n+1}^e = b_m$$

حيث أضيف المغير x_{n+1}^e إلى الطرف الأيسر و قيمته أكبر أو يساوي الصفر فيصبح الطرف الأيسر مساوياً للطرف الأيمن.

مثال 3−2 :

أوجد الصيغة النموذجية للبرنامج التالي :

$$Max: Z = 7x_1 + 5x_2$$

$$S/C\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

نلاحظ أنها جميعها عبارة عن متراجحات و بالتالي يجب إضافة مغيرات الفجوة لكل متراجحة و تحويلها إلى معادلات و تصبح بالشكل:

القيد الأول يكتب بالشكل: $x_1 + 2x_2 + x_3^e = 4$

القيد الثاني بالشكل : $2x_1 + 3x_2 + x_4^e = 6$

القيد الثالث بالشكل : $-x_1 + x_2 + x_5^e = 1$

نلاحظ أنه تم أعطاء متغيرات الفجوة رموز و أرقام متزايدة تختلف عن المتغيرات الحقيقية.

و بالتالي يمكننا كتابة البرنامج الخطي بالشكل القانوني بالشكل :

$$Max: Z = 7x_1 + 5x_2 + 0x_3^e + 0x_4^e + 0x_5^e$$

$$S/C\begin{cases} x_1+2x_2+x_3^e=4 \\ 2x_1+3x_2+x_4^e=6 \\ -x_1+x_2+x_5^e=1 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3^e\ge 0, x_4^e\ge 0, x_5^e\ge 0 \end{cases}$$

و بالتالي فإننا نحصل على مصفوفة أحادية ضمن مصفوفة المعاملات و يمكننا كتابتها من المثال السابق بالشكل:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3^e & x_4^e & x_5^e \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

ب–الحالة الثانية : إذا كان القيد على الشكل :

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+..........+a_{mn}x_n\ge b_m$$

و نشاهد هذه الحالة في أغلب الأحيان مع حالة التدنئة و لتحويلها إلى الشكل النموذجي يجب كتابتها بالشكل:

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+..........+a_{mn}x_n-x_{n+1}^e=b_m$$

و في هذه الحالة لا يمكننا الحصول على مصفوفة أحادية ضمن مصفوفة معاملات القيود و ذلك لأنّ معاملات الفجوة تأخذ إشارة سالبة.فهنا لا بد من الاستعانة بمتحولات جديدة تسمى بالمتحولات الاصطناعية حيث هذه المتحولات يجب أن تكون قيمته معدومة و أمثالها يساوي الواحد (هي فقط متغيرات مساعدة) و نكتبها على الشكل x_j^a و الرمز a جاء من مصطلح Artificial.و هنا يجب إجراء تعديلات على دالة الهدف فمتغيرات الفجوة x_i^e تضاف إلى دالة الهدف و تأخذ معاملات صفرية أما المتغيرات الاصطناعية فتضاف إلى دالة الهدف على أن تأخذ معاملات يفترض أن تكون كبيرة جداً و

نرمز لها بالرمز M و تكون M بإشارة سالبة في حال التعظيم و ذات إشارة موجبة في حالة التدنئة و نقوم بمجموعة من التحويلات حتى تصبح دالة الهدف جاهزة و نأخذ مثال على ذلك:

مثال 3-3:

أوجد الصيغة النموذجية و مصفوفة الحل الأساسي الأول للبرنامج:

$$Max: Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$S/C \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 14 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 18 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

نجري التحويلات اللازمة لإجراء الحل وهي على الشكل التالي:

$$\begin{aligned} & x_1 + 2x_2 - x_3^e + x_4^a = 14 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_5^e = 6 \\ & 3x_1 + 2x_2 - x_6^e + x_7^a = 18 \end{aligned}$$

و دالة الهدف يمكننا كتابتها بالشكل :

$$\begin{aligned} & Max: Z = 3x_1 + 5x_2 + 0x_3^e - Mx_4^a + 0x_5^e + 0x_6^e - Mx_7^a \\ & Max: Z = 3x_1 + 5x_2 - Mx_4^a - Mx_7^a \end{aligned}$$

و من القيدين الأول و الثالث نلاحظ :

$$\begin{aligned} & x_4^a = 14 - x_1 - 2x_2 + x_3^e \\ & x_7^a = 18 - 3x_1 - 2x_2 + x_6^e \end{aligned}$$

و بالتعويض في دالة الهدف نجد:

$$\begin{aligned} & Max: Z = 3x_1 + 5x_2 - M(14 - x_1 - 2x_2 + x_3^e) - M(18 - 3x_1 - 2x_2 + x_6^e) \\ & Max: Z = 3x_1 + 5x_2 - 14M + Mx_1 + 2Mx_2 - Mx_3^e - 18M + 3Mx_1 + 2Mx_2 - Mx_6^e \\ & Max: Z = (3 + 4M)x_1 + (5 + 4M)x_2 - Mx_3^e - Mx_6^e - 32M \end{aligned}$$

و بالتالي نحصل على البرنامج التالي:

$$Max\,Z=(3+4M)x_1+(5+4M)x_2-Mx_3^e-Mx_6^e-32M$$

$$S/C:\begin{cases} x_1+2x_2-x_3^e+x_4^a & =14\\ 2x_1+3x_2 \qquad +x_5^e & =6\\ 3x_1+2x_2 \qquad -x_6^e+x_7^a & =18\end{cases}$$

و بالتالي يمكننا كتابة المصفوفة بالشكل:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

2. إيجاد حل البرنامج الخطي في حالة التعظيم :

لإيجاد حل البرنامج في حالة التعظيم نقوم بدايتاً بتحويل البرنامج إلى الشكل النموذجي ثم نرتب البيانات في جدول يدعى بجدول الحل الأساسي الأول و لنأخذ البرنامج التالي كمثال على ذلك :

ليكن لدينا البرنامج الخطي :

$$Max: Z=c_1x_1+c_2x_2$$

$$S/C\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2\le b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2\le b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2\le b_3\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$$

نكتب البرنامج بشكل معادلات (بالصيغة النموذجية) و يصبح بالشكل :

$$Max: Z=c_1x_1+c_2x_2+0x_3^e+0x_4^e+0x_5^e$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_3^e = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + x_4^e = b_2$$

x_1 x_2 x_4^e x_5^e

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + x_5^e = b_3$$

و بالتالي يمكننا كتابة الجدول الأساسي للحل الأول هو:

x_4^e

x_5^e			x_3^e			B
x_3^e	a_{11}	a_{12}	1	0	0	b_1
	a_{21}	a_{22}	0	1	0	b_2
	a_{31}	a_{32}	0	0	1	b_3
ΔZ	c_1	c_2	0	0	0	0

يدعى العمود الأول من الجدول بمتغيرات الأساس و نلاحظ أن رموز عناصر الأساس مقابلة للقيمة 1 في المصفوفة الأحادية المضافة.العمود الأخير من الجدول يدعى عمود الثوابت و القيمة الأخيرة من عمود الثوابت هي قيمة الدالة .

و في هذا الجدول يكون متغيرات الأساس هي القيم المقابلة لها بالعمود الأخير أي :

$x_3^e = b_1$ و $x_4^e = b_2$ و $x_5^e = b_3$ أما قيمة الدالة الاقتصادية $Z = 0$.

1- نوجد عمود عنصر الارتكاز (الدوران) و هو العمود الذي فيه المتغير يجب أن يذهب إلى متغيرات الأساس حيث يكون هذا المتغير الذي يكون له أكبر معامل في الدالة الاقتصادية و هي أكبر قيمة موجبة في السطر الأخير من الجدول السابق .

2- نختار سطر عنصر الارتكاز (الدوران) و ذلك بقسمة عمود الثوابت على عمود الدوران و اختيار النسبة الموجبة الأدنى بين جميع النسب .

3- عنصر الارتكاز(الدوران) هو تقاطع سطر عنصر الارتكاز مع عمود عنصر الارتكاز.

4- ننشئ جدول حل جديد على الشكل التالي:

1- نستبدل المتغير الذي سيخرج من متغيرات الأساس بالمتغير الذي ستدخل إلى متغيرات الأساس و ذلك فقط في العمود الأول من الجدول السابق أي عمود متغيرات الأساس.

2- نحول عمود الارتكاز إلى عمود جميع عناصره معدومة (أصفار) ما عدا عنصر الارتكاز يأخذ القيمة 1.

3- يتم تحويل سطر عنصر الارتكاز بتقسيم جميع قيمه على عنصر الارتكاز .

4- نقوم بحساب بقية العوامل باستخدام قاعدة المستطيلات و هي على الشكل التالي:

بفرض لدينا الجدول التالي و أن a هو عنصر الارتكاز :

			عمود الارتكاز	
سطر الارتكاز	b		a	
	d		C	

يتم إجراء التحويلة بالشكل التالي :

	b/a		1	

	0		$\frac{a\times d-b\times c}{a}$	

و بالمثل إذا كانت المعطيات بشكل أخر كما يلي :

	d		*c*	
	b		*a*	

يتم إجراء التحويلة بالشكل التالي :

	$\frac{a\times d-b\times c}{a}$		*0*	
	b/a		*1*	

5- و نستمر في هذه الإجراءات و تحويل الجدول و ذلك بالعودة إلى الخطوة رقم 1 و هكذا حتى يصبح السطر الأخير من الجدول الأساسي جميع قيمه سالبة أو معدومة و بالتالي نكون قد حصلنا على الحل الأمثل و هي أن قيمة متغيرات الأساس تساوي القيم الموجودة في عمود الثوابت و أما قيمة الدالة الاقتصادية فهي القيمة الأخيرة في عمود الثوابت و لكن تأخذ بالقيمة المطلقة.

مثال 3-4 :

أوجد حل البرنامج الخطي التالي:

$$Max: Z = 3x_1 + 4x_2$$

$$S/C \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

نكتب البرنامج بشكل معادلات (بالصيغة النموذجية) و يصبح بالشكل :

$$Max: Z = 3x_1 + 4x_2 + 0x_3^e + 0x_4^e + 0x_5^e$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3^e = 5$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4^e = 6$$

$$x_1 + x_5^e = 3$$

و بالتالي يمكننا كتابة الجدول الأساسي للحل الأول هو:

x_5^e			x_3^e			B
x_3^e	2	3	1	0	0	5
	1	2	0	1	0	**6**
	1	0	0	0	1	3
ΔZ	3	4	0	0	0	0

1- عمود عنصر الارتكاز (الدوران) هو العمود الذي فيه المتغير يجب أن يذهب إلى متغيرات الأساس حيث يكون هذا المتغير الذي يكون له أكبر معامل في الدالة الاقتصادية و هو الرقم 4 (باللون الأحمر).

2− نختار سطر عنصر الارتكاز (الدوران) و ذلك بقسمة عمود الثوابت على عمود الدوران و

اختيار النسبة الموجبة الأدنى بين جميع النسب وهي (5/3) (اللون الأحمر).

x_2

3− عنصر الارتكاز هو تقاطع سطر عنصر الارتكاز مع عمود عنصر الارتكاز (القيمة 3).

بناءً عليه المتغير الذي يخرج من متغيرات الأساس هو x_3^e و المتغير الجديد الداخل إلى

متغيرات الأساس هو .

نقسم سطر الارتكاز على عنصر الارتكاز وهو 3 .

أما عمود الارتكاز فجميع قيمه معدومة (أصفار) ما عدا عنصر الارتكاز يأخذ القيمة 1.

بقية المتغيرات الموجودة ضمن متغيرات الأساس فتبقى على ما هي عليه أحادية .

بقيت العناصر تحسب بطريقة المستطيلات كما تم ذكره في الفقرة 4 من القسم النظري.

على سبيل المثال الرقم 6 في عمود الثوابت يصبح :

$$\frac{a\times d-b\times c}{a}=\frac{6\times 3-5\times 2}{3}=\frac{8}{3}$$

و القيمة 0 للدالة الاقتصادية تصبح :

$$\frac{a\times d-b\times c}{a}=\frac{0\times 3-5\times 4}{3}=\frac{-20}{3}$$

و هكذا لبقية العناصر.

x_1 x_2 x_4^e x_5^e

x_2

ننشئ جدول حل جديد على الشكل التالي:

			x_3^e			B
	2/3	1	1/3	0	0	5/3

x_5^e

	1/3	0	−2/3	1	0	**8/3**
	1	0	0	0	1	3
ΔZ	1/3	0	−4/3	0	0	−20/3

من الملاحظ تحسن قيمة الدالة الاقتصادية من 0 إلى 20/3 حيث تأخذ بالقيمة المطلقة و أن قيمة متغيرات الأساس هي : $x_2 = 5/3; x_4^e = 8/3; x_5^e = 3$ أما باقي المتغيرات فقيمتها تساوي للصفر $x_1 = x_3^e = 0$. ويمكننا التأكد من الدالة الاقتصادية بالتعويض فيها :

$$Z = 3\times 0 + 4\times \frac{5}{3} + 0\times 0 + 0\times \frac{8}{3} + 0\times 3 = \frac{20}{3}$$

و لكن هذا ليس الحل الأمثل و ذلك لوجد قيم أكبر من الصفر في سطر ΔZ لذلك نعاود الحل مرة أخرى باختيار عنصر الارتكاز و الذي هو 2/3.

و نجري تحويلات مشابهة لتحويلات المرحلة السابقة :

- نقسم سطر الارتكاز على عنصر الارتكاز
- نحول عمود عنصر الارتكاز إلى عمود أحادي
- نبقي بقية أعمدة متغيرات الأساس أحادية
- نجري تحويلات بقية العناصر بطريقة المستطيلات

نحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^e	x_5^e	B
x_1	1	3/2	1/2	0	0	5/2
x_4^e	0	1/2	−1/2	1	0	**7/2**

	0	−3/2	−1/2	0	1	½
ΔZ	0	−1/2	−3/2	0	0	−15/2

من الملاحظ أن جميع المعاملات الموجودة في الدالة الاقتصادية ΔZ سالبة و بالتالي وصلنا للحل الأمثل و هو :

$$x_1 = 5/2$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3^e = 0 \qquad\qquad Z = 7.5$$
$$x_4^e = 7/2$$
$$x_5^e = 1/2$$

التأكد من الحل :

$$Z = 3\times\frac{5}{2} + 4\times 0 = 7.5$$ محققة

$$S/C\begin{cases} 2(5/2)+3(0)=5\le 5 \\ 5/2+2(0)=5/2\le 6 \\ 2.5\le 3 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$ جميع الشروط محققة

و بالتالي فهو الحل الأمثل.

و لكن هذه القيم تحقق القيد الأول تماماً أما القيد الثاني و الثالث فهنالك طاقة عاطلة قيمتها 5.3 في القيد الثاني و 0.5 في القيد الثالث و هذا ما عبر عنها متغيرات الفجوة.

مثال 3−5 :

أوجد حل البرنامج الخطي التالي:

$$Max: Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$S/C\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

الحل:

نكتب البرنامج بشكل معادلات (بالصيغة النموذجية) و يصبح بالشكل :

$$Max: Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 0x_4^e + 0x_5^e$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4^e = 6$$

x_1 x_2 x_3 x_4^e x_5^e

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5^e = 4$$

x_4^e

و بالتالي يمكننا كتابة الجدول الأساسي للحل الأول هو:

x_5^e

						B
	2	2	3	1	0	6
	1	2	1	0	1	4
ΔZ	2	4	3	0	0	0

بعد أن تم تحديد عنصر الدوران و هو 2 نذهب إلى الجدول التالي للحل :

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^e	B
x_4^e	1	0	2	1	-1	2

	0.5 x_1	1 x_2	0.5 x_3	0 x_4^e	0.5 x_5^e	2
ΔZ	0	0	1	0	-2	-8

x_3

بعد أن تم تحديد عنصر الدوران و هو 2 نذهب إلى الجدول التالي للحل :

x_2						B
	0.5	0	1	0.5	-0.5	1
	0.25	1	0	-0.25	0.75	1.5
ΔZ	-0.5	0	0	-0.5	-1.5	-9

وصلنا للحل الأمثل و هو :

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 1.5$$
$$x_3 = 1 \qquad Z = 9$$
$$x_4^e = 0$$
$$x_5^e = 0$$

التأكد من الحل :

$$Z = 2(0) + 4(1.5) + 3(1) = 9$$ محققة

$$2(0) + 2(1.5) + 3(1) = 6 \leq 6$$
$$0 + 2(1.5) + 1 = 4 \leq 4$$ جميع الشروط محققة

و بالتالي فهو الحل الأمثل.

و هذه القيم تحقق القيد الأول و القيد الثاني و بالتالي لا يوجد طاقة عاطلة.

3. إيجاد حل البرنامج الخطي في حال التدنئة:

لإيجاد الحل بطريقة السمبليكس نتبع الخطوات التالية :

- نكتب الصيغة النموذجية للبرنامج و فق المصفوفة الأحادية و في الغالب تكون القيود أكبر أو تساوي لذلك نستخدم إما متغيرات الفجوة أو المتغيرات الصناعية حسب القيود.
- بترتب القيم في جدول يسمى جدول الأساس الاول بحيث تكون متغيرات الفجوة هي متغيرات الاساس في حال كانت معاملاتها تساوي $+1$ أو تكون المتغيرات الاصطناعية هي المتغيرات الاساس و هي الحالة الأكثر مصادفة أما المتغيرات الحقيقية فتكون خارج متغيرات الاساس وقيمة دالة الهدف معدومة و يجب إدخال تحويلات عليها لإخراج المتغيرات الاصطناعية.
- ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي :

ليكن لدينا البرنامج الخطي :

$$Min: Z = c_1x_1 + c_2x_2$$

$$S/C \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \geq b_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

نكتب البرنامج بشكل معادلات (بالصيغة النموذجية) و يصبح بالشكل :

$$Max: Z = c_1x_1 + c_2x_2 + 0x_3^e + Mx_4^a + 0x_5^e + Mx_6^a + 0x_7^e + Mx_8^a$$

ولكن :

$$x_4^a = b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - x_3^e)$$
$$x_6^a = b_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - x_5^e)$$
$$x_8^a = b_3 - (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 - x_7^e)$$

و بالتعويض في الدالة الاقتصادية :

$$Max: Z = c_1x_1 + c_2x_2 + 0x_3^e + Mx_4^a + 0x_5^e + Mx_6^a + 0x_7^e + Mx_8^a$$

و الاختصار نجد:

$$Max: Z = [c_1 - (a_{11} + a_{21} + a_{31})M]x_1 + [c_2 - (a_{12} + a_{22} + a_{32})M]x_2 +$$
$$Mx_3^e + M_5^e + M_7^e + M(b_1 + b_2 + b_3)$$

أما القيود فتصبح بالشكل :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - x_3^e + x_4^a = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - x_5^e + x_6^a = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 - x_7^e + x_8^a = b_3$$
$$x_1, x_2, x_3^e, x_4^a, x_5^e, x_6^a, x_7^e, x_8^a \geq 0$$

x_1 x_2 x_5^e

و بالتالي يمكننا كتابة الجدول الأساسي للحل الأول هو:

			x_3^e	x_4^a		x_6^a	x_7^e	x_8^a	B
x_4^a	a_{11}	a_{12}	-1	1	0	0	0	0	b_1
x_6^a	a_{21}	a_{22}	0	0	-1	1	0	0	b_2
x_8^a	a_{31}	a_{32}	0	0	0	0	-1	1	b_3
ΔZ	$c_1 - (a_{11} + a_{21} + a_{31})M$	$c_2 - (a_{12} + a_{22} + a_{32})M$	M	0	M	0	M	0	$-(b_1 + b_2 + b_3)M$

نلاحظ أن متغيرات الأساس هي المتغيرات الاصطناعية انطلاقاً من هذا الجدول :

و في هذا الجدول يكون متغيرات الأساس هي القيم المقابلة لها بالعمود الأخير أي :

$x_4^a = b_1$ و $x_6^a = b_2$ و $x_8^a = b_3$.

- نوجد عمود عنصر الارتكاز (الدوران) و هو العمود الذي فيه القيمة أصغر قيمة سالبة في الدالة الاقتصادية و هي أصغر قيمة سالبة في السطر الأخير من الجدول السابق .
- نختار سطر عنصر الارتكاز (الدوران) و ذلك بقسمة عمود الثوابت على عمود الدوران و اختيار النسبة الموجبة الأدنى بين جميع النسب .
- عنصر الارتكاز هو تقاطع سطر عنصر الارتكاز مع عمود عنصر الارتكاز.
- ننشئ جدول حل جديد على الشكل التالي:
- نستبدل المتغير الذي سيخرج من متغيرات الأساس بالمتغير الذي ستدخل إلى متغيرات الأساس و ذلك فقط في العمود الأول من الجدول السابق أي عمود متغيرات الأساس.
- نحول عمود الارتكاز إلى عمود جميع عناصره معدومة (أصفار) ما عدا عنصر الارتكاز يأخذ القيمة 1.
- يتم تحويل سطر عنصر الارتكاز بتقسيم جميع قيمه على عنصر الارتكاز .
- يتم إخراج العمود للمتغير الاصطناعي الذي تم إخراجه من متغيرات الأساس و لا يتم حسابه.
- نقوم بحساب بقية العوامل باستخدام قاعدة المستطيلات و هي على الشكل التالي:

بفرض لدينا الجدول التالي و أن a هو عنصر الارتكاز :

	عمود الارتكاز			
	a		b	سطر الارتكاز
	c		d	

يتم إجراء التحويلة بالشكل التالي :

	1		b/a	
	0		$\frac{a\times d-b\times c}{a}$	

و نستمر في هذه الإجراءات و تحويل الجدول حتى يصبح السطر الأخير من الجدول الأساسي جميع قيمه موجبة أو معدومة و بالتالي نكون قد حصلنا على الحل الأمثل و هي أن قيمة متغيرات الأساس تساوي القيم الموجودة في عمود الثوابت و أما قيمة الدالة الاقتصادية فهي القيمة الأخيرة في عمود الثوابت و لكن تأخذ بالقيمة المطلقة.

مثال 3−6 :

أوجد حل البرنامج الخطي التالي:

$$Min: Z = 10x_1 + 30x_2$$

$$S/C\begin{cases}3x_1+2x_2\geq 6\\6x_1+x_2\geq 6\\x_2\geq 2\\x_1\geq 0,x_2\geq 0\end{cases}$$

نكتب الصيغة النموذجية لكل من الدالة الاقتصادية و القيود :

$$S/C\begin{cases}3x_1+2x_2-x_3^e+x_4^a=6\\6x_1+x_2-x_5^e+x_6^a=6\\x_2-x_7^e+x_8^a=2\\x_1,x_2,x_3^e,x_4^a,x_5^e,x_6^a,x_7^e,x_8^a\geq 0\end{cases}$$

$$Min:Z=10x_1+30x_2+Mx_4^a+Mx_6^a+Mx_8^a$$

لكن

$$x_4^a=6-(3x_1+2x_2-x_3^e)$$
$$x_6^a=6-(6x_1+x_2-x_5^e)$$
$$x_8^a=2-(x_2-x_7^e)$$

بالتعويض نجد:

$$Min:Z=(10-9M)x_1+(30-4M)x_2+Mx_3^e+Mx_5^e+Mx_7^e+14M$$

و بجعل دالة الهدف مساوية للصفر نجد:

$$(10-9M)x_1+(30-4M)x_2+Mx_3^e+Mx_5^e+Mx_7^e=-14M$$

و بالتالي فإن جدول الحل الاساسي الأول هو:

			x_3^e	x_4^a		x_6^a	x_7^e	x_8^a	B
x_4^a	*3*	2	-1	1	0	0	0	0	6
x_6^a	*6*	x_1 1	0	0	-1	1	0	0	***6***
x_8^a	0	1	0	0	0	0	−1	1	2
ΔZ	*10−9M*	30-4M	M	0	M	0	M	0	−14M

نختار عمود الدوران و هو أصغر قيمة سالبة و بالتالي هو عمود المتغير و نحدد سطر الدوران

بقسمة عمود الثوابت على عمود الدوران و اختيار أصغر قيمة موجبة بجد أن متغير الأساس x_6^a هو

سطر الدوران و بالتالي فإن القيمة 6 هي عنصر الدوران.

x_1

و بالعودة و ايجاد القيم و ذلك بقسم سطر الدوران على عنصر الدوران و وضع عمود الدوران بالقيمة

الأحادية أي عنصر الدوران يساوي الواحد و باقي القيم في عمود الدوران تكون معدومة و إخراج المتغير

x_1 x_2 x_5^e

الاصطناعية x_6^a من متغيرات الاساس و ادخال المتغير بدلاً منه. كما نستخدام طريقة المستطيلات

لايجاد باقي القيم نجد الجدول التالي : x_1

			x_3^e	x_4^a		x_6^a	x_7^e	x_8^a	B
x_4^a	0	*3/2*	-1	1	1/ 2	/	0	0	3
	1	*1/6*	0	0	-1/ 6	/	0	0	**1**
x_8^a	0	1 x_2	0	0	0	/	−1	1	2
ΔZ	0	*(170−15M)/6*	M	0	(10-3M)/6	/	M	0	−5M−10

نلاحظ أن هذا الجدول لم يعطي الحل الأمثل و ذلك لوجود قيم سالبة في الدالة الاقتصادية لذلك نختار

عمود الدوران و هو أصغر قيمة سالبة و بالتالي هو عمود المتغير و نحدد سطر الارتكاز (الدوران)

بقسمة عمود الثوابت على عمود الدوران و اختيار أصغر قيمة موجبة بجد أن متغير الأساس x_4^a هو

سطر الارتكاز و بالتالي فإن القيمة *3/2* هي عنصر الارتكاز. و بالعودة و ايجاد القيم و ذلك بقسم سطر
x_2

الدوران على عنصر الدوران و وضع عمود الدوران بالقيمة الأحادية أي عنصر الدوران يساوي الواحد و
x_5^e x_2 x_1

باقي القيم في عمود الدوران تكون معدومة و إخراج المتغير الاصطناعية x_4^a من متغيرات الاساس و x_2

ادخال المتغير بدلاً منه. كما نستخدام طريقة المستطيلات لايجاد باقي القيم نجد الجدول التالي : x_1

			x_3^e	x_4^a		x_6^a	x_7^e	x_8^a	B
	0	1	-2/3	/	1/3	/	0	0	2
	1	0	1/9	/	-2/9	/	0	0	**2/3**
x_8^a	0	0	2/3	/	-1/3	/	−1	1	0
ΔZ	0	0	(170-6M)/9	/	(70-3M)/9	/	M	0	−200/3

و بنفس المنهجية نلاحظ أن عمود الارتكاز (الدوران) هو x_3^e أما سطر الارتكاز (الدوران) فهو سطر

المتغير الأساس x_8^a و بالتالي فإن عنصر الارتكاز (الدوران) هو $2/3$.
x_2

و بالعودة و ايجاد القيم و ذلك بقسم سطر الدوران على عنصر الدوران و وضع عمود الدوران بالقيمة

الأحادية أي عنصر الدوران يساوي الواحد و باقي القيم في عمود الدوران تكون معدومة و إخراج المتغير
x_5^e x_2 x_1

الاصطناعية x_4^a من متغيرات الاساس و ادخال المتغير بدلاً منه. كما نستخدام طريقة المستطيلات x_2

لايجاد باقي القيم نجد الجدول التالي : x_1

			x_3^e	x_4^a		x_6^a	x_7^e	x_8^a	B
	0	1	0	/	0	/	−1	/	2
	1	0	0	/	-1/6	/	1/6	/	2/3
x_8^a	0	0	1	/	-1/2	/	−3/2	/	0
ΔZ	0	0	0	/	5/3	/	85/3	/	−200/3

و هنا نلاحظ أن عناصر السطر الأخير جميع غير سالبة و بالتالي نكون قد حصلنا على الحل الأمثل و بالتالي فإن الحل هو :

$$x_1 = 2/3$$
$$x_2 = 2$$
$$Z = 200/3$$

التأكد من الحل :

محققة $$Z = 10(2/3) + 30(2) = 200/3$$

محققة $$S/C \begin{cases} 3(2/3) + 2(3) = 6 \geq 6 \\ 6(2/3) + 2 = 6 \geq 6 \\ 2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- حالات خاصة للمتغيرات:

في بعض الحالات لا يشترط عدم السلبية في المتحولات غير أن طريقة الحل بالسمبلكس تشترط أن تكون جميع المتغيرات غير سالبة لذا سنقوم بالتحايل الرياضي في هذه الحالة فعلى سبيل المثال:

1- إذا كان أحد المتغيرات أقل أو يساوي الصفر:

إذا كان $x_i \leq 0$ في هذه الحالة نفرض $x_i = -x_i'$ و بالتالي $x_i' \geq 0$ يتم تعويض x_i' بالبرنامج الخطي و يتم حل البرنامج و بعد الحل نحول المتغير x_i' إلى أصله.

مثال 3-7 :

أوجد حل البرنامج الخطي :

$$Max: Z = 3x_1 - 4x_2$$

$$S/C\begin{cases}2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0\end{cases}$$

الحل:

بما أن $x_2 \leq 0$ نجري التحويل الرياضي $x_2 = -x_2'$ و بالتالي يصبح البرنامج الرياضي بالشكل :

$$Max : Z = 3x_1 + 4x_2'$$

$$S/C\begin{cases}2x_1 - x_2' \leq 3 \\ x_1 + x_2' \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2' \geq 0\end{cases}$$

نكتب البرنامج بشكل معادلات (بالصيغة النموذجية) و يصبح بالشكل :

$$Max : Z = 3x_1 + 4x_2' + 0x_3^e + 0x_4^e$$

$$2x_1 - x_2' + x_3^e = 3$$

x_1 x_4^e

$$x_1 + x_2' + x_4^e = 4$$

و بالتالي يمكننا كتابة الجدول الأساسي للحل الأول هو:

x_4^e

		x_2'	x_3^e		B
x_3^e	2	1−	1	0	3
	1	1	0	1	4
ΔZ	3	4	0	0	0

نلاحظ أن عنصر الارتكاز (الدوران) هو 1 و بالتالي :

		x_2'	x_3^e		B
x_3^e	3	0	1	1	7
x_2'	1	1	0	1	4
ΔZ	-1	0	0	-4	-16

و بما أن السطر الأخير (سطر الدالة) جميع قيمه أقل أو تساوي الصفر فقد حصلنا على الحل الأمثل:

$$x_1 = 0$$
$$x_2' = 4$$
$$x_3^e = 4$$
$$x_4^e = 0$$
$$Z = 16$$

و بالعودة للبرنامج الأساسي نجد الحل :

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = -4$$
$$x_3^e = 4$$
$$x_4^e = 0$$
$$Z = 16$$

نعوض في معادلات البرنامج للتأكد من الحل:

$$Z = 3x_1 - 4x_2 = 3(0) - 4(-4) = 16$$ محققة

$$S/C \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2(0) - 4 = -4 \le 3 \\ x_1 - x_2 = 0 - (-4) = 4 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \le 0 \end{cases}$$ محققة

2- إذا كان أحد المتغيرات حراً:

إذا كان $x_i \in [-\infty, +\infty]$ في هذه الحالة نفرض $x_i = x_i' - x_i''$ و بالتالي $x_i', x_i'' \ge 0$ حيث :

- إذا كان x_i موجباً فإن : $x_i' > x_i''$

- إذا كان x_i سالباً فإن : $x'_i < x''_i$
- إذا كان x_i صفراً فإن : $x'_i = x''_i$

يتم تعويض $x_i = x'_i - x''_i$ بالبرنامج الخطي و يتم حل البرنامج و بعد الحل نرد المتغير x'_i و x''_iإلى أصله.

مثال 3-8 :

أوجد حل البرنامج الخطي :

$$Max: Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$S/C\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1 \geq 0, \forall \quad x_2 \end{cases}$$

الحل:

بما أن x_2 حراً نجري التحويل الرياضي $x_2 = x'_2 - x''_2$ و بالتالي يصبح البرنامج الرياضي بالشكل :

$$Max: Z = 3x_1 + 5x'_2 - 5x''_2$$

$$S/C\begin{cases} 2x_1 + 2x'_2 - 2x''_2 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x'_2 - 3x''_2 \leq 9 \\ x_1 \geq 0, x'_2 \geq 0, x''_2 \geq 0 \end{cases}$$

نكتب البرنامج بشكل معادلات (بالصيغة النموذجية) و يصبح بالشكل :

$$Max: Z = 3x_1 + 5x'_2 - 5x''_2 + 0x_3^e + 0x_4^e$$

$$2x_1 + 2x'_2 - 2x''_2 + x_3^e = 4$$
$$2x_1 + 3x'_2 - 3x''_2 + x_4^e = 9$$

x_1 x_4^e

و بالتالي يمكننا كتابة الجدول الأساسي للحل الأول هو:

x_4^e

		x_2'	x_2''	x_3^e		B
x_3^e	2	2	-2	1	0	4
	2 x_1	3	-3	0	1 x_4^e	9
ΔZ	3	5	-5	0	0	0

نلاحظ أن عنصر الارتكاز (الدوران) هو 2 و بالتالي :

x_4^e

		x_2'	x_2''	x_3^e		B
x_2'	1	1	-1	$1/2$	0	2
	-1	0	0	$-3/2$	1	3
ΔZ	-2	0	0	$-5/2$	0	-10

و بما أن السطر الأخير (سطر الدالة) جميع قيمه أقل أو تساوي الصفر فقد حصلنا على الحل الأمثل:

$$x_1 = 0$$
$$x_2' = 2$$
$$x_2'' = 0$$
$$x_3^e = 0$$
$$x_4^e = 3$$
$$Z = 10$$

و بالعودة للبرنامج الأساسي نجد الحل :

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3^e = 0$$
$$x_4^e = 3$$
$$Z = 10$$

نعوض في معادلات البرنامج للتأكد من الحل:

$$Z = 3x_1 + 5x_2 = 3(0) + 5(2) = 10$$ محققة

$$S/C\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 2(0) + 2(2) = 4 \le 4 \\ 2x_1 + 3x_2 = 2(0) + 3(2) = 6 \le 9 \\ x_1 \ge 0, \forall \ \ x_2 \end{cases}$$ محققة

- **حالات خاصة:**

1- **انعدام وجود حل أمثل** : في حال الوصول للجدول النهائي للحل و كانت جميع القيم أقل أو تساوي الصفر في حال التعظيم أو أكبر أو تساوي الصفر في حال التدنئة و لا يزال هنالك متغير اصطناعي واحد على الأقل في متغيرات الأساس هذا يعني وجود خطأ في البرنامج الخطي.

2- **عدم محدودية الحل:** و تحدث هذه الحالة في حال عمود الارتكاز (الدوران) جميع عناصره أقل أو تساوي الصفر لإن الخوارزمية تشترط أن يكون سطر الدوران هو أصغر نسبة موجبة من قسمة عمود الثوابت على عمود الدوران

3- **حالة الانحلال** : و تحدث هذه الحالة عندما يوجد عنصرين قابلين للدخول لمتغيرات الاساس و هنا نختار واحد لا على التعيين ليمثل سطر الدوران.

الفصل الرابع: البرنامج المرافق أو الثنائي

Linear Programming :Duality

كلمات مفتاحية : البرنامج المرافق Duality

ملخص الفصل :

يتناول هذا الفصل طرائق إيجاد البرنامج المرافق من البرنامج الأولي و طرائق استنتاج الحل للبرنامج المرافق من الجدول النهائي للبرنامج الأولي .

المخرجات و الأهداف التعليمية :

1- معرفة طرائق كتابة البرنامج المرافق.

2- معرفة طرائق استنتاج الحل للبرنامج المرافق من الجدول النهائي للبرنامج الأولي.

مخطط الفصل :

1- البرنامج المرافق المماثل. Symmetric Duals

2- البرنامج المرافق غير المماثل. Unsymmetric Duals

البرنامج المرافق أو الثنائي

يرتبط كل برنامج خطي و الذي يحوي المتغيرات $x_1, x_2, \dots\dots\dots, x_n$ ببرنامج خطي أخر يدعى البرنامج المرافق أو الثنائي و هذا البرنامج يحتوي على المتغيرات $y_1, y_2, \dots\dots\dots, y_m$ (حيث m هي عدد القيود في البرنامج الأصل) عندئذٍ يسمى البرنامج الأصل البرنامج الأولي و البرنامج المشتق منه البرنامج المرافق أو الثنائي. يوجد حالتين البرنامج المرافق المماثل و البرنامج المرافق الغير مماثل .

1. البرنامج المرافق المماثل:

إذا كان لدينا البرنامج الخطي الأولي بصيغته المصفوفية على الشكل :

$$Max : Z = C'X$$

$$S/C \begin{cases} AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

فإن البرنامج المرافق يمكننا كتابته بالشكل :

$$Min : Z = B'Y$$

$$S/C \begin{cases} A'Y \geq C \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

اما إذا كان لدينا البرنامج الخطي الأولي بصيغته المصفوفية على الشكل :

$$Min : Z = C'X$$

$$S/C \begin{cases} AX \geq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

فإن البرنامج المرافق يمكننا كتابته بالشكل :

$$Max : Z = B'Y$$

$$S/C \begin{cases} A'Y \leq C \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

في هذه الحالة يمكننا صياغة النموذج بالشكل التالي :

	x_1	x_2	x_3	.	.	x_n	$\geq$	0
y_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	.	.	a_{1n}	$\leq$	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	.	.	a_{2n}	$\leq$	b_2
y_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	.	.	a_{3n}	$\leq$	b_3
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
y_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	.	.	a_{mn}	$\leq$	b_m
$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\geq$	.	.	$\geq$		**Min**
0	c_1	c_2	c_3	.	.	c_n	Max	

و بالتالي اعتماداً على الجدول السابق يمكننا كتابة البرنامج الأولي:

$$Max: Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$S/C\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{3n}x_n \leq b_3 \\ \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

و بالتالي يصبح البرنامج المرافق بالشكل :

$$Min: Z = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m$$

$$S/C\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots + a_{m3}y_m \geq c_3 \\ \dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots\dots \qquad \dots\dots \\ \dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots\dots \qquad \dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots + a_{mn}y_m \geq c_n \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots\dots\dots\dots, y_m \geq 0 \end{cases}$$

و بالتالي فإن الحل الأمثل للبرنامجين يمكن تلخيصها بالجدول التالي:

متغيرات الفجوة	المتغيرات الرئيسية	البرنامج الأولي
$x^e_{n+1}, x^e_{n+2}, \dots\dots\dots\dots, x^e_{n+m}$	$x_1, x_2, \dots\dots\dots\dots, x_n$	
$y_1, y_2, \dots\dots\dots\dots\dots, y_m$	$y^e_{m+1}, y^e_{m+2}, \dots\dots\dots\dots, y^e_{m+n}$	البرنامج المرافق
المتغيرات الرئيسية	متغيرات الفجوة	

أمثلة محلولة :

مثال 4-1 :

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي :

$$Max : Z = 7x_1 + 5x_2$$

$$S/C\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

أكتب البرنامج المرافق ؟

الحل:

البرنامج المرافق :

$$Min: Z = 4y_1 + 6y_2 + y_3$$

$$S/C\begin{cases} y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 7 \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 5 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

مثال 4−2 :

أكتب البرنامج المرافق ثم أوجد حل كلاً من البرنامج الأولي و المرافق .

$$Max: Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$S/C\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

البرنامج المرافق :

$$Min: Z = 6y_1 + 4y_2$$

$$S/C\begin{cases} 2y_1 + y_2 \geq 2 \\ 2y_1 + 2y_2 \geq 4 \\ 3y_1 + y_2 \geq 3 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

حل البرنامج الأولي :

وجدنا في الفصل الثالث حل البرنامج الأول و الجدول النهائي كان لدينا :

x_3

x_2

						B
	0.5	0	1	0.5	−0.5	1
	0.25	1	0	−0.25	0.75	1.5
ΔZ	−0.5	0	0	−0.5	−1.5	−9

وصلنا للحل الأمثل و هو :

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 1.5$$
$$x_3 = 1 \qquad Z = 9$$
$$x_4^e = 0$$
$$x_5^e = 0$$

حل البرنامج المرافق :

$$Min: Z = 6y_1 + 4y_2$$

$$S/C\begin{cases} 2y_1 + y_2 \geq 2 \\ 2y_1 + 2y_2 \geq 4 \\ 3y_1 + y_2 \geq 3 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

5- نحول المتراجحات إلى معادلات و ذلك لايجاد المستقيمات المولدة و هي :

$$2y_1 + y_2 = 2$$
$$2y_1 + 2y_2 = 4$$
$$3y_1 + y_2 = 3$$

6- نرسم هذه المستقيمات على معلم متعامد و لرسمها يكفي أن نجد نقطتين من كل مستقيم و نصل بينهم و هي على الشكل التالي:

المستقبم 1

$2y_1 + y_2 = 2$	
y_1	y_2
0	2
1	0

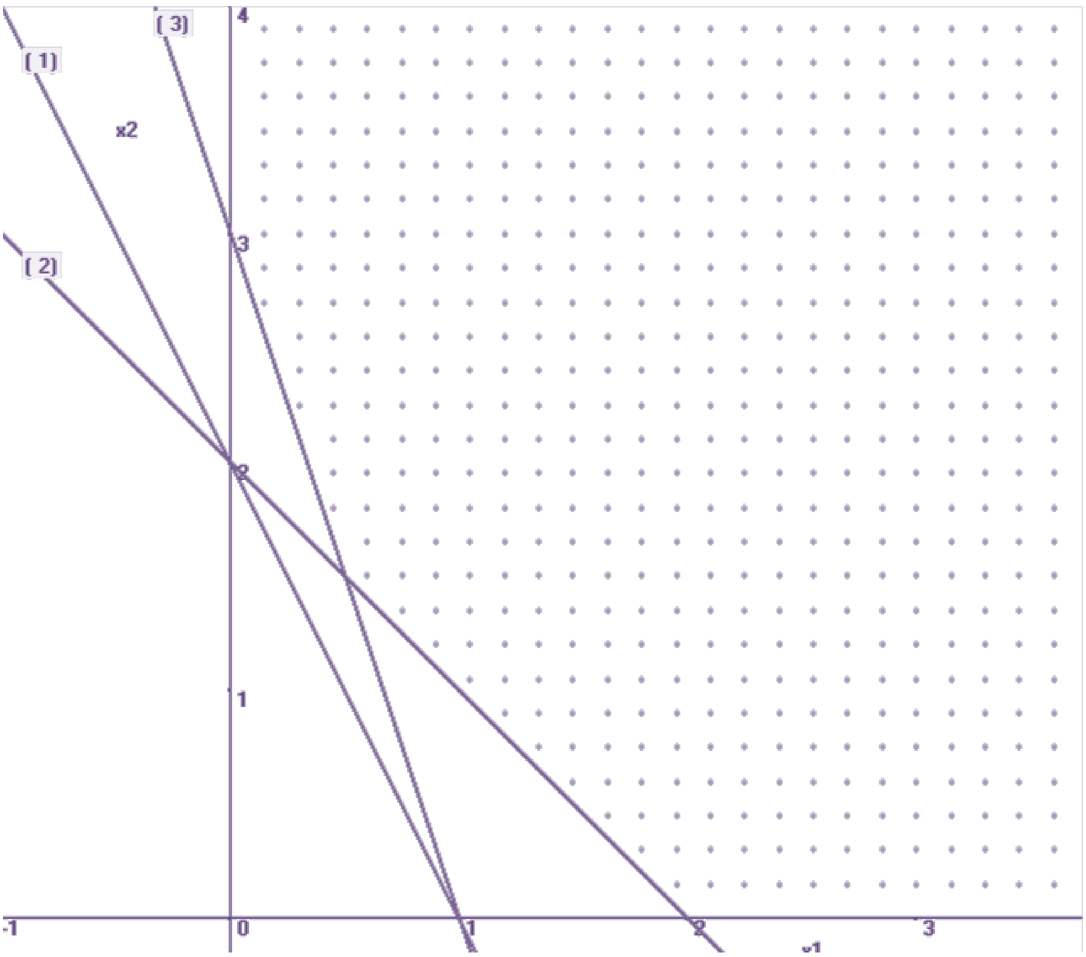
المستقيم 2

$2y_1 + 2y_2 = 4$	
y_1	y_2
0	2
2	0

المستقيم 3

$3y_1 + y_2 = 3$	
y_1	y_2
0	3
1	0

نرسم الشكل :



ISSN: 2617-989X

7- نلاحظ أن نقاط الحل هي ثلاث نقاط داخل منطقة القبول و هي على التسلسل :

النقطة $(2,0)$ و تقاطع المستقيم 2 مع المستقيم 3 , النقطة $(0,3)$

بإيجاد نقاط الحل و تعويضيها في دالة الهدف $Z = 6y_1 + 4y_2$ و إيجاد النقطة التي تحقق

أدنى قيمة لدالة الهدف نحصل على الحل أي :

8- النقطة الأولى $(2,0)$ بالتعويض :

$$Z_1 = 6y_1 + 4y_2 = 6 \times 2 + 4 \times 0 = 12$$

9- النقطة الثانية : تقاطع المستقيم 2 مع المستقيم 3 و بالحل المشترك للمعادلتين:

$$\begin{aligned} 2y_1 + 2y_2 &= 4 \\ 3y_1 + y_2 &= 3 \end{aligned}$$

نجد :

$$\begin{aligned} y_1 &= 0.5 \\ y_2 &= 1.5 \end{aligned}$$

بالتعويض بدالة الهدف نجد:

$$Z_2 = 6y_1 + 4y_2 = 6 \times 0.5 + 4 \times 1.5 = 9$$

1- النقطة الثالثة $(0,3)$ بالتعويض :

$$Z_3 = 6y_1 + 4y_2 = 6 \times 0 + 4 \times 3 = 12$$

نختار من النقاط السابقة النقطة التي تعطي دالة الهدف القيمة الأدنى و هي النقطة :

$$\begin{aligned} y_1 &= 0.5 \\ y_2 &= 1.5 \\ Z &= 9 \end{aligned}$$

و هو الحل الأمثل للبرنامج المرافق.

و الآن بعد أن قمنا بحل كلاً من البرنامج الأولي و البرنامج المرافق كان من الممكن استنتاج حل البرنامج المرافق من جدول حل البرنامج الأولي و ذلك كما يلي :

بالعودة لجدول الحل النهائي للسمبليكس في البرنامج الأولي :

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^e	B
				متغيرات الفجوة		
x_3	0.5	0	1	0.5	−0.5	1
x_2	0.25	1	0	−0.25	0.75	1.5
ΔZ	−0.5	0	0	−0.5	−1.5	−9

حل البرنامج المرافق

نلاحظ أن مغير الفجوة x_4^e يقابل و بعكس الإشارة قيمة المتغير y_1 أما متغير الفجوة x_5^e فهو يقابل و بعكس الإشارة قيمة المتغير y_2 أما قيمة دالة الهدف فهي واحدة لكلا البرنامجين الأولي و المرافق.

مثال 4−3 :

أكتب البرنامج المرافق ثم أوجد حل البرنامج الأولي و استنتج حل البرنامج المرافق من جدول حل البرنامج الأولي و تأكد من حل البرنامج المرافق.

$$Min : Z = 10x_1 + 30x_2$$

$$S/C \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

الحل :

البرنامج المرافق هو :

$$Max: Z = 6y_1 + 6y_2 + 2y_3$$

$$S/C\begin{cases} 3y_1 + 6y_2 \leq 10 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \leq 30 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

x_1 x_2 x_5^e

x_2

x_1

حل البرنامج الأولي من الفصل الثالث :

			x_3^e	x_4^a		x_6^a	x_7^e	x_8^a	B
	0	1	0	/	0	/	−1	/	2
	1	0	0	/	-1/6	/	1/6	/	2 / 3
x_8^a	0	0	1	/	-1/2	/	−3/2	/	0
ΔZ	0	0	0	/	5/3	/	85/3	/	−200/3

الحل الأمثل هو :

$$x_1 = 2/3$$
$$x_2 = 2$$

$$Z = 200/3$$

أما الحل الأمثل للبرنامج المرافق هو :

$$y_1 = 0$$
$$y_2 = 5/3$$
$$y_3 = 85/3 \qquad Z = 200/3$$

التأكد من حل البرنامج المرافق :

محققة

$$Z = 6y_1 + 6y_2 + 2y_3$$
$$Z = 6\times 0 + 6\times 5/3 + 2\times 85/3 = 200/3$$

محققة

$$S/C\begin{cases} 3(0) + 6(5/3) = 10 \le 10 \\ 2(0) + 5/3 + 85/3 = 30 \le 30 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

2. البرنامج المرافق غير المماثل:

في حال كانت البرامج الأولية تأخذ صيغ غير الصيغ النموذجية فإن البرنامج المرافق يأخذ شكل مختلف عن الأشكال السابقة و سنورد في هذا الفصل الأشكال للبرنامج المرافق في الحالات غير المماثلة بين الأولي و المرافق :

الحالة الأولى:

إذا كان البرنامج الأولي من الشكل :

$$Min: Z = C'X$$
$$S/C\begin{cases} AX = B \\ X \ge 0 \end{cases}$$

فإن البرنامج المرافق يأخذ الشكل :

$$Max: Z = B'Y$$
$$S/C\{A'Y \le C$$

نلاحظ من انه تم إلغاء شرط عدم السلبية للمتغيرات الرئيسية في البرنامج المرافق .

الحالة الثانية :

إذا كان البرنامج الأولي من الشكل :

$$Max: Z = C'X$$
$$S/C\begin{cases} AX = B \\ X \ge 0 \end{cases}$$

فإن البرنامج المرافق يأخذ الشكل :

$$Min: Z = B'Y$$
$$S/C\{A'Y \geq C$$

نلاحظ من انه تم إلغاء شرط عدم السلبية للمتغيرات الرئيسية في البرنامج المرافق .

مثال 4-4 :

أوجد البرنامج المرافق للبرنامج التالي :

$$Min: Z = 10x_1 + 30x_2 + 25x_3$$

$$S/C\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 = 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

البرنامج المرافق هو :

$$Max: Z = 6y_1 + 10y_2$$

$$S/C\begin{cases} 3y_1 + 6y_2 \leq 10 \\ 2y_1 + y_2 \leq 30 \\ 3y_1 + 4y_2 \leq 25 \end{cases}$$

مثال 4-5 :

أوجد البرنامج المرافق للبرنامج التالي :

$$Max: Z = 20x_1 + 40x_2 + 30x_3$$

$$S/C\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 16 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

البرنامج المرافق هو :

$$Min : Z = 15y_1 + 14y_2$$

$$S/C\begin{cases} 2y_1 + y_2 \geq 20 \\ 2y_1 + 2y_2 \geq 40 \\ 3y_1 + y_2 \geq 30 \end{cases}$$

الفصل الخامس: برمجة الأعداد الصحيحة

Integer Programming

كلمات مفتاحية : برمجة الأعداد الصحيحة Integer Programming, طريقة التفريع Branch Method, طريقة التحديد Bound Algorithm .

ملخص الفصل :

يتناول هذا الفصل طرائق إيجاد البرنامج في حال كانت الشرط الرئيسي أن جميع الأعداد صحيحة.

المخرجات و الأهداف التعليمية :

1- معرفة طرائق تفريع البرنامج في حال وجود أعداد غير صحيحة.

2-معرفة تحديد الحل الأمثل بعد التفريع للبرنامج .

مخطط الفصل :

1-برمجة الأعداد الصحيحة Integer Programming

برمجة الأعداد الصحيحة Integer Programming

هنالك العديد من الحالات الاقتصادية و الفيزيائية التي يطلب فيها أن يكون المتغيرات هي عبارة عن أعداد صحيحة لذلك نقوم في البداية بحل البرنامج الخطي فإن كانت جميع قيم المتغيرات هي أعداد صحيحة فنكون قد حصلنا على الحل الأمثل للبرنامج الخطي و هو حل برنامج الأعداد الصحيحة.أما إذا كان الحل يحوي على متغيرات قيمها أعداد حقيقية (غير صحيحة) بالتالي يجب تقريب قيم المتغيرات إلى أقرب أعداد صحيحة فينتج ما يسمى ببرمجة الأعداد الصحيحة.

برمجة الأعداد الصحيحة:

هي طريقة من طرائق البرمجة الخطية بحيث يكون جميع مغيرات الحل الأمثل للبرنامج الأولي أعداد صحيحة و سوف نستخدم في هذا الفصل طريقة التفريع و التحديد لإيجاد الحل و سنستعين بالمثال لتوضيح هذه الطريقة.

مثال 5−1 :

أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي :

$$Max: Z = 20x_1 + 2x_2$$

$$S/C \begin{cases} 4x_1 + 10x_2 \leq 22 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

وهي قيم صحيحة

الحل :

يمكننا حل هذا البرنامج بطريقتين إما بطريقة الرسم أو بطريقة السيمبلكس و سنعتمد طريقة السيمبلكس بالحل.

الجدول هو :

			x_3^e	B
x_3^e	4 x_1	10 x_2	1	22
ΔZ	20	2	0	0

و بحل هذا الجدول نحصل على الحل الأمثل بالجدول :

			x_3^e	B
x_1	1	5/2	1/4	11/2
ΔZ	0	-48	-5	-110

يلاحظ أن الحل الأمثل هو :

$$x_1 = 11/2 \ , x_2 = 0 \quad , Z = 110$$

لكن المتغير x_1 ليس عدد صحيح لأن $5 < x_1 < 6$ و بناءً عليه يمكننا استنتاج قيدين آخرين و هما :

$x_1 \geq 6$ أو $x_1 \leq 5$ و بالتالي سوف نفرع البرنامج الأصلي إلى برنامجين فرعيين و هما :

البرنامج الفرعي الأول :

$$Max : Z = 20x_1 + 2x_2$$

$$S / C \begin{cases} 4x_1 + 10x_2 \leq 22 \\ x_1 \geq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

وهي قيم صحيحة

البرنامج الفرعي الثاني :

$$Max : Z = 20x_1 + 2x_2$$

$$S/C\begin{cases}4x_1+10x_2\le 22\\ x_1\le 5\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$$

وهي قيم صحيحة

لكن البرنامج الفرعي الأول مرفوض وذلك لان الشرطين متناقضين فإذا عوضنا بقيمة $x_1=6$ فإن

x_1 x_2 x_4^e

الشرط الأول غير محقق و بناءً عليه نرفض البرنامج الأول و نحل البرنامج الفرعي الثاني.

نأخذ جدول الحل البدائي وهو :

x_4^e

			x_3^e		B
x_3^e	4	10	1	0	22
	1 x_1	0 x_2	0	1 x_4^e	5
ΔZ x_2	20	2	0	0	0

و بالحل و إيجاد الحل الأمثل نجد :

x_1

			x_3^e		B
	0	1	1/10	−4/10	1/5
	1	0	0	1	5
ΔZ	0	0	−1/5	−96/5	-502/5

يلاحظ أن الحل الأمثل هو :

$$x_1=5\ ,x_2=1/5\quad ,Z=502/5$$

لكن المتغير x_2 ليس عدد صحيح لأن $0<x_2<1$ و بناءً عليه يمكننا استنتاج قيدين آخرين و هما :

$x_2\ge 1$ أو $x_2\le 0$ و بالتالي سوف نفرع البرنامج الأصلي إلى برنامجين فرعيين و هما :

البرنامج الفرعي الأول :

ISSN: 2617-989X

$$Max: Z = 20x_1 + 2x_2$$

$$S/C\begin{cases} 4x_1 + 10x_2 \le 22 \\ x_1 \le 5 \\ x_2 \ge 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

وهي قيم صحيحة

البرنامج الفرعي الثاني :

$$Max: Z = 20x_1 + 2x_2$$

$$S/C\begin{cases} 4x_1 + 10x_2 \le 22 \\ x_1 \le 5 \\ x_2 \le 0 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

x_1 x_2 x_4^e

وهي قيم صحيحة

حل البرنامج الأول :

x_4^e

			x_3^e		x_5^e	x_6^a	B
x_3^e	4	10	1	0	0	0	22
	1	0	0	1	0	0	5
x_6^a	0	1	0	0	−1	1	1
ΔZ	20−5M	2−11M	0	0	M	0	−28M

و الحل الأمثل لهذا البرنامج هو :

x_1

x_4^e

x_2			x_3^e		x_5^e	x_6^a	B
	1	0	1/4	0	10/4	/	3
	0	0	−1/4	1	−10/4	/	2
	0	1	0	0	−1	/	1
ΔZ	0	0	−5	0	−48	/	−62

يلاحظ أن الحل الأمثل للبرنامج الفرعي الأول هو :

$$x_1 = 3 \ , x_2 = 1 \quad , Z = 62$$

و جميع القيم صحيحة و بالتالي هو الحل الأمثل لبرمجة الأعداد الصحيحة للبرنامج الأول.

حل البرنامج الفرعي الثاني :

$$Max : Z = 20x_1 + 2x_2$$

$$S / C \begin{cases} 4x_1 + 10x_2 \leq 22 \\ x_1 \leq 5 \\ x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

وهي قيم صحيحة

نلاحظ أن قيمة $x_2 = 0$ حتماً و ذلك لو جود شرطين متناقضين ($0 \leq x_2 \leq 0$) و بالتالي فإن الحل الأمثل للبرنامج الفرعي الثاني هو :

$$x_1 = 5 \, , x_2 = 0 \quad , Z = 100$$

و هنا نكون قد حصلنا على الحل الأمثل بالحصول على جميع القيم الصحيحة .

و بالتالي الحل الأمثل للبرنامج :

$$Max: Z = 20x_1 + 2x_2$$

$$S/C\begin{cases} 4x_1 + 10x_2 \le 22 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

وهي قيم صحيحة

هو :

$$x_1 = 5\ , x_2 = 0 \quad , Z = 100$$

الفصل السادس : برمجة الأعداد الصحيحة – مسألة النقل

Integer Programming – Transport Algorithm

كلمات مفتاحية : برمجة الأعداد الصحيحة *Integer Programming* , مسألة النقل *Transport Algorithm* , طريقة فوقل *Vogel"s method* , طريقة الزاوية الشمالية الغربية *North- West Corner* , طريقة أقل التكاليف *Least Cost method* , طريقة التخطي *Stepping Stone* , طريقة التوزيع المعدل (*MODI*)

ملخص الفصل :

يتناول هذا الفصل طرائق إيجاد حل مسألة النقل الأساسي باستخدام أساليب التوزيع الثلاث :

1- الزاوية الشمالية الغربية .

2- طريقة أقل تكاليف.

3- طريق فوقل بالتوزيع .

و طريقة التأكد من سيرورة الحل بإحدى الطرق :

1- طريقة التخطي .

2- طريقة التوزيع العدل .

بعد ذلك يتم التعرف على بعض الحالات الخاصة في الحل كالمساواة بين العرض و الطلب و غيرها من الحالات الخاصة.

المخرجات و الأهداف التعليمية :

1- كتابة مسألة النقل بالشكل الرياضي .

2-معرفة الطالب بالطرائق الثلاث للتوزيع و اختيار الطريقة الأمثل.

3-معرفة الطالب بطرائق التأكد من سيرورة الحل و إيجاد الحل الأمثل وذلك باستخدام طريقة التخطي أو التوزيع المعدل .

مخطط الفصل :

1- طريقة عرض المسألة النقل بأقل التكاليف و تحويلها إلى الشكل الرياضي The Transportation Algorithm for Least Cost.

2- التوزيع بطريقة الزاوية الشمالية الغربية (North- West corner Starting Solution) و التأكد بطريقة التخطي (Stepping Stone) أو التأكد بطريقة التوزيع المعدل (MODI)

3- طريقة التكلفة الدنيا (Least-Cost Starting Solution) و التأكد بطريقة التخطي (Stepping Stone) أو التأكد بطريقة التوزيع المعدل (MODI)

4- طريقة فوقل (Vogel's Starting Solution) و التأكد بطريقة التخطي (Stepping Stone) أو التأكد بطريقة التوزيع المعدل (MODI)

5- طريقة عرض مسألة النقل بتعظيم الأرباح وتحويلها إلى الشكل الرياضي The Transportation Algorithm for increasing Profit.

تقليل التكاليف

تعد مسألة النقل أحد أهم مسائل البرمجة الخطية – برمجة الأعداد الصحيحة في مجال بحوث العمليات باعتبار تبحث عن الحل الأمثل لمجموعة من القيود المترتبة على الحل.و تهتم تكل المسألة بشكل خاص بالبحث عن أقل التكاليف لنقل بضائع من مناطق إلى مناطق أخرى ضمن قيود العرض و الطلب بين تلك المناطق. فهي شائعة الاستخدام في مجال الاقتصاد الجزئي و المؤسسات التجارية و الإنتاجية و غيرها من المجالات. و تعتمد على نوعين أساسين هي تدنئة التكاليف للنقل أو تعظيم الأرباح للنقل و في هذا الفصل سوف سنقوم بدراسة مسألة النقل لتقليل التكاليف.

1.طريقة عرض مسألة النقل بأقل التكاليف و تحويلها إلى الشكل الرياضي :

سوف نأخذ مثال لمؤسسة إنتاجية لها ثلاث فروع تنتج نفس المنتج و متواجدة بأماكن مختلفة و كل فرع في هذه المؤسسة تتيح عرض الكميات التالية :

- الفرع الأول تعرض الكمية a_1
- الفرع الثاني تعرض الكمية a_2
- الفرع الثالث تعرض الكمية a_3

و هذه الفروع تزود أربع مراكز بيع بذاك المنتج . هذه المراكز متواجدة بمناطق مختلفة عن بعضها و لكل مركز كمية طلب محددة و كمية طلب كل مركز هي :

- المركز الأول الكمية المطلوبة b_1

- المركز الثاني الكمية المطلوبة b_2

- المركز الثالث الكمية المطلوبة b_3

- المركز الرابع الكمية المطلوبة b_4

و تكلفة نقل الوحدة الواحدة من الفرع i إلى المركز j تعطى بـ c_{ij} و تعطى بالجدول التالي :

	المركز الأول	المركز الثاني	المركز الثالث	المركز الرابع
الفرع الأول	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}
الفرع الثاني	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}
الفرع الثالث	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}

و المطلوب كيف من الممكن للفروع الثلاث أن يزودوا المراكز الأربع بالكميات المطلوبة و في حدود الطاقة القصوى لكل فرع و ذلك بأقل تكاليف ممكنة. و بمعنى أخر ما هي الكمية التي يجب على كل فرع أن يزود بها المركز من الكمية المطلوبة وذلك بأقل تكاليف نقل ممكنة بين الفرع و المركز . فإذا فرضنا أن الكمية التي يزود بها الفرع i المركز j هي x_{ij} فإن الجدول التالي يوضح الكميات المنقولة من الفروع إلى المراكز :

	المركز الأول	المركز الثاني	المركز الثالث	المركز الرابع
الفرع الأول	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
الفرع الثاني	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
الفرع الثالث	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}

نلاحظ أن جدول الكميات المطلوبة يشبه تماماً جدول تكاليف النقل إلا أن الفرق بينهم أن جدول التكاليف معلوم و يمكننا الحصول عليه بينما توزيع الكميات بأقل التكاليف هو المطلوب بالتالي لحل تلك المسألة يجب علينا إيجاد قيم x_{ij} و إيجاد الحل الأمثل للتكلفة الكلية (أدنى تكلفة).

و بناءً على المعطيات السابقة يمكننا تشكيل مسألة النقل وفق النموذج :

	المركز الأول	المركز الثاني	المركز الثالث	المركز الرابع	عرض
الفرع الأول	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	c_{14} x_{14}	a_1
الفرع الثاني	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	c_{24} x_{24}	a_2
الفرع الثالث	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	c_{34} x_{34}	a_3
طلب	b_1	b_2	b_3	b_4	

نلاحظ أن هذا الجدول يلخص كامل المسالة بحيث يظهر العرض و الطلب و التكاليف لنقل لوحدة واحدة من أي فرع لأي مركز و كذلك الكميات المراد نقلها من الفروع للمركز و الشرط الرئيسي أن يكون x_{ij} قيمة غير سالبة و هي عدد صحيح .

الصيغة الرياضية لمسألة النقل السابقة تصبح بالشكل :

$$Min\ \ Z=\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{3}c_{ij}x_{ij}$$

$$S/c\begin{cases}\sum_{j=1}^{4}x_{ij}=a_i\\ \sum_{i=1}^{3}x_{ij}=b_j\\ \sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{4}b_j\\ x_{ij}\geq 0\ \ ,c_{ij}\geq 0\end{cases}$$

و هذا يعني أن يجب علينا إيجاد التكلفة الدنيا و ذلك عندما يكون العرض مساوي للطلب و جميع قيم تكاليف النقل قيم موجبة و كذلك قيم الوحدات المنقولة هي قيم صحيحة و موجبة .

و بالتالي يمكننا كتابة النموذج الرياضي بشكل عام لمسألة النقل بالشكل الرياضي :

$$Min\ \ Z=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$S/c\begin{cases}\sum_{j=1}^{m}x_{ij}=a_i\\ \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=b_j\\ \sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{j=1}^{m}b_j\\ x_{ij}\geq 0\ \ ,c_{ij}\geq 0\end{cases}$$

$$i=1,2,3,\ldots,n$$

$$j=1,2,3,\ldots,m$$

حيث m يمثل عدد المراكز و n يمثل عدد الفرع الموزعة.

مثال 6-1:

تنتج شركة تجارية مادة غذائية في ثلاث فرع لها داخل القطر وهي : اللاذقية و دمشق و حمص و بطاقة قصوى بالشكل التالي:

- فرع اللاذقية 37 ألف عبوة شهرياً
- فرع دمشق 54 ألف عبوة شهرياً
- فرع حمص 46 ألف عبوة شهرياً

و يتم توزيع هذه المنتجات على أربع مراكز توزيع أساسية و حسب الطلب الأقصى لكل مركز وهي كما يلي :

- المركز الجنوبي 43 ألف عبوة .
- المركز الشرقي 22 ألف عبوة .
- المركز الغربي 30 ألف عبوة .
- المركز الشمالي 42 ألف عبوة.

و بدارسة المحاسبة التحليلية بينت أن تكلفة نقل العبوة الواحدة المنقولة من كل فرع إلى كل مركز هي بالليرة السورية كانت كما يلي :

المركز الشمالي	المركز الغربي	المركز الشرقي	المركز الجنوبي	
10	4	12	7	فرع اللاذقية
14	10	7	3	فرع دمشق
7	6	5	6	فرع حمص

تبحث الشركة على طريقة تزود بها المركز الأربع عبر الفروع المنتجة بأقل التكاليف و المطلوب:

1- هل هذه المسألة تشكل مسألة نقل ؟

2- شكل جدول العام لمسألة النقل ؟

الحل:

1- هدف الشركة الرئيسي هو إيصال المواد من الفروع إلى مراكز البيع بأقل التكاليف و بالتالي فإن

دالة الهدف تأخذ الشكل :

$$Min\ \ Z = \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{3} c_{ij}x_{ij}$$

كما أننا نلاحظ أن العرض مساوٍ للطلب :

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 37 + 54 + 46 = 137$$

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 43 + 22 + 30 + 42 = 137$$

و كميات العرض و الطلب غير سالبة و بالتالي فهي مسألة نقل.

2- يمكننا تحويل المسألة إلى الجدول التالي :

	المركز الجنوبي	المركز الغربي	المركز الشرقي	المركز الشمالي	عرض
فرع اللاذقية	7 x_{11}	12 x_{12}	4 x_{13}	10 x_{14}	37
فرع دمشق	3 x_{21}	7 x_{22}	10 x_{23}	14 x_{24}	54
فرع حمص	6 x_{31}	5 x_{32}	6 x_{33}	7 x_{34}	46
طلب	43	22	30	42	

أي مسألة نقل لها مرحلتين للحل و هما:

الأولى : مرحلة إيجاد الحل الأساسي الأول وهي طريقة توزيع المواد الموجودة في الفروع على المراكز و يتم ذلك بإحدى الطرق الثلاث وهي :

- الزاوية الشمالية الغربية .
- طريقة التكلفة الدنيا .
- طريقة فوقل

الثانية : مرحلة اختبار الحل و طريقة تحسينه لنحصل على الحل الأمثل و تتم بإحدى الطريقتين :

- طريقة التخطي (Stepping stone)
- طريقة التوزيع المعدل (MODI)

و سنقوم بشرح المرحلتين بأمثلة توضيحية.

2.التوزيع بطريقة الزاوية الشمالية الغربية و التأكد بطريقة التخطي أو التأكد بطريقة التوزيع المعدل:

و يقصد بالزاوية الشمالية الغربية هي الخانة الموجودة بالأعلى و إلى اليسار التي تكافئ الفرع الأول مع المركز الأول و لنوضح ذلك بالمثال.

مثال 6-2 :

أوجد حل المثال 6-1 بطريقة الزاوية الشمالية الغربية و تأكد بأسلوب التخطي :

عرض	المركز الشمالي	المركز الشرقي	المركز الغربي	المركز الجنوبي	
37	10	4	12	7	فرع اللاذقية
54	14	10	7	3	فرع دمشق
46	7	6	5	6	فرع حمص
	42	30	22	43	طلب

الحل:

يقصد بالزاوية الشمالية الغربية هي البدء بتوزيع القيم ابتداً من الزاوية الغربية التي في الأعلى و هي نتيجة تقاطع المركز الجنوبي مع فرع اللاذقية و من هذه الخانة نلاحظ أن الفرع بإمكانه أن يزود 37 قطعة أما المركز فحاجته هي 43 قطعة بالتالي بإمكان ذلك الفرع إعطاء جميع المادة المنتجة ولا يزال المركز بحاجة إلى 6 قطع بعد لتلبية طلبه من البضائع (جدول التالي يوضح تلك العملية) .بعد ذلك نلاحظ أن فرع اللاذقية أنهى توزيع جميع مواده و لكن المركز الجنوبي لا يزال بحاجة إلى 6 قطع لذلك

ISSN: 2617-989X

ننتقل إلى فرع دمشق و يأخذ المركز الجنوبي 6 قطع من هذا الفرع بالتالي يكون المركز الجنوبي أشبع و لكن فرع دمشق لا يزال يملك 48 قطعة بحاجة للتوزيع ننتقل بدورها فرع دمشق ليعطي المركز الغربي و لكن المركز الغربي بحاجة فقط إلى 22 قطعة و بالتالي يأخذ جميع مواده من فرع دمشق و يشبع و لكن فرع دمشق لازال يملك 26 قطعة فيعطيها للمركز الشرقي و هكذا حتى نحصل على التوزيع الكامل للبضائع عن طريق الفروع و للتأكيد يجب أن يكون العرض مساوٍ للطلب .و الجدول التالي يوضح عملية التوزيع.

	المركز الجنوبي	المركز الغربي	المركز الشرقي	المركز الشمالي	عرض	باقي 1	باقي 2	باقي 3	باقي 4	باقي 5
فرع اللاذقية	7 37	12	4	10	37	0	0	0	0	0
فرع دمشق	3 6	7 22	10 26	14	54	54	48	26	0	
فرع حمص	6	5	6 4	7 42	46	46	46	46	42	0
طلب	43	22	30	42						
باقي 1	6	22	30	42						
باقي 2	0	22	30	42						
باقي 3	0	0	26	42						
باقي 4	0	0	4	42						
باقي 5	0	0	0	42						
باقي 6	0	0	0	0						

و بالتالي فإن الجدول النهائي للتوزيع بطريقة الزاوية الشمالية الغربية يأخذ الشكل :

	المركز الجنوبي	المركز الغربي	المركز الشرقي	المركز الشمالي	عرض
فرع اللاذقية	7 37	12	4	10	37
فرع دمشق	3 6	7 22	10 26	14	54
فرع حمص	6	5	6 4	7 42	46
طلب	43	22	30	42	

و بالتالي يمكننا قراءة الجدول بالشكل:

فرع اللاذقية يزود المركز الجنوبي بـ 37 قطعة.

فرع دمشق يزود كلاً من المركز الجنوبي 6 قطع و المركز الغربي 22 قطعة و المركز الشرقي 26 قطعة .

فرع حمص يزود كلاً من المركز الشرقي 4 قطع و المركز الشمالي 42 قطعة .

و بناءً على هذا التوزيع فإن إجمالي التكاليف للنقل هي:

$$Z = 37 \times 7 + 6 \times 3 + 22 \times 7 + 26 \times 10 + 4 \times 6 + 42 \times 7 = 1009$$

ولكن ليس من الضرورة أن يكون هذا الحل هو الحل الأمثل لذلك يجب علينا التأكد من الحل و إيجاد الحل الأمثل.

قبل البدء بالتأكد يجب أن يتوفر شرط أساسي من أجل التأكد و هو أن يكون عدد الخانات المعبأة تساوي عدد الأسطر + عدد الأعمدة – واحد أي بإمكاننا كتابتها بالشكل الرياضي :

$$m+n-1$$

ومن المثال السابق نلاحظ أن عدد الأسطر هو 3 و عدد الأعمدة هو 4 إذا حسب القانون $m+n-1$ =4+3−1=6 و عدد الخانات المعبأة يساوي 6 و بالتالي يمكننا استخدام طريقة التخطي أو طريقة التوزيع المعدل في التحقق من الحل.

- **طريقة التخطي (Stepping Stone) :**

و الفكرة الأساسية من هذه الطريقة هو معرفة إمكانية تغير في الخلايا المعبأة بخلايا فارغة مع إمكانية تقليل التكاليف في حال دخولها بالحل فبالعودة إلى المثال السابق نلاحظ أن: – **الخلية (1,2)** السطر الأول العمود الثاني هي من الخلايا غير الداخلة بالحل فإذا قررنا إدخال وحدة واحدة بالحل في هذه الخلية فإن التوازن بالنسبة للطلب و العرض سوف يختل على مستوى السطر الأول و على مستوى العمود الثاني لإن مجموع السطر الأول سيصبح 38 و مجموع العمود الثاني سيصبح 23 و هذا مخل بالحل لذلك يجب علينا التنقل ضمن الخلايا المعبئة حصراً بحيث كل سطر يحوي شارة إشارة −1 و إشارة +1 و أيضاً كل عمود يحوي إشارة −1 و إشارة +1 و نوضح ذلك بالشكل :

	المركز الجنوبي	المركز الغربي	المركز الشرقي	المركز الشمالي	عرض
فرع اللاذقية	7 37 1−	12 1+	4	10	37
فرع دمشق	3 6 1+	7 22 1−	10 26	14	54
فرع حمص	6	5	6 4	7 42	46
طلب	43	22	30	42	

فإذا رمزنا للوحدة الواحدة المنقولة من الفرع i إلى المركز j بـ σ_{ij} فإن تكلفة نقل وحدة واحدة تأخذ تغير القيمة بالشكل :

$$\sigma_{12} = (12)(1) + (7)(-1) + (3)(1) + (7)(-1) = 15 - 14 = 1 \geq 0$$

وهذا يعني أن إذا أدخلنا هذه الخلية في الحل فإن نقل وحدة واحدة من فرع اللاذقية إلى المركز الغربي سيرفع التكلفة بمقدار ليرة سورية واحدة و عليه فإنه علينا تجنب النقل.

- **الخلية $(1,3)$** السطر الأول (فرع اللاذقية) و العمود الثالث (المركز الشرقي) فالنقل يتم بالشكل:

	المركز الجنوبي	المركز الغربي	المركز الشرقي	المركز الشمالي	عرض
فرع اللاذقية	7 37 1−	12	4 1+	10	37
فرع دمشق	3 6 1+	7 22	10 26 1−	14	54
فرع حمص	6	5	6 4	7 42	46
طلب	43	22	30	42	

فإن تكلفة نقل وحدة واحدة تأخذ تغير القيمة بالشكل :

$$\sigma_{13} = (4)(1) + (10)(-1) + (3)(1) + (7)(-1) = 7 - 17 = -10 < 0$$

وهذا يعني أن إذا أدخلنا هذه الخلية في الحل فإن نقل وحدة واحدة من فرع اللاذقية إلى المركز الشرقي سيقلل التكلفة بمقدار 10 ليرات سورية و عليه يجب أن يتم النقل ننظر إلى القيم في الخلايا ذات القيم (-1) نلاحظ $(26,37)$ نختار القيمة الأصغر من بين تلك القيم و نقوم بنقلها يتم جمع هذه القيمة للقيم التي تحوي $(1+)$ و يتم طرحها من القيم التي تحوي (-1) ويتم النقل بالشكل:

	المركز الجنوبي	المركز الغربي	المركز الشرقي	المركز الشمالي	عرض
فرع اللاذقية	7 37−26 1−	12	4 26+ 1+	10	37
فرع دمشق	3 6+26 1+	7 22	10 26−26 1−	14	54
فرع حمص	6	5	6 4	7 42	46
طلب	43	22	30	42	

و منه نحصل على الجدول التالي:

	المركز الجنوبي	المركز الغربي	المركز الشرقي	المركز الشمالي	عرض
فرع اللاذقية	7 11	12	4 26	10	37
فرع دمشق	3 32	7 22	10	14	54
فرع حمص	6	5	6 4	7 42	46
طلب	43	22	30	42	

و بالتالي فإن التكلفة الإجمالية بالاعتماد على هذا النقل يصبح :

$$Z = 11\times7+26\times4+32\times3+22\times7+4\times6+42\times7=749$$

نلاحظ أن التكاليف انخفضت من 1009 إلى 749 أي انخفضت بمقدار بالمقدار :

$$=26\times10=260$$

بالاعتماد على الجدول الأخير و العودة إلى الخلايا الفارغة من البداية :

– **الخلية (1,2)** و للتأكد نوضح ذلك بالشكل :

	المركز الجنوبي	المركز الغربي	المركز الشرقي	المركز الشمالي	عرض
فرع اللاذقية	7 11 1−	12 1+	4 26	10	37
فرع دمشق	3 32 1+	7 22 1−	10	14	54
فرع حمص	6	5	6 4	7 42	46
طلب	43	22	30	42	

فإن تكلفة نقل وحدة واحدة تأخذ تغير القيمة بالشكل :

$$\sigma_{12} = (12)(1) + (7)(-1) + (3)(1) + (7)(-1) = 15 - 14 = 1 \geq 0$$

وهذا يعني أن إذا أدخلنا هذه الخلية في الحل فإن نقل وحدة واحدة من فرع اللاذقية إلى المركز الغربي سيرفع التكلفة بمقدار ليرة سورية واحدة و عليه فإنه علينا تجنب النقل.

- **الخلية (1,4)** السطر الأول (فرع اللاذقية) و العمود الرابع (المركز الشمالي) فالنقل يتم بالشكل:

	المركز الجنوبي	المركز الغربي	المركز الشرقي	المركز الشمالي	عرض
فرع اللاذقية	7 11	12	4 26 1−	10 1+	37
فرع دمشق	3 32	7 22	10	14	54
فرع حمص	6	5	6 4 1+	7 42 1−	46
طلب	43	22	30	42	

فإن تكلفة نقل وحدة واحدة تأخذ تغير القيمة بالشكل :

$$\sigma_{14} = (10)(1) + (7)(-1) + (6)(1) + (4)(-1) = 16 - 11 = 5 \geq 0$$

وهذا يعني أن إذا أدخلنا هذه الخلية في الحل فإن نقل وحدة واحدة من فرع اللاذقية إلى المركز الشمالي سيرفع التكلفة بمقدار 5 ليرات سورية و عليه فإنه علينا تجنب النقل.

- **الخلية (2,3)** فرع دمشق و المركز الشرقي فالنقل يتم بالشكل :

	المركز الجنوبي	المركز الغربي	المركز الشرقي	المركز الشمالي	عرض
فرع اللاذقية	7 11 1+	12	4 26 1−	10	37
فرع دمشق	3 32 1−	7 22	10 1+	14	54
فرع حمص	6	5	6 4	7 42	46
طلب	43	22	30	42	

فإن تكلفة نقل وحدة واحدة تأخذ تغير القيمة بالشكل :

$$\sigma_{23} = (10)(1) + (3)(-1) + (7)(1) + (4)(-1) = 17 - 7 = 10 > 0$$

وهذا يعني أن إذا أدخلنا هذه الخلية في الحل فإن نقل وحدة واحدة من فرع دمشق إلى المركز الشرقي سيرفع التكلفة بمقدار 10 ليرات سورية و عليه فإنه علينا تجنب النقل.

– **الخلية (2,4)** فرع دمشق و المركز الشمالي فالنقل يتم بالشكل :

	المركز الجنوبي	المركز الغربي	المركز الشرقي	المركز الشمالي	عرض
فرع اللاذقية	7 11 1+	12	4 26 1−	10	37
فرع دمشق	3 32 1−	7 22	10	14 1+	54
فرع حمص	6	5	6 4 1+	7 42 1−	46
طلب	43	22	30	42	

فإن تكلفة نقل وحدة واحدة تأخذ تغير القيمة بالشكل :

$$\sigma_{24} = 14 - 7 + 6 - 4 + 7 - 3 = 27 - 14 = 13 > 0$$

وهذا يعني أن إذا أدخلنا هذه الخلية في الحل فإن نقل وحدة واحدة من فرع دمشق إلى المركز الشمالي سيرفع التكلفة بمقدار 13 ليرة سورية و عليه فإنه علينا تجنب النقل.

– **الخلية (2,4)** فرع حمص و المركز الجنوبي فالنقل يتم بالشكل :

	المركز الجنوبي	المركز الغربي	المركز الشرقي	المركز الشمالي	عرض
فرع اللاذقية	7 11 1−	12	4 26 1+	10	37
فرع دمشق	3 32	7 22	10	14	54
فرع حمص	6 1+	5	6 4 1−	7 42	46
طلب	43	22	30	42	

فإن تكلفة نقل وحدة واحدة تأخذ تغير القيمة بالشكل :

$$\sigma_{31} = 6 - 7 + 4 - 6 = -3 < 0$$

بما أنها أصغر من الصفر نقوم بالنقل.

القيم في الخلايا ذات القيم (-1) هي $(4,11)$ نختار القيمة الأصغر من بين تلك القيم و نقوم بنقلها.

	المركز الجنوبي	المركز الغربي	المركز الشرقي	المركز الشمالي	عرض
فرع اللاذقية	7 7	12	4 30	10	37
فرع دمشق	3 32	7 22	10	14	54
فرع حمص	6 4	5	6	7 42	46
طلب	43	22	30	42	

و بالتالي فإن التكلفة الإجمالية بالاعتماد على هذا النقل يصبح :

$$Z = 7\times7 + 30\times4 + 32\times3 + 22\times7 + 4\times6 + 42\times7 = 737$$

نلاحظ أن التكاليف انخفضت من 749 إلى 737 أي انخفضت بمقدار بالمقدار :

$$= 3\times4 = 12$$

بالاعتماد على الجدول الأخير و العودة إلى الخلايا الفارغة من البداية :

$$\sigma_{12} = 12 + 3 - 7 - 7 = 1 > 0$$ لا ننقل

$\sigma_{14} = 10+6-7-7 = 2 > 0$ لا ننقل

$\sigma_{23} = 10+7-4+3 = 10 > 0$ لا ننقل

$\sigma_{24} = 14+6-7-3 = 10 > 0$ لا ننقل

$\sigma_{32} = 5+3-7-6 = -5 < 0$ ننقل

يتم النقل حسب الشكل التالي:

	المركز الجنوبي	المركز الغربي	المركز الشرقي	المركز الشمالي	عرض
فرع اللاذقية	7 / 7	12	4 / 30	10	37
فرع دمشق	3 / 32 ، 1+	7 / 22 ، 1−	10	14	54
فرع حمص	6 / 4 ، 1−	5 / 1+	6	7 / 42	46
طلب	43	22	30	42	

نختار القيمة الأصغر من القيم (4,22) و نقوم بالنقل فنحصل على الجدول :

عرض	المركز الشمالي	المركز الشرقي	المركز الغربي	المركز الجنوبي	
37	10	4 / 30	12	7 / 7	فرع اللاذقية
54	14	10	7 / 18	3 / 36	فرع دمشق
46	7 / 42	6	5 / 4	6	فرع حمص
	42	30	22	43	طلب

و بالتالي فإن التكلفة الإجمالية بالاعتماد على هذا النقل يصبح :

$$Z = 7\times7 + 30\times4 + 36\times3 + 18\times7 + 4\times5 + 42\times7 = 717$$

نلاحظ أن التكاليف انخفضت من 737 إلى 717 أي انخفضت بمقدار بالمقدار :

$$= 5\times4 = 20$$

بالاعتماد على الجدول الأخير و العودة إلى الخلايا الفارغة من البداية :

$\sigma_{12} = 12 + 3 - 7 - 7 = 1 > 0$ لا ننقل

$\sigma_{14} = 10 + 5 + 3 - 7 - 7 - 7 = -3 < 0$ ننقل

	المركز الجنوبي	المركز الغربي	المركز الشرقي	المركز الشمالي	عرض
فرع اللاذقية	7	12	4 30	10 7	37
فرع دمشق	3 43	7 11	10	14	54
فرع حمص	6	5 11	6	7 35	46
طلب	43	22	30	42	

و بالتالي فإن التكلفة الإجمالية بالاعتماد على هذا النقل يصبح :

$$Z = 30\times4+7\times10+43\times3+11\times7+11\times5+35\times7=696$$

نلاحظ أن التكاليف انخفضت من 717 إلى 696 أي انخفضت بمقدار بالمقدار :

$$=7\times3=21$$

بالاعتماد على الجدول الأخير و العودة إلى الخلايا الفارغة من البداية :

$$\sigma_{11}=7+7+7-10-5-3=3>0$$ لا ننقل

$$\sigma_{12}=12+7-5-10=2>0$$ لا ننقل

$$\sigma_{23}=10+5+10-7-7-4=7>0$$ لا ننقل

$$\sigma_{24}=14+5-7-7=5>0$$ لا ننقل

$$\sigma_{31}=6+7-5-3=5>0$$ لا ننقل

$$\sigma_{33}=6+10-7-4=5>0$$ لا ننقل

و بما أن جميع القيم أكبر أو تساوي الصفر نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل وهو :

- فرع اللاذقية يزود المركز الشرقي بـ 30 قطعة و المركز الشمالي بـ7 قطع.
- فرع دمشق يزود المركز الجنوبي 43 قطعة و المركز الغربي بـ 11 قطعة.
- فرع حمص يزود المركز الغربي بـ 11 قطعة و المركز الشمالي بـ 35 قطعة .
- التكلفة الإجمالية هي لنقل المواد هي 696.

مثال 6-3 :

أوجد حل مسألة النقل مستخدماً توزيع الزاوية الشمالية الغربية و معتمد طريقة التخطي في التأكد من الحل الأمثل.

	1	2	3	عرض
A	2	5	7	35
B	3	4	5	42
C	6	7	3	23
طلب	40	22	38	

الحل:

نلاحظ أن العرض و الطلب متساوي إذاً يمكننا التوزيع نبدأ بالزاوية الشمالية الغربية A,1 و هكذا على شكل المثال السابق نقوم بالتوزيع فيكون لدينا الجدول التالي:

	1	2	3	عرض
A	2 35	5	7	35
B	3 5	4 22	5 15	42
C	6	7	3 23	23
طلب	40	22	38	

و بالتالي فإن تكاليف النقل الإجمالية للحل الاساسي هي :

$$Z = 35\times2+5\times3+22\times4+15\times5+23\times3=317$$

قبل البدء بالتأكد يجب أن يتوفر شرط أساسي من أجل التأكد و هو أن يكون عدد الخانات المعبأة تساوي عدد الأسطر + عدد الأعمدة – واحد أي :

$$m+n-1=6-1=5 \quad \text{محققة}$$

بما أنها محققة نستخدم حال التخطي لإيجاد الحل الأمثل للنقل:

$$\sigma_{12} = 5+3-4-2 = 2 > 0 \quad \text{لا ننقل}$$

$$\sigma_{13} = 7+3-5-2 = 3 > 0 \quad \text{لا ننقل}$$

$\sigma_{31} = 6+5-3-3 = 5 > 0$ لا ننقل

$\sigma_{32} = 7+5-3-4 = 5 > 0$ لا ننقل

و بما أن جميع القيم أكبر أو تساوي الصفر نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل وهو :

- فرع A يزود المركز 1 بـ 35 قطعة.
- فرع B يزود المركز 1 بـ 5 قطع و المركز 2 بـ 22 قطعة و المركز 3 بـ 15 قطعة.
- فرع C يزود المركز 3 بـ 23 قطعة .
- التكلفة الإجمالية هي لنقل المواد هي 317.

- **طريقة التوزيع المعدل (MODI) :**

لا تختلف هذه الطريقة في النهاية عن طريقة التخطي إنما الاختلاف يكون فقط في المنهجية حيث أن طريقة التوزيع المعدل تعتمد على افتراض وجود مجهولين V_j يعبر عن الأعمدة و U_i يعبر عن الأسطر و حاصل جمعهما بالنسبة للخلايا المعبئة (الداخلة بالحل) يساوي تكلفة نقل وحدة واحدة من الفرع i إلى المركز j و يعبر عنها بالشكل :

$$U_i + V_j = C_{ij}$$

حيث i يعبر عن السطر و j يعبر عن العمود .الخطوة الأولى نوجد قيم U_i و V_j بعد ذلك نوجد القيم الحدية للخلايا غير الداخلة في الحل الاساسي و ذلك عن طريق المعادلة :

$$\sigma_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$$

و تعود الأمور تماماً كما في مرحلة التخطي.و سنوضح ذلك بمثال:

مثال 6−4 :

أوجد حل مسألة النقل مستخدماً توزيع الزاوية الشمالية الغربية و معتمد طريقة التوزيع المعدل في التأكد من الحل الأمثل.

	1	2	3	عرض
A	2	5	7	35
B	3	4	5	42
C	6	7	3	23
طلب	40	22	38	

الحل: من المثال السابق و بطريقة الزاوية الشمالية الغربية نجد:

	1	2	3	عرض
A	2 / 35	5	7	35
B	3 / 5	4 / 22	5 / 15	42
C	6	7	3 / 23	23
طلب	40	22	38	

و بالتالي فإن تكاليف النقل الإجمالية للحل الأساسي هي :

$$Z = 35\times 2 + 5\times 3 + 22\times 4 + 15\times 5 + 23\times 3 = 317$$

ISSN: 2617-989X

قبل البدء بالتأكد يجب أن يتوفر شرط أساسي من أجل التأكد و هو أن يكون عدد الخانات المعبأة تساوي عدد الأسطر + عدد الأعمدة – واحد أي :

$$m+n-1=6-1=5$$ محققة

لاستخدام التوزيع المعدل نعتمد الجدول من الشكل :

		V_1	V_2	V_3	
		1	2	3	عرض
U_1	A	2 35	5	7	35
U_2	B	3 5	4 22	5 15	42
U_3	C	6	7	3 23	23
	طلب	40	22	38	

بالنسبة للخلايا الداخلة بالحل لدينا $U_i+V_j=C_{ij}$ نوجد المجاهيل U_i و V_j مع فرض أن أول U_i مساوية للصفر و ذلك لتسهيل الحل:

- الخلية $(1,1)$: $$U_1+V_1=2 \Rightarrow V_1=2$$
- الخلية $(2,1)$: $$U_2+V_1=3 \Rightarrow U_2=1$$
- الخلية $(2,2)$: $$U_2+V_2=4 \Rightarrow V_2=3$$
- الخلية $(2,3)$: $$U_2+V_3=5 \Rightarrow V_3=4$$
- الخلية $(3,3)$: $$U_3+V_3=3 \Rightarrow U_3=-1$$

و الآن لنوجد الخلايا الحدية للخلايا غير المعبئة و ذلك من المعادلة :

$$\sigma_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$$

$$\sigma_{12} = C_{12} - U_1 - V_2 = 5 - 0 - 2 = 3 > 0$$

$$\sigma_{13} = C_{13} - U_1 - V_3 = 7 - 0 - 4 = 3 > 0$$

$$\sigma_{31} = C_{31} - U_3 - V_1 = 6 + 1 - 2 = 5 > 0$$

$$\sigma_{32} = C_{32} - U_3 - V_2 = 7 + 1 - 3 = 5 > 0$$

بما أن جميع القيم موجبة بالتالي فإن جدول النقل الأخير يمثل الحل الأمثل و هو نفس الحل الذي حصلنا عليه بطريقة التخطي.

3.طريقة التكلفة الدنيا و التأكد بطريقة التخطي أو التأكد بطريقة التوزيع المعدل:

إن طريقة التوزيع هذه تعتمد على إيجاد أقل تكلفة داخل الجدول و نقوم بإشباعها ثم ننتقل إلى الخلية التالية لأقل تكلفة و هكذا حتى نقوم بتوزيع كامل العرض على الطلب و بعد التوزيع نقوم باستخدام إحدى الطريقتين التخطي أو المعدل للتأكد من الحل الأساسي و إجراء عملية النقل بين الخلايا إن لزم الأمر و لكن قبل البدء باستخدام عملية التخطي أو المعدل يجب التأكد من أن $m+n-1$ يساوي عدد الخلايا المعبئة.

مثال 6-5:

أوجد حل مسألة النقل باستخدام التكلفة الدنيا و التأكد بطريقة التخطي

	1	2	3	عرض
A	6	5	2	35
B	5	4	3	42
C	3	7	6	23
طلب	40	22	38	

الحل:

نبحث عن أقل تكلفة داخل الجدول فنلاحظ أن القيمة 2 التي موجودة في الخلية (1,3) هي أدنى تكلفة نقوم بإشباعها بأكبر قيمة ممكنة وهي 35 و بالتالي فإن العرض للفرع A تم توزيعه بشكل كامل بعد إلغاء الفرع نبحث عن أدنى قيمة للفرعين B و C فنجد أن القيمة 3 هي أدنى قيمة ولكن القيمة 3 متواجدة في الخليتين (2,3) و (3,1) نأخذ أي واحدة من الخليتين و نقوم بإشباعها فعلى سبيل المثال إذا أخذنا الخلية (2,3) فإننا نستطيع إشباعها فقط بالقيمة 3 و ذلك المركز 3 بحاجة فقط إلى 38 وحدة. بالتالي نقوم بإلغاء المركز الثالث بالتالي يتبقى لدينا فقط الخلايا (2,1) و (2,2) و (3,2) و (3,1) و إن أدنى قيمة في تلك الخلية هي القيمة 3 في الخلية (3,1) نقوم بإشباعها بالرقم 23 بالتالي فإن الفرع C قد أشبع و يجب إلغاؤه. وهكذا و الجدول التالي يوضح ذلك.

	1	2	3	عرض	باقي 1	باقي 2	باقي 3
A	6	5	2 35	35	0		0
B	5 17	4 22	3 3	42	39	39	0
C	3 23	7	6	23		0	0
طلب	40	22	38				
باقي 1			3				
باقي 2			0				
باقي 3	17						
باقي 4	0	0	0				

بالتالي فإن الجدول الأساسي للحل بالتوزيع بطريقة التكلفة الدنيا هي :

	1	2	3	عرض
A	6	5	2 35	35
B	5 17	4 22	3 3	42
C	3 23	7	6	23
طلب	40	22	38	

و بالتالي فإن تكاليف النقل الإجمالية للحل الأساسي هي :

$$Z=35\times2+17\times5+22\times4+3\times3+23\times3=321$$

و للتأكد بطريقة التخطي نتأكد بدايةً من الشرط : $m+n-1=5$ محقق و بالتالي يمكننا استخدام طريقة التخطي و بحساب القيم الحدية للخلايا غير المعبئة نجد:

$$\sigma_{11}=6+3-5-2=2\geq0$$ لا ننقل

$$\sigma_{12}=5+3-4-2=2>0$$ لا ننقل

$$\sigma_{32}=7+5-4-3=5>0$$ لا ننقل

$$\sigma_{32}=5+6-3-3=5>0$$ لا ننقل

بما أن جميع القيم موجبة فإننا حصلنا على الحل الأمثل وهو :

- فرع A يزود المركز 3 بـ 35 وحدة.
- فرع B يزود المركز 1 بـ 17 وحدة و المركز 2 بـ 22 وحدة و المركز 3 بـ 3 وحدات.
- فرع C يزود المركز 1 بـ 23 وحدة .
- التكلفة الإجمالية هي لنقل المواد هي 321.

4.طريقة فوقل و التأكد بطريقة التخطي أو التأكد بطريقة التوزيع المعدل:

تعتمد هذه الطريقة على :

1- إيجاد قيم الفروق بين أدنى قيمتين في كل سطر و كل عمود و تسمى هذه القيم بقيم فوقل.

2- إيجاد اكبر قيمة من قيم فوقل المحسوبة في الخطوة الأولى و بعد ذلك نبحث عن أقل تكلفة مقابلة لذلك الرقم سوءاً في السطر أو العمود و تشبع تلك الخلية .

3- نعود للخطوة الأولى ونوجد أرقام فوقل مرة أخرى و هكذا حتى ننهي التوزيع. بعد الانتهاء من التوزيع يكون هذا الحل هو الحل الأساسي الأول .

4- نستخدم طريقة التخطي أو المعدل لإتمام سيرورة الحل و إيجاد الحل الأمثل.

5- في حال وجود قيمتين متساويتين من قيم فوقل فإننا نقارن بين التكلفتين الدنيويتين و نختار الأدنى منهم و في حال التساوي نأخذ لا على التعيين .

مثال 6-5:

أوجد حل مسألة النقل باستخدام طريقة فوقل و التأكد بطريقة التوزيع المعدل

	1	2	3	عرض
A	6	5	2	35
B	5	4	3	42
C	3	7	6	23
طلب	40	22	38	

الحل:

نوجد قيم فوقل الأولى :

	1	2	3	عرض	فرق 1	فرق 2	فرق 3
A	6	5	2 / 35	35	3	-	-
B	5 / 17	4 / 22	3 / 3	42	1	1	1
C	3 / 23	7	6	23	3	3	-
طلب	40	22	38				
فرق 1	2	1	1				
فرق 2	2	3	3				
فرق 3	5	4	3				

الفروقات :للصفوف

3- الصف الأول : أدنى قيمة 2 و القيمة التي تليها 5 الفرق 3 .

4- الصف الثاني : أدنى قيمة 3 و القيمة التي تليها 4 الفرق 1.

5- الصف الثالث : أدنى قيمة 3 و القيمة التي تليها 6 الفرق 3.

للأعمدة:

6- العمود الأول : أدنى قيمة 3 و القيمة التي تليها 5 الفرق 2.

7- العمود الثاني : أدنى قيمة 4 و القيمة التي تليها 5 الفرق 1.

8- العمود الثالث : أدنى قيمة 2 و القيمة التي تليها 3 الفرق 1.

أعلى قيمة من قيم فوق هي 3 نلاحظ أنها مكررة لذلك نختار التكلفة الدنيا بين السطرين الأول و الثالث و هي 2 و نشبع الخلية (35)

و هكذا حتى ننتهي من التوزيع وفق الجدول السابق.

و بعد التوزيع نحصل على جدول التوزيع الجديد و هو بالشكل :

	1	2	3	عرض
A	6	5	2 35	35
B	5 17	4 22	3 3	42
C	3 23	7	6	23
طلب	40	22	38	

قبل البدء بالتأكد يجب أن يتوفر شرط أساسي من أجل التأكد و هو أن يكون عدد الخانات المعبأة تساوي عدد الأسطر + عدد الأعمدة – واحد أي :

$$m+n-1=6-1=5$$ محققة

لاستخدام التوزيع المعدل نعتمد الجدول من الشكل :

		V_1	V_2	V_3	
		1	2	3	عرض
U_1	A	6	5	2 35	35
U_2	B	5 17	4 22	3 3	42
U_3	C	3 23	7	6	23
	طلب	40	22	38	

بالنسبة للخلايا الداخلة بالحل لدينا $U_i+V_j=C_{ij}$ نوجد المجاهيل U_i و V_j مع فرض أن أول U_i مساوية للصفر و ذلك لتسهيل الحل:

9- الخلية $(1,3)$: $U_1+V_3=2 \Rightarrow V_3=2$

10- الخلية $(2,3)$: $U_2+V_3=3 \Rightarrow U_2=1$

11- الخلية $(2,1)$: $U_2+V_1=5 \Rightarrow V_1=4$

12- الخلية $(2,2)$: $U_2+V_2=4 \Rightarrow V_2=3$

13- الخلية $(3,1)$: $U_3+V_1=3 \Rightarrow U_3=-1$

و الآن لنوجد الخلايا الحدية للخلايا غير المعبئة و ذلك من المعادلة :

$$\sigma_{ij}=C_{ij}-U_i-V_j$$

$$\sigma_{11}=C_{11}-U_1-V_1=6-0-4=2>0$$

$$\sigma_{12} = C_{12} - U_1 - V_2 = 5 - 0 - 3 = 2 > 0$$

$$\sigma_{32} = C_{32} - U_3 - V_2 = 7 + 1 - 3 = 5 > 0$$

$$\sigma_{33} = C_{33} - U_3 - V_3 = 6 + 1 - 2 = 5 > 0$$

بما أن جميع القيم موجبة بالتالي فإن جدول النقل الأخير يمثل الحل الأمثل.

14- فرع A يزود المركز 3 بـ 35 وحدة.

15- فرع B يزود المركز 1 بـ 17 وحدة و المركز 2 بـ 22 وحدة و المركز 3 بـ 3 وحدات.

16- فرع C يزود المركز 1 بـ 23 وحدة .

17- التكلفة الإجمالية هي لنقل المواد هي 321.

حالة خاصة أولى :

إن الشرط الرئيسي لإيجاد الحل الأساسي و الأمثل في مسألة النقل هو تساوي العرض مع الطلب أي :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$$

غير أن من الصعب عملياً تحقق هذا الشرط ففي بعض الأحيان يكون العرض أكبر من الطلب و في بعض الأحيان يكون الطلب أكبر من العرض .

18- في حال كان العرض أقل من الطلب :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{j=1}^{m} b_j$$

بالتالي ينبغي إضافة سطر و القيمة التي يحويها تساوي الفرق بين العرض و الطلب و تكاليف النقل في هذا السطر جميعها معدومة .

19- في حال كان العرض أكبر من الطلب :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i > \sum_{j=1}^{m} b_j$$

بالتالي ينبغي إضافة عمود و القيمة التي يحويها تساوي الفرق بين العرض و الطلب و تكاليف النقل في هذا العمود جميعها معدومة .

مثال 6-6:

أوجد حل مسألة النقل باستخدام طريقة فوقل و التأكد بطريقة التخطي

	1	2	3	عرض
A	12	5	7	35
B	9	7	3	42
C	3	7	6	23
طلب	40	22	68	

الحل:

نلاحظ أن مجموع العرض أقل من مجموع الطلب $\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{j=1}^{m} b_j ; 100 < 130$

لذلك نقوم بإضافة سطر قيمة العرض به 30 و جميع تكاليف تساوي الصفر فيصبح العرض مساوي للطلب و بالتالي نبدأ بالتوزيع بطريقة فوقل بالشكل :

	1	2	3	عرض	فرق 1	فرق 2	فرق 3	فرق 4
A	12 17	5	7 18	35	2	5	5	5
B	9	7	3 42	42	4	6	-	-
C	3 23	7	6	23	3	3	3	3
D	0	0 22	0 8	30	0	0	0	−
طلب	40	22	68					
فرق 1	3	5	3					
فرق 2	3	−	3					
فرق 3	3	−	6					
فرق 4	−	−	−					

و بالتالي يصبح التوزيع الأول بطريقة فوقل هو :

	1	2	3	عرض
A	12 17	5	7 18	35
B	9	7	3 42	42
C	3 23	7	6	23
D	0	0 22	0 8	30
طلب	40	22	68	

و بالتالي فإن تكاليف النقل الإجمالية للحل الاساسي هي :

$$Z = 17\times 12 + 18\times 7 + 42\times 3 + 23\times 3 + 30\times 0 = 525$$

و للتأكد بطريقة التخطي نتأكد بداياً من الشرط : $m+n-1=6$ محقق و بالتالي يمكننا استخدام طريقة التخطي و بحساب القيم الحدية للخلايا غير المعبئة نجد:

$$\sigma_{12} = 5+0-7-0 = -2 < 0$$ ننقل

ننقل فيصبح الجدول بالشكل :

	1	2	3	عرض
A	12 / 17	5 / 18	7	35
B	9	7	3 / 42	42
C	3 / 23	7	6	23
D	0	0 / 4	0 / 26	30
طلب	40	22	68	

و بالتالي فإن تكاليف النقل الإجمالية هي :

$$Z = 17\times12+18\times5+42\times3+23\times3+30\times0 = 489$$

بحساب القيم الحدية للخلايا غير المعبئة نجد:

$$\sigma_{13} = 7+0-5-0 = 2 > 0$$ لا ننقل

$$\sigma_{21} = 9+5+0-12-3-0 = -1 < 0$$ ننقل

بعد النقل يصبح الجدول بالشكل:

	1	2	3	عرض
A	12 13	5 22	7	35
B	9 4	7	3 38	42
C	3 23	7	6	23
D	0	0	0 30	30
طلب	40	22	68	

و بالتالي فإن تكاليف النقل الإجمالية هي :

$$Z = 13\times12 + 22\times5 + 4\times9 + 38\times3 + 23\times3 + 30\times0 = 485$$

بحساب القيم الحدية للخلايا غير المعبئة نجد:

$$\sigma_{13} = 16 - 15 = 1 > 0$$ لا ننقل

$$\sigma_{22} = 19 - 12 = 7 > 0$$ لا ننقل

$$\sigma_{32} = 19 - 8 = 11 > 0$$ لا ننقل

$$\sigma_{33} = 15 - 6 = 9 > 0$$ لا ننقل

$$\sigma_{41} = 3 - 9 = -6 < 0$$ ننقل

بعد النقل يصبح الجدول بالشكل:

	1	2	3	عرض
A	12 13	5 22	7	35
B	9	7	3 42	42
C	3 23	7	6	23
D	0 4	0	0 26	30
طلب	40	22	68	

و بالتالي فإن تكاليف النقل الإجمالية هي :

$$Z = 13\times12 + 22\times5 + 42\times3 + 23\times3 + 30\times0 = 461$$

بحساب القيم الحدية للخلايا غير المعبئة نجد:

$$\sigma_{13} = 7 - 15 = -5 < 0$$ ننقل

بعد النقل يصبح الجدول بالشكل:

	1	2	3	عرض
A	12	5 22	7 13	35
B	9	7	3 42	42
C	3 23	7	6	23
D	0 17	0	0 13	30
طلب	40	22	68	

و بالتالي فإن تكاليف النقل الإجمالية هي :

$$Z = 13 \times 7 + 22 \times 5 + 42 \times 3 + 23 \times 3 + 30 \times 0 = 396$$

بحساب القيم الحدية للخلايا غير المعبئة نجد:

$\sigma_{11} = 15 - 7 = 5 > 0$ لا ننقل

$\sigma_{21} = 9 - 3 = 6 > 0$ لا ننقل

$\sigma_{22} = 14 - 8 = 6 > 0$ لا ننقل

$\sigma_{32} = 14 - 8 = 6 > 0$ لا ننقل

$\sigma_{33} = 6 - 3 = 3 > 0$ لا ننقل

$\sigma_{42} = 7 - 5 = 2 > 0$ لا ننقل

بما أن جميع القيم موجبة بالتالي فإن جدول النقل الأخير يمثل الحل الأمثل.

20- فرع A يزود المركز 2 بـ 22 وحدة و المركز 3 بـ 13 وحدة.

21- فرع B يزود المركز 3 بـ 42 وحدة .

22- فرع C يزود المركز 1 بـ 23 وحدة .

23- التكلفة الإجمالية هي لنقل المواد هي 396.

حالة خاصة 2 :

حالة التفكك وهي الحالة التي يكون فيها m+n−1 لا يساوي عدد الخلايا المعبئة و الذي يعد الشرط الرئيس في استخدام حالة التخطي أو التوزيع المعدل. لحل هذه المشكلة نضع قيمة تصورية ε (وتعد قيمته قريبة جداً من الصفر و يهمل في نهاية الحل) في خانة أو أكثر حتى يصبح m+n−1 يساوي عدد الخانات المعبئة .و تعتبر هذه القيمة قيمة مساعدة لإيجاد الحل و تهمل في النهاية.

مثال 6-7:

أوجد حل مسألة النقل باستخدام طريقة فوقل و التأكد بطريقة التخطي :

	1	2	3	عرض
A	12	5	1	30
B	9	7	3	42
C	6	7	6	20
طلب	15	47	30	

الحل:

العرض يساوي الطلب نوزع حسب فوقل :

	1	2	3	عرض	فرق 1	فرق 2	فرق 3
A	12	5	1 30	30	4	-	-
B	9	7 42	3	42	4	2	-
C	6 15	7 5	6	20	3	1	-
طلب	15	47	30				
فرق 1	3	2	3				
فرق 2	3	0	−				
فرق 3	−	−	−				

و بالتالي يصبح التوزيع الأول بطريقة فوقل هو :

	1	2	3	عرض
A	12	5	1 30	30
B	9	7 42	3	42
C	6 15	7 5	6 ε	20
طلب	15	47	30	

و بالتالي فإن تكاليف النقل الإجمالية للحل الأساسي هي :

$$Z = 30\times1 + 42\times7 + 15\times6 + 5\times7 = 449$$

و للتأكد بطريقة التخطي نتأكد بداياً من الشرط : $m+n-1=5$ غير محقق و بالتالي نضيف القيمة التصورية ε و بالتالي يمكننا استخدام طريقة التخطي و بحساب القيم الحدية للخلايا غير المعبئة نجد:

$\sigma_{11} = 18-7 = 11 > 0$ لا ننقل

$\sigma_{12} = 10-8 = 2 > 0$ لا ننقل

$\sigma_{21} = 16-13 = 3 > 0$ لا ننقل

$\sigma_{23} = 10-13 = -3 < 0$ ننقل

بعد النقل يصبح الجدول بالشكل:

	1	2	3	عرض
A	12	5	1 30	30
B	9	7 42	3 ε	42
C	6 15	7 5	6	20
طلب	15	47	30	

و بحساب القيم الحدية للخلايا غير المعبئة نجد:

$\sigma_{11} = 19-14 = 5 > 0$ لا ننقل

لا ننقل $\sigma_{12} = 8 - 8 = 0 \geq 0$

لا ننقل $\sigma_{21} = 16 - 13 = 3 > 0$

لا ننقل $\sigma_{23} = 13 - 10 = 3 > 0$

بما أن جميع القيم موجبة بالتالي فإن جدول النقل الأخير يمثل الحل الأمثل.

24- فرع A يزود المركز 3 بـ 30 وحدة.

25- فرع B يزود المركز 2 بـ 42 وحدة .

26- فرع C يزود المركز 1 بـ 15 وحدة و المركز 2 بـ 5 وحدات .

27- التكلفة الإجمالية هي لنقل المواد هي 449.

5. طريقة عرض المسألة النقل بتعظيم الأرباح وتحويلها إلى الشكل الرياضي:

(مسألة النقل : تعظيم الأرباح و العائد)

يمكننا كتابة النموذج الرياضي بشكل عام لمسألة النقل في حال تعظيم الأرباح و العائد بالشكل الرياضي :

$$Max\ \ Z=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}p_{ij}x_{ij}$$

$$S/c\begin{cases}\sum_{j=1}^{m}x_{ij}=a_i\\ \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=b_j\\ \sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{j=1}^{m}b_j\\ x_{ij}\geq 0\ \ ,p_{ij}\geq 0\end{cases}$$

$$i=1,2,3,\dots,n$$
$$j=1,2,3,\dots,m$$

حيث m يمثل عدد المراكز و n يمثل عدد الفرع الموزعة.

و يمكننا حل هذه المسألة إما بطريقة الزاوية الشمالية الغربية أو بطريقة أعلى عائد و هي مكافئة تماماً لأدنى تكاليف في حال التدنئة.

يتم اختبار الحل إما بطريقة لتخطي أو بطريقة التوزيع المعدل و لكن بدل القيمة السالبة يتم النقل تكون القيمة الموجبة يجب عندها النقل حتى نحصل على الحل الأمثل.

مثال 6-8:

لدى شركة ثلاث فروع إنتاج و تقوم ببيع منتجاتها لثلاث مراكز و الجدول التالي يوضح الكمية المنتجة من الفروع الثلاث و الطلب من المراكز الثلاث و الأرباح المحصل عليها لكل فرع من كل مركز للوحدة الواحدة . و المطلوب أوجد حل تلك المسألة في حال تعظيم الأرباح باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية و التأكد بطريقة التخطي :

	مركز 1	مركز 2	مركز 3	عرض
الفرع 1	10	8	7	30
الفرع 2	18	15	13	42
الفرع 3	9	12	15	20
طلب	15	47	30	

الحل:

بما أن العرض و الطلب متساوٍ نقوم بالتوزيع بطريقة الزاوية الشمالية الغربية :

	مركز 1	مركز 2	مركز 3	عرض
الفرع 1	10 15	8 15	7	30
الفرع 2	18	15 32	13 10	42
الفرع 3	9	12	15 20	20
طلب	15	47	30	

و بالتالي فإن الأرباح الإجمالية للحل الأساسي هي :

$$Z=15\times 10+15\times 8+32\times 15+10\times 13+20\times 15=1180$$

و للتأكد بطريقة التخطي نتأكد بداياً من الشرط : $m+n-1=5$ محقق و بالتالي يمكننا استخدام طريقة التخطي و بحساب القيم الحدية للخلايا غير المعبئة نجد:

$$\sigma_{11}=22-21=1>0$$ ننقل

نلاحظ أن القيمة أكبر من الصفر و في حال تعظيم الأرباح إذا كانت القيمة أكبر من الصفر ننقل أي الحالة بعكس التكلفة الدنيا.

بعد النقل نحصل على الجدول التالي:

	مركز 1	مركز 2	مركز 3	عرض
الفرع 1	10 15	8 5	7 10	30
الفرع 2	18	15 42	13	42
الفرع 3	9	12	15 20	20
طلب	15	47	30	

و بالتالي فإن الأرباح الإجمالية للحل الأساسي هي :

$$Z=15\times 10+5\times 8+10\times 7+42\times 15+20\times 15=1190$$

و بحساب القيم الحدية للخلايا غير المعبئة نجد:

$$\sigma_{21} = 26 - 25 = 1 > 0$$ ننقل

بعد النقل نحصل على الجدول التالي:

	مركز 1	مركز 2	مركز 3	عرض
الفرع 1	10	8 20	7 10	30
الفرع 2	18 15	15 27	13	42
الفرع 3	9	12	15 20	20
طلب	15	47	30	

و بالتالي فإن الأرباح الإجمالية للحل الأساسي هي :

$$Z = 20\times 8 + 10\times 7 + 15\times 18 + 27\times 15 + 20\times 15 = 1205$$

و بحساب القيم الحدية للخلايا غير المعبئة نجد:

$$\sigma_{11} = 25 - 26 = -1 < 0$$ لا ننقل

$$\sigma_{23} = 21 - 22 = -1 < 0$$ لا ننقل

$$\sigma_{31} = 31 - 41 = -10 < 0$$ لا ننقل

$$\sigma_{32} = 25 - 30 = -5 < 0$$ لا ننقل

بما أن جميع القيم سالبة بالتالي فإن جدول النقل الأخير يمثل الحل الأمثل.

28- فرع الأول يزود المركز 1 بـ 15 وحدة و المركز 3 بـ 10وحدات.

29- فرع B يزود المركز 2 بـ 20 وحدة و المركز 2 بـ 27 وحدة.

30- فرع C يزود المركز 3 بـ 20 وحدة.

31- الأرباح الإجمالية هي 1205.

مثال 6-9:

أوجد حل المثال 6-8 في حال تعظيم الأرباح باستخدام طريقة أعلى ربح و التأكد بطريقة التخطي :

عرض	مركز 3	مركز 2	مركز 1	
30	7	8	10	الفرع 1
42	13	15	18	الفرع 2
20	15	12	9	الفرع 3
	30	47	15	طلب

32- الحل:

العرض و الطلب متساوٍ نقوم بالتوزيع وفق الجدول :

	مركز 1	مركز 2	مركز 3	عرض
الفرع 1	10	8 20	7 10	30
الفرع 2	18 15	15 27	13	42
الفرع 3	9	12	15 20	20
طلب	15	47	30	

و بالعودة للمثال 6-8 نلاحظ أنه الحل الأمثل.

الفصل السابع : مسألة التخصيص Assignment Problems

ملخص الفصل :

يتناول هذا الفصل مفهوم مسألة التخصيص وطرائق حل تلك المسألة إما بطريقة الحصر الاحتمالي أو بالطريقة الهنغارية (طرح الصفوف و الأعمدة) في حالتي أقل التكاليف و أعلى الإيرادات و الأرباح.

المخرجات و الأهداف التعليمية :

1- التعرف على استخدامات مسألة التخصيص في المجال الاقتصادي .

2- تحويل مسألة التخصيص للشكل الرياضي.

3- حل مسألة التخصيص بطريقة الحصر الاحتمالي.

4- حل مسألة التخصيص بالطريقة الهنغارية.

مخطط الفصل :

1- مسألة التخصيص في حال التكلفة الدنيا :

1-1-الطريقة الأولى : طريقة الحصر الاحتمالي في حال التكلفة الدنيا

1-2- الطريقة الثانية : الطريقة الهنغارية في حال التكلفة الدنيا

2- مسألة التخصيص في حال تعظيم الأرباح

2-1- الطريقة الأولى : طريقة الحصر الاحتمالي للحل في حال تعظيم الأرباح

2-2- الطريقة الثانية : الطريقة الهنغارية في حال الربح الأعظمي

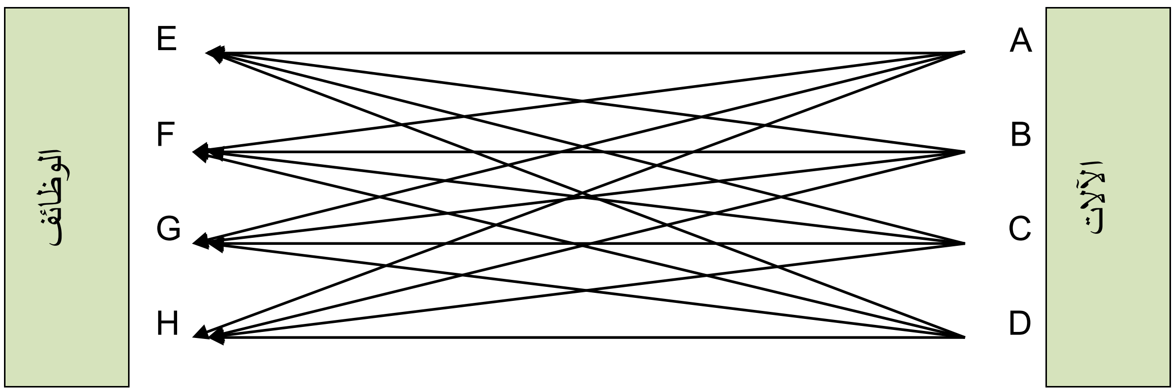
مسألة التخصيص

معظم المؤسسات التي تقوم بإنجاز المشاريع تعاني من مشاكل تخصيص الموارد البشرية و المادية.

لذلك جاءت مسألة التخصيص لحل تلك المشكلة.

مسألة التخصيص بشكل عام هي عملية توزيع المهام بشكل جيد و بأقل التكاليف أو توزيع المهام للحصول على أعلى أرباح أي أن مسألة التخصيص لا تهتم فقط بإيجاد الحل الأمثل بأقل التكاليف إنما في بعض الأحيان تستخدم لإيجاد الحل الأمثل في تعظيم الأرباح و بداية سنوضح هذه المسألة بشكل توضيحي لفهم الحالة .

لنفرض أنه لدينا أربع آلات A, B, C, D مختلفة ولكن تستطيع كل واحد منهم إنجاز أي واحدة من المهام الأربع الموكلة لها و هي E,F,G,H. و لكن تكاليف إنجاز المهمة تختلف من آلة إلى آلة أخرى و بالتالي يمكننا تمثيل العلاقة بالشكل:



1- مسألة التخصيص في حال التكلفة الدنيا :

و سنقوم في هذا الفصل بطرح المشكلة و طريقة حلها عبر الأمثلة و ذلك للتوضيح و بشكل مباشر.

مثال 7-1:

ليكن لدينا ثلاث آلات تغليف و هذه الآلات A, B, C من أنواع مختلفة و تقوم بتغليف ثلاث أنواع من المواد الغذائية D, E, F و كانت تكلفة التغليف لكل مكنة مع كل منتج مختلفة و بالدراسة المالية التحليلية للتكاليف تبين أن قيمة التكاليف تعطى بالجدول التالي :

الأنواع / الآلات	D	E	F
A	5	7	3
B	4	6	4
C	3	4	5

و السؤال هنا ما هو أفضل تخصيص للآلات بحيث تتحمل الشركة أقل تكاليف ممكنة للتغليف و تشغيل الآلات الثلاث و بمعنى أخرى ما هي الآلة التي ستقوم بتغليف الصنف D و الآلة التي ستقوم بتغليف الصنف E و الآلة التي ستقوم بتغليف الصنف F؟

1-1-الطريقة الأولى : طريقة الحصر الاحتمالي في حال التكلفة الدنيا

في هذه الحالة نحدد كل الاحتمالات الممكنة بحيث يتم تخصيص آلة واحدة لكل مهمة تغليف و هنا يكون عدد الحالات مساوي لثلاث عاملي. وهي على الشكل التالي :

1- (A,D), (B,E),(C,F)

2- (A,D), (B,F),(C,E)

3- (A,E), (B,D),(C,F)

4- (A,E), (B,F),(C,D)

5- (A,F), (B,D),(C,E)

6- (A,F), (B,E),(C,D)

و للتفسير للحالة الأولى أي تخصص الآلة A لتغليف الصنف D و الآلة B لتغليف الصنف E و الآلة C لتغليف الصنف F و هكذا تفسر بقية الحالات .

و بعد حساب وضع جميع الاحتمالات الممكنة نقوم بحساب التكاليف لكل احتمال و هي على الشكل التالي:

الاحتمال	الاختبارات	التكاليف
1	(A,D), (B,E),(C,F)	5+6+5=16
2	(A,D), (B,F),(C,E)	5+4+4=13
3	(A,E), (B,D),(C,F)	7+4+5=16
4	(A,E), (B,F),(C,D)	7+4+3=14
5	(A,F), (B,D),(C,E)	3+4+4=11
6	(A,F), (B,E),(C,D)	3+6+3=12

نختار من بين تلك التكاليف القيمة الأدنى و هي القيمة 11 و بالتالي يكون هو الحل الأمثل في مسألة التخصيص و يصبح الحل هو :

1- الآلة A لتغليف الصنف F و بتكلفة قدرها 3 ليرة سورية للقطعة.

2- الآلة B لتغليف الصنف D و بتكلفة قدرها 4 ليرة سورية للقطعة.

3- الآلة C لتغليف الصنف E وبتكلفة قدرها 4 ليرة سورية للقطعة.

و يكون الحل الأمثل للتكلفة الدنيا هي :11 ليرة سورية .

ملاحظة :

عدد الاحتمالات الممكنة يعتمد على عدد الآلات في المسألة فعل سبيل المثال إذا كان لدينا N آلة فإن الاحتمالات الممكنة هو $N!$ و التي قيمتها تساوي :

$$N! = N(N-1)(N-2)......(2)(1)$$

لكن هذه الطريقة يمكن استخدامها في حال كان عدد الآلات قليل أما في حال كان العدد كبير فإن عملية الحصر الاحتمالي عملية صعبة جداً فلذلك نلجأ لطرق أخرى.

1-2- الطريقة الثانية : الطريقة الهنغارية في حال التكلفة الدنيا

و هذه الطريقة ابتكرها العام كوهن و يمكننا تلخيصها كما يلي :

1- نأخذ أقل تكلفة من كل صف و نطرحها من ذلك الصف.

2- نأخذ أقل تكلفة من كل عمود و نطرحها من ذلك العمود.

3- نحصل على جدول جديد يحوي مجموعة من القيم الصفرية .

4- نقوم بتقطير الأصفار في الأعمدة و الأسطر بأقل عدد ممكن من الأقطار فإذا كان عدد الإطارات الأفقية أو العمودية مساوٍ لعدد الآلات أو أصناف التغليف نكون قد حصلنا على الأمثل.

5- أما في حال كان عدد الإطارات أقل من عدد الآلات بالتالي فإنه لا يمكننا التخصيص بالتالي نقوم باختيار أصغر قيمة من القيم غير المتواجدة في الأقطار و نطرحها من جميع القيم غير المتواجدة في الأقطار و نضيفها إلى نقاط التقاطع للأطر.

مثال 7−2 :

الأنواع / الآلات	D	E	F
A	5	7	3
B	4	6	4
C	3	4	5

أوجد حل المسألة المثال 7−1 بالطريقة الهنغارية:

- أقل قيمة في السطر الأول هي 3 نطرحها من الرقمين 5 و 7
- أقل قيمة من السطر الثاني هي 4 نطرها من الرقمين 4 و 6
- أقل قيمة من السطر الثالث هي 3 نطرحها من الرقمين 4 و 5

فنحصل على الجدول التالي:

الأنواع / الآلات	D	E	F
A	2	4	0
B	0	2	0
C	0	1	2

- أقل قيمة في العمود الأول هي 0
- أقل قيمة في العمود الثاني هي 1 نطرها من الرقمين 2 و 4
- أقل قيمة في العمود الثالث هي 0 .

فنحصل على الجدول التالي:

الأنواع / الآلات	D	E	F
A	2	3	0
B	0	1	0
C	0	0	2

و بالتقطير نلاحظ :

إن عدد الأقطار يساوي عدد الآلات و بالتالي نكون حصلنا على الحل الأمثل و هو على الشكل:

نلاحظ أنه في الصف الأول يوجد صفر وحيد (A,F) و بالتالي نخصص الآلة A لتغليف الصنف F و بالتالي فإن التكلفة هي : 3. نقوم بإلغاء السطر و العمود .

في الصف الثاني بعد الشطب يصبح لدينا صفر وحيد (B,D) و بالتالي نخصص الآلة B لتغليف الصنف D و بالتالي فإن التكلفة هي : 4 نقوم بإلغاء السطر و العمود .

في الصف الأخير هنالك صفر وحيد (C,E) و بالتالي نخصص الآلة C لتغليف الصنف E و بالتالي فإن التكلفة هي :4

و بالتالي فإن الحل الأمثل للتكلفة الدنيا هي : $Z=3+4+4=11$

مثال 7-3 :

أوجد حل مسألة التخصيص التالية بالطريقة الهنغارية.

الأنواع الآلات	D	E	F
A	15	3	11
B	9	11	7
C	13	5	7

- أقل قيمة في السطر الأول هي 3 نطرحها من الرقمين 11 و 15
- أقل قيمة من السطر الثاني هي 7 نطرها من الرقمين 9 و 11
- أقل قيمة من السطر الثالث هي 5 نطرحها من الرقمين 7 و 13

فنحصل على الجدول التالي:

الأنواع الآلات	D	E	F
A	12	0	8
B	2	4	0
C	8	0	2

- أقل قيمة في العمود الأول هي 2 نطرحها من القيمتين 12 و 8
- أقل قيمة في العمود الثاني هي 0
- أقل قيمة في العمود الثالث هي 0 .

فنحصل على الجدول التالي:

الأنواع الآلات	D	E	F
A	10	0	8
B	0	4	0
C	6	0	2

و بالتقطير نلاحظ :

إن عدد الأقطار لا يساوي عدد الآلات و بالتالي : نختار أصغر رقم من خارج الإطارين و هو الرقم 2.

نطرحه من جميع الأرقام التي خارج الإطارين و نضيفها إلى نقاط التقاطع للأطر فنحصل على الجدول التالي:

الأنواع الآلات	D	E	F
A	8	0	6
B	0	6	0
C	4	0	0

بالتقطير نلاحظ :

عدد القطر مساوي لعدد الآلات و بالتالي فإننا نكون حصلنا على الحل الأمثل و هو على الشكل:

نلاحظ أنه في الصف الأول يوجد صفر وحيد (A,E) و بالتالي نخصص الآلة A لتغليف الصنف E و بالتالي فإن التكلفة هي : 3. نقوم بإلغاء السطر و العمود .

في الصف الأخير هنالك صفر وحيد (C,F) و بالتالي نخصص الآلة C لتغليف الصنف F و بالتالي فإن التكلفة هي :5 نقوم بإلغاء السطر و العمود.

في الصف الثاني بعد الشطب يصبح لدينا صفر وحيد (B,D) و بالتالي نخصص الآلة B لتغليف الصنف D و بالتالي فإن التكلفة هي : 9.

و بالتالي فإن الحل الأمثل للتكلفة الدنيا هي: $Z=3+5+9=17$

ملاحظة :

في حال كان عدد الأسطر لا يساوي عدد الأعمدة أي عدد الآلات لا يساوي أصناف التغليف فإننا نلجأ إما لإضافة سطر وهمي أو عمود وهمي حسب الحالة و تكون جميع التكاليف فيه مساوية للصفر ثم يتم إيجاد الحل حسب الطريقة .

مثال 7–4:

أوجد حل مسألة التخصيص بالطريقة الهنغارية بالتكلفة الدنيا:

الأنواع الآلات	E	F	G
A	5	7	3
B	4	4	4
C	3	6	5
D	5	6	4

الحل :

بما أن عدد الأسطر أربعة و عدد الأعمدة ثلاثة فإننا نقوم بإضافة عمود وهمي جميع تكاليفه مساوية للصفر لتصبح مسألة التخصيص بالشكل:

الأنواع الآلات	E	F	G	H
A	5	7	3	0
B	4	4	4	0
C	3	6	5	0
D	5	6	4	0

- أقل قيمة في السطر الأول و الثاني و الثالث و الرابع هي صفر فيبقى الجدول كما هو عليه .
- أقل قيمة في العمود الأول هي 3 نطرحها من باقي القيم.
- أقل قيمة في العمود الثاني هي 4 نطرحها من باقي القيم
- أقل قيمة في العمود الثالث هي 2 نطرحها من باقي القيم
- في العمود الرابع جميع القيم أصفار

فنحصل على الجدول التالي:

الأنواع الآلات	E	F	G	H
A	2	3	0	0
B	1	0	1	0
C	0	2	2	0
D	2	2	1	0

في الصف الأخير هنالك صفر وحيد (D,H) و بالتالي نخصص الآلة D لتغليف الصنف H بالتالي فإن التكلفة هي :0 نقوم بإلغاء السطر و العمود.

نلاحظ أنه في الصف الأول يوجد صفر وحيد (A,G) و بالتالي نخصص الآلة A لتغليف الصنف G و بالتالي فإن التكلفة هي : 3. نقوم بإلغاء السطر و العمود .

في الصف الثاني بعد الشطب يصبح لدينا صفر وحيد (B,F) و بالتالي نخصص الآلة B لتغليف الصنف F و بالتالي فإن التكلفة هي : 4.

في الصف الثالث بعد الشطب يصبح لدينا صفر وحيد (C,E) و بالتالي نخصص الآلة C لتغليف الصنف E و بالتالي فإن التكلفة هي : 3.

و بالتالي فإن الحل الأمثل للتكلفة الدنيا هي: $Z=0+3+4+3=10$

2- مسألة التخصيص في حال تعظيم الأرباح :

تعد طرائق حل مسألة التخصيص لتعظيم الأرباح مشابهة لطرائق الحل في حال التكلفة الدنيا و هي طريقة الحصر الاحتمالي و الطريقة الهنغارية .

2-1- الطريقة الأولى : طريقة الحصر الاحتمالي للحل في حال تعظيم الأرباح:

في هذه الطريقة يتم إيجاد جميع الاحتمالات للحل و بعد ذلك نقوم بانتقاء الحل الذي يعطينا أعلى الأرباح و يكون هو الحل الأمثل.

مثال 7-5:

أوجد حل مسألة التخصيص في حال تعظيم الأرباح طريقة الحصر الاحتمالي :

الأنواع / الآلات	D	E	F
A	15	3	11
B	9	11	7
C	13	5	7

الحل:

في هذه الحالة نحدد كل الاحتمالات الممكنة و هي على الشكل التالي :

1- (A,D), (B,E),(C,F)

2- (A,D), (B,F),(C,E)

3- (A,E), (B,D),(C,F)

4- (A,E), (B,F),(C,D)

5- (A,F), (B,D),(C,E)

6- (A,F), (B,E),(C,D)

و بعد حساب وضع جميع الاحتمالات الممكنة نقوم بحساب الأرباح لكل احتمال و هي على الشكل التالي:

الاحتمال	الاختبارات	الأرباح
1	(A,D), (B,E),(C,F)	15+11+7=33
2	(A,D), (B,F),(C,E)	15+7+5=27
3	(A,E), (B,D),(C,F)	3+9+7=19
4	(A,E), (B,F),(C,D)	3+7+13=23
5	(A,F), (B,D),(C,E)	11+9+5=25
6	(A,F), (B,E),(C,D)	11+11+13=35

نختار من بين تلك الأرباح القيمة الأعلى و هي القيمة 35 و بالتالي يكون هو الحل الأمثل:

- الآلة A لتغليف الصنف F و بربح قدرها 11 ليرة سورية للقطعة.
- الآلة B لتغليف الصنف E و بربح قدرها 11 ليرة سورية للقطعة.
- الآلة C لتغليف الصنف D و بربح قدرها 13 ليرة سورية للقطعة.

و يكون الحل الأمثل للربح هو :35 ليرة سورية .

2-2- الطريقة الثانية : الطريقة الهنغارية في حال الربح الأعظمي:

ويتم في هذه الحالة باتباع نفس خطوات التكلفة الدنيا تماماً ولكن لكن قبل اتباع تلك الخطوات نطرح جميع قيم الجدول من أعلى قيمة موجودة فيه .

مثال 7−6:

أوجد حل مسألة التخصيص في حال تعظيم الأرباح بالطريقة الهنغارية :

الأنواع الآلات	D	E	F
A	15	3	11
B	9	11	7
C	13	5	7

نلاحظ أن أكبر قيمة هي 15 . نطرح جميع قيم الجدول من القيمة 15 فنحصل على الجدول التالي:

الأنواع الآلات	D	E	F
A	0	12	4
B	6	4	8
C	2	10	8

- أقل قيمة في السطر الأول هي 0
- أقل قيمة من السطر الثاني هي 4 نطرها من الرقمين 4 و 6
- أقل قيمة من السطر الثالث هي 2 نطرحها من الرقمين 10 و 8

فنحصل على الجدول التالي:

الأنواع الآلات	D	E	F
A	0	12	4
B	2	0	4
C	0	8	6

- أقل قيمة في العمود الأول هي 0
- أقل قيمة في العمود الثاني هي 0
- أقل قيمة في العمود الثالث هي 4 نطرحها من باقي الأرقام.

فنحصل على الجدول التالي:

الأنواع الآلات	D	E	F
A	0	12	0
B	2	0	0
C	0	8	2

نلاحظ أنه في الصف الأخير هنالك صفر وحيد (C,D) و بالتالي نخصص الآلة C لتغليف الصنف D و بالتالي فإن الربح هو :13 نقوم بإلغاء السطر و العمود.

في الصف الأول (A,F) و بالتالي نخصص الآلة A لتغليف الصنف F و بالتالي فإن الربح هو : 11. نقوم بإلغاء السطر و العمود .

في الصف الثاني بعد الشطب يصبح لدينا صفر وحيد (B,E) و بالتالي نخصص الآلة B لتغليف الصنف E و بالتالي فإن الربح هو : 11 .

و بالتالي فإن الحل الأمثل للربح هو :Z=11+11+13=35

المراجع

المراجع العربية:

- السكر، علي (1972), بحوث العمليات . جامعة القاهرة.
- العيسى، موفق (1999), بحوث العمليات تطبيقات و خوارزميات. دار الحامد.
- راتول، محمد (2006), بحوث العمليات . ديوان المطبوعات الجامعية – الجزائر .
- كعبور، محمد (1992) , أساسيات بحوث العمليات – نماذج و تطبيقات. منشورات كلية المحاسبة, غريان.
- هيكل، أحمد (1980), مقدمة في بحوث العمليات. جامعة القاهرة، طبعة ثانية.

المراجع الأجنبية[1]

- Abraham Charnes, William W. Cooper, *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*, Volumes I and II, New York, John Wiley & Sons, 1961
- Abraham Charnes, William W. Cooper, A. Henderson, *An Introduction to Linear Programming*, New York, John Wiley & Sons, 1953
- C. West Churchman, Russell L. Ackoff & E. L. Arnoff, *Introduction to Operations Research*, New York: J. Wiley and Sons, 1957.
- C. H. Waddington, *O. R. in World War 2: Operational Research Against the U-boat*, London, Elek Science, 1973.

[1] تم وضع المراجع التي تعتبر الكتب المرجعية في هذا المجال والتي كل المراجع التي نستخدمها تكون معتمدة عليها.

ISSN: 2617-989X