الجامعة الافتراضية السورية
SYRIAN VIRTUAL UNIVERSITY

# بحوث العمليات


الدكتور طلال عبود
الدكتور طاهر حسن




ISSN: 2617-989X

Books & Refrences

**بحوث العمليات**

الأستاذ الدكتور طلال عبود - الأستاذ الدكتور طاهر حسن

من منشورات الجامعة الافتراضية السورية

الجمهورية العربية السورية 2021



**Operations Research**

Talal Abboud

Taher Hasan

Publications of the Syrian Virtual University (SVU)

Syrian Arab Republic, 2021

# الفهرس :

# الفصل الأول: مدخل إلى بحوث العمليات والتحليل الكمي

# Chapter (I): Introduction to Operations Research and Quantitative Analysis

**كلمات مفتاحية:**

بحوث العمليات operations research، القرار Decision، الأمثلية Optimality

**ملخص الفصل:**

بحوث العمليات هو تخصص جديد نسبياً، نشأ في الحرب العالمية الثانية، وأصبح شائعاً للغاية في جميع أنحاء العالم. تم استخدام بحوث العمليات بنجاح ليس فقط في العمليات العسكرية، ولكن أيضاً في الأعمال التجارية والحكومية والصناعة. واليوم، لبحوث العمليات عدد من التطبيقات، وبالمثل، فإن لديها عدداً من القيود، والتي ترتبط أساساً بالوقت والمال والمشكلة التي تنطوي عليها عملية بناء النموذج. تكتسب بحوث العمليات اليوم قبولاً لأنها تحسن فعالية صناعة القرار لدى المديرين في جميع مجالات الأعمال تقريباً. يتناول هذا الفصل المفاهيم الأساسية في بحوث العمليات بعرض طبيعة ومفهوم بحوث العمليات، والعوامل التي ساعدت على تطورها وشروط تطبيقها ومجالات تطبيقها، ومراحل التحليل الكمي، ونبين العلاقة بين المدير ومتخصص بحوث العمليات.

**المخرجات والأهداف التعليمية:**

1. استيعاب مفهوم بحوث العمليات بالمعنى العام وعلى مستوى المنظمات في المجال الاداري والاقتصادي.

2. التعرف على الأسباب الرئيسية لظهور علم بحوث العمليات.
3. التمكّن من فهم مراحل تطور بحوث العمليات.
4. التمييز بين تقنيات بحوث العمليات.
5. التمكّن من شرح وتمييز المراحل الأساسية للتحليل الكمي.
6. استيعاب شروط تطبيق بحوث العمليات.

**مخطط الفصل:**

1-1) مفهوم بحوث العمليات.

1-2) التطور التاريخي لبحوث العمليات.

1-3) أسباب ظهور بحوث العمليات ووظائفها.

1-4) شروط تطبيق بحوث العمليات.

1-5) مراحل التحليل الكمي.

1-6) العلاقة بين المدير ومتخصص بحوث العمليات

1-7) أدوات وتقنيات بحوث العمليات

1-8) المجالات التطبيقية لبحوث العمليات.

1-9) حدود بحوث العمليات.

## مقدمة

تزداد المشكلات وتتعقد في واقع الحياة العملية كلما تنوع النشاط واتسع مجاله، وعلى المدير أن ينظم وينسق ويتعامل مع البيئة الخارجية، فيتخذ في كل مرحلة من مراحل عمله قراراً معيناً يتوقف عليه نجاح المدير والمنظمة معاً. ومع نمو حجم المنظمات بمختلف أنواعها وتعقد مشكلاتها وتزايد صعوبة معالجة جميع العوامل التي تؤثر على القرار، أصبحت الحاجة ماسة إلى تطوير أساليب لاتخاذ القرارات حتى تتلاءم مع نوعية المشكلات وتكون قادرة على إيجاد الحلول الملائمة لها والوصول إلى أفضلها. إن إدارة المنظمات هي بطبيعتها عمل جماعي لها أهداف تتطلب التحديد والتحقيق، وتتألف من أنشطة ووظائف محددة تقوم بها تهدف إلى استمرارها عن طريق تشغيل عناصر الإنتاج التي تحتاج إلى فكر إداري يُحسن استثمار الأموال وتخطيط الإنتاج وضغط التكاليف وأعمال الرقابة ورفع مستوى الإنتاجية.

تتجلى أهمية الفكر الإداري بالقرارات التي تتخذها الإدارة، كون عملية صناعة القرار هو جوهر عملية الإدارة ويتغلغل فيها لدرجة يكاد يستحيل التمييز بينهما. حين يقوم المدير بهذه العملية الإدارية لتحقيق أهداف المنظمة، إنما يحاول الوصول إلى تلك الأهداف باتخاذ مجموعة متسلسلة من القرارات، كل منها يدفع موقف المدير خطوة للوصول إلى الهدف النهائي، لذلك تعد عملية صناعة القرارات جوهر عمل المدير وأساسه، وأهم عناصرها أنها تمثل نقطة البدء بالنسبة لجميع الأنشطة والفعاليات اليومية في حياة المنظمة، ولأن التوقف عن ممارستها يؤدي إلى شلل العمل والنشاط وتراجع الأداء.

إن القرار الإداري مرتبط بوجود مشكلة إدارية تحتاج حلاً معيناً، وقد يكون هناك حلول متعددة لمواجهتها تطرح

للنقاش ويتم دراســـتها وتقييمها حتى يتم اختيار الحل الأكثر ملائمة. إن القرارات المتخذة تؤثر على مســـتقبل المنظمة ومدى نجاحها أو فشلها وعلى العاملين ونشاطهم فيها. لهذا فإن القرارات الإدارية هي المحور الأساسي والفعال والحلقة الرئيسية في العملية الإدارية التي لا تتكامل بدونها، فوظائف الإدارة لن تتحقق ولن تنفذ إلا إذا تم اتخاذ قرارات بنشـأتها وبشـأن جميع الأنشـطة الأخرى في المنظمة والأفراد والعاملين والمتعاملين معها وحتى مع البيئة الخارجية التي تحيط بها.

يزداد الاهتمام بالجانب العلمي للإدارة واسـتخدام الأسـاليب الكمية لتحليل الظواهر الإدارية وقياسـها، والتي تجعل عملية صناعة القرارات أكثر دقة وفعالية، على الرغم من أن العديد من المتغيرات الإدارية يصعب السيطرة عليها وإخضـاعها للطرق العلمية وتحليلها والتعامل معها على أسـاس رقمي، كونها ترتبط بالعنصـر البشـري والعوامل المؤثرة فيه الذي يسعى دائماً إلى تطوير أساليب متميزة متطورة لتحليل البيانات تحليلاً كمياً يتفق مع سير الإدارة في الاتجاه العلمي، الذي يهدف إلى تحليل عملية صـناعة القرارات الإدارية باسـتخدام الأسـاليب الكمية المختلفة ومن بينها بحوث العمليات ونظرية القرارات والطرق الإحصائية والمحاسبية، ... وغيرها، التي تهدف للوصول إلى قرارات أكثر دقة ومنطقية.

## 1-1 مفهوم بحوث العمليات

### Concept of Operations Research

يطلق البريطانيون (والأوروبيون) على بحوث العمليات بـــــ "البحث التشـغيليOperational Research"، بينما يطلق عليها الأمريكيون "بحوث العمليات Operations Research" – ولكن غالباً ما يتم اختصـار كلاهما إلى "

OR"فقط. يســـــتخدم مصـــــطلح آخر لهذا المجـال هو "علم الإدارة Management Science MS"، ويجمع الأمريكيون أحياناً المصـطلحين OR و MS معاً بـــــ "OR/MS" أو "ORMS" ومع ذلك، اسـتخدمت أحياناً مصطلحات أخرى للتعبير عنها مثل "الهندسة الصناعية Industrial Engineering IE" و"علم القرار Decision Science DS". في السـنوات الأخيرة جرى تحرك نحو توحيد هذه المصـطلحات بمصـطلح واحد للمجال، وهو مصطلح بحوث العمليات "Operations Research OR".

بحوث العمليات هو تخصـص حديث نوعاً ما، لذلك، فإن إعطاء تعريف رسـمي لمصـطلح بحوث العمليات مهمة صـــعبة لأن حدوده ومحتواه غير محددين. معلوم أن النشـــاط الرئيســـي للمدير هو اتخاذ القرار، حيث نتخذ في حياتنا اليومية القرارات حتى بدون أن نلاحظها. يتم اتخاذ القرارات ببســـاطة من خلال الفطرة الســـليمة والحكم والخبرة دون استخدام أي نموذج رياضـي أو أي نموذج آخر في المواقف البسيطة، لكن هناك الكثير من القرارات التي تواجهها الإدارة تكون معقدة للغاية. تبدأ بحوث العمليات عندما يتم اســـتخدام التقنيات الرياضـــية والكمية لإثبات القرار الذي يتم اتخاذه. ومن الأمثلة على ذلك تخطيط شـــبكة النقل العام في مدينة لها تخطيطها الخاص للمصـــانع أو الكتل الســـكنية، أو العثور على مزيج المنتجات المناســـب عند وجود عدد كبير من المنتجات بمساهمات ربح مختلفة ومتطلبات إنتاج وما إلى ذلك. أدوات بحوث العمليات ليست من تخصـص واحد، بل من تخصـصـات مختلفة مثل الرياضـيات والإحصـاء والاقتصـاد وعلم النفس والهندسـة وما إلى ذلك، وتجمع بين هذه الأدوات لتكوين مجموعة جديدة من المعرفة لصنع القرار. اليوم، أصبحت بحوث العمليات تخصصاً مهنياً يتعامل مع تطبيق الأساليب العلمية لاتخاذ القرار، وخاصة تخصيص الموارد النادرة بتوفير أساس منطقي لاتخاذ القرارات في حالة عدم وجود معلومات كاملة.

يمكن التعامل مع بحوث العمليات على أنها علم، بمعنى أنه يصـف سـلوك الأنظمة ويفهمها ويتنبأ بها. ويشـارك المتخصصون في بحوث العمليات في ثلاثة جوانب تقليدية للعلم، وهي على النحو الآتي:

- تحديد سلوك الأنظمة.
- تحليل سلوك الأنظمة من خلال تطوير النماذج المناسبة.
- التنبؤ بالسلوك المستقبلي باستخدام هذه النماذج.

تتميز بحوث العمليات عن البحوث الهندسـية الأخرى بالتركيز على تحليل العمليات ككل، والتي قدمت من خلال تعدد التخصـصـات حلولاً لمشـكلات العمليات العسـكرية خلال الحرب العالمية الثانية، ونجحت أيضـاً من خلال التقنيات الكمية المقدمة للمديرين المهتمين بتحليل الإجراءات البديلة الممكنة فطبقت في مجال الأعمال والصناعة لتحديد حجم المخزون، وسياسات إعادة الطلب، والموقع الأمثل وحجم المستودعات، وسياسات الإعلان، وما إلى ذلك.

**تعريف بحوث العمليات**

كما ذكر سـابقاً، إن تعريف وتحديد بحوث العمليات هي مهمة شـاقة بسـبب النطاق الواسـع لتطبيقاتها، ومن الصعب إعطاءها تعريف دقيق. ومع ذلك، توجد بعض التعاريف الخاصة ببحوث العمليات التي أكد عليها العديد من الخبراء والجمعيات حول هذا الموضوع معاً، نورد أهم التعريفات الواردة في الأدبيات المتخصصة حول ماهية بحوث العمليات.

وفقاً لجمعية بحوث العمليات The Operational Research Society في بريطانيا، فإن البحث التشـغيلي هو

تناول العلم الحديث للمشـــكلات المعقدة الناشـــئة لإدارة الأنظمة الكبيرة من الأفراد والآلات والمواد والأموال في الصناعة والأعمال والحكومة والدفاع، باعتماد منهج مميز بتطوير نموذج علمي للنظام، يتضمن قياسات لعوامل مثل التغيير والمخاطر، والتي يمكن من خلالها التنبؤ ومقارنة نتائج القرارات أو الاســـتراتيجيات أو الضـــوابط البديلة، والغرض من ذلك هو مساعدة الإدارة على تحديد سياستها وإجراءاتها علمياً.

يؤكد (Randy Robinson, 2006) أن بحوث العمليات هي تطبيق الأســـاليب العلمية لتحســـين فعالية العمليات والقرارات والإدارة، من خلال وسائل مثل تحليل البيانات وإنشاء نماذج رياضية واقتراح مناهج مبتكرة، حيث يقوم متخصصو بحوث العمليات بتطوير المعلومات القائمة على أساس علمي والتي تعطي نظرة ثاقبة وتوجه عملية صنع القرار، كما يقومون بتطوير البرامج والأنظمة والخدمات والمنتجات ذات الصلة.

ويعتبر (Arnoff & Ackoff & Churchman, 1957) بحوث العمليات نهج علمي لصـــنع القرار بالتطبيق المنهجي للطرق والتقنيات والأدوات الكمية لتحليل المشكلات التي تنطوي على تشغيل عمليات النظام التنظيمية. أما (Saaty, 1972)، فيعتبر بحوث العمليات كأداة لتحسين جودة الإجابات، فهي فن إعطاء وتقديم إجابات سيئة للمشكلات التي يتم تقديم إجابات أسوأ عليها. و بحوث العمليات حسب (Starr & Miller, 1973) أن هي نظرية القرار التطبيقي، باستخدام أي وسيلة علمية أو رياضية أو منطقية لمحاولة التغلب على المشكلات التي تواجه السلطة التنفيذية، عندما تحاول تحقيق عقلانية شاملة مستمرة في التعامل مع مشكلة القرار. ويؤكد (Pocock, 1953) أن بحوث العمليات هي علم تطبيقي ومنهجية علمية (تحليلية، ورياضية، وكمية) والتي توفر، من خلال تقييم المعنى العام لمختلف مسارات العمل البديلة في نظام الإدارة، أساساً محسناً لقرارات الإدارة".

وأكد كل من (Kimball & Morse, 1951) بأنها نظرية للقرارات التطبيقية، أي هي نهج كمي وطريقة علمية

لتزويد الإدارات التنفيذية بأســـاس كمي للقرارات المتعلقة بالعمليات التي تخضـــع لســـيطرتها. ويعرف (George, 2011) بحوث العمليات بأنها نهج مخطط (طريقة علمية محدثة) وفريق متعدد التخصـصـات من أجل تمثيل العلاقات الوظيفية المعقدة كنماذج رياضية لغرض توفير أساس كمي لصنع القرار والكشف عن مشكلات جديدة للتحليل الكمي. ووصـف (Klekamp & Thierauf, 1975) بحوث العمليات على أنها طريقة، ونهج، ومجموعة من التقنيات، والنشـاط الجماعي، لمزيج من العديد من التخصـصـات (الرياضـيات، الهندسـة، الاقتصـاد)، وحتى الدين ربما يكون بعض هذه الأشياء.

ويميّز (Cook, 1980) بحوث العمليات بأنه مجال جديد لصـنع القرار باسـتخدام المعرفة العلمية من خلال جهد جماعي متعدد التخصصات لغرض تحديد الاستخدام الأفضل للموارد المحدودة. ويعرف (Taha, 2011) بحوث العمليات، بمعنى أكثر عمومية، فوصفها بأنها تطبيق الأساليب والتقنيات والأدوات العلمية، على المشكلات التي تنطوي على عمليات نظام ما لتزويد أولئك الذين يتحكمون في العمليات بالحلول المثلى للمشـــكلات. ويرى (Hiller & Lieberman, 2005) بحوث العمليات على أنها طريقة علمية لتزويد الإدارات التنفيذية بأساس كمي للقرارات التي تقع تحت سيطرتهم.

## 1-2 التطور التاريخي لبحوث العمليات

### Historical development of operations research

بحوث العمليات هو تخصـص جديد نسـبياً، ففي حين أنه قبل 70 عاماً كان من الممكن دراسـة الرياضـيات أو الفيزياء أو الهندســة (على ســبيل المثال) في الجامعة، لم يكن من الممكن دراســة بحوث العمليات، بل لم يكن مصطلح بحوث العمليات موجوداً قبل ذلك. لم تبدأ بحوث العمليات بطريقة منهجية إلا في أواخر ثلاثينيات القرن

العشــرين في المملكة المتحدة، فمن المتفق عليه عموماً أن بحوث العمليات ظهرت إلى حيز الوجود كنظام خلال الحرب العالمية الثانية، ومع ذلك، يمكن تتبع نماذج وتقنيات معينة لبحوث العمليات قبل الحرب العالمية الثانية بكثير.

يمكن تلخيص تطور نشأة بحوث العمليات بشكل مختصر بالشكل الآتي:

على مر التاريخ، كان من الشائع إيجاد تعاون بين العلماء وضـباط الجيش لنفس الهدف وهو إيجاد الحكم والقرار الأمثل في المعركـة. في الواقع، يعتبر العديـد من الخبراء بدايـة البحـث العملي في القرن الثـالـث قبـل الميلاد، خلال Punic War II الحرب البونيقية الثانية، مع التحليل والحل الذي وضــعه أرخميدس Archimedes للدفاع عن مدينة سـيراكيوز Syracuse المحاصــرة من الرومان. وعند البحث للتعرف على اختراعاته سـنجد المنجنيق، ونظام المرايا الذي أعد لتشتيت قوارب العدو من خلال استخدامهم لأشعة الشمس.

شارك ليوناردو دافينشي Leonardo DaVinci عام 1503 كمهندس في الحرب ضد بريسا Prisa بسبب معرفته بأساليب القصف وبناء السفن والعربات المدرعة والمدافع والمنجنيق وآلات حربية أخرى.

يُعتقد أن تشـــارلز باباج Charles Babbage هو الأب الروحي لبحوث العمليات بســبب بحثه حول تكاليف النقل وفرز البريد الذي تم تحقيقه في Uniform Penny Post في إنجلترا عام 1840.

من وجهة النظر الرياضية، عملت الرياضيات في القرنين السابع عشر والثامن عشر، نيوتن Newton، لايبنتز Leibnitz، برنولي ولاغرانج Bernoulli and Lagrange، في الحصــول على الحد الأقصــى والحد الأدنى من الوظائف المحددة. قام الرياضـي الفرنسي جان بابتيست جوزيف فورييه Jean Baptiste Joseph Fourier برسم أساليب البرمجة الخطية الحالية. وفي أواخر القرن الثامن عشر، وضـع غاسبار مونج Gaspar Monge سوابق

الطريقة الرسـومية بفضـل تطويره للهندسـة الوصـفية. في عام 1911 ظهرت حركة الإدارة العلمية في الظهور عندما قدم العالم فردريك تايلور كتابه (مبادئ الإدارة العلمية) والذي دعا فيه إلى اسـتخدام أسـلوب البحث العلمي في الإدارة. وفي عام 1914 نشر العالم البريطاني لانكستر FW Lanchaster بحثا بين فيه العلاقة بين التفوق في مقدرة الانسـان وفعالية السـلاح الذي يمتلكه. كما اسـتخدم Lanchester البحث التشـغيلي حين أجرى دراسـة رياضية حول الفاعلية الباليستية للخصوم وطور، من نظام المعادلات التفاضلية، قانون Lanchester's Square، والذي يمكن باستخدامه تحديد نتيجة معركة الجيش.

في الولايات المتحدة الأمريكية، قام العالم المعروف توماس أديسـون T. Edison بإيجاد الطرق الأكثر فعالية لمناورة السـفن خلال الحرب العالمية الأولى والتي من شـأنها أن تقلل من الخسـائر لدى مواجهة الغواصـات المعادية. وفي عام 1917 قام المهندس الدنماركي ايرلنج Erlang, Agner Krarup بنشـر أبحاث هامة تتعلق بتسهيل استخدامات الهاتف لسكان مدينة كوبنهاجن Copenhagen. وقد اعتبر عمله الأساس الرياضي لما يسمى نظرية صفوف الانتظار Queuing theory.

نشـر جانوس فون نيومان Janos Von Neumann عمله المسـمى "نظرية الألعاب"Theory of Game والذي قدم أسـاسـيات علماء الرياضـيات للبرمجة الخطية، وفي وقت لاحق، في عام 1947، نظر إلى التشـابه بينهم في برمجة المشـكلات الخطية ونظرية المصـفوفة. في عام 1939، طور الرياضـي الروسـي كانتروفيتش L. Kantorovich، بالاشتراك مع الرياضي الهولندي كوبمانز T. Koopmans، النظرية الرياضية المسماة "البرمجة الخطية"، وبفضـل ذلك حصـل على جائزة نوبل. ما بين عامي 1941 و 1944، درس Kantorovich و Koopmans بطرق مستقلة مشكلة النقل لأول مرة، واسـتخدموا طرقاً هندسـية مرتبطة بنظرية Minkowski في التحدب.

في أواخر الثلاثين من عمره، قدم جورج جوزيف ســتيجلر Joseph Stigler مشــكلة معينة تعرف بالنظام الغذائي الخاص الأمثل أو المعروفة أكثر بمشكلة النظام الغذائي، والتي نشأت بسبب قلق الجيش الأمريكي لضمان بعض الطلبات الغذائية لقواته بأقل ســعر. تم حلها بطريقة الكشــف عن مجريات الأمور التي تختلف فقط في بعض النقاط عن الحل الذي تم تقديمه بعد سنوات بطريقة Simplex.

كل الأفكار والبحوث الســابقة أســهمت بولادة علماً جديداً يســمى بحوث العمليات لم يتبلور بشــكل مســتقل حتى الحرب العالمية الثانية، أثناء معارك إنجلترا، حيث كانت القوات الجوية الألمانية Luftwaffe، تخضع البريطانيين لغارات جوية قاســية، اســتدعت الحكومة البريطانية، التي تبحث عن طريقة ما للدفاع عن بلادها، العديد من العلماء من مختلف التخصـصــات لمحاولة حل المشـكلة للحصـول على أقصــى فائدة من الرادارات التي لديهم. بفضــل عمل هؤلاء المتخصـصــين في تحديد التوطين الأمثل للهوائيات حصــلوا على أفضــل توزيع للإشــارات لمضــاعفة فعالية نظام الدفاع الجوي. لملاحظة نطاق هذا النظام الجديد، أنشــأت إنجلترا مجموعات أخرى من نفس الطبيعة من أجل الحصــول على أفضــل النتائج في النزاع. ثم أنشــأت الولايات المتحدة الأمريكية، عندما انضـمت إلى الحرب عام 1942، مشـروع SCOOP (الحسـاب العلمي للبرامج المثلى)، حيث كان يعمل جورج برنارد دانتزيغ G. Bernard Dantzig ، الذي طور في عام 1947 خوارزمية Simplex.

خلال الحرب الباردة، أراد الاتحاد الســوفيتي القديم URSS، المســتبعد من خطة مارشــال، التحكم في النقل الأرضــي، بما في ذلك الطرق النهرية، من برلين. من أجل تجنب تســليم المدينة، وخضــوعه لتكون جزءاً من المنطقة الشــيوعية الألمانية، قررت إنجلترا والولايات المتحدة تزويد المدينة، أو عن طريق القوافل المرافقة (التي من شـأنها أن تؤدي إلى مواجهات جديدة) أو عن طريق جسـر جوي لتجنب بأي حال من الأحوال الانسـداد من

برلين. وهناك جانب آخر من المشـــكلات التي عملت فيها مجموعة SCOOP، في ديســــمبر من نفس العام، تمكنت أن تحمل 4500 طن يومياً، وبعد اســـتخدام دراســـات بحوث عمليات تم تحســـينها فوصـــل الإمداد إلى 8000–9000 طن يومياً في مارس 1949.

بعد الحرب العالمية الثانية، تصــــدرت الولايات المتحدة الأمريكية الترتيب العالمي في اســـتثمار الموارد (الطاقة والأســـلحة وجميع أنواع الإمدادات) التي أنجزتها من خلال نماذج التحســـين والبرمجة الخطية المتداخلة التي تم استخدامها. في الوقت نفسه، تم تطوير عقيدة بحوث العمليات، كما تطورت تقنيات الحساب والحواسيب، وبفضل ذلك انخفض وقت حل المشـــكلات. تم تقديم النتيجة الأولى لهذه التقنيات في عام 1952، عندما تم اســـتخدام كمبيوتر SEAC في المكتب الوطني للمعايير باستخدام طريقة للحصول على حل المشكلة. كان النجاح في وقت الحل مشجعاً للغاية حيث تم استخدامه على الفور لجميع أنواع المشكلات العسكرية، مثل تحديد الارتفاع الأمثل الذي يجب أن تطير به الطائرات لتحديد موقع غواصـــات العدو، وإدارة المؤســـســـات المالية للخدمات اللوجســـتية والتســـليح، بما في ذلك تحديد العمق الذي يجب إرســـال الشـــحنات إليه للوصـــول إلى غواصـــات العدو من أجل إحداث أكبر عدد من الضحايا، وهو ما تمت ترجمته بزيادة فعالية سلاح الجو بخمسة أضعاف.

ثم انتشـرت تطبيقات بحوث العمليات بطرق مختلفة في المملكة المتحدة والولايات المتحدة، ففي بريطانيا قام فريق من المهتمين بتكوين نادي بحوث العمليات والذي اصـطلح على تسـمية فيها بعد جمعية بحوث العمليات للمملكة المتحدة والتي أشرفت على إصدار مجلة علمية ربع سنوية، ابتداء من سنة 1950 والتي تعتبر الأولى من نوعها، كما تم تكوين جمعية بحوث العمليات الأمريكية ومعهد الإدارة العلمية في سـنة 1950 وقد أصـدرت بدورها مجلة بحوث العمليات سنة 1952.

في عام 1951، قامت لجنة بحوث العمليات التي شـــكلها المجلس القومي للبحوث في الولايات المتحدة الأمريكية

بنشر أول كتاب عن "طرق البحث في العمليات "Methods of Research in Operations" لـــ Morse and Kimball. في عام 1952 ظهرت جمعية بحوث العمليات الأمريكية إلى الوجود. جذب نجاح بحوث العمليات في الجيش انتباه مدراء الصناعة ورجال الأعمال الذين كانوا يبحثون عن حلول لمشكلاتهم التجارية المعقدة حيث تشجع هؤلاء على إدخال هذا العلم في إدارة المشاريع الاقتصادية.

في نهاية عقد الخمسينيات وبداية الستينيات من القرن الماضي، زاد الاهتمام ببحوث العمليات وتطويرها، نظراً لتطبيقها في مجال التجارة والصناعة. لنأخذ على سبيل المثال، مشكلة حساب خطة النقل المثلى لرمل البناء لأعمال التنوير لمدينة موسكو، التي كان لها 10 نقاط أصل و230 نقطة نهاية. لحلها، تم استخدام جهاز Strena للكمبيوتر، والذي استغرق 10 أيام في شهر يونيو من عام 1958 لإيجاد الحل، وساهم هذا الحل في تخفيض 11٪ من التكاليف المتوقعة.

في أيامنا هذه، يوجد لدى كل منظمة تقريباً في جميع البلدان موظفون يطبقون بحوث العمليات للاستخدام الأمثل للموارد المتوفرة. حيث انتشر استخدام بحوث العمليات في الحكومة من الجيش إلى مجموعة متنوعة من الإدارات على جميع المستويات. فانتقلت تطبيقات بحوث العمليات لحل مشكلات مثل تغذية تربية الماشية، وتوزيع مجالات الزراعة في الزراعة، ونقل البضائع، والموقع، وتوزيع الأفراد، والشبكات، ومشكلات قائمة الانتظار، والرسوم البيانية، ...، الخ، ولم يقتصر تطور بحوث العمليات على الولايات المتحدة الأمريكية والمملكة المتحدة، فهو شائع في معاهد الإدارة ومدارس الرياضيات في أغلب دول العالم. وقد تطور استعمال هذا العلم بشكل ملحوظ خاصة في ظل التطور الكبير الذي تم إحرازه في مجال تكنولوجيا المعلومات. ويمكن إيجاز مراحل تطور بحوث العمليات بالجدول (1−1).

| الجدول (1-1) مختصر مراحل تطور بحوث العمليات | | |
|---|---|---|
| 1654 | باسكال، فيرما Pascal, Fremat | التوقع الرياضي |
| | برنولي، Bernoulli, Waldegrave | مشكلات القرار في ظل عدم اليقين |
| 1776 | مونجي Monge | مشكلة اقتصادية ذات طابع اندماجي -- الحفر والردم |
| 1838 | كورنوت Cournot | النظرية الرياضية للثروة |
| 1917 | إرلانج Erlang | نظرية الصفوف |
| 1925-1921 | بوريل Borel | نظرية اللعبة |
| 1936 | كونيغ Konig | نظرية الرسم البياني |
| 1945-1939 | كانتروفيتش Kantorovich | البرمجة الخطية |
| 1940 | بلاكيت Blackett | قيادة أول فريق للبحث التشغيلي |

## 1-2 أسباب ظهور بحوث العمليات وأهميتها ووظائفها

**Reasons for the emergence of Operations Research and its functions**

### 1-2-1 أسباب ظهور بحوث العمليات

من أهم العوامل التي ساعدتْ على انتشار واستخدام بحوث العمليات في المنظمات المختلفة ما يلي:

1. تعقُّد المشـــكلات التي تواجهها الإدارة والحاجة إلى منهجٍ علمي لمعالجتها، وإدراك ورغبة الإدارة في حلّها بهذا الأسلوب.
2. اشـتداد حدة المنافسـة بين المنتجين، وما أدى (ويؤدي) من ارتفاعٍ في جودة السـلع والخدمات، وانخفاض في أسعارها.
3. تطوّر تكنولوجيا المعلومات والاتصـالات سـواء من ناحية المعدات أو البرامج وانتشـار اسـتخدامه في شـتى ميادين الحياة من قبل الأفراد والمنظمات في المجتمعات البشرية وقطاعات الأعمال.

4. اهتمام الجامعات بتعليم بحوث العمليات، وفتح أقسـام متخصصـةٍ للتدريس والبحث[1] فيها، ومنح درجاتٍ علميةٍ فيها.

5. انتشـار اسـتخدام شـبكة المعلومات الكونية الإلكترونية المعروفة بالإنترنت، والبريد الإلكتروني بين الأفراد والمؤسسات على الصعيدين المحلي والدولي.

6. انتشـار جمعيات بحوث العمليات في بلادٍ كثيرة، وإصـدار هذه الجمعيات لمجلاتٍ علميةٍ محكمةٍ تحتوي على بحوث وتجارب ونماذج تطبيقية في بحوث العملياتِ، وقيامها بعقد دورات تدريبية ومؤتمرات علمية.

### 1-2-2 أهمية بحوث العمليات

يشـير مصـطلح بحوث العمليات OR إلى النهج وكذلك مجال تطبيقاته. يعتبر نهج بحوث العمليات مفيداً بشـكل خاص في موازنة الأهداف المتنازعة (الأهداف أو المصالح) حيث يوجد العديد من مسارات العمل البديلة المتاحة لصـانعي القرار. بالمعنى النظري، يجب أن يكون القرار الأمثل هو الأفضـل للمنظمة ككل، وغالباً ما يطلق عليه الحل الأمثل لأنه عادة ما يسمى القرار الأفضل لقسم واحد أو أكثر من أقسام المنظمة قراراً دون المستوى الأمثل. يحاول نهج OR إيجاد الأمثل من خلال تحليل العلاقات المتبادلة بين مكونات النظام المشـاركة في المشكلة. إذا أخذنا مؤسـسـة كبيرة بها عدد من المتخصـصـين في الإدارة ولكن ليس بالضـرورة أن تكون جيدة التنسـيق. على سـبيل المثال، لنأخذ المشـكلة الأسـاسـية المتمثلة في الحفاظ على مخزون السـلع التامة الصـنع: بالنسـبة لمدير التسـويق، تعد هذه المخزونات مجموعة كبيرة ومتنوعة من المنتجات وسـيلة لتزويد عملاء الشـركة بما يريدون

---

[1]. تقوم كليات مختلفة في الجامعات بافتتاح قسـم بحوث العمليات، فيُمكن أن يوجد القسـم في كلية التجارة، أو كلية العلوم الاجتماعية، أو كلية العلوم، أو كلية الهندسة، أو كلية تكنولوجيا المعلومات، وهذا راجع إلى انتشار تطبيقات بحوث العمليات في هذه الكليات.

ومتى يريدون ذلك. من الواضح، وفقاً لمدير التسويق، أن المستودع المجهز بالكامل له أهمية قصوى بالنسبة للشركة، لكن يجادل مدير الإنتاج بأن دورة عمليات الإنتاج الطويلة معقدة ويفضل أن يكون نطاق المنتجات بدورة أقل، خاصة مع ضياع وقت كبير بتحويل الإنتاج من نوع إلى آخر. ستكون النتيجة مرة أخرى ميلاً إلى زيادة كمية المخزون المنقولة، لكن من الضروري بالطبع استمرار تشغيل المصنع. من ناحية أخرى، يرى المدير المالي أن المخزونات هي رأس مال مجمد ويدافع بقوة عن تخفيضها. أخيراً، يعتبر مدير شؤون الموظفين أن مستوى ثابتاً من الإنتاج مفيداً لعلاقات عمل أفضل. وهكذا، فإن كل هؤلاء المدراء يدّعون دعم مصالح المنظمة، لكنهم يفعلون ذلك فقط من وجهة نظرهم، وقد يتوصلون إلى حلول متناقضة، ومن الواضح أنهم جميعاً لا يمكن أن يكونوا على حق. في ضوء ما سبق، يحتاج صانع القرار، مهما كان تخصصه، إلى المساعدة، وفي محاولة لتقديم هذه المساعدة تم تطوير بحوث العمليات، التي تحاول حل تضارب المصالح بين مختلف أقسام المنظمة وتسعى إلى الحل الأمثل الذي قد لا يكون مقبولاً لقسم واحد ولكنه يصب في مصلحة المنظمة ككل.

بناءاً على ما تقدم، يمكن تلخيص أهمية بحوث العمليات فيما يلي:

- وسيلة مساعدة في اتخاذ القرارات الكمية باستخدام الطرق العلمية الحديثة.
- يعتبر علم بحوث العمليات من الوسائل العلمية المساعدة في اتخاذ القرارات بأسلوب أكثر دقة وبعيد عن العشوائية الناتجة عن التجربة والخطأ.
- بحوث العمليات هو فن وعلم في آن واحد فهي تتعلق بالتخصيص الكفء للموارد المتاحة وكذلك قابليتها الجديدة في عكس مفهوم الكفاءة والندرة في نماذج رياضية تطبيقية.

- يسـعى هذا العلم إلى البحث عن القواعد والأسـس الجديدة للعمل الإداري، وذلك للوصـول إلى أفضـل المستويات من حيث الجودة الشاملة، والمواصفات القياسية العالمية (ISO).
- تساعد على تناول مشكلات معقدة بالتحليل والحل والتي يصعب تناولها في صورتها العادية.
- تساعد على توفير تكلفة حل المشكلات المختلفة وذلك بتخفيض الوقت اللازم للحل.
- تساعد على تركيز الاهتمام على الخصائص الهامة للمشكلة دون الخوض في تفاصيل الخصائص التي لا تؤثر على القرار، ويساعد هذا في تحديد العناصر الملائمة للقرار واستخدامها للوصول إلى الأفضل.

### 1-2-3 وظائف بحوث العمليات

يمكن أن نجمل الوظائف الرئيسية لأساليب بحوث العمليات في ميدان الأعمال كالآتي:

- تسهيل عملية صناعة القرار.
- توفير حلول لمختلف المشكلات الإدارية.
- تعتبر أداة فعالة في مجال البحث العلمي في ميادين الأعمال.
- تساعد في تخصيص الموارد بشكل فعّال على الاحتياجات الكثيرة.
- المساعدة في اختيار الاستراتيجيات المختلفة في الإنتاج والتسويق والتمويل.
- المساعدة في تخفيض التكاليف في كثير من القرارات الإدارية.
- توفر أداة مهمة لدراسة ردود الفعل وتحليل الحساسية للكثير من القرارات المتخذة.

### 1-2-4 سمات بحوث العمليات

لبحوث العمليات عدة سمات رئيسية هي:

- السمة الأولى: تستخدم، كما أشرنا في تعريفها، الأساليب والطرق العلمية وذلك بالبدء أولاً بدراسة المشكلة المطروحة وتحديدها ومن ثم صياغتها صياغة علمية تشمل جميع جوانب المسألة قيد الدراسة. تمكن هذه الصياغة من بناء نموذج علمي للمسألة، وغالباً ما يكون نموذجاً رياضياً. ونتوخى من النموذج، رياضياً كان أم لا، أن يستوعب جوهر المسألة وأن يمثل خواصها الرئيسية تمثيلاً كافياً، بحيث تكون الحلول الناتجة من هذا النموذج صالحة للتطبيق على المشكلة الحقيقية التي نواجهها. كما نتوخى من النموذج أيضاً أن يعطينا نتائج إيجابية مفهومة لصانع القرار.

- السمة الثانية: شمول وجهة النظر فيما يخص المشكلات التي يواجهها النظام أو التنظيم ككل. فمن المعروف أن ما هو مفيد لأحد فروع تنظيم ما، يكون ضار لواحد أو أكثر من فروعة الأخرى مما يجعل من الصعب على جميع هذه الفروع أن تعمل ضمن أطر وأهداف مشتركة. فعلى سبيل المثال، كثيراً ما تنشأ في مشكلات التخزين الخاصة بتنظيم ما (شركة، منشأة، ...) تعارضات بين فروع المنظمة المختلفة. إذ يهتم فرعي إدارة الإنتاج والتسويق بزيادة الإنتاج وينتج عن ذلك زيادة في عدد الوحدات المخزنة، وبالتالي إلى تعطيل جزء من رأس المال والتعرض لانخفاض الأسعار، الأمر الذي يضر بالإدارة المالية التي تسعى بدورها إلى تخفيض النفقات، مما قد ينتج عنه انخفاض في كمية الإنتاج الأمر الذي يضر بإدارات الإنتاج والتسويق وقد ينتج عن ذلك أيضاً خسارة للزبائن في الأسواق. كما أشرنا في تعريف بحوث العمليات هي أنها تتبنى وجهة النظر التنظيمية بين عمليات وأنشطة النظام، فإنها تسعى بنفس الوقت لإزالة التعارضات

بين مختلف فروع أي تنظيم بطريقة تجعل التنظيم ككل أكثر انسـجاماً وتناسـقاً، وبطريقة تقود إلى إيجاد حل يوازن بين متطلبات جميع فروعه وبحيث يكون هذا الحل هو حلاً أمثلياً من بين جملة من الحلول الممكنة.

- السـمه الثالثة: الاسـتعانة بخبرات المختصـين في الحقول الأخرى. من غير السـهل أن يمتلك شـخص واحد مهارة في مختلف المفاهيم التي تتطلبها حل مشكلة ما في بحوث العمليات. كما أنه من غير السـهل أيضـاً أن يتمكن فرد بمفردة من التوصـــل إلى حل أمثل للمشـــكلة. لذلك يبدو من الأفضـــل أن يتولى فريق من المختصين في بحوث العمليات وبمساعدة عدد من المختصين أو الذين يملكون مهارات في الحقول المختلفة التي تقع فيها المشـــكلة المطروحة، كأن يكون أحدهم مختصـــاً في الرياضـــيات وآخر في الإحصـــاء والاحتمالات، وثالث في الاقتصـاد وخامس في علوم المعلوماتية، وسـادس في العلوم السـلوكية، وغيرها من التخصـصـات التي تسـاهم في تقديم المعلومات اللازمة لفهم وإحاطة المسألة المطروحة بشكل جيد. تجتمع خبرة هؤلاء جميعاً في فريق بحوث العمليات، الذي يقوم بدوره بصـياغة المسـألة صـياغة مناسـبة، وإيجاد النموذج الملائم لحلها. حيث يبدأ بعدها بالبحث عن الحل الأمثل وتطبيقه على المســألة المطروحة. نذكر في هذا الصـدد فريق Blackett’s Circuis كأول فريق بحوث عمليات قام بحل بعض مشـكلات العمليات العسكرية لبريطانيا خلال الحرب العالمية الثانية. فقد قام Blacrett من جامعة مانشستر والحائز على جائزة نوبل بتشـكيل فريقاً من أحد عشـر مختصـاً يمثلون سـبع مجالات معرفية منهم ثلاثة فيزيولوجيين واثنان في الفيزياء الرياضـية وواحد في الفيزياء الفلكية وضـابط في الجيش ومساح أراضـي ومختص في الفيزياء العامة واثنان من المختصين في الرياضيات. وبالرغم من أن أعضاء الفريق ليسوا جميعاً خبراء عسكرين، فقد نجح هذا الفريق بحل مشكلات عسكرية باستخدام منهج علمي من خبرة أعضاء الفريق مجتمعين.

- السـمة الرابعة: تهدف بحوث العمليات بالدرجة الأولى إلى إيجاد الحلول المثلى لمشـكلات النظام المدروس من بين جملة من الحلول الممكنة. مع أن المشـــكلات التي تتعرض بحوث العمليات لحلها هي مشـــكلات قراريه معقدة أحياناً، فإن تحسين الأمور الجارية لا يعني حلاً أمثلياً لهذه المشكلات بل لا بد من استعراض جميع الحلول الممكنة واجراء اختبار عليها لمعرفة أفضلها واختياره.

## 3-1 شروط تطبيق بحوث العمليات

## Conditions of application of operations research

يمكن أن تطبق أساليب بحوث العمليات في مختلف المؤسسات الإنتاجية والخدمية، بشرط توفّر شرطي: محدودية الموارد، وتعدد البدائل.

**أ- محدودية الموارد Limited resources**

تتصف الموارد التي تستعملها المنظمة سواء كان ذلك في العمليات الإنتاجية أو التجارية أو غيرها بكونها محدودة من حيث توفرها وسـهولة الحصـول عليها، بمعنى آخر أن الموارد المتوفرة للمنظمة لا يوجد منها ما يكفي بحيث يمكن الحصول عليها في أية لحظة ومن دون عناء وكلفة، وينطبق ذلك على:

- الموارد المالية.
- الموارد البشرية ذات الكفاءة العالية والمتخصصة.
- الموارد الأولية التي يتم الحصـول عليها مقابل ثمن وتؤلف نسـبة مهمة من عنصـر الكلفة للوحدة

المعيارية الواحدة من المنتج.

- الأراضـــي ذات المواصـفات النادرة كما هي الحال مع الأراضـــي التي يتواجد فيها النفط أو مناجم الفحم والذهب وغيرها.

**ب- تعدد البدائل**

يقصـــد بهذا الشـــرط أن هناك أكثر من بديل أو طريقة يتم بموجبها اســـتغلال الموارد المتاحة والمحدودة، فعند الحديث عن المستلزمات الأساسية لعملية الإنتاج وبالتحديد عن المواد الأولية الداخلة في صنع المنتج، يعني هذا الشـرط أن هناك أكثر من طريقة لاستغلال هذه المواد الأولية. مثلاً في العملية الإنتاجية لإنتاج الألبسـة الرجالية إذا كان المقصـــود بالموارد المتاحة المحدودة هي الأقمشـــة الرجالية الداخلة في إنتاج البدلات والســـراويل فإن المقصـــود بالبدائل هنا وجود أكثر من طريقة لقص القماش من أجل الحصـــول على ما هو مطلوب من منتجات بأقل كلفة ممكنة.

الجدير بالذكر، أن اختيار البديل الأفضـل أو الأمثل يخضـع لمعايير متعددة، أهمها أن يحقق البديل أعلى الفوائد والمنافع أو أقل التكاليف والخسائر وهو ما يعرف بالبديل الأمثل Optimal Solution.

## 4-1 النماذج الرياضية في بحوث العمليات

غالباً ما يتم اللجوء إلى النماذج الرياضـــية لصـــياغة المشـــكلة والبحث عن الحل الأمثل لها. يُقصـــد بالأمثلة أو التأويج Optimization تلك العملية التي تســـاعد المنظمة على الوصـــول إلى أهدافها بأعلى درجات الكفاءة

الممكنة، مثل تعظيم الأرباح أو تقليل الاستهلاك والضياعات، وذلك باختيار الحلول الأفضل، التي تدور حول استخدام التحليل الكمّي لمساعدة الإدارة في المنظمة على اتخاذ القرارات المناسبة لتوضيح المشكلة المراد دراستها والمعبر عنه بالأعداد والصيغ الرياضية.

المفهوم العام للأمثلة هو الحد الأقصى الممكن لتحقيق الامتيازات والأهداف بخصوص مشكلة معينة، وعادة ما يُستخدم مؤشر مهم للأمثلة. ففي إطار المنظمة الإنتاجية –على سبيل المثال– يكون مؤشر الأمثلة هو بلوغ أدنى مستوى من التكاليف أو أعلى مستوى ممكن من الأرباح، وتحقيق أفضل الصيغ لاستغلال مستلزمات الإنتاج الأساسية الذي على أساسه يُحدَّد الموقف بخصوص اختيار حل معين من بين مجموعة من الحلول المتوفرة التي يجري التوصل إليها بخصوص المسألة المدروسة.

النموذج هو عرض مبسط أو محاكاة لنظام حقيقي يراد دراسته، وهذا النظام يعمل في الحياة الواقعية. وهو مبسط لأن الواقع معقد بحيث لا يمكن نقله بالضبط، وعلى ذلك فإن بناء النموذج يهدف عادة إلى تحليل سلوك النظام لتحسين أدائه و/أو تحديد الشكل الأمثل للنظام في المستقبل. يشمل النموذج على تابع الهدف المراد تحقيقه من خلال إظهار الواقع على شكل رياضي، في ظل القيود التي يراد في إطارها تحقيق تابع الهدف، ومن ثم فإن النموذج الرياضي يمثل مجموعة المتغيرات والعوامل التي تتداخل وتترابط فيما بينها بوساطة عدد من العلاقات الرياضية المعبرة عن المشكلة، ويجب صياغة النموذج الرياضي بدقة لتمثيل المشكلة.

يمكن التمييز بين نوعين من النماذج الرياضية وهي:

أ- نماذج رياضـية تسـتعمل في ترشـيد القرار المطلوب اتخاذه من خلال تصـميم نظام مصـغر يعبر عن النظام الفعلي ضـــمن ما يعرف بمحاكاة الواقع بطريقة يمكن فيها حل المشـــكلة بنظام المحاكاة ومن هذا الحل يتم التوصل إلى حل المشكلة في الواقع العملي.

ب- نماذج رياضـية تبنى على أسـاس توفر الظروف والامكانات المتاحة، كما هي الحال عند اسـتعمال أسـلوب البرمجة الخطية وبالتحديد طريقة السـيمبلكس المبسـطة Simplex Method في التخطيط لعناصـر الإنتاج كافة وتحديد حجم الإنتاج الأمثل الذي يحقق الاسـتعمال الكامل والأمثل لمسـتلزمات الإنتاج ويضـمن أكبر العوائد الممكنة.

تتألف النماذج الرياضية من ثلاثة مكونات هي:

أ- المتغيرات المتعلقة باتخاذ القرار Decision Variable: المتغيرات التي يتم الوصـول إلى قيمها من خلال حل النموذج الرياضـي والتي على أسـاس قيمها المحددة يتم اتخاذ القرار لذلك تسـمى القرارات بالقرارات المتغيرة، وتلك المتغيرات تسمى بمتغيرات القرار.

ب- القيود Constraints: محددات النموذج الرياضي والتي تعد ضرورية للتعبير عن محدودية الموارد في صيغة النموذج، وهي التي تدفع بمتغيرات القرار بأن تكون ضمن القيم الممكنة.

ج- دالة أو تابع الهدف Objective Function: صـــيغة رياضـــية تربط بين متغيرات القرار، وتعبر عن قياس القيمة الإجمالية للهدف من حل المشـــكلة. قد تمثل الأرباح الإجمالية وتأخذ الدالة صـــيغة التعظيم (Maximization)، وقد تمثل التكاليف الإجمالية وتأخذ الدالة صـيغة التصـغير (Minimization) في هذه الحالة.

## 1-5 مراحل التحليل الكمي في بحوث العمليات

### Stages of quantitative analysis in OR

من منظور بحوث العمليات، أية مشكلة قرار هي متعددة التخصصات، حيث العمل الجماعي متعدد التخصصات ضـــرورياً أثناء محاولة حل مشـــكلة إدارية معقدة، والتي قد لا يكون لدى شـــخص واحد المعرفة الكاملة بجميع جوانبها (الاقتصـادية، الاجتماعية، السياسـية، النفسـية، الهندسـية، ...، الخ). مما يعني أننا لا نتوقع حلاً مرغوباً فيه للمشكلات الإدارية بشكل دائم. لذلك، يمكن تنظيم فريق من الأفراد المتخصصين في الرياضيات والإحصاء والاقتصاد والهندسة وعلوم الكمبيوتر وعلم النفس وما إلى ذلك، بحيث يمكن تحليل كل جانب من جوانب المشكلة من قبل متخصـص معين في هذا المجال من أجل الوصـول إلى الحل المناسـب والمطلوب للمشـكلة. ومع ذلك، هناك مواقف مشكلة معينة يمكن تحليلها حتى من قبل فرد واحد. يشـمل النهج العلمي في "بحوث العمليات" على عدة مراحل لتطبيق التقنيات والأدوات العلمية على المشـــكلات التي تنطوي على عمليات الأنظمة وذلك لتزويد أولئك الذين يتحكمون في العمليات بالحلول المثلى للمشكلات. وتشمل مراحل التحليل الكمي في بحوث العمليات على ست خطوات مهمة كما يلي:

- الخطوة الأولى: مراقبة بيئة المشكلة وصياغتها.
- الخطوة الثانية: تحليل المشكلة وتعريفها.
- الخطوة الثالثة: بناء وتطوير نموذج لتمثيل النظام قيد الدراسة.
- الخطوة الرابعة: إدخال البيانات المناسبة واشتقاق الحل من النموذج.
- الخطوة الخامسة: تقديم الحل واختبار قابليته للتنفيذ.
- الخطوة السادسة: تطبيق الحل.

فيما يلي تفصيل كل من هذه الخطوات.

**الخطوة الأولى: مراقبة بيئة المشكلة وصياغتها.**

هي الخطوة الأولى في بحوث العمليات وتعني مراقبة بيئة المشكلة، والبحث في تشغيل موارد المنظمة (البشرية والمادية) مع الأخذ بالاعتبار عوامل المشكلة التي تتألف من أربعة مكونات أساسية: البيئة، الأهداف، صانعو ومتخذ القرار، مسارات العمل البديلة والقيود.

بالنظر في المكونات الأربعة المذكورة أعلاه، تعتبر البيئة هي الأكثر شمولية لأنها توفر بيئة للمكونات الثلاثة المتبقية. يحضر باحث العمليات الاجتماعات، ويقوم بالزيارات الميدانية، ويدون الملاحظات ويؤدي العمل البحثي، وبذلك توفر هذه الأنشطة معلومات كافية له كي ينجح في صياغة المشكلة.

**الخطوة الثانية: تحليل المشكلة وتعريفها.**

هذه الخطوة هي تحليل وتعريف المشكلة، ووضع أهداف واستخدامات وقيود بحوث العمليات ليتم تعريف ودراسة المشكلة. مخرجات هذه الخطوة هي إدراك واضح للحاجة إلى فهم طبيعة وحلها.

**الخطوة الثالثة: بناء وتطوير نموذج لتمثيل النظام قيد الدراسة.**

تسعى هذه الخطوة إلى تطوير نموذجاً لتمثيل النظام أو المشكلة قيد الدراسة. النموذج هو تمثيل لبعض المواقف المجردة أو الحقيقية. النماذج في بحوث العمليات هي في الأساس نماذج رياضية. الأنشطة المختلفة في هذه الخطوة هي تعريف المتغيرات ووضع الصيغ الرياضية. يمكن لمتخصص بحوث العمليات بناء نموذج لإظهار العلاقات المتبادلة بين السبب والنتيجة، أو بين الفعل ورد الفعل، وتطوير نموذج يصف النظام والعمليات على شكل معادلات وعلاقات تمكّنه من التنبؤ بتأثير العوامل الحاسمة لحل المشكلة المدروسة. يمكن اختبار النموذج المقترح وتعديله من أجل العمل في ظل القيود البيئية المذكورة، وبما يلبي احتياجات وأهداف الإدارة.

**الخطوة الرابعة: إدخال البيانات المناسبة واشتقاق الحل من النموذج.**

يعمل النموذج بشكل مناسب عندما يكون هناك بيانات مناسبة. يمكن استخلاص حل من نموذج إما بإجراء تجارب عليه، أي عن طريق المحاكاة أو عن طريق التحليل الرياضي. قد تكون هذه المعلومات متاحة من نتائج التجارب أو من الحدس على أساس الخبرة، ويمكن أن تؤثر جمع البيانات بشكل واضح على مخرجات النماذج بشكل كبير، كما لا ينبغي لمتخصص بحوث العمليات أن يفترض أنه بمجرد تحديد هدفه ونموذجه، أنه قد حقق الهدف لحل المشكلة، فقد تستغرق عملية جمع البيانات المطلوبة وقتاً للتحضير لتقليل الأخطاء. تشمل الأنشطة في هذه الخطوة تحليل البيانات الداخلية والخارجية، وتحليل الحقائق، وجمع الآراء واستخدام قواعد وبنوك المعلومات. الهدف من هذه الخطوة هو توفير مدخلات بيانات كافية لتشغيل واختبار النموذج الذي تم تطويره في الخطوة الثالثة.

**الخطوة الخامسة: تقديم الحل واختبار مدى قابلتيه للتنفيذ.**

كما أشرنا سابقاً، لا يمثل النموذج أبداً تمثيلاً مثالياً للواقع. لكن إذا تمت صياغته بشكل مناسب ومعالجته بشكل مناسب ايضاً، فقد يكون مفيداً في توفير أو توقع تأثير التغييرات في متغيرات التحكم على فعالية النظام بشكل عام. لا يتم تنفيذ هذا الحل على الفور، وبدلاً من ذلك يتم استخدام الحل لاختبار النموذج ولإيجاد جميع القيود، فيتم التحقق من فائدة النموذج من خلال معرفة مدى توقعه لتأثير هذه التغييرات. يُعرف مثل هذا التحليل عادةً باسم تحليل الحساسية. إذا كان الحل غير مقبول أو كان سلوك النموذج غير مناسب، فيجب تحديث النموذج وتعديله في هذه المرحلة. يمكن التحقق من فائدة أو صلاحية الحل من خلال مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها دون النموذج مع النتائج التي تم الحصول عليها مع استخدام النموذج، ويكون خلاصة هذه المرحلة هي الحلول التي تدعم أهداف المنظمة.

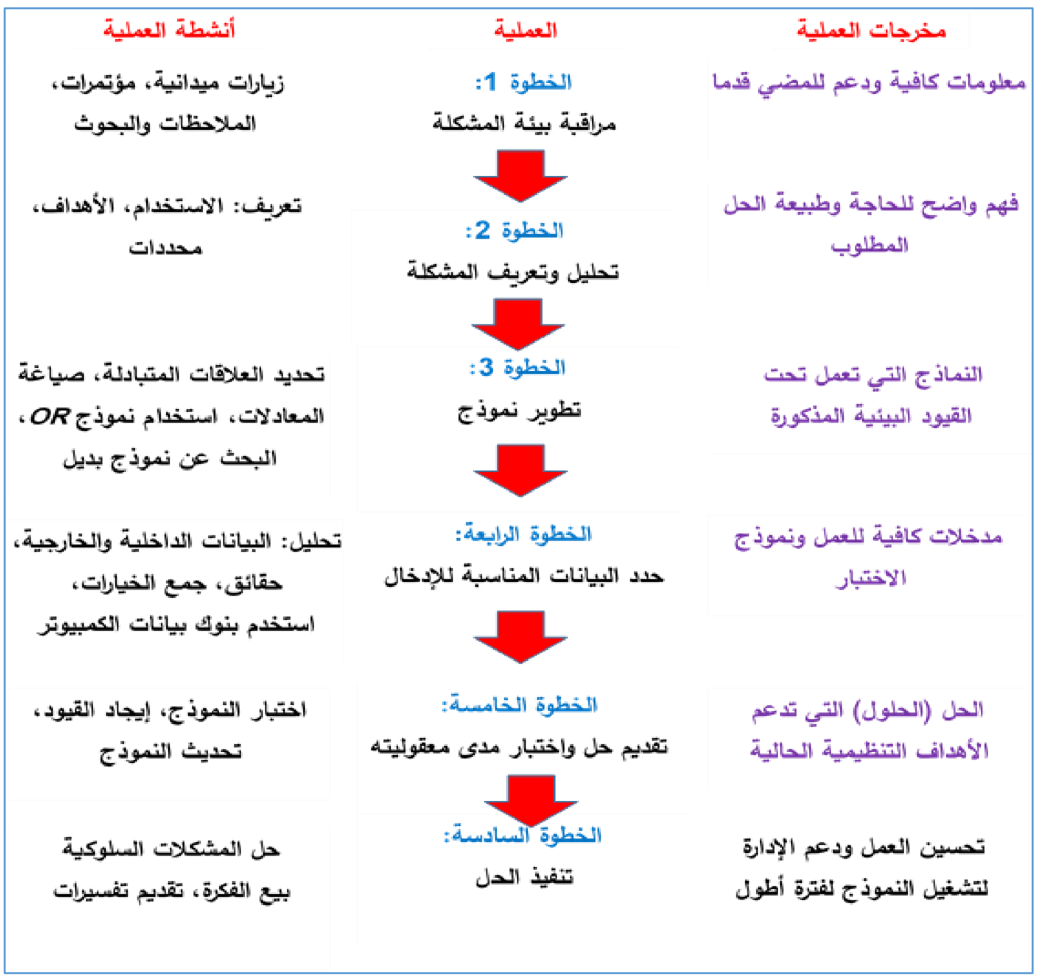
من الضروري في نهاية هذه المرحلة شرح النتائج التي توصل إليها النموذج للإدارة وشروط تطبيقه. تجدر الإشارة إلى أنه يجب تحديد شروط الاستفادة من الحل، كما يجب الإشارة إلى نقاط الضعف إن وجدت حتى تعرف الإدارة المخاطر التي تتعرض لها أثناء استخدام النموذج. بالتالي يجب تحديد الحدود التي تكون فيها النتائج التي تم الحصول عليها من استخدام النموذج صالحة، كما يجب تحديد الشروط التي لن يعمل النموذج بدونها، أو الواجب توفرها.

**الخطوة السابعة: تطبيق الحل.**

المرحلة الأخيرة من منهجية بحوث العمليات هي تنفيذ الحلول التي تم الحصول عليها في الخطوات السابقة. على الرغم من أن الطابع العلمي لعملية صنع القرار، إلا أن تنفيذها ينطوي على الكثير من القضايا السلوكية. لذلك يتعين على الإدارة حل هذه المشكلات من خلال الاقناع أي بيع النموذج للمعنيين في المنظمة، إذ أن المنفعة من استخدام بحوث عمليات ليس فقط للعمال ولكن أيضاً للمدراء، قد تخلق المسافة بين متخصص بحوث العمليات

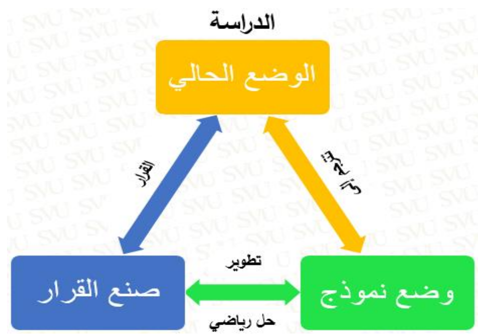
والإدارة تكتلات ونزاعات، وبالتالي يجب ردم الفجوة بين الشــخص الذي يقدم الحل والآخر الذي يطبقه. تلعب كل من الإدارة وخبير بحوث العمليات دوراً إيجابياً في ردم هذه الفجوة. الحل المنفذ بشــكل ســليم الذي تم الحصــول عليه من خلال بحوث العمليات يؤدي إلى تحسين ظروف العمل والحصول على دعم الإدارة، كما ينتج عن الحل الذي يتم تنفيذه بشكل سليم جودة العمل ويكسب دعم الإدارة.

يلخص الشكل (1-1) أهم أنشطة عملية التحليل الكمي.




**الشكل (1-1) أنشطة العملية والعملية ومخرجات العملية لمراحل التحليل الكمي في بحوث العمليات**

كما يلخص الشكل (1-2) التالي إجراءات مراحل التحليل الكمي في بحوث العمليات.




**الشكل (1−2) إجراءات مراحل التحليل الكمي في بحوث العمليات**

## 1−6 العلاقة بين المدير/متخذ القرار ومتخصص بحوث العمليات

المسؤولية الرئيسية للمدير هي اتخاذ القرارات، ويأتي متخصص بحوث العمليات لمساعدته في صناعة قرارات أفضل. يحل متخصص بحوث العمليات المشكلات على مستوى عالٍ باستخدامهم للتقنيات المتقدمة، مثل استخراج البيانات الضخمة، والتحسين، والتحليل الإحصائي والنمذجة الرياضية، للتوصل إلى حلول تساعد متخذ القرار في المنظمات على العمل بكفاءة وفعالية. عادةً ما تتضمن المشكلات التي يعالجونها تصميم أنظمة للعمل بأكثر الطرق فعالية أو اكتشاف كيفية تخصيص الموارد البشرية النادرة أو الأموال أو المعدات أو المرافق.

يحاول متخذ القرار في الشركات الحصول على أقصى قيمة من الاستثمارات في البيانات والتحليلات الأساسية، ويحتاج إلى الشخص المناسب لنقلها من البيانات الأولية إلى الأصول الذكية للأعمال. تتمثل مهمة متخصص بحوث العمليات في تحديد البدائل المتاحة، ثم إجراء تحليل يمكّنه من تقييمها بموضوعية والتوصية بأنسبها.

تتمثل الواجبات والمهارات النموذجية لمتخصص بحوث العمليات في:

1. تحليل البيانات والمعلومات.
2. البحث عن البرمجيات التخصصية في بحوث العمليات.
3. المساعدة في صناعة القرارات وحل المشكلات.
4. جمع البيانات المناسبة لحل تلك المشكلات.
5. الاستفادة الكاملة من قدرات التفكير الإبداعي.
6. تفسير النتائج والمعلومات للآخرين.
7. تقديم النتائج والتوصيات لمتخذ القرار والمديرين التنفيذيين.

يوضح الشكل (1-3) العلاقة بين المدير ومتخصص بحوث العمليات.

| التشارك بين متخصص بحوث العمليات والمدير | خطوات الاعتراف بالمشكلة صياغة المشكلة والحلول |
| --- | --- |
| المدير | التعرف من التنظيم على أعراض وجود مشكلة |
| متخصص بحوث العمليات | تقرير ما هي المتغيرات المعنية؛ حالة المشكلة والعلاقات الكمية بين المتغيرات. |
| متخصص بحوث العمليات | التحقيق في طرق حل المشكلات كما هو مذكور أعلاه؛ وتحديد الأدوات الكمية المناسبة لاستخدامها. |
| متخصص بحوث العمليات | محاولة تطبيق حلول المشكلات؛ إيجاد حلول مختلفة وافتراضات الحالة الكامنة وراء هذه الحلول؛ واختبارها حلول بديلة. |
| متخصص بحوث العمليات والمدير | تحديد الحل الأكثر فعالة بسبب القيود العملية داخل المنظمة، تقرير ما يعني الحل للمنظمة. |
| المدير | اختيار الحل الواجب تنفيذه. |
| متخصص بحوث العمليات والمدير | تقديم القرار لمديري التشغيل، والحصول على فهمهم وتعاونهم. |

**الشكل (1-3) العلاقة بين المدير/متخذ القرار ومتخصص بحوث العمليات**

## 1-7 أدوات وتقنيات بحوث العمليات

تستخدم بحوث العمليات أي أدوات أو تقنيات مناسبة متاحة. ومن أهم التقنيات شائعة الاستخدام هي الإجراءات الرياضية، وتحليل التكلفة، ... وغيرها. أعطى متخصصو بحوث العمليات أهمية خاصة لتطوير واستخدام تقنيات

مثل البرمجة الخطية، نظرية الألعاب، نظرية القرار، نظرية صفوف الانتظار، نماذج الجرد والمحاكاة. بالإضافة إلى التقنيات المذكورة أعلاه، فإن بعض الأدوات الشائعة الأخرى هي البرمجة غير الخطية، البرمجة العددية الصحيحة، البرمجة الديناميكية، نظرية التسلسل، عمليات ماركوف، جدولة الشبكات (PERT / CPM)، النموذج الرمزي، نظرية المعلومات، ونظرية القيمة. ويمكن عرض مفاهيم موجزة لبعض التقنيات / الأدوات المذكورة أعلاه كالآتي.

**1) البرمجة الخطية**

هي تقنية تحسين مقيدة، والتي تعمل على تحسين بعض المعايير ضمن بعض القيود. وهي أسلوب رياضي يستعمل لإيجاد أفضل الاستعمالات للموارد المتاحة المحدودة لدى المنظمة، بمعنى أخر أفضل توزيع لتلك الموارد على البدائل المتاحة. هذا الأسلوب له جانبان، الأول البرمجة Programming وتعني إمكانية استعمال الأسلوب لإيجاد البرامج المختلفة للتوصل إلى الاستعمال الأمثل للموارد المحدودة والمتاحة لدى المنشأة أي اختيار أفضل هذه البرامج التي تحقق هدف المشكلة. الجانب الثاني هو الخطية Linearity والمقصود بها أن العلاقات بين متغيرات النموذج تكون بشكل علاقات خطية. الغاية من استخدام أسلوب البرمجة الخطية هو إيجاد حل لنموذج البرمجة الخطية، حيث يتألف نموذج البرمجة الخطية من جزأين:

- الجزء الأول: تمثل دالة الهدف وهي معادلة خطية تأخذ صيغة التعظيم أو صيغة التصغير.
- الجزء الثاني: فيمثل القيود التي تكون على هيئة معادلات أو متراجحات.

يتألف نموذج البرمجة الخطية من جزأين هما دالة الهدف والقيود، الصيغة العامة تأخذ الشكل الآتي:

تابع أو دالة الهدف: $\text{Max. (or Min.) } Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots\ldots + C_n X_n$

تحت جملة القيود:

$$
\begin{array}{l}
a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \ldots\ldots + a_{1n} X_n \ (\geq , \leq , =)\ b_1 \\
a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \ldots\ldots + a_{2n} X_n \ (\geq , \leq , =)\ b_2 \\
\quad . \qquad . \qquad . \qquad . \\
\quad . \qquad . \qquad . \qquad . \\
a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \ldots\ldots + a_{mn} X_n \ (\geq , \leq , =)\ b_m
\end{array}
$$

حيث: $X_1 ; X_2 , \ldots\ldots, X_n \geq 0$

نلاحظ أن تابع الهدف هو معادلة خطية تأخذ إما صـــــيغة التعظيم (إذا كان الهدف هو تحقيق أعظم ربحية) أو تأخذ صـيغة التصـغير (إذا كان الهدف هو تحقيق أقل كلفة). أما القيود فتأخذ شـكل متراجحات أكبر من أو أقل من أو شـكل معادلات. أما القيود الأخيرة فدائماً ما يكون بشـكل متراجحات أكبر من أو تسـاوي الصـفر وتسـمى قيود اللاسـلبية وذلك لأن متغيرات القرار تعبر عن مقادير اقتصـادية. سـيتم التركيز في هذه الأملية على البرمجة الخطية في الفصول القادمة. وسنورد عرض موجز لبقية الأدوات.

**2) نظرية الألعاب Game Theory**

تســــتخدم هذه التقنية لاتخاذ القرارات في ظل المواقف المتضــــاربة حيث يوجد لاعب واحد أو أكثر (اللاعبين والخصوم). إن نجاح لاعب واحد يكون على حساب اللاعبين آخرين، وبالتالي فهم في صراع.

**3) نظرية القرار Decision Theory**

تهتم نظرية القرار باتخاذ القرارات في ظل ظروف عدم التأكد التام حول النتائج المســتقبلية بحيث يمكننا حســاب بعض الاحتمالات حول ما سيحدث في المستقبل. للمزيد يُمكن للقارئ مراجعة (عبود، 2017).

### 4) نظرية صفوف الانتظار

تســتخدم في المواقف التي يتم فيها تشــكيل قائمة الانتظار (على ســبيل المثال العملاء الذين ينتظرون الخدمة، والطائرات التي تنتظر الهبوط، الوظائف التي تنتظر المعالجة في نظام معلوماتي، ...). الهدف هنا هو تقليل تكلفة الانتظار دون زيادة تكلفة الخدمة. ومن أمثلة ذلك صـــــفوف الطلبة في طوابير لإجراء عملية التســـجيل وصفوف المرضى بانتظار العلاج في المستشفيات والعيادات وصفوف الأجهزة المعطوبة بانتظار اصلاحها...، الخ. والفرضـيات التي تقوم عليها نماذج الصـفوف تتلخص في أن زمن وصـول العملاء (طلبة، مرضــى، أجهزة معطوبة...، الخ) يكون عشوائياً وأن الخدمة تقدم للزبائن بشكل عام بحسب ترتيب وصولهم. وتسمح هذه النماذج بتحديد العدد الأمثل للزبائن الذين يمكن خدمتهم ضـــمن الطاقة المتوفرة (عدد الذين يقدمون الخدمات والوقت والأجهزة وغيرها يكون في العادة محدوداً) والسبل المثلى لهذه الخدمة.

### 5) نماذج المخزون Inventory Models

تستخدم نماذج المخزون في اتخاذ القرارات للتقليل من التكلفة الإجمالية للمخزون. تعمل هذه النماذج بنجاح على تقليل التكلفة الإجمالية لشـــراء وحفظ المخزون. حيث تعتبر مشـــكلة تحديد مســـتوى ملائم من المخزون من المشــكلات الهامة التي تواجهها الأنظمة بشــكل عام. ذلك أن الزيادة أو النقص في مســتوى مخزون نظام قد يعرض هذا النظام لمصــاعب كثيرة. فزيادة الإنتاج (وبالتالي زيادة المخزون) تقلل من تكاليفه بشـكل عام إلا أنها تكون بمثابة رأس مال عاطل إذا لم يتم اســـتهلاكها بالإضــــافة إلى ما يترتب على ذلك من زيادة في تكاليف التخزين والتي تصـــل أحياناً إلى نصـــف تكاليف الإنتاج. كما أن زيادة الإنتاج قد تؤدي إلى انهيار الاســـعار. وبالمقابل فإن تخفيض لإنتاج يؤدي إلى رفع التكاليف والأســـعار وبالمقابل فإن تخفيض الإنتاج يؤدي إلى رفع

التكاليف والأسعار وخفض تكاليف المخزون إلا أنه قد يؤدي من جهة ثانية إلى خسارة كبيرة في السوق ذلك لأن العملاء الذين يشترون المنتجات في السوق يرغبون بتوفيرها لهم عند الطلب وإلا فإنهم سيتجهون لمنتج أخر. وتهتم نماذج التخزين بمعالجة قرارين أساسيين بشأن مستوى المخزون:

- تحديد الكمية التي تطلب دفعة واحدة لرفع مستوى المخزون.
- تحديد وقت طلب هذه الكمية. وتساعد نماذج التخزين في تحديد الإجابة المثلى على هذين السؤالين بشكل تجعل معه تكاليف التخزين الكلية أقل ما يمكن.

**6) المحاكاة Simulation**

تواجه الأنظمة أحياناً مشكلات معقدة يصعب إيجاد نموذج "رياضي" بسيط للتعامل معها. ومن جهة ثانية، فإن إجراء التجارب على النظام نفسه يكون في معظم الأحيان صعباً وباهظ التكاليف ويحتوي على شيء من المخاطرة. المحاكاة هي إجراء يدرس مشكلة عن طريق إنشاء نموذج للعملية المتضمنة في المشكلة، ثم من خلال سلسلة من التجارب المنظمة وحلول الأخطاء التي تحاول تحديد الحل الأفضل. في بعض الأحيان يكون هذا إجراء صعب ويستغرق وقتاً طويلاً. تستخدم المحاكاة عندما لا يكون التجريب الفعلي ممكناً أو عندما يكون حل النموذج غير ممكن.

فلنفترض عل سبيل المثال أن مصنعاً ما يقوم بتصنيع عدد من المنتجات وأن الدراسة التقليدية قد أظهرت أن هناك زيادة في الطلب على السلعة، بالتالي فإن التوسع في الإنتاج سيعود على أصحاب المصنع بفوائد كبيرة. كذلك فقد قررت إدارة المصنع زيادة عدد ساعات عمل كل من الأجهزة والعاملين في المصنع بالإضافة إلى شراء

مزيد من المواد الخام. إن القيام بتنفيذ مثل هذا القرار قد ينطوي على كثير من المخاطر. فقد يكون سـبب زيادة الطلب على السلعة قد نتج عن خلل أو ظاهرة مؤقتة، مما سينتج عنه خسارة كبيرة عند زوالها. وإذا سلمنا أن هذه الظاهرة ليست مؤقتة فقد تنتظر مشكلات أخرى متنوعة كعدم جدوى التشغيل الاضافي ومشكلات في زيادة تكاليف التخزين أو النقل أو تكاليف المواد الخام ونقوم في مثل هذه الحالات بمحاكاة المشكلة المطروحة بعمل صورة تماثل الواقع الفعلي لهذه المشكلة دون المساس بالنظام (هنا المصنع) نفسه. وقد يستلزم ذلك استخدام القلم والورقة أو الحاسب لمعالجة المشكلات المعروفة أو الجديدة بطريقة أكثر فعالية. بقي أن نشير أخيراً أنه بالرغم من كل ما توفر حتى الآن من طرق لمعالجة كالكثير من المشكلات فإنه لا تزال توجد وتنشأ كل يوم مشكلات جديدة تحتاج من باحثي العمليات إلى ابتكار طرق مناسبة لحلها.

### 7) البرمجة غير الخطية Non-Linear Programming

تستخدم عندما لا تكون الوظيفة الموضوعية والقيود خطية بطبيعتها. يمكن تطبيق العلاقات الخطية على القيود غير الخطية التقريبية ولكنها تقتصر على نطاق ضيق، لأن التقريب يصبح أكثر ضعفاً كلما تم تمديد النطاق. وبالتالي، يتم استخدام البرمجة غير الخطية لتحديد التقريب الذي يكمن فيه الحل ومن ثم يتم الحصول على الحل باستخدام الطرق الخطية.

### 8) البرمجة الديناميكية Dynamic Programming

البرمجة الديناميكية هي طريقة لتحليل عمليات اتخاذ القرار متعددة المراحل. فكل قرار أولي يعتمد على القرارات السابقة وكذلك العوامل الخارجية.

### 9) البرمجة بأعداد صحيحة Integer Programming

إذا كان متغير واحد أو أكثر من المشكلة يأخذ قيماً كاملة فقط، فسيتم استخدام طريقة البرمجة الصحيحة. على سبيل المثال، المحرك في مؤسسة، عدد الركاب في الطائرة، عدد المولدات في محطة توليد الطاقة، وما إلى ذلك.

### 10) عملية ماركوف Markov Process

تسمح عملية ماركوف بالتنبؤ بالتغييرات بمرور الوقت، بفرض أن المعلومات حول سلوك النظام معروفة. تستخدم عمليات ماركوف في صـــنع القرار في المواقف التي يتم فيها تعريف الدوال (الحالات) المختلفة، حيث احتمال تغير كل حالة إلى أخرى معروف ويعتمد على الحالة الحالية ومستقل عن كيفية وصولنا إلى تلك الحالة المعينة.

### 11) نماذج النقل Transportation Models

تبحث هذه النماذج في ايجاد طريقة ذات أقل تكلفة في نقل الموارد (كمنتجات المصانع والمزارع والطاقة الكهربائية والمائية وغيرها) إلى غايات معينة (كالمخازن أو مراكز التوزيع والتســويق) بطريقة تلبي احتياج هذه الغايات من تلك الموارد في حال كون هذه الأخيرة لا تقل عن هذا الاحتياج أو بطريقة تســتنفذ فيها الموارد في حال كون هذه الموارد أقل من احتياج تلك الغايات. ولا يقتصر تطبيق هذه النماذج على إيجاد الطرق ذات التكلفة الأقلة في نقل المنتجات بل يمكن تطبيقها إلى حالات يكون الهدف فيها جعل العوائد الربحية أكبر ما يمكن. ســيتم تفصــيلها لاحقاً في الفصل الخامس.

## 12) نماذج التخصيص Assignment Models

تبحث هذه النماذج في كيفية توزيع عدد معين من الموارد (أشـــخاص، أجهزة، شـــركات ...، الخ) على عدد من الأعمال بطريقة تجعل المنفعة العائدة من هذا التوزيع (زمن الإنجاز الكلي للأعمال، تكلفة الإنجاز الكلي للأعمال، العوائد الربحية الناتجة عن إنجاز هذه الأعمال، ...، الخ) أفضـل ما يمكن. ومن أمثلة ذلك توزيع عدد معين من الموظفين على نفس العدد من الوظائف وكإنجاز عدد معين من الشركات لعدد معين من المشروعات. سيتم تفصيلها لاحقاً في الفصل السادس.

## 13) الجدولة والشبكات (PERT / CPM)

تُستخدم هذه التقنية على نطاق واسع لتخطيط وجدولة ومراقبة المشـاريع الكبيرة. الهدف من هذه التقنية هو تقليل المشـــكلات (مثل التأخير، والانقطاع، واختناقات الإنتاج، وما إلى ذلك) من خلال تحديد العوامل الحرجة. يتم تمثيل الأنشطة المختلفة وعلاقاتها بالمشروع بأكمله بشكل تخطيطي بمساعدة الشبكات والأسهم، والتي تُستخدم لتحديد الأنشطة والمسار الحرج.

يمكن وضـع كثير من المسـائل التي تتضـمن كثيراً من الأنشـطة المتداخلة والمعقدة أحياناً على شـكل تظهر فيها هذه الأنشـطة والحوادث التي تنتج عنها. ومن أمثلة ذلك تخطيط المشـاريع الكبيرة (سـدود، جسـور مصـانع، ...، الخ) وشـبكات النقل (خطوط الاتصـالات السـلكية واللاسـلكية، الخطوط الجوية أو البرية أو البحرية) التي تربط المدن والدول وما شـابه ذلك من حالات يمكن التعبير عنها على شـكل شـبكة مكونة من عدة فروع مترابطة. قد تطورت نظرية تحليل دراسة الشبكات بشكل أصبح معه من الممكن تخطيط ومراقبة وضبط الموارد والأنشطة في أي مسـألة بطريقة تواصـل إلى الأهداف بطريقة فعالة. ومن الأمثلة المشـهورة في هذا المجال ما يطلق عليه اسم

"برنامج تقييم ومراجعة المشروعات PERT" و"طريقة المسار الحرج CPM" والتي تمكننا من تحديد أقل زمن وأقل تكلفة ممكنين لإنجاز المشـروع. كما تمكننا من دراسـة إمكانية تغيير تسـلسـل الأنشـطة والحوادث لتحقيق إنجاز أفضل (تقليل زمن وتكلفة الإنجاز) للمشروعات ضمن الموارد المتوفرة. ومن الأمثلة الهامة أيضاً والتي تظهر في أنظمة النقل مسألة أقصر طريق أو مسار في شبكة ومسألة إيجاد نقاط الربط المثلى في شبكة، والتي تجعل من الممكن أن نصـل بين أي نقطتين من الشبكة بطريقة تكون فيها مسافة الربط الكلية للشبكة أقل ما يمكن. وكذلك مسـألة توزيع التدفق (مياه، سـيارات، ...) على فروع شـبكة بشـكل يجعل التدفق الكلي بين نقطة البدء ونقطة النهاية أكبر ما يمكن . سيتم تفصيلها لاحقاً في الفصل السابع.

**14) نظرية المعلومات Information Theory**

تم نقل هذه العملية التحليلية من مجال الاتصـالات الكهربائية إلى حقل بحوث العمليات. الهدف من هذه النظرية هو تقييم فعالية تدفق المعلومات مع نظام معين. يسـتخدم هذا بشـكل أسـاسـي في شـبكات الاتصـالات ولكن له أيضاً تأثير غير مباشر في محاكاة فحص الهيكل التنظيمي للأعمال بهدف تعزيز تدفق المعلومات.

## 8-1 المجالات التطبيقية لبحوث العمليات

### Applied fields of operations research

تستفيد جميع مجالات الأعمال والحكومة تقريباً من مزايا وفوائد بحوث العمليات وهناك تطبيقات ضـخمة لها على الرغم من أنه ليس من الممكن تغطية جميع تطبيقاتها. فيما يلي مجموعة مختصـرة من هذه التطبيقات النموذجية لبعض المشـكلات الصـناعية، الحكومية، أو التجارية التي يمكن تحليلها من خلال منهج بحوث العمليات حسـب

المجال الوظيفي لإظهار مدى استخدام هذه التقنيات بنجاح على نطاق واسع اليوم على النحو الآتي.

1. الإدارة العامة: أنظمة دعم القرار ونظم المعلومات الإدارية؛ التنبؤ والتصميم التنظيمي والتحكم.

2. التخطيط الاستراتيجي الحكومة: التخطيط الاقتصادي، تخطيط الموارد الطبيعية، التخطيط الاجتماعي، تخطيط الطاقة، معالجة المشكلات الحضرية والإسكان، مشكلات الجيش والشرطة، مكافحة التلوث، ....، الخ.

3. التخصـــيص والتوزيع في المشـــاريع: التخصـــيص الأمثل للموارد مثل الآلات والمواد والوقت والمال للمشاريع، تحديد وتخصيص القوة العاملة المناسبة، جدولة المشروع ورصده ومراقبته.

4. الإنشاءات: إدارة وجدولة المشروع وتخصيص الموارد، الرصد، والتحكم، تحديد القوة العاملة المناسبة، نشر القوى العاملة، تخصيص الموارد للمشاريع.

5. قرارات البرامج: ماذا ومتى وكيف يتم الشراء لتقليل تكلفة الشراء؟ سياسات العطاءات والاستبدال.

6. الســـلوك التنظيمي / الموارد البشـــرية: تخطيط القوى العاملة وإدارة الأجور والتعويضـــــات، اختيار الموظفين وتحديد ســـن التقاعد والمهارات، تعيين الموظفين وتســـريح العمال، موازنة المهارة، جدولة برنامج التدريب، تصميم الهيكل التنظيمي بشكل أكثر فعالية.

7. الإنتاج وتخطيط المرافق: حجم المصـــنع وقرار الموقع، تقدير عدد المرافق المطلوبة، تخطيط المرافق، إعداد التنبؤات لبنود المخزون المختلفة وحســاب كميات الأمر الاقتصـــادي ومســتويات إعادة الطلب، جدولة وتسلسل عمليات الإنتاج عن طريق التخصيص المناسب للآلات، تحميل وتفريغ النقل، قرار

موقع وحجم المستودع ومراكز التوزيع ومنافذ البيع بالتجزئة، مراقبة الجودة، قرارات سياسة الصيانة.

8. التصنيع: مراقبة المخزون، جدولة الإنتاج، تجانس المنتجات والتخطيط الإجمالي الإنتاج ، خط التجميع، المزيج الإنتاجي.

9. التمويل والمالية: متطلبات رأس المال وتحليل التدفق النقدي، سياسات الائتمان ومخاطر الائتمان، خطة الربح للشركة، بناء نماذج إدارة النقد، تخصيص رأس المال بين البدائل المختلفة، بناء نماذج التخطيط المالي، تحليل الاستثمار، إدارة وتحليل المحافظ، ضع سياسة توزيع الأرباح.

10. المحاسبة: تعيين فرق التدقيق بفعالية، تحليل السياسة الائتمانية، تخطيط وتحليل التدفق النقدي، وضع الميزانية العمومية، الميزانية الرأسمالية، تطوير التكاليف المعيارية، إنشاء تكاليف المنتجات الثانوية، تخطيط استراتيجية الحساب المتأخر، تحليل التعادل، تخصيص ومراقبة التكاليف، إجراءات المطالبة والشكاوى، المحاسبة العامة.

11. التسويق: تخصيص ميزانية الإعلان، التخطيط التسويقي، توقيت تقديم المنتج، التخطيط الإعلاني والإعلامي وتخصيص ميزانية الإعلان واختيار وسائل الإعلان، اختيار مزيج المنتجات، تفضيل العميل لحجم ولون وتعبئة المنتجات المختلفة، التخطيط للتصدير، تخصيص جهود المبيعات، تحديد بديل التغليف الأكثر فعالية.

12. الخدمات اللوجستية: تصميم النظام اللوجستي، الشراء الأمثل، مراقبة المخزون، إعادة ترتيب المواد بموجب خصم السعر، العطاءات، تحليل البائعين، تحميل النقل والتفريغ، سياسات الاستبدال، قرار

موقع المستودعات.

13. البحث والتطوير: تخطيط تقديم المنتج، مراقبة مشـــاريع البحث والتطوير، تحديد مجالات البحث والتطوير، اختيار المشاريع وإعداد ميزانياتها، الموثوقية والتحكم في مشاريع التنمية.

14. الصـيانة وجدولة المشـروع: تخطيط سـياسـات الصـيانة العامة والصـيانة الوقائية، تخطيط حجم طاقم الصيانة وجدولتها.

باختصـار، يمكن استخدام بحوث العمليات على نطاق واسع في قرارات الإدارة، ويمكن أيضـاً استخدامها كإجراء تصحيحي.

**حالات لاستخدامات حقيقية لبحوث العمليات:**

مثل كل تقدم علمي، كانت بدايات تطبيقات بحوث العمليات أهدافاً عسكرية. لكن رؤية الفوائد سرعان ما أصبحت تمارس في مجالات أخرى مثل الصــناعة، والنقل، والتنمية الحضــرية، والتجارة، والتمويل، والصــحة، ...، الخ لتحسين الموارد المتاحة والفوائد، الاقتصـادية في المقام الأول، يوضـح الجدول (1-2) التالي بعض الأمثلة على الاستخدام الفعلي لبحوث العمليات من قبل المؤسسات المختلفة والأرباح والمدخرات التي تحققت نتيجة لذلك.

**الجدول (1-2) بعض الأمثلة على الاستخدام الفعلي لبحوث العمليات من قبل المؤسسات المختلفة**

| المنظمة | العام | التطبيق | المدخرات السنوية |
|---|---|---|---|
| Dutch Ministry of Infrastructure and the Environment (Netherlands Rijkswaterstaat) | 1985 | تطوير ســياســة إدارة المياه الوطنية وإضــافة مرافق جديدة وإجراءات التشغيل والتكاليف | 15 مليون دولار |
| Monsanto Corp. | 1985 | تحسين عمليات الإنتاج لتحقيق الأهداف بأقل تكلفة | 2 مليون دولار |
| Weyerhaeuser Co. | 1986 | تحسين قطع الأشجار لزيادة إنتاج المنتجات الخشبية | 15 مليون دولار |
| Electrobras/CEPAL Brasil | 1986 | التخصــيص الأمثل للموارد المائية والحرارية في نظام توليد الطاقة الوطني | 43 مليون دولار |
| United Airlines | 1986 | التحولات في جدولة مكاتب الحجز والمطارات لتحقيق احتياجات العملاء بأقل تكلفة | 6 ملايين دولار |

| الجدول (1-2) بعض الأمثلة على الاستخدام الفعلي لبحوث العمليات من قبل المؤسسات المختلفة | | | |
|---|---|---|---|
| **المنظمة** | **العام** | **التطبيق** | **المدخرات السنوية** |
| CITGO Petroleum Corp. | 1987 | تعظيم الاستفادة من صقل عمليات المنتجات وعرضها وتوزيعها وتسويقها | 70 مليون دولار |
| Santos, Ltd., Australia | 1987 | تحسين الاستثمار الرأسمالي لإنتاج الغاز الطبيعي على مدار 25 عاماً في أستراليا | 3 ملايين دولار |
| Electric Power Research Institute | 1989 | إدارة مخزون النفط والفحم للخدمة الكهربائية بهدف موازنة تكاليف المخزون والمخاطر المرتبطة | 59 مليون دولار |
| San Francisco Police Department | 1989 | تحسين البرمجة وتعيين ضباط الدوريات بنظام محسوب | 11 مليون دولار |
| Texaco Inc. | 1989 | تحسين خلط المكونات المتاحة للحصول على الوقود الذي يلبي متطلبات الجودة والمبيعات | 30 مليون دولار |
| IBM | 1990 | تكامل شبكة وطنية لمخزون قطع الغيار لتحسين خدمة الدعم | 20 مليون دولار + 250 مليون دولار في مخزون ثانوي |
| U.S. Military Airlift Command | 1992 | السرعة في تنسيق الطائرات والطاقم والحمل والركاب لدفع عملية الاخلاء جواً في مشروع "عاصفة الصحراء" في الشرق الأوسط. | ربح المعركة |
| American Airlines | 1992 | تصميم نظام هيكل للتسعير والحجز الزائد وتنسيق الرحلات لتعزيز الفوائد | 500 مليون دولار من العائدات الإضافية |
| Yellow Freight System, Inc. | 1992 | تحسين تصميم شبكة النقل الوطنية وجدولة طرق الشحن في الولايات المتحدة | 17.3 مليون دولار |
| New Haven Health Dept. | 1993 | تصميم برنامج إبر فعّال للتغيير لمكافحة عدوى الإيدز | 33٪ أقل من العدوى |
| AT&T | 1993 | تطوير نظام كمبيوتر لتصميم مراكز اتصال لإرشاد العملاء | 750 مليون دولار |
| Delta Airlines | 1994 | تعظيم الأرباح من تخصيص أنواع الطائرات في 2.500 رحلة جوية وطنية في الولايات المتحدة | 100 مليون دولار |
| Digital Equipment Corp. | 1995 | إعادة هيكلة سلسلة التوريد بأكملها بين الموردين والمصانع ومراكز التوزيع والمواقع المحتملة ومناطق السوق | 800 مليون دولار |
| China | 1995 | الاختيار والبرمجة المثلى للمشاريع الجماهيرية لتلبية احتياجات الطاقة المستقبلية للبلد | 425 مليون دولار |
| South African National Defence Force (SANDF) | 1997 | إعادة الهيكلة المثلى لحجم وشكل قوة الدفاع الوطني لجنوب إفريقيا ونظام أسلحته | 1.100 مليون دولار |
| Procter & Gamble | 1997 | إعادة تصميم نظام الإنتاج والتوزيع في أمريكا الشمالية لتقليل التكاليف وتحسين سرعة الدخول إلى السوق | 200 مليون دولار |
| Taco Bell | 1998 | برمجة الموظفين المثلى لتقديم الخدمة للعملاء المطلوبين بأقل تكلفة | 13 مليون دولار |
| Hewlett-Packard | 1998 | إعادة تصميم حجم المخزون الأمني وموقعه في خط إنتاج الطابعة للامتثال لأهداف الإنتاج | 280 مليون دولار من العائدات الإضافية |

المصدر: http://www.phpsimplex.com/en/real_cases.htm

## 9-1 حدود بحوث العمليات

لدى بحوث العمليات العدد من التطبيقات؛ وبالمثل، فإن لها أيضاً بعض القيود، ترتبط القيود في الغالب ببناء النموذج ومشكلات شح الموارد مثل عوامل المال والوقت الذي ينطوي عليها ذلك التطبيق. نورد بعض هذه

الحدود لبحوث العمليات على النحو المبين أدناه:

- المســافة بين متخصــص بحوث العمليات والمدير: تحتاج وظيفة متخصــص بحوث العمليات إلى عالم رياضيات أو إحصائي، قد لا يكون على دراية بمشكلات العمل. وبالمثل، فإن المدير غير قادر على فهم الطبيعة المعقدة لـــــبحوث العمليات. وبالتالي هناك فجوة كبيرة بين الطرفين المســتخدم/المدير والمحلل/متخصص بحوث العمليات.

- حجم الحسـابات: تسـعى جميع نماذج OR جاهدة لاكتشـاف الحلول المثلى مع مراعاة جميع العوامل. في العالم الواقعي، هذه العوامل هائلة والتعبير عنها في النموذج الكمي يتطلب إنشاء علاقات وإجراء حسابات واسعة بين هذه العوامل الضخمة، والتي يمكن أن يتم التعامل معها وحلها بشكل فعال فقط بواسطة أجهزة الكمبيوتر.

- تكاليف الوقت والمال: تخضع البيانات الأساسية لتغيرات متكررة، وإن تضمين أو إدخال هذه التغيرات في نماذج بحوث العمليات مكلفة للغاية لأنها تتطلب الوقت والمال للتطبيق العلمي والعملي. ومع ذلك، قد يكون الحل الجيد المتاح في الوقت الحاضــر مرغوباً فيه أكثر من حل بحوث العمليات المثالي المتاح في المستقبل أو بعد بعض الوقت اعتماداً على حجم المشكلة ودقة النتائج المرجوة.

- العوامل غير القابلة للقياس الكمي: عندما تكون العوامل المتعلقة بمشــكلة ما قابلة للقياس، فقط عندها يمكن قياسها، ويتم إيجاد الحل باستخدام أحد نماذج بحوث العمليات. في حين يصعب أخذ العوامل التي لا يمكن قياسها في نماذج بحوث العمليات، مثل العوامل العاطفية أو العوامل النوعية.

- التنفيذ: بمجرد اتخاذ القرار يجب تنفيذه، ولكن تنفيذ أي قرار مهمة حساسة، يجب أن تأخذ هذه المهمة في الاعتبار تعقيدات العلاقات الإنسانية والسلوك البشري. في بعض الأحيان، يتم أخذ مقاومة التغيير بسبب العوامل النفسية بالاعتبار، رغم أنه قد لا يكون لها أي تأثير على المشكلة أو على حلها.

- صعوبة الموازنة بين المتطلبات: غالباً ما يكون من الصعب تحقيق التوازن بين متطلبات الواقع ومتطلبات البساطة. فقد تتوفر بيانات ضعيفة أو غير دقيقة: قد تكون جودة جمع البيانات رديئة أو غير دقيقة.

- عدم وجود تقنيات الحل المناسب: في كثير من الحالات، يكون حل مشكلة باستخدام نماذج بحوث العمليات مقيداً بعدم وجود تقنيات حل مناسبة. على سبيل المثال، قد يكون الحل المشتق دون المستوى الأمثل، أي قد تكون حدود المشكلة مفتوحة.

- الصراع: نماذج بحوث العمليات ثابتة لكن الشركات تفضل الحلول الديناميكية القابلة للتكيف مع مستجدات ومتغيرات البيئة. فينشأ التعارض مع مرور الوقت بين الاستنتاج الذي توصل إليه محلل أو متخصص بحوث العمليات ورأي المدير بشأن أفضل مسار للعمل مستقبلاً.

## 1) أسئلة صح / خطأ True/False

| | السؤال | صح | خطأ |
|---|---|---|---|
| 1 | تقسم النماذج إلى كمية وغير كمية. | ✓ | |
| 2 | جوهر بحوث العمليات هو الاعتماد على بناء النماذج النوعية. | | ✓ |
| 3 | تهتم بحوث العمليات بدارسة مشكلات الأمثلية | ✓ | |
| 4 | من بين شروط تطبيق بحوث العمليات تعدد البدائل | ✓ | |
| 5 | يتم وضع المشكلة بصيغة نماذج رياضية قبل الانتهاء من تحديد المشكلة موضوع القرار وبيان العلاقات المتداخلة فيها | | ✓ |
| 6 | من أسباب ظهور بحوث العمليات هو الرغبة في الوصول إلى حلول مثلى سواء كانت تعظيم الأرباح أو تقليل التكاليف | ✓ | |
| 7 | تبدأ عملية صياغة النموذج بخطوة تعبر عن المشكلة بصورة وصفية. | ✓ | |
| 8 | من أسباب الحاجة إلى أساليب بحوث العمليات الحاجة إلى تبرير القرار كميا | ✓ | |
| 9 | إن زيادة نمو حجم المؤسسات وتعقد مشكلاتها زاد من صعوبة معالجة جميع العوامل التي تؤثر على القرار | ✓ | |
| 10 | من أسباب الحاجة إلى بحوث العمليات تكرار المشكلة وعدم قدرة المنشأة على الاستفادة من البيانات لحل المشكلة. | ✓ | |
| 11 | تعد عملية اتخاذ القرارات الجزء الهامشي لعمل المدير في ممارسة جميع الأنشطة والفعاليات اليومية في حياة المؤسسات | | ✓ |
| 12 | إن القرار الإداري مرتبط بوجود مشكلة إدارية تحتاج حلا معينا | ✓ | |
| 13 | تتميز بحوث العمليات عن البحوث الهندسية الأخرى بالتركيز على تحليل العمليات ككل. | ✓ | |
| 14 | بحوث العمليات هي تطبيق الأساليب الوصفية لتحسين فعالية العمليات والقرارات والإدارة. | | ✓ |
| 15 | يعتبر نهج بحوث العمليات مفيداً بشكل خاص في موازنة الأهداف المتضاربة | ✓ | |
| 16 | تساعد بحوث العمليات على توفير تكلفة حل المشكلات المختلفة وذلك بتخفيض الوقت اللازم للحل. | ✓ | |
| 17 | تساعد بحوث العمليات على تركيز الاهتمام على النتائج الهامة للمشكلة من خلال الخوض في تفاصيل الخصائص التي لا تؤثر على القرار. | | ✓ |
| 18 | من السهل أن يتمكن فرد بمفردة من التوصل إلى حل أمثل لمشكلة. | | ✓ |

## 2) أسئلة خيارات متعددة Multiple Choices

1. ظهر استخدام علم بحوث العمليات في المجال:
أ) التجاري
ب) الصناعي
ج) العسكري
د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

2. تبدأ مراحل دراسة بحوث العمليات بـ:
أ) كتابة التقارير
ب) تبيان أسباب اتخاذ القرار
ج) تحديد المشكلة
د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

3. لفترة طويلة ظل علم بحوث العمليات يعاني من مشكلات كثيرة ومنها:
أ) صغر حجم النماذج الرياضية
ب) تزايد عدد المتغيرات اللازم ايجادها
ج) قلة البيانات الأولية اللازمة
د) لا شيء مما سبق

4. تسمى النماذج التي تعتمد على الأرقام:
أ) النماذج النوعية
ب) النماذج التوافقية
ج) النماذج الكمية
د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

5. أي مما يلي لا ينطبق على علم بحوث العمليات:
أ) بناء النماذج الرياضية
ب) اتخاذ القرارات الصعبة والمعقدة
ج) إمكانية تطبيق النموذج على المشكلات المشابهة
د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

6. مِن أَهمّ العوامل التي ساعدت على انتشار واستخدام بحوث العمليات في المنظمات المختلفة:
أ) تعقُّد المشكلات التي تواجهها الإدارة والحاجةُ إلى منهج يستند على العلم لمعالجتِها
ب) اشتدادُ حدة المنافسة بين المنتجين
ج) اهتمام الجامعات بتعليمِ بحوث العمليات
د) جميع الإجابات السابقة صحيحة

7. يحاول نهج بحوث العمليات إيجاد الأمثل من خلال:
أ) تحليل القرارات المتبادلة بين رؤساء الأقسام المشاركة في المشكلة.
ب) تحليل النتائج المتبادلة بين مكونات النظام المشاركة في المشكلة.
ج) تحليل العلاقات المتبادلة بين مكونات النظام المشاركة في المشكلة.
د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

8. يمكن تلخيص أهمية بحوث العمليات في أنها:
أ) فن يتعلق بالتخصيص الكفء للموارد المتاحة
ب) وسيلة مساعدة في اتخاذ القرارات الكمية.
ج) وسيلة لاستخدام الطرق النتائج المعقدة
د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

9. من الوظائف الرئيسية لأساليب بحوث العمليات في ميدان الأعمال:
أ) تساعد في تخصيص الموارد بشكل فعّال على الاحتياجات الكثيرة.
ب) تساعد في اختيار الاستراتيجيات المختلفة في الإنتاج والتسويق والتمويل.

ج) تساعد في تخفيض التكاليف في كثير من القرارات الإدارية.
د) جميع الإجابات السابقة صحيحة

10. من السمات الرئيسية لبحوث العمليات أنها:
أ) تستخدم الطرق والأساليب الحدسية
ب) تستخدم الأساليب والطرق العلمية
ج) تستخدم الطرق والأساليب الشمولية
د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

11. يمكن نطبيق أساليب بحوث العمليات في مختلف المؤسسات الإنتاجية والخدمية، بعد توفّر الشرطين:
أ) محدودية البدائل وتعدد الموارد
ب) محدودية النتائج وتعدد القرارات
ج) محدودية الموارد وتعدد البدائل
د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

12. تشير الحالة القصوى في تحقيق الامتيازات والأهداف بخصوص أمرٍ معينٍ أو مسألة معينة إلى:
أ) المفهوم العام للمعايير
ب) المفهوم العام للأمثلة
ج) المفهوم العام للنماذج
د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

13. يشير العرض المبسط أو المحاكاة لنظام حقيقي يراد دراسته إلى:
أ) البديل
ب) المعيار
ج) النموذج
د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

14. كلما كان النموذج الرياضي مصوغاً بدقة كان هو:
الأبعد عن الواقع العملي للمنشاة
ب) المكلف في الواقع العملي للمسألة.
ج) الأقرب إلى الواقع العملي للمسألة
د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

15. تشير محددات النموذج الرياضي والتي تعد ضرورية في تكوين النموذج وهي التي تدفع بمتغيرات القرار بأن تكون ضمن القيم الممكنة إلى:
أ) التكاليف
ب) الهدف
ج)القيود
د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

16. تشير المعادلة الرياضية التي تعبر عن قياس القيمة الاجمالية للهدف من حل المشكلة إلى:
أ) دالة النتيجة
ب) دالة القرار
ج) دالة الهدف
د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

17. يمكن النظر في نهج بحوث العمليات لأي مشكلة في القرار من خلال أنها:
أ) نهج متعدد النتائج
ب) نهج متعدد القرار
ج) نهج متعدد التخصصات
د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

18. ليس من مراحل التحليل الكمي في بحوث العمليات:
أ) تحليل المشكلة وتعريفها
ب) بناء وتطوير نموذج لتمثيل النظام قيد الدراسة
ج) توزيع المهام على الأفراد
د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

19. يمثل تحديد البدائل المختلفة المتاحة وإجراء تحليل من شأنه أن يمكّن من تقييمها بموضوعية والتوصية بأنسبها إلى:

أ) مهمة مدير إدارة العمليات
ب) مهمة مدير المؤسسة بشكل عام
ج) مهمة متخصص بحوث العمليات
د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

20. ليس من الواجبات والمهارات النموذجية لمتخصص بحوث العمليات:

أ) تحليل البيانات والمعلومات
ب) اتخاذ القرارات وحل المشكلات
ج) ترأس اجتماعات المؤسسة وبحث مشكلاتها
د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

### 3) أسئلة \ قضايا للمناقشة

**<u>السؤال (1) العلاقة بين المدير ومتخصص بحوث العمليات</u>**

المسؤولية الرئيسية للمدير هي اتخاذ القرار، فما هو دور متخصص بحوث العمليات..

{مدة الإجابة: 15 دقيقة. الدرجات من 100: 15. توجيه للإجابة: الفقرة 1-6}

**<u>السؤال (2) المجالات التطبيقية لبحوث العمليات</u>**

هناك مجموعة واسعة المجالات التطبيقية لبحوث العمليات لحل المشكلات الصناعية / الحكومية / التجارية، صنف هذه التطبيقات وفق للتخصصات الوظيفية؟

{مدة الإجابة: 15 دقيقة. الدرجات من 100: 15. توجيه للإجابة: الفقرة 1-8}

**<u>السؤال (3) حدود بحوث العمليات</u>**

لدى بحوث العمليات العدد من التطبيقات؛ وبالمثل، فإن لها أيضـــاً بعض القيود، صـــنف هذه القيود، وما هي اهم ارتباطاتها.

{مدة الإجابة: 15 دقيقة. الدرجات من 100: 15. توجيه للإجابة: الفقرة 1-9}

# الفصل الثاني: البرمجة الخطية والحل البياني

# Chapter (2): Linear Programming and Graphical Solution Method

**كلمات مفتاحية:**

البرمجة الرياضية Mathematical Programming، البرمجة الخطية Linear Programming، الحل الأمثل Optimal Solution، المنطقة المقبولة Feasible Region، الحل البياني Graphical Solution.

**ملخص الفصل:**

يتناول هذا الفصل المفهوم العام للبرمجة الرياضية، وأساسيات البرمجة الخطية، والحل البياني في حالة برنامج خطي بسيط من متغيرين اثنين فقط. كما يتناول بالتفصيل كيفية تمثيل القيود وتابع الهدف على نفس الشكل، ثم إجرائية البحث عن الحل الأمثل على الشكل البياني، وفي نهاية الفصل نشير إلى بعض الحالات الخاصة من البرمجة الخطية البسيطة عبر التمثيل البياني لهذه الحالات.

**المخرجات والأهداف التعليمية:**

1. تذكر مفهوم البرمجة الرياضية.

2. يتمكن الطالب من صياغة برنامج خطي لمشكلة اقتصادية.

3. يرسم على نفس الشكل البياني القيود وتابع الهدف.

4. يحل برنامج خطي بيانياً.

5. يُميز حالات خاصة من البرمجة الخطية.

**مخطط الفصل:**

2–1) مفاهيم البرمجة الرياضية.

2–2) البرنامج الخطي.

2–3) التمثيل البياني للقيود.

2–4) التمثيل البياني للتابع الهدف.

2–5) البحث عن الحل الأمثل بيانياً.

2–6) حالات خاصة في التمثيل البياني.

## 2–1 مفهوم البرمجة الرياضية

تسعى نماذج بحوث العمليات إلى البحث في استخدام الموارد بهدف الوصول إلى حلول مثلى للمشكلات الإدارية والاقتصـادية، وتتنوع كثيراً تطبيقاتها، فهي تحاول تجريد المشكلة، ووضـع طرق لحلها بمعزل عن مجال التطبيق، مما أعطاها خصــوصــية التواجد على تقاطعات علوم متعددة، في مقدمتها الرياضــيات، علوم المعلومات، العلوم الاقتصادية، والعلوم الإنسانية.

بحوث العمليات هي مجموعة من النماذج والطرق: نماذج لطرح المسألة وطرق لحلّها، وتعتمد بشكل خاص على الجبر الخطي Linear Algebra ونظرية البيانات Graph Theory ونظرية الاحتمالات Probability Theory؛ وتُصـنف بحوث العمليات ضـمن إطار ما يدعى "صـناعة القرار" أو "الإدارة العلمية"، كما يتفرع عنها عدد كبير من النماذج، وذلك حسب نمط المشكلة التي تعالجها (Hillier & Lieberman, 2005)، ويمكن تصنيفها عموماً قي ثلاث فئات (عبود، 2017):

أ- فئة موجهة للبحث عن أفضل البدائل المتاحة، وندعوها بنماذج التأويج أو الأمثلية Optimization. مثلاً نماذج البرمجة الخطية، أو البرمجة الديناميكية، أو نماذج التموين والتخزين.

ب- فئة موجهة للبحث عن أفضل ترتيب للبدائل Arrangement. مثلاً طريقة البحث عن المسار الحرج في طريقة PERT، صفوف الإنتظار Queuing Models.

ج- فئة موجهة لتصنيف البدائل Classification. مثلاً طرق التصنيف الإحصائي، مثل التحليل العاملي Factor Analysis، نماذج التخصيص Assignment Problem.

التطبيقات لا تعدّ ولا تحصى، نذكر منها في مجال العلوم الإدارية والاقتصادية.

1) توزيع وتخطيط موارد الإنتاج: شركة نسيج تصنع عدّة منتجات، تتطلب هذه المنتجات موارد من المواد الأولية، آلات، يد عاملة ... حيث كمياتها محدودة في الشركة، تملك الشركة معطيات عن سوق المنتجات ويمكنها بالتالي تحديد هامش الربح لكل منتج (اليامور، 2009). ما هي المنتجات التي يجب على الشركة إنتاجها؟ وما هي الكمية التي يمكن إنتاجها من كلّ منتج بحيث تحقق أكبر ربح ممكن؟

2) ترتيب وتخطيط العمليات الإنتاجية: شركة تودّ تصنيع مواد كيميائية بكميات معروفة. تتم معالجة هذه المواد في وحدات معالجة خاصة (تبخير، تكثيف...) انطلاقاً من المواد الخام أو نصف الخام. من أجل كل منتج، هناك سلسلة تصنيع ومقادير الاستهلاك من السلسلة. كيف يمكن تصور ترتيب عمليات التصنيع لهذه المنتجات التي تسمح باستيفاء الطلب في أقصر زمن ممكن؟

3) تركيب خلائط: مصنع مثلجات ينتج عدة أنواع من البوظة والتي ليست إلاّ خلائط من نفس المواد الأساسية (حليب ومشتقاته، سكر، بيض ...)، سعر المبيع لكل منها محدد ومعروف في السوق. يجب أن تحوي هذه المثلجات نسب محددة من العناصر الغذائية وغيرها (دسم، ماء، ملونات...). من بين التركيبات الممكنة. ما هي "الوصفة" التي تسمح بإنتاج المثلجات المرغوبة بأقل تكلفة؟

4) التموين ونقل البضائع: تملك شركة عدة معامل تعالج عدة أنواع من الخشب (الشوح، السنديان، ...) بكميات معروفة. يتم تموين المعامل عن طريق الوكلاء بأسعار ترتبط بتنوع الأخشاب والوكلاء، الكميات المتوفرة عند الوكلاء محدودة وكلفة النقل تعتمد على بعد وقرب الوكيل من المعمل، (الزوبعي وآخرون، 2012). انطلاقاً من أي وكيل وما هي كمية كل نوع من الخشب المتوجب تموين المعامل بها لاستيفاء الطلب بأقل كلفة ممكنة؟

5) اختيار الاستثمارات: شركة تصنع مواد كهربائية وميكانيكية (محركات كهربائية، كهربائيات منزلية، ...) ضمن سوق حيث التنافس على أشده ويتطور بسرعة، تدرس الشركة إمكانية تغيير منتجاتها، أو تجديد بعض قطاعاتها، كل مشروع استثماري ممكن لديه عدة متغيرات كما يمكن تأجيله إلى أجلٍ لاحق، مع الإشارة إلى أن بعض المشاريع لا يمكن فصلها عن بعضها أي أن قبول البعض منها يقيد إنجاز أخرى. ضمن هذه القيود، كيف يمكن اختيار أفضل المشاريع مع الأخذ بعين الاعتبار الإمكانيات التمويلية للشركة؟

**يُقصد بالأهداف:** مستويات الأداء لأنشطة محددة قابلة للقياس يتم التعبير عنها على شكل توابع عددية. مثل، التكلفة، الزمن، المخزون، الربح، المخاطرة، المبيعات، الدخل، الرضا النفسي ...

و**بالموارد:** المدخلات التي تساهم في تحديد مستوبات أداء الأهداف، ويتم التعبير عنها على شكل متغيرات مستقلة أو غير مستقلة. مثل، حجم الأموال، المواد الأولية، التجهيزات، الأفراد، الوقت، ...

كما يُقصد **بالقيود:** العلاقات الفنية أو الوظيفية أو الزمنية التي تُقيّد استخدام الموارد. مثل، محدودية الموارد، قيود قانونية، فنية، تجارية، مالية، سياسية أو بشرية، ...

في العديد من الحالات، يصعب التمييز بين ما يترجم لتابع هدف وبين ما يترجم لقيد، إذ يمكن تحويل تابع الهدف إلى قيد والقيد إلى تابع هدف. يعتمد تحديد تابع الهدف على ما يُركز عليه أو يسعى لإنجازه صاحب القرار؛ في حالة تمويل الاستثمارات مثلاً، قد يطلب إيجاد القيمة المثلى للسيولة (تابع هدف) بحيث لا تتجاوز النفقات المالية 10% من القروض (قيد)، أو قد يطلب إيجاد الحد الأدنى من النفقات المالية (تابع هدف) بحيث يكون هناك حداً أدنى من السيولة (قيد). بشكلٍ عام، يترجم تابع الهدف ما نريده، في حين تترجم القيود ما لا نريده أو ما لا نستطيع السيطرة عليه.

يعتمد الإطار العام لمعالجة مشكلة باستخدام نهج بحوث العمليات منطقاً من ثلاثة مستويات:

أ- المستوى الأول: يتعلق بتعريف المشكلة ومتغيراتها.

ب- المستوى الثاني: وضع النموذج (الطريقة) المناسب للبحث عن الحل.

ج- المستوى الثالث: يتعلق بقبول نتائج النموذج وتطبيقها.

تتمثل المسألة بصياغة المشكلة على شكل صيغ رياضية والبحث عن طرق لحلها، كما يلي:

(1) صياغة تابع الهدف على شكل صيغة رياضية.

مثلاً، تعظيم التابع $Max(Z) = 3x_1^2 + 2x_2 + 5x_3^2$

(2) صياغة القيود على شكل صيغ رياضية كمعادلات أو متراجحات.

مثلاً، القيد Y1: $x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 200$ القيد Y2: $x_1 - x_3 = 30$

القيد Y3: $x_2 \geq 5$ القيد Y4: $x_1, x_2 \geq 0$

(3) تطبيق (أو ابتكار) طريقة للبحث عن أكبر للتابع الهدف Z.

مثلاً، حل جملة معادلات، طريقة Simplex، نموذج محاكاة، ... الخ.

(4) التحقق من الحل، دراسة حساسية الحل، وتطبيقه.

ندعو نمذجة المشكلة على شكل صيغ رياضية وفق ما هو مبين أعلاه ببرنامج رياضي Mathematical Program. ويتكون البرنامج الرياضي على النحو الآتي:

أ- مجموعة من المتغيرات المستقلة (متغيرات القرار) X لا تأخذ إلاّ قيماً عددية.

ب- تابع عددي Z للمتغيرات X، من نمط تعظيم Maximization أو تصغير Minimization، وندعوه

المتغير التابع أو تابع الهدف.

ج- مجموعة من التوابع العددية $Y_j$ للمتغيرات X محدودة من الأعلى أو الأدنى، وتعبر هذه الحدود عن قيود الموارد.

د- ترتبط التوابع $Z$ , $Y_j$ بالمتغيرات X عن طريق مقادير عددية (تُدعى معاملات Coefficients) $c_1, c_2, \ldots, c_n$، $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$ $b_j$ ($j=1, 2, \ldots, m$ )، وهي معطيات مباشرة أو تحسب من المعطيات الخام وليست بأي حالٍ من الأحوال مجهولة، ولكن يمكن تعديلها بهدف دراسة حساسية النموذج ومدى استقرار الحل النهائي.

يُعبر عن البرنامج الرياضي بالشكل الآتي:

**أوجد قيم المتغيرات:** $\mathbf{X = x_1, x_2, \ldots, x_n}$

**بحيث يكون:** $\mathbf{Max/Min(Z) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$

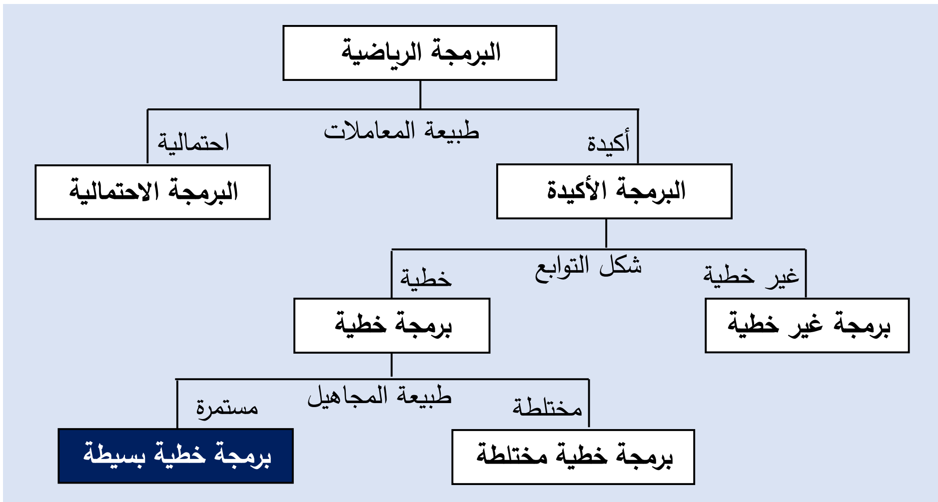
**تحت القيود:**

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{Y_1 = g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \\ \mathbf{Y_2 = g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \\ \cdots \\ \cdots \\ \mathbf{Y_m = g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \end{Bmatrix} \begin{matrix} \le \\ = \\ \ge \end{matrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{b_2} \\ \cdots \\ \cdots \\ \mathbf{b_m} \end{Bmatrix}$$

حل البرنامج هو مجموعة قيم المتغيرات X التي تُحقق جميع القيود، كما ندعو جميع الحلول المحققة للقيود بمجموعة الحلول القابلة للتنفيذ Feasible Solutions أو المنطقة المقبولة Feasible Region، ونقول عن حل أنه حل أمثلي Optimal Solution إذا كان أفضل الحلول المقبولة (أكبر قيمة أو أصغر قيمة للتابع الهدف).

تختلف نماذج البرمجة الرياضية حسب طبيعة متغيرات القرار X وشكل التوابع Z, Y كما هو مبين في الشكل (2−1)، هناك أنماط عديدة من البرمجة الرياضية (عبود، 2017)، سنهتم في هذه الأملية بالبرمجة الخطية البسيطة Simple Lineare Programming فقط كونها الأكثر انتشاراً، ويمكنها في العديد من الحالات تمثيل

المشـكلات بشـكل مقبول ولا تسـتطيع في حالات أخرى، كما يتوفر العديد من البرمجيات المعلوماتية المسـاعدة على استخدامها بسهولة.




**الشكل (2–1) فئات البرمجة الرياضية حسب طبيعة المتغيرات والصيغ**

ملاحظة: عندما نستخدم مصطلح أفضل قيمة للتابع الهدف Z، فالمقصود أكبر قيمة لـــ Z إذا كان المطلوب تعظيم التابع Max(Z)، أو أصغر قيمة لـــ Z إذا كان المطلوب تصغير التابع Min(Z). فمصطلح "أفضل" ليس مرادفاً لمصطلح "أكبر"، بل للمصطلحين "أكبر" أو "أصغر" حسب الحالة.

# 2–2 البرنامج الخطي

## 2–2–1 المتطلبات والفرضيات

البرنامج الخطي ليس إلا برنامجاً رياضياً يتمتع بخصائص مميزة. يُطلب أي برنامج خطي أن يُحقق مجموعة من الخصائص نلخصها كما يلي:

1. وجود هدف محدد نسعى لتحقيق أفضل مستوى أداء له، ومعبر عنه بصيغة خطية. يتم صياغة الهدف

على شكل تابع عددي من عدة متغيرات.

2. توفر مجموعة من الخيارات (الحلول الممكنة)، إذ أن وجود خيار وحيد (حل وحيد) لا يستدعي استخدام أي نموذج للبحث عنه.

3. محدودية الموارد: تكمن الحاجة للبرمجة الخطية بالتوزيع الأمثل لهذه الموارد، إذ لو توفرت الموارد بكميات غير محدودة، فلن يكون هناك حاجة لاستخدام البرمجة الخطية أو غيرها.

4. جميع العلاقات خطية سواء في تابع الهدف أو في القيود، أي التغيرات طردية بين قيم تابع الهدف وقيم المتغيرات، أيضاً الموارد تستهلك بشكل خطي.

5. جميع متغيرات القرار غير سالبة (أكبر أو يساوي الصفر)، إذ أن المتغيرات تعبر عن مقادير اقتصادية للموارد أو للمنتجات أو غيرها، بالتالي لا يُمكن أن تكون سلبية.

مع الأخذ بالاعتبار لهذه المتطلبات، يجب أن تتوفر في المشكلة خمس فرضيات أساسية كي نتمكن من معالجتها عبر البرمجة الخطية البسيطة (Hiller & Lieberman. 2001):

1. التأكد التام Certainty: كافة قيم معاملات البرنامج الخطي هي محددة ومؤكدة. المعاملات هي مساهمات/أمثال المتغيرات في صيغ تابع الهدف والقيود. قد تصطدم هذه الفرضية بضبابية الواقع الفعلي، لكن من ناحية أخرى، فإن مهمة البرنامج الخطي هي المساعدة في الاختيار بين عدة بدائل، بالتالي يجب أن يتمتع التنبؤ بهذه المعاملات بشيء من المصداقية. في جميع الأحوال، يُمكن دوماً اللجوء لتحليل الحساسية لاختبار مدى تغير الحل الأمثل مع تغيرات عقلانية في قيم المعاملات. قد يكون من المفيد الإشارة هنا إلى عدم الخلط بين تغيرات "طفيفة" في قيم المتغيرات التي يُمكن معالجتها بتحليل الحساسية، وبين تغيرات "جوهرية" في قيمها، فهذه الأخيرة تأخذ طابعاً احتمالياً ولا يكفي تحليل

الحساسية للتعامل معها ويُنصح بالتعامل مع المتغيرات كمتغيرات عشوائية.

2. الطردية/النسبية Proportionality: يعني أن تابع الهدف يتناسب طرداً مع مساهمة كل من المتغيرات في صيغة التابع. كذلك الأمر بالنسبة للقيود، أن الطرف الأيسر للقيد يتناسب طرداً مع مساهمة كل من المتغيرات في صيغة القيد. يُعبر عن المساهمة هنا بمعاملات/أمثال المتغيرات في الصيغة. يعني بشكل آخر، أن جميع المتغيرات في تابع الهدف أو القيود هي خطية (من الدرجة الأولى). مثلاً، إذا كانت القطعة الواحدة من المنتج تحتاج 5 وحدات معيارية من أحد الموارد، فإن 10 قطع من نفس المنتج يحتاج 50 وحدة معيارية من المورد.

3. الجمع Additivity: قيمة تابع الهدف (أو القيود) هي حاصل جمع جبري المتغيرات الفردية حسب مساهمات كل منها في صيغة التابع (أو القيود). بمعنى آخر أن المتغيرات مستقلة فيما بينها، وأن معيار الإنجاز الإجمالي هو حاصل جمع المقادير الناتجة عن الأنشطة الفردية، فالربح مثلاً هو مجموع الأرباح من جميع المنتجات. لا يمكن أن يكون لدينا صيغة من الشكل $Z = x + y + x.y$، فهذه الصيغة رغم أنها خطية لكل متغير، لكن قيم التابع ليست جمعاً جبرياً للمساهمات الفردية لكل متغير.

4. قابلية التجزئة Divisibility: متغيرات القرار تأخذ قيماً حقيقية (من مجموعة الأعداد الحقيقية) وبما لا يخرق فرضية عدم السلبية أدناه. بمعنى آخر ليس بالضرورة أن تكون أعداداً طبيعية أو صحيحة، ويمكن قبول أجزاء من المنتج! مثلاً، لا يوجد ما يمنع أن يأخذ متغير عدد القطع من منتج ما القيمة 10.5 أو $\sqrt{80}$ قطعة. قد تبدو هذه الفرضية غير واقعية، لكن في هذه المرحلة من البرمجة الخطية سنفرض أنها محققة. هناك طرق أخرى قد تكون أكثر مواءمةً لحل هذا النمط من القيود مثل البرمجة الخطية بأعداد طبيعية.

5. اللاسلبية Non-Negativity: هذه الفرضية ترجمة مباشرة للطبيعة الاقتصادية لمتغيرات القرار، إذ لا

يُمكن أن تأخذ قيماً ســالبة. مثلاً، لا يمكن قبول إنتاج 20- ســيارة مثلاً! رغم أنه في بعض الحالات قد يكون من المفيد التعبير عن بعض الظواهر الاقتصــادية بقيم سـالبة، مثلاً كمية النقص في المخزون، أو حجم الخسائر.

رغم أهمية هذه الفرضــيات لمعالجة مشــكلة ما عبر البرمجة الخطية، لكن لا يجب النظر إليها كحقائق "مطلقة" غير قابلة للكســر أو التعديل، وهنا يلعب مُنمذج المشــكلة دوراً مهماً في التخفيف من صــرامة هذه الفرضــيات حســب الحالة على أن تبقى المشـكلة قابلة للمعالجة. من ناحية أخرى، لا يعني أن كل مشـكلة اقتصــادية يُمكن نمذجتها على شكل برنامج خطي.

## 2-2-2 صياغة البرنامج الخطي

هي محاولة نقل شكل المشكلة من لغة "إدارية اقتصادية" إلى لغة رياضية، ننصح باعتماد المراحل الآتية:

(1) تحديد تابع الهدف أي المتغير الذي نبحث عن قيمته المثلى (أكبر أو أصغر).

(3) تحديد الموارد التي تُقيد الهدف على شكل متغيرات مستقلة.

(3) التعبير عن تابع الهدف بشكل تابع خطي للمتغيرات المستقلة.

(4) صياغة القيود على شكل معادلات أو متراجحات خطية.

(5) تحديد مجالات تعريف قيم المتغيرات المستقلة.

(6) اختيار وتطبيق طريقة الحل بما ينسجم مع المسألة المصاغة.

(7) اختيار الحل الأفضل أو الأمثل، التأكد أنه الحل الأمثل.

(8) تحليل حساسية بتغيير قيم بعض المتغيرات المستقلة، أو المعاملات بشكل بسيط.

(9) طرح النتائج على صاحب القرار لاعتمادها وتطبيقها.

(10) مراقبة التطبيق الفعلي، وإجراء بعض التعديلات حس بالحاجة.

تُصـــبح مســـألة البرمجة الخطية إذاً حالة خاصـــة من البرمجة الرياضـــية، وتتشـــكل من n مجهول و m متراجحة، ويأخذ الشكل العام كما يلي:

**أوجد قيم المتغيرات:** $\mathbf{X = x_1, x_2, \dots, x_n}$

**بحيث يكون:** $\mathbf{Max\ /Min\ \{Z = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n\}}$

**تحت القيود:**

$$\begin{cases} \mathbf{Y_1 = b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n} \\ \mathbf{Y_2 = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n} \\ \quad\quad\quad \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \quad\quad\quad \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \mathbf{Y_m = t_1x_1 + t_2x_2 + \dots + t_nx_n} \end{cases} \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{B_1} \\ \mathbf{B_2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \mathbf{B_m} \end{Bmatrix}$$

مثال (2−1) برنامج خطي بسيط من نمط تعظيم Maximization.

$$\text{Max } \{Z = 15x_1 + 2x_2\}$$

$$x_2 - 5x_1 \leq 15$$

$$x_2 + 4x_1 \leq 60$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

مثال (2−2) برنامج خطي بسيط من نمط تقليل Minimization.

$$\text{Min } \{Z = 2x_1 + 9x_2\}$$

$$x_2 - 3x_1 \geq 10$$

$$x_2 + 2x_1 \geq 50$$

$$x_1\ ;\ x_2 \geq 0$$

**تطبيق (2–1) صياغة مشكلة على شكل برنامج خطي.**

يُنتج أحد النجارين نوعين من الطاولات A و B ويبيع جميع ما يُنتجه. ولديه 24 متر من الخشـــب، و 60 ساعة عمل.

يُقدر أن النوع الأول A يحتاج إلى 3 أمتار خشب، و 6 ساعات عمل.

ويحتاج النوع الثاني B إلى 2 متر خشب، و 10 ساعات عمل.

يُمكنه بيع كل قطعة من النوع الأول بـ 200$، وكل قطعة من النوع الثاني بـ 150$.

والمطلوب صياغة المشكلة على شكل برنامج خطي بسيط.

الحل:

ليكن x عدد القطع التي يصنعها ويبيعها من النوع الأول، و y عدد القطع من النوع الثاني.

تابع الهدف Z يأخذ الشكل: $\text{Max}\ \{Z= 200\ x + 150\ y\}$

مجموعة القيود، قيد الخشب المتوفر: $3x + 2y \leq 24$

قيد ساعات العمل: $6x + 10y \leq 60$

قيود اللاسلبية: $x \geq 0$ ، $y \geq 0$

**تطبيق (2–2) صياغة مشكلة على شكل برنامج خطي.**

ترغب إحدى الشـركات بطرح منتجين جديدين A و B في الأسـواق. تُظهر دراســة السـوق أن عدد العملاء لن يتعدّى في العام الواحد 200 ألف قطعة للمنتج A و 400 ألف للمنتج B.

رصـدت إدارة الشـركة موازنة لطرح المنتجين في السـوق لا تتجاوز مليون $. تُقدّر التكاليف المباشـرة الداخلة في

تصنيع المنتجين بـ 8$ لكل قطعة من A وبـ 2$ لكل قطعة من B. ولا تدخل النفقات الثابتة (الإدارة وغيرها) في الموازنة السابقة، وتُقدّر الإدارة أنها لن تتغير مهما كانت الكميات المنتجة من A و B.

من جهة أخرى، يتشـارك المنتجان في المعالجة على إحدى الآلات، حيث زمن العمل هو 10 سـاعات/عمل لكل 1000 قطعة من A و 6 سـاعات/عمل لكل 1000 قطعة من B، ترغب الإدارة في طرح المنتجين خلال أقل من عام حيث عدد ساعات العمل السنوية تساوي 2400 ساعة عمل.

أخيراً، تتوقع الإدارة أن يكون ربح المنتج A يساوي 5 $/القطعة وربح المنتج B يساوي 3 $/القطعة.

والمطلوب: صياغة المشكلة على شكل برنامج خطي بسيط.

<u>الحل:</u>

لنرمز لعدد القطع المنتجة من A بـ $x_1$ و من B بـ $x_2$ (بالآلاف).

أولاً، لا يمكن لـ $x_1$ و $x_2$ أن تكونا سالبتين: $x_1 \geq 0$ و $x_2 \geq 0$

بحسب الشروط المفروضة من السوق: $x_1 \leq 200$ و $x_2 \leq 400$

تبلغ التكاليف المباشرة للإنتاج: $1000 * (8x_1 + 2x_2)$ ويجب ألاّ تزيد عن مليون أي:

$$8x_1 + 2x_2 \leq 1000$$

نفس المناقشة من أجل زمن التصنيع: $10x_1 + 6x_2 \leq 2400$

أخيراً نريد أن يكون الربح الإجمالي أعظم ما يمكن أي: $\text{Max} \{ Z = 5x_1 + 3x_2 \}$

وتمثل المسألة بشكل برنامج خطي:

تابع الهدف: $\text{Max} \{ Z = 5x_1 + 3x_2 \}$ [1]

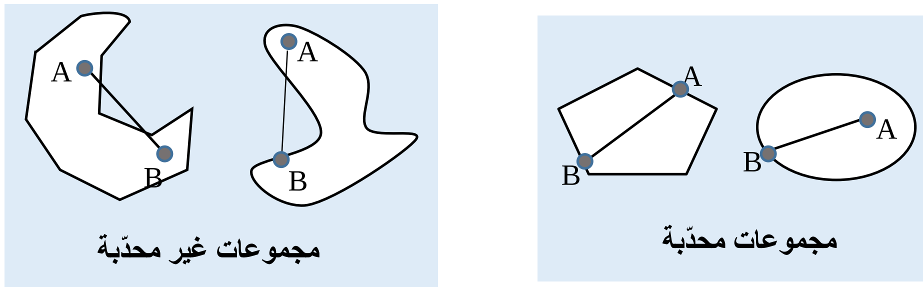
تحت القيود الآتية:

| | | |
|---|---|---|
| قيد السوق | $x_1 \leq 200$ | [2] |
| قيد السوق | $x_2 \leq 400$ | [3] |
| قيد الموازنة | $8x_1 + 2x_2 \leq 1000$ | [4] |
| قيد الزمن | $10x_1 + 6x_2 \leq 2400$ | [6] |
| قيود اللاسلبية | $x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$ | [7] |

ما تم إنجازه حتّى الآن ليس إلاّ ترجمة للمشكلة من لغة الإداري/الاقتصادي إلى لغة رياضية، ونقول بأننا طرحنا المسألة رياضياً بالشكل السليم، أي استطعنا بناء نموذج رياضي للمشكلة، ينتمي هذا النموذج إلى فئة البرامج الخطية البسيطة؛ ولإيجاد الحلّ، نلجأ إلى طرق حلّ البرامج الخطية البسيطة، ولنبدأ بالحل البياني.

تسهيلاً لشرح كيفية البحث عن الحل بيانياً، سنعتمد التمثيل البياني على محورين فقط أي على مستوي، مما يعني أن البرنامج الخطي لن يتضمن أكثر من متغيرين اثنين. كما سنفترض أن جميع القيود ممثلة على شكل متراجحات من اتجاه واحد أكبر أو أصغر، كذلك سيكون تابع الهدف من نمط تعظيم أو من نمط تصغير، وجميع الصيغ بمتغيرين اثنين فقط.

في العديد من الحالات تكون المتراجحات من اتجاه واحد($\geq$ أو $\leq$)، فتشكّل المنطقة المحصورة بين مجموعة القيود مضلعاً محدّباً. نقول عن فضاء بأنه محدّب Convex إذا كان من أجل أي نقطتين A, B تنتميان إلى الفضاء، فإن كل نقطة تقع على القطعة المستقيمة بينهما تنتمي إلى هذا الفضاء، كما يوضح الشكل (2−2). سنفرض أن هذه الحالة متوفرة تسهيلاً لشرح البرمجة الخطية البسيطة إلا في حال النص صراحةً غير ذلك.




**الشكل (2-2) الفضاءات المحدبة Convex وغير المحدبة**

مراحل التمثيل البياني للبرنامج الخطي:

(1) التمثيل البياني للقيود في جملة إحداثيات المتغيرات.

(2) التمثيل البياني للتابع الهدف على نفس الشكل.

(3) وأخيراً البحث عن الحل الأمثل على الشكل.

## 3-2 التمثيل البياني للقيود

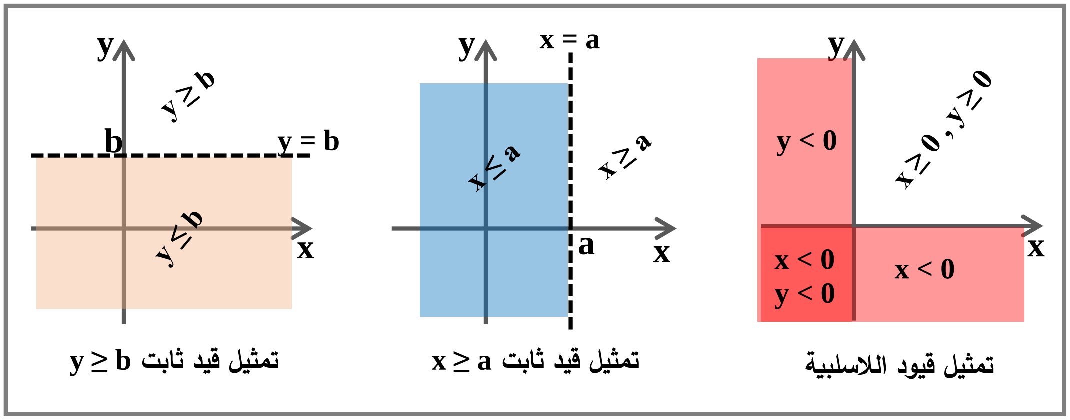
أشرنا إلى أن تقاطع مجموعة القيود يشكل منطقة الحلول المقبولة (إن وجدت)، ودعوناها بمنطقة الحلول المقبولة Feasible Region. فكيف يتم تمثيل القيود الخطية بمتغيرين اثنين؟

نعلم أن كل معادلة من الدرجة الأولى يُمكن تمثيلها على شكل مستقيم في جملة إحداثيات مستوية oxy، لنرى بعض أشكال هذه القيود، مع التذكر دوماً أننا نتعامل مع قيود ممثلة بمتراجحات خطية من متغيرين اثنين فقط.

أ) تمثيل قيود اللاسلبية $\mathbf{x \geq 0}$، $\mathbf{y \geq 0}$ والقيود $\mathbf{x \geq a}$، $\mathbf{y \geq b}$ حيث a, b ثوابت. كما يوضح الشكل (2-3).

- القيد $x \geq 0$ يعني جميع قيم x الموجبة أو الصفر، أي على يمين المحور العمودي.

- القيد $y \geq 0$ يعني جميع قيم y الموجبة أو الصفر، أي فوق المحور الأفقي.
- بالتالي، القيدين $x \geq 0$ و $y \geq 0$ يُمثلان الربع الأول فقط.
- القيد $x \geq a$ يعني جميع قيم x التي تساوي وأكبر من a، فتكون القيم المقبولة على يمين المستقيم x=a.
- القيد $y \geq b$ يعني جميع قيم y التي تساوي وأكبر من القيمة b، فتكون القيم المقبولة فوق المستقيم y=b.




**الشكل (2−3) تمثيل قيود بسيطة**

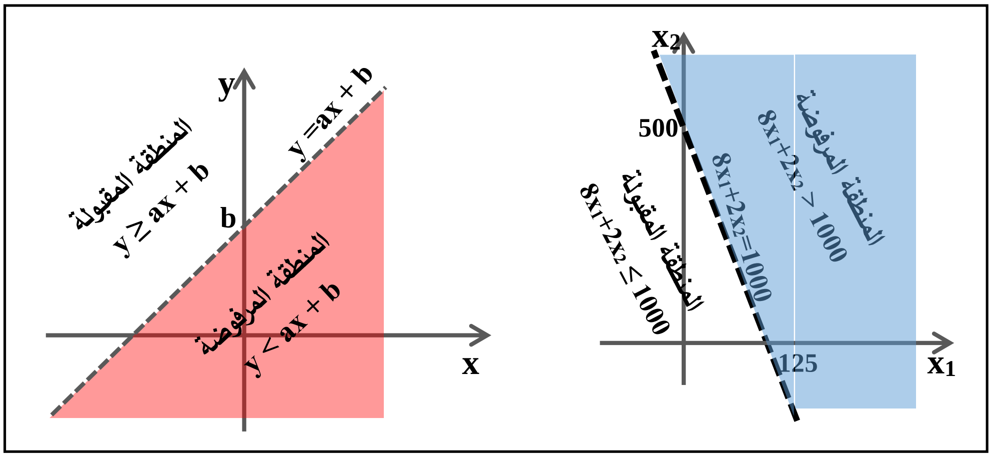
ب) تمثيل قيد خطي من الشكل: $y \geq ax + b$

تُمثل الصيغة $y = ax + b$ مستقيماً ميله يساوي a ونقطة تقاطعه مع المحور العمودي y=b، ويفصل هذا المستقيم بين منطقتي القبول والرفض، ندعوه عادةً حدود القيد. يمكن استيفاء كل متراجحة خطية في أحد نصفي المستوي المحدود بالمستقيم عندما نستبدل التراجح بالتساوي.

مثال (2−3) لنأخذ قيد الموازنة في المثال أعلاه $8x_1 + 2x_2 \leq 1000$

نكتب صيغة المستقيم الذي يحدّ منطقتي القبول والرفض أي تحقق ورفض المتراجحة أعلاه، ثم نرسم المستقيم ونحدد المنطقتين.

$8x_1 + 2x_2 = 1000$، أو بإعادة صـــياغة المعادلة بالشــكل النموذجي $x_2 = -4x_1 + 500$ حيث $x_2$ المحور العمودي و $x_1$ تمثل المحور الأفقي، ثم نرسم المستقيم بتحديد نقطتين منه والوصل بينهما كما هو موضح في الشكل (2–4).




**الشكل (2–4) تمثيل قيد خطي بمتغرين اثنين**

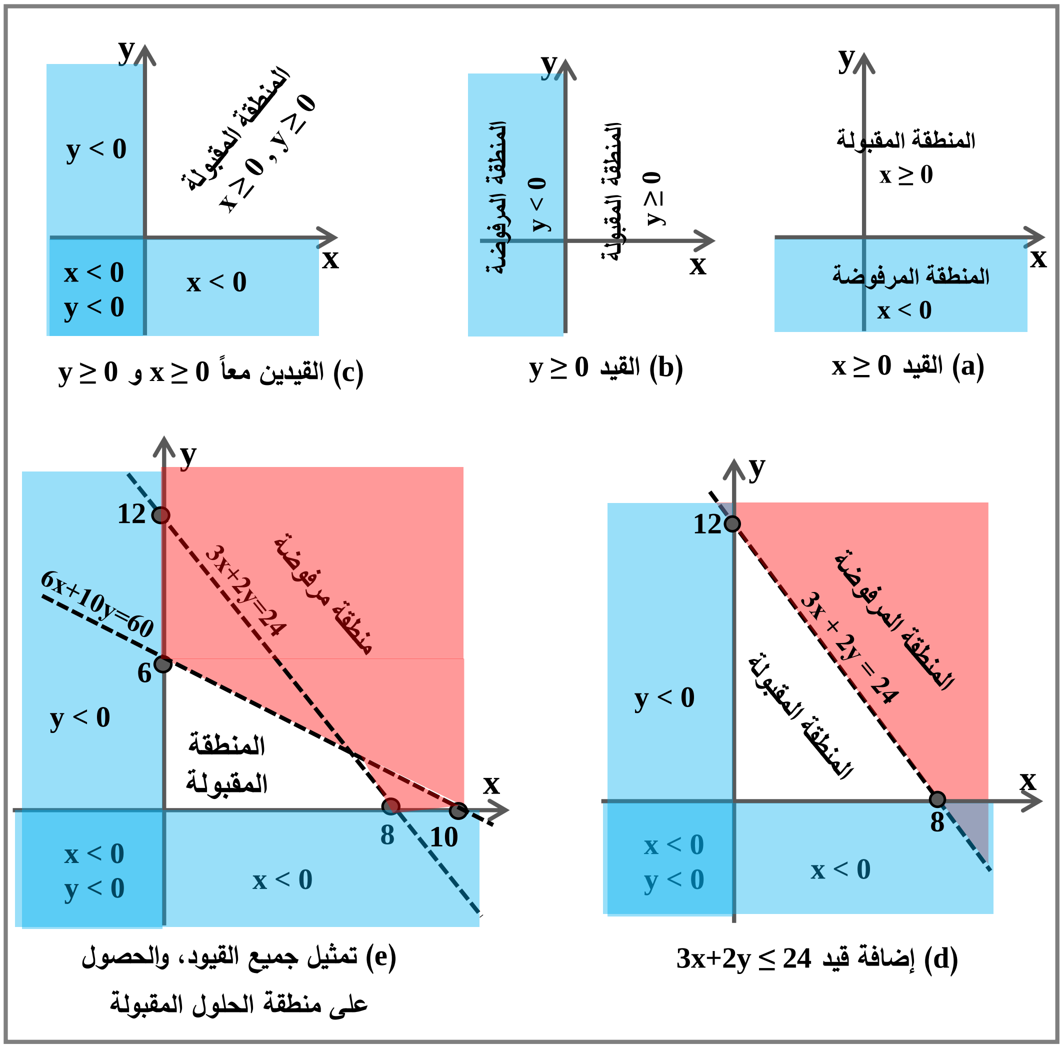
ت) تمثيل عدّة قيود خطية.

في هذه الحالة، نُمثل جميع القيود على نفس جملة الإحداثيات المســتوية، ثم نوجد على الشــكل المنطقة المقبولة أي التي تُحقق القيود مجتمعةً.

مثال (2–4) لنأخذ مجموعة القيود الآتية، ولنحاول تمثيلها جميعاً على نفس الشكل.

$$\mathbf{3x + 2y \le 24}$$
$$\mathbf{6x + 10y \le 60}$$
$$\mathbf{x \ge 0 \quad ; \quad y \ge 0}$$

نُمثل القيود بالتدريج، ويُنصح البدء بالأقل تعقيداً إلى الأكثر تعقيداً)، كما يوضح الشكل (2–5).




**الشكل (2–5) تمثيل مجموعة قيود وظهور منطقة الحلول المقبولة**

- قيد اللاسلبية $x \geq 0$ يُمثل النصف الأعلى من جملة الإحداثيات، الجزء (a) على الشكل.
- قيد اللاسلبية $y \geq 0$ يُمثل النصف الأيمن من جملة الإحداثيات، الجزء (b) على الشكل.
- الجزء (c) من الشكل يُمثل الربع الأول من جملة الإحداثيات قيدي اللاسلبية $x \geq 0$ , $y \geq 0$.
- القيد $3x + 2y \leq 24$ ممثل على الجزء (d) من الشكل.

- القيد $6x + 10y \le 60$ ممثل على الجزء (e) من الشكل.
- يظهر على الجزء الأخير (e) تقاطع جميع القيود، بالتالي منطقة الحلول المقبولة.

## 4-2 التمثيل البياني تابع الهدف

مثلنا في الفقرة السابقة مجموعة القيود وحصلنا على منطقة الحلول المقبولة، لكن يبقى السؤال المهم: أي من هذه الحلول هو الأفضل؟

نحصل على الحل الأفضل/الأمثل من الصيغة الرياضية للتابع الهدف. لكن إذا دققنا في صيغة تابع الهدف، نجد أنه لا يُمكن حساب قيم التابع إلا بعد معرفة قيم محددة لجميع متغيراته البالغ عددها في حالتنا ثلاثة متغيرات: متغيري القرار x, y ومتغير تابع الهدف Z.

أيضاً، من أجل قيمة محددة ما للتابع الهدف Z، قد نحصل على عدد كبير من الحلول وجميعها تُعطي قيمة تابع الهدف. لنوضح ذلك عبر المثال الآتي (2−5).

مثال (2−5) لدينا تابع الهدف $\text{Max}\ \{Z = 200\,x + 150\,y\}$

من أجل $x=10,\ y=20$، نجد $Z = 200*10 + 150*20 = 5000$

أيضاً من أجل $x=25,\ y=0$، نجد نفس قيمة تابع الهدف $Z = 200*25 + 150*0 = 5000$

أو من أجل $x=0,\ y = \frac{500}{15}$، نجد نفس القيمة $Z = 200 * 0 + 150 * \frac{500}{15} = 5000$

من ناحية أخرى، لنفرض $Z = 0$، فنجد $200x + 150y = 0$، وهي معادلة واحدة بمجهولين، نحتاج لحلها

معرفة أحد المجهولين. لنأخذ مثلاً x=0 فنجد y=0 أيضـــاً، أو لتكن x=6 فنجد y=8، هناك عدد كبير من الأزواج (x, y) التي تُحقق نفس القيمة Z=0.

نحتاج إذاً إلى طريقة لرسم تابع الهدف على نفس جملة إحداثيات المستوي oxy. نعلم أنه يُمكن رسم مستقيم ما بطريقتين: بمعرفة نقطتين منه، أو بمعرفه ميله[2] ونقطة واحدة من المستقيم، وسنستخدم هذه الأخيرة لرسم تابع الهدف Z.

الصيغة العامة لتابع هدف Z خطي بمتغيرين اثنين x, y لها الشكل:

$$Z = ax + by$$

حيث a, b ثوابت حقيقية، ومن الطبيعي ألا يكونا مساويين للصفر $a \neq 0$ و $b \neq 0$.

تُمثل هذه الصيغة مستقيماً في جملة إحداثيات مستوية oxy، يُمكن إعادة صياغتها بالشكل:

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{Z}{b}$$

من الصـــيغة، يُمكن اســتخلاص عدد كافٍ من المعلومات التي تســمح برســم تابع الهدف على نفس جملة الإحداثيات oxy التي مثلنا فيها القيود:

- ميل المستقيم يساوي $-\frac{a}{b}$ وهو ثابت لا علاقة له بقيم Z.
- يتقاطع المستقيم مع المحور العمودي oy عندما x=0 أي $y = \frac{Z}{b}$.
- إذا تغيّرت قيم Z فإن الميل لا يتغير، لكن تتغير نقطة التقاطع $y = \frac{Z}{b}$، مما يعني أن المســتقيم الجديد ينتقل إلى مستوى آخر بشكل موازي[3] للمستقيمات الأخرى.

---

[2]. ميل المستقيم Z هو ظل الزاوية tg(α) لتي يصنعها المستقيم مع المحور الأفقي ox.
[3]. يكون مستقيمان متوازيان إذا كان لهما نفس الميل.

- حيث أن x, y هي مقادير غير سالبة (مقادير اقتصادية)، إذا كان كل منها يساوي الصفر x=0, y=0 (مبدأ الإحداثيات) فإن قيمة تابع الهدف عندها تساوي الصفر أيضاً Z=0، وهو حل غير مرفوض.
- يُمكن إذاً البدء برسم أول مستقيم Z=0 يمر من مبدأ الإحداثيات (0, 0) وميله يساوي $-\frac{a}{b}$.
- مع كل تغير في قيم Z، نرسم مستقيمات موازية للمستقيم الأول وبنفس الميل طبعاً.
- جميع النقاط التي تقع على نفس المستقيم، تكون لها نفس قيم تابع الهدف وإن اختلفت إحداثياتها (x, y)، لذلك ندعو بشكل عام مثل هذه المنحنيات المتوازية بمنحنيات السواء Isoquant، حيث تكون جميع النقاط على نفس المنحني متساوية القيمة.

لنوضح ذلك عبر المثال الآتي.

مثال (2−6) لنرسم تابع الهدف Z = 200 x + 150 y من أجل متسويات مختلفة.

لنعتمد نفس جملة إحداثيات القيود oxy (سنحتاج التمثيل المشترك على نفس الجملة عند البحث على الحل الأمثل لاحقاً)، حيث المحور الأفقي ox والمحور العمودي oy، يُمكن إعادة صياغة تابع الهدف بالشكل النموذجي ليُصبح y بدلالة x و Z كما يلي:

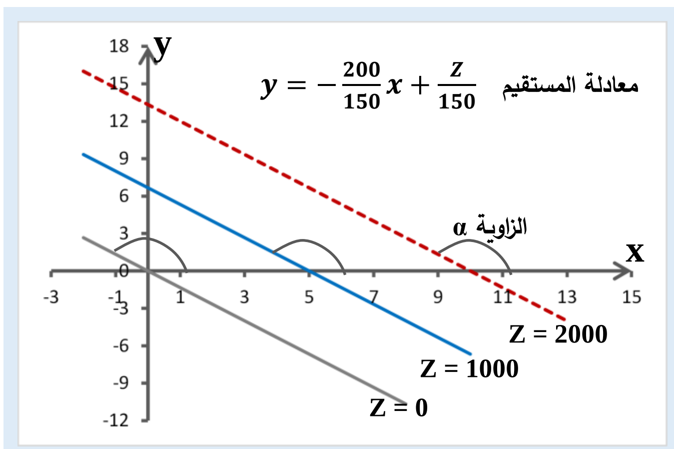
$$y = -\frac{200}{150}x + \frac{Z}{150}$$

- عندما x = 0, y = 0 فإن Z = 0. إذاً أول مستقيم Z يمر من مبدأ الإحداثيات.
- ميل المستقيم y بدلالة x هو $-\frac{200}{150}$ فالزاوية α منفرجة وتساوي حوالي α=143°.

طالما أن الميل ثابت مهما كانت قيم Z، بالتالي إذا تغيّرت قيم Z، نحصل على مستقيمات متوازية فيما بينها

وتنتقل بقيم Z من مستوى إلى آخر كما يبين الشكل (2−6)، مثلاً:

- إذا كانت Z = 0، يكون لدينا الصيغة $y = -\frac{200}{150}x + \frac{0}{150} = -\frac{20}{15}x$ أي يُمثل المستقيم الذي يمر من مبدأ الإحداثيات. ويُمكن رسم هذا المستقيم بسهولة.
- إذا كانت Z = 1000، يكون لدينا الصيغة $y = -\frac{20}{15}x + \frac{1000}{150}$ وهو مستقيم يوازي السابق ويتقاطع مع المحور العمودي x = 0 عند $y = \frac{1000}{150}$ .
- إذا كانت Z = 2000، يكون لدينا الصيغة $y = -\frac{20}{15}x + \frac{2000}{150}$ وهو مستقيم يوازي السابق ويتقاطع مع المحور العمودي x = 0 عند $y = \frac{2000}{150}$ .




**الشكل (2−6) تمثيل تابع هدف خطي بمتغرين اثنين**

تمكنا إذاً من رسم تابع الهدف Z وذلك بعد معرفة ميل المستقيم الذي يُمثله وإحدى نقاط هذا المستقيم. كلما غيّرنا من قيمة Z، ننتقل بالمستقيم من مستوى إلى مستوى آخر، ويكون لجميع النقاط التي تقع على نفس المستقيم نفس قيمة تابع الهدف.

## 5-2 البحث عن الحل الأمثل بيانياً

رأينا في الفقرتين السـابقتين كيفية تمثيل القيود وتابع الهدف بيانياً، يبقى السـؤال المهم، ما هي أفضـل قيمة لتابع الهدف أو ما هو الحل الأمثل؟ وكيف نجد على الشكل البياني أفضل قيمة للتابع Z الذي يُمثل الحل الأمثل؟

هذا ما ســـنراه في هذه الفقرة من خلال المحاكمة على برنامج خطي من متغيرين اثنين فقط تســـهيلاً للشـــرح، واستخلاص بعض المبادئ المساعدة في البحث عن الحل الأمثل على الشكل البياني، شرط أن يكون الرسم دقيقاً ومعبراً عن المشكلة.

هناك مجموعة من المبادئ المنطقية التي تساعد في البحث عن الحل الأمثل، نُلخّصها كما يلي:

المبدأ الأول: البحث ضـــمن المنطقة المقبولة. كل نقطة منها هي حل مقبول، الحل الأمثل هو إذاً إحدى هذه النقاط، وجميع النقاط خارج هذه المنطقة غير مقبولة أي لا تُحقق أحد القيود.

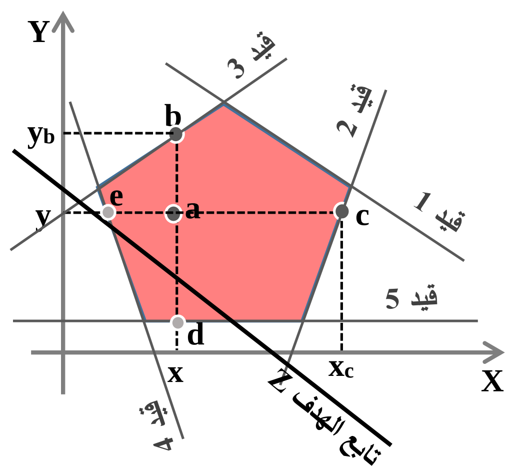
المبدأ الثاني: البحث من بين النقاط التي يتقاطع فيها أحد مســـتويات تابع الهدف Z مع منطقة الحلول المقبولة. قد تكون نقطة واحدة أو أكثر.

المبدأ الثالث: البدء بحل ما ثم تحســـين الحل. باعتبار أن أية نقطة من منطقة الحلول المقبولة هي حل للبرنامج الخطي ويكون للتابع الهدف Z قيمة محددة عندها، فيمكن الانطلاق من أية نقطة من هذه المنطقة، ثم تحسين الحل باستمرار. لكن هناك عدد لانهائي من الحلول ضمن المنطقة المقبولة، فمن أين نبدأ؟

المبدأ الرابع: البحث على حدود المنطقة المقبولة. لو تمعّنا جيداً في منطقة الحلول المقبولة، لوجدنا أنه من أجل أي حل داخل تماماً منطقة الحلول المقبولة، هناك دوماً حل ما على حدود المنطقة أفضـــل منه أو

يساويه على الأقل، انظر الشكل (2–7). وتطبق هذه القاعدة سواء كان تابع الهدف مطلوب تعظيمه Max أو تقليله Min.

نلاحظ على الشكل أيضاً، إذا كان شكل المنطقة المقبولة محدباً، فإن قيمة Z عند كل نقطة تقاطع بين قيدين هي أفضل (أو تساوي على الأقل) من قيمته عند أية نقطة تقع على أي من المستقيمين المعنيين. ندعو نقاط التقاطع هذه بالذرى Corners. نستخلص إذاً في حالة الشكل المحدب، أنه يكفي البحث عن الحل الأمثل من بين نقاط التقاطع بين مستقيمات القيود، ويكفي حساب قيمة Z عند كل ذروة ثم أخذ الأكبر (حالة Max) أو الأصغر (حالة Min).




من أجل أية نقطة a داخل تماماً المنطقة المقبولة، هناك على الأقل نقطة على حدود المنطقة أفضل منها:

- حالة تعظيم التابع Max(Z): النقطتين b, c هما أفضل من a.
- حالة تقليل التابع Min(Z): النقطتين e, d هما أفضل من a.

**الشكل (2–7) البحث عن الحل على حدود منطقة الحلول المقبولة**

<u>المبدأ الخامس</u>: شرط التوقف عن التحسين. يتوقف البحث أو تحسين الحل عند النقطة/الحل التي لا يوجد بعدها أية نقطة/حل أفضل منها.

لنحاول شرح كيفية البحث بيانياً عن الحل الأمثل أي أفضل قيمة Z عبر التطبيق الآتي.

**تطبيق (2–3) البحث عن الحل الأمثل بيانياً (حالة تعظيم التابع Max).**

لنأخذ نفس بيانات التطبيق أعلاه (2–1)، حيث لدينا البرنامج الخطي:

تابع الهدف Z: $\text{Max } \{Z= 200\, x + 150\, y\}$

قيد الخشب المتوفر Y1: $3x + 2y \le 24$

قيد ساعات العمل Y2: $6x + 10y \le 60$

قيود اللاسلبية: $y \ge 0$ ، $x \ge 0$

مثلنا أعلاه مجموعة القيود وحصـلنا على منطقة الحلول المقبولة، كذلك مثلنا تابع الهدف من أجل قيم/مسـتويات مختلفة، لنجمّع حالياً القيود والتابع على نفس الشكل البياني (2–8).

بالنظر إلى الشكل (2–8)، نبحث عن الحل الأمثل كما يلي:

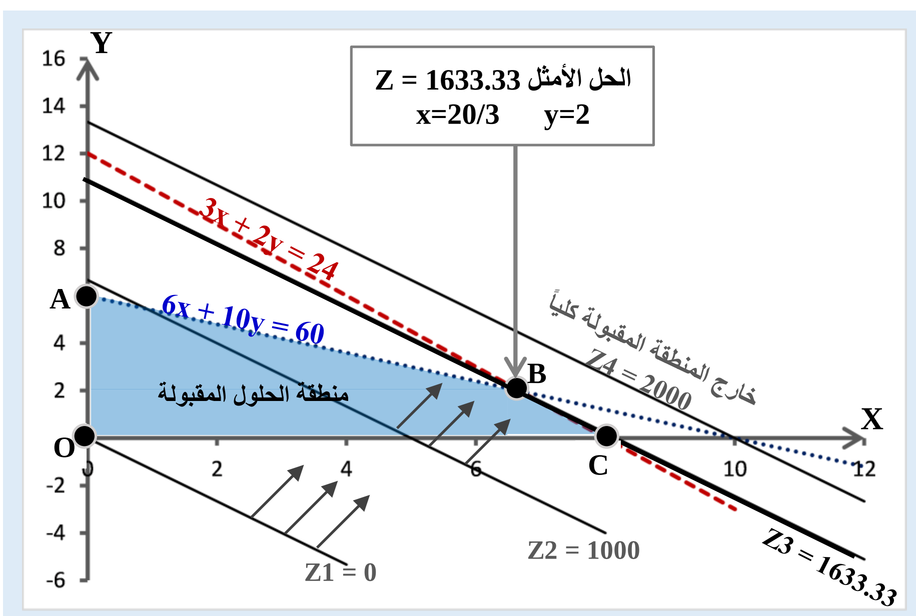
- نبدأ من حل مقبول وليكن $x=0, y=0$ أي مبدأ الإحداثيات، فنجد قيمة التابع تساوي الصفر $Z1=200(0)+150(0)=0$ ويُمثل المسـتقيم الذي يمر من مبدأ الإحداثيات وميله $-\frac{20}{15}$. لنحاول تحسـين هذا الحل.
- كلما حرّكنا مستقيم تابع الهدف Z نحو الأعلى (نحو Z2 مثلاً)، كلما زادت قيم x و y وبالتالي تزداد قيم Z، أي يتم تحسين الحل. على المستقيم Z2 مثلاً، تكون قيمة تابع الهدف أكبر من الصفر وتساوي على الشكل $Z2=1000$.
- نسـتمر بتحريك المسـتقيم Z إلى أن نصـل إلى آخر نقطة يتقاطع فيها مع منطقة الحلول المقبولة، فتكون هذه النقطة تُمثل الحل الأمثل، على الشـكل نلاحظ أنها النقطة B حيث يتقاطع المسـتقيم Z3 مع منطقة

الحلول المقبولة.

- إذا حركنا المســـتقيم Z3 أبعد من هذه النقطة باتجاه الأعلى، نُصـــبح خارج المنطقة المقبولة، مثلاً Z4 جميع نقاطه تقع خارج المنطقة المقبولة. وإذا حركناه Z3 باتجاه الأدنى، فإننا نحصــل على حلول مقبولة لكن قيمة تابع الهدف عندها أقل من Z3، لذلك نقبل أن Z3 الذي يتقاطع مع منطقة الحلول المقبولة عند النقطة B هو الحل الأمثل.

- بعد تحديد نقطة الحل الأمثل على الشـكل، نُوجد إحداثيات هذه النقطة بإسـقاط عمودي على المحورين، فنجد **x*=20/3** و **y*=2**، وقيمة تابع الهدف عندها تســـاوي **Z*=1633.33** وهو الحل الأمثل. نرمز عادةً للحل الأمثل بوضع نجمة * على رمز التابع.

$$\mathbf{Z^* = 200(20/3) + 150(2) = 1633.33}$$




**الشكل (2–8) تمثيل القيود وتابع الهدف وإظهار الحل الأمثل**

كما نلاحظ أن شـكل منطقة الحلول المقبولة يأخذ مضــلعاً محدباً، بالتالي حسـب المبدأ الرابع أعلاه، كان يكفي

البحث عن الحل الأمثل بمقارنة قيم Z عند الذرى أي عند نقاط تقاطع القيود، كما يلي:

- النقطة O (مبدأ الإحداثيات) هي نقطة تقاطع مستقيمي القيدين $x=0$ و $y=0$. قيمة تابع الهدف عندها يساوي الصفر **0** $= Z(O)=200(0)+150(0)$.

- النقطة A هي نقطة تقاطع مستقيمي القيد $x=0$ وقيد ساعات العمل $6x+10y=60$، بحل هاتين المعادلتين نجد $y=6$، وقيمة تابع الهدف عندها $Z(A)=200(0)+150(6)=$**900**.

- النقطة B هي نقطة تقاطع مستقيمي قيدي الخشب $3x+2y=24$ وساعات العمل $6x+10y=60$، بحل المعادلتين نجد $x=20/3$ و $y=2$، قيمة تابع الهدف عندها 1633.33:

$$Z(B) = 200(20/3) + 150(2) = \mathbf{1633.33}$$

- النقطة C هي نقطة تقاطع مستقيمي القيد $y=0$ وقيد الخشب $3x+2y=24$، بحل هاتين المعادلتين نجد $x=8$، قيمة تابع الهدف يساوي $Z(C) = 200(8) + 150(0) =$ **1600**.

بمقارنة قيم Z للذرى الأربعة، نجد أن أفضلها هي عند النقطة B، فتكون B تمثل الحل الأمثل، حيث:

**$x^* = 20/3$ ، $y^* = 2$ و $Z^* = 1633.33$.**

مثال (2−7) البحث عن حل بياني (حالة تعظيم Max)

ليكن لدينا البرنامج الخطي الآتي، ولنحاول تمثيله وحله بيانياً.

$$\mathbf{Max\ \{ Z = 20x + 15y \}}$$

$$\mathbf{2x + y \le 10 \qquad [1]}$$

$$\mathbf{5x + 7y \le 40 \qquad [2]}$$

$$3x + 2y \leq 24 \qquad [3]$$
$$x \geq 0 \quad ; \quad y \geq 0 \qquad [4]$$

نُمثل جميع القيود على نفس الشــكل (2−9). يُظهر الشــكل أن القيد رقم [3] يبدو مكرراً بالتالي غير مفيد، فقط القيود الأول والثاني واللاسلبية هي التي ساهمت بتحديد منطقة الحلول المقبولة.

يُظهر الشكل أن آخر نقطة يقطع فيها تابع الهدف Z المنطقة المقبولة هي النقطة B، تُمثل النقطة الحل الأمثل.

النقطة B هي في الحقيقة نقطة تقاطع المســتقيمين $2x+y=10$ و $5x+7y=40$، الحل المشــترك للمعادلتين يُمثل الحل الأمثل، نجد $x^*=y^*=30/9$، قيمة الحل الأمثل $\mathbf{Z^*=116.67}$ تساوي:

$$Z^* = 20\,(30/9) + 15\,(30/9) = 116.67$$

نلاحظ أن المنطقة المقبولة تأخذ شـــكل مضـــلع محدب، يكفي إذاً البحث عن الحل الأمثل بين نقاط تقاطع مستقيمات القيود، أي عند النقاط O، A، B، C ثم أخذ النقطة التي يكون فيها Z هو الأكبر:

- النقطة O (مبدأ الإحداثيات) هي نقطة تقاطع القيدين $x=0$ و $y=0$. قيمة تابع الهدف عندها يســـاوي الصفر $Z(O)=20(0)+15(0)=\mathbf{0}$.

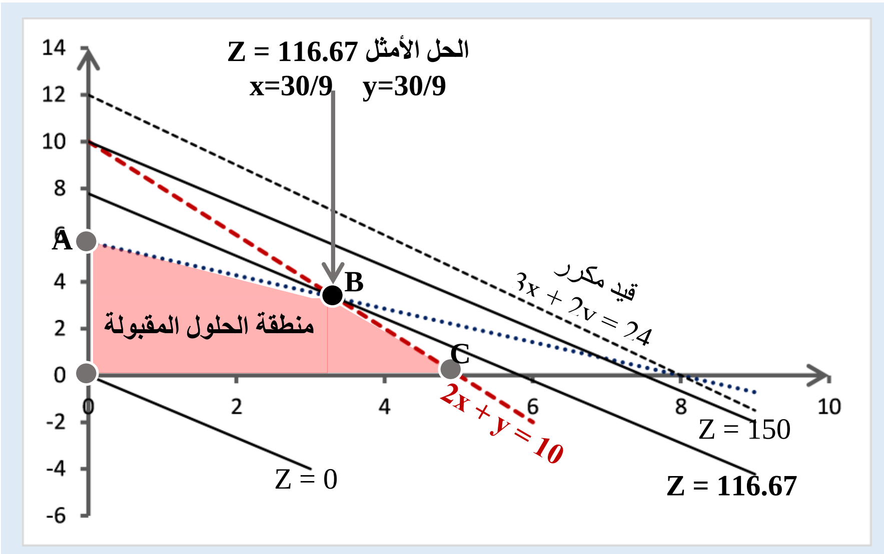
- النقطة A هي نقطة تقاطع القيد $x=0$ والقيد الثاني $5x+7y=40$، بحل هاتين المعادلتين نجد $y=40/7$. قيمة تابع الهدف $Z(A)=20(0)+15(6)=\mathbf{85.71}$.

- النقطة B هي نقطة تقاطع الأول $2x+y=10$ والثاني $5x+7y=40$،، بحل المعادلتين نجد $x=y=30/9$، قيمة تابع الهدف $Z(A)=20(30/9) + 15(30/9)=\mathbf{116.67}$.

- النقطة C هي نقطة تقاطع القيد $y=0$ والقيد الأول $2x+y=10$، بحل المعادلتين نجد $x=5$. قيمة تابع

الهدف $Z(A) = 20(5) + 15(0)=\mathbf{100}$.

إذاً، الحل الأمثل هو عند النقطة B (نفس الحل السابق) حيث $x^*=y^*=30/9$ و $Z^*=116.67$.




**الشكل (2−9) البحث عن الحل الأمثل (حالة تعظيم Max)**

مثال (2−8) البحث عن حل بياني (حالة تقليل Min)

ليكن لدينا البرنامج الخطي الآتي، ولنحاول تمثيله وحله بيانياً.

$$\mathbf{Min\ \{ Z = 8x + 10y \}} \qquad [1]$$

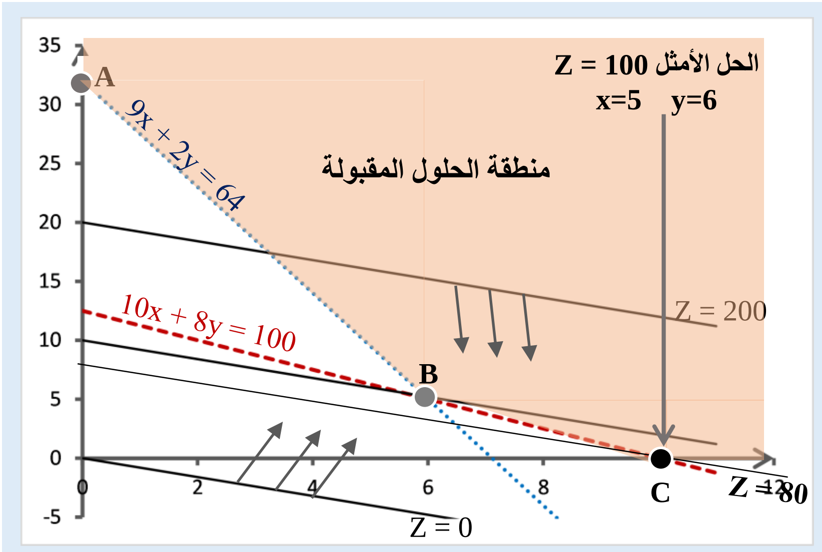
$$\mathbf{9x + 2y \geq 64} \qquad [2]$$

$$\mathbf{10x + 8y \geq 100} \qquad [3]$$

$$\mathbf{x \geq 0 \ ; \ y \geq 0} \qquad [4]$$

نتبع نفس خطوات الرســـم البياني في حالة التعظيم: نمثل منطقة القيود، مع ملاحظة أن المتراجحات أكبر أو يســاوي، أي أن المنطقة المقبولة لكل قيد من هذا النمط هي فوق المســتقيم الممثل لمعادلة المتراجحة. فنحصــل

على منطقة الحلول المقبولة. ثم نمثل تابع الهدف Z بنفس الطريقة، كما هو مبين على الشكل (2−10).




**الشكل (2−10) البحث عن الحل الأمثل (حالة تقليل Min)**

البحث عن الحل الأمثل، مع الانتباه إلى أننا نبحث عن أصـــغر قيمة للتابع الهدف. أصـــغر نقطة من منطقة الحلول المقبولة يتقاطع معها أحد مستويات تابع الهدف تكون هي الحل الأمثل، وهي على الشكل النقطة C.

قد يكون من الأفضل البدء بحل غير مقبول، ثم تحسين الحل إلى أن نصل إلى حل مقبول. أي يُمكن البدء من النقطة x=0, y=0، وهي حل غير مقبول كما نرى على الشـكل، ثم نبدأ بزيادة أو بتحريك مسـتقيم التابع Z نحو الأعلى، فتزداد بطبيعة الحال قيمته، إلى أن نصـــل إلى أول نقطة يتقاطع فيها مع المنطقة المقبولة وهي على الشكل النقطة C، فتكون هي الحل الأمثل، كونها أقل قيمة للتابع Z يتقاطع فيها مع الحلول المقبولة.

نوجد إحداثيات هذه النقطة C من الشـكل (إذا كان الرسـم دقيقاً)، نلاحظ أنها نقطة التقاطع بين المعادلتين y=0 و 10x+8y=100، ومنه x*=10، y*=0، و Z*=80:

$$\mathbf{Z^*(C) = 8(10) + 10(0) = 80}$$

يُمكن استغلال مفهوم الشكل المحدب: نلاحظ أن المنطقة المقبولة محدودة من الأدنى فقط وهذا كل ما نحتاجه، وباعتبار أن الهدف هو إيجاد أقل قيمة للتابع Z، نبحث إذاً على الحدود الدنيا للمنطقة المقبولة كون هذا الجزء منها محدباً. يتم مقارنة قيم Z عند كل نقطة من نقاط تقاطع مستقيمات القيود، أي مقارنة قيم Z عند النقاط A, B, C، ثم أخذ القيمة الأصغر فتكون هي الحل الأمثل.

- النقطة A هي نقطة تقاطع $x=0$ و $9x+2y=64$، بحل هاتين المعادلتين نجد $y=32$. قيمة تابع الهدف $Z(A)=8(0)+10(32)=320$.
- النقطة B، هي نقطة التقاطع بين المستقيمين الأول $9x+2y=64$ والثاني $10x+8y=100$، بحل المعادلتين، نجد: $x=6$ و $y=5$ وتكون قيمة التابع $Z=100$:

$$Z = 8(5) + 10(6) = 100$$

- النقطة C هي نقطة تقاطع $y^*=0$ و $10x+8y=100$، بحل هاتين المعادلتين نجد $x^*=10$. قيمة التابع $Z^*(C)=8(10)+10(0)=$**80**. وهي الحل الأمثل كونها أصغر قيم Z.

**تطبيق (2−3) المحاكمة الاقتصادية ... (عبود، 2017. بتصرف).**

البرنامج الخطي هو تعبير عن ظاهرة اقتصـــادية، ســـنحاول في هذا المثال محاولة تَمثّل المحاكمة التي يجريها الإداري أو الاقتصادي دون الاستعانة بأدوات البرمجة الخطية.

تُصـنع شـركة منتجين جديدين A و B في الأسـواق. أظهرت دراسـة السـوق أن عدد زبائن المنتج A لا يتعدّى 125 ألف في العام و 360 ألف للمنتج B. تملك الشـــركة موازنة محدودة لأجل طرح المنتجين في الســـوق لا

تتجاوز 600 ألف $. التكاليف المباشـــرة هي 4 $ لكل قطعة من A و دولار واحد لكل قطعة من B. لا تدخل النفقات الثابتة (الإدارة وغيرها) في الموازنة الســابقة، وتقول الشــركة بأنها لن تتغير مهما كانت الكميات المنتجة من A و B.

كما يتم تصــنيع المنتجين على سـلسـلتي إنتاج مختلفتين إلاّ في نقطة واحدة حيث تتم المعالجة على نفس الآلة. زمن العمل هو 8 ساعات لكل 1000 قطعة من A و 5 ساعات لكل 1000 قطعة من B، لأسباب تتعلق بالسوق تريد الشركة طرح المنتجين خلال أقل من عام (نأخذ العام يساوي 2000 ساعة عمل). أخيراً، يتوقع أن يكون ربح المنتج A يساوي دولارين اثنين/القطعة والمنتج B دولار واحد/القطعة.

ما هي الكميات الواجب إنتاجها من A و B من أجل أن يكون الربح الإجمالي Z أكبر ما يمكن؟

صياغة البرنامج الخطي: لنرمز لعدد القطع المنتجة من A بـ x و من B بـ y (بالآلاف).

أولاً، لا يمكن لـ x و y أن تكونا سالبتين: $x \geq 0$ و $y \geq 0$

بحسب الشروط المفروضة من السوق: $x \leq 125$ و $y \leq 360$

تبلغ التكاليف المباشرة للإنتاج: $1000*(4x + y)$ ويجب ألاّ تزيد 600 ألف $ أي:

$$4x + y \leq 600$$

نفس المناقشة من أجل زمن التصنيع: $8x + 5y \leq 2000$

أخيراً نريد أن يكون الربح الإجمالي أعظم ما يمكن أي: $\text{Max}\ \{ Z = 2x + y \}$

وتمثل المسألة بشكل برنامج خطي:

تابع الهدف: $\text{Max}\ \{ Z = 2x + y \}$ [1]

تحت القيود الآتية:

| | | | |
|---|---|---|---|
| قيد السوق | $x \leq 125$ | | [2] |
| قيد السوق | $y \leq 360$ | | [3] |
| قيد الموازنة | $4x + y \leq 600$ | | [4] |
| قيد الزمن | $8x + 5y \leq 2000$ | | [5] |
| | $x \geq 0 \quad y \geq 0$ | | [6] |

<u>الدراسة الاقتصادية:</u> لنحاول مناقشة المسألة من وجهة النظر الاقتصادية.

حيث أن ربح القطعة من A يساوي 2 $ ومن B دولار واحد، فمن المنطقي أن نفكر بإنتاج أقصى ما يمكن من A ولا ننتج شيئاً من B أي y=0. لندرس القيود بحسب هذه الفرضية:

القيد (2) لا يسمح بإنتاج أكثر من 125 ألف قطعة من A: $x \leq 125$

القيد (4) لا يسمح بإنتاج أكثر من 150 ألف قطعة من A: $x \leq 600/4=150$

القيد (5) لا يسمح بإنتاج أكثر من 250 ألف قطعة من A: $x \leq 2000/8=250$

أي لا يُمكن إنتاج أكثر من 125 ألف قطعة من A، فيكون الربح يساوي من أجل x=125، y=0:

$$\mathbf{Z1} = 2(125) + 1(0) = \mathbf{250}$$

الموازنة: نحتاج إلى 500 ألف $ لإنتاج 125 ألف قطعة من A (4*125)، ولدينا فائض من الموازنة 100 ألف $.

الزمن: نحتاج إلى 1000 ساعة عمل لإنتاج 125 ألف قطعة من A (8*125)، ويكون لدينا فائض من الزمن 1000 ساعة عمل.

أي لدينا فائض موازنة 100 ألف، وفائض زمن 1000 ساعة عمل، فُيمكن استخدامها لإنتاج كمية ما من B:

من فائض الموازنة، يُمكن إنتاج 100 ألف قطعة من B، في هذه الحالة تنفذ الموازنة.

من فائض الزمن، يُمكن إنتاج 500 ألف قطعة من B.

بالتالي، لا يُمكن إنتاج أكثر من 100 ألف قطعة من B.

ويكون الربح Z2 في هذه الحالة حيث x=125، y=100 يساوي:

$$\mathbf{Z2} = 2(125) + 1(100) = \mathbf{350}$$

من المحتمل أن يقبل الاقتصادي هذه الفرضية، ويكون ربحه 350 ألف. لكنه بحكم الخبرة في السوق لديه إدراك أنه في بعض الحالات قد يُحقق ربحاً أكبر من بيع كميات أكبر من منتج ربح القطعة الواحدة أقل من منتج آخر.

فيذهب لدراسة فرضية أخرى: في حال لم ننتج إلاّ من المنتج B، لندرس وضع القيود كما في السابق:

القيد (3) لا يسمح بإنتاج أكثر من 360 ألف قطعة من B: $y \leq 360$ الأشد تقييداً

القيد (4) يسمح بإنتاج حتى 600 ألف قطعة من B: $y \leq 600$

القيد (5) يسمح بإنتاج حتى 400 ألف قطعة من B: $y \leq 400$

لنفرض أنه قبل إنتاج 360 ألف قطعة من B، ولا شيء من A، يكون الربح Z3 في هذه الحالة:

$$\mathbf{Z3} = 0(125) + 360(1) = \mathbf{360}$$

والربح في هذه الحالة أكبر من أرباح الحالات السابقة، رغم أن ربح القطعة من A هو الأكبر. يعود السبب إلى حجم سوق المنتج B تساوي تقريباً ضعف حجم المنتج A، بالتالي يُحقق الربح من بيع كميات كبيرة بربح أقل

(المنتج B)، أكثر من بيع كميات صغيرة بربح أكبر (المنتج A).

ويتبقى لديه وقت فائض حوالي 200 ســاعة عمل: 200=(5)360-2000، وموازنة فائضـــة تســاوي حوالي 240 ألف $: 240=360-600. بالتالي، يمكن إنتاج ما أمكن من A دون إنقاص y.

ضـــــمن حدود فائض الوقت، يمكن إنتاج حوالي 25 ألف قطعة من A، حيث تحتاج كل ألف قطعة إلى 8 ساعات عمل.

ضـــمن حدود فائض الموازنة، يُمكن إنتاج حوالي 60 ألف قطعة أيضـــاً من A، حيث تحتاج كل ألف قطعة إلى 4 $.

يعتمد إذاً إنتاج 25 ألف قطعة من A، بالإضـافة طبعاً لكمية B البالغة 360 ألف قطعة، يكون الربح Z4 في هذه الحالة يساوي:

$$\mathbf{Z4} = 2(25) + 360(1) = \mathbf{410}$$

وفي هذه الحالة، يســــتهلك كلياً الوقت المتاح، بالتالي لا يُمكن زيادة الكمية من أي من المنتجين دون إنقاص الآخر (سيأخذ من الوقت المخصص له)، رغم توفر حوالي 140 ألف من الموازنة.

كاقتصـــادي، يُدرك أنه في بعض الحالات، قد يُحقق ربحاً من تخفيض الإنتاج من أحد المنتجات، وتخصـــيص موارده لمنتج آخر. لندرس هذه الفرضـــية، هل يُمكن فعلاً تحقيق ربح أكبر من تخفيض إنتاج B وتخصـــــيص الوقت والموازنة الناجمين عن هذا التخفيض لإنتاج كمية ما من A؟

لنخفض كمية إنتاج B بمقدار 10 آلاف قطعة مثلاً، ولندرس أثرها على الربح الإجمالي.

ينقص الربح الإجمالي بمقدار 10 = 1* 10.

وتوفير في الوقت يساوي 50 ساعة عمل (10*5).

وتوفير في الموازنة يساوي 10 آلاف $ (1*10).

يمكن زيادة إنتاج A ضمن حدود التوفير في الوقت (الوفر في الموازنة ليس له تأثير لأنه كان لدينا فائض قبل التعديل). يســـمح هذا التوفير في الوقت بإنتاج 6.25 ألف قطعة من A ($6.25 = \frac{50}{8}$). مما يســـمح بزيادة الربح الناتج عنها بمقدار 12.5 ألف $ (2*6.25)، ويصبح الربح الإجمالي Z5:

**Z5** = 410 - 10 + 12.5 = **412.5**

نجح إذاً في زيادة الربح عن طريق التبديل بين إنتاج 10 آلاف قطعة من B مقابل إنتاج 6.25 ألف قطعة من A، باعتبار أن هذا التبديل مربح، فإلى أي مدى يمكن الاستمرار فيه؟

يجب طبعاً احترام القيد $x \leq 125$ ولكن رأينا أن إنتاج هذه الكمية من A ليس الأفضل، لذلك اتجه للإنتاج من B وفي الحالة الثانية لدينا 125 ألف فائض من الموازنة.

نلاحظ أن تخفيض إنتاج B بمقدار ألف قطعة، يتم توفير ألف دولار واحد (1$ للقطعة)، وبسبب الوقت المتوفر، يُمكن إنتـاج 0.625 ألف قطعـة من A بكلفـة 2.5 دولار للقطعـة الواحـدة (2.5=4*0.625)، أي تزداد النفقات بمقدار 1.5 دولار (1.5=1-2.5)، وباعتبار أن فائض الموازنة يســـاوي 140 ألف فيمكن زيادة إنتاج A بحوالي 58.333 قطعة كما يلي:

$$\frac{140}{1.5}x0.625 = \frac{175}{3} \cong 58.33$$

وهذا يؤدي إلى تخفيض إنتاج B بمقدار $\frac{140}{1.5}$ ونجد الحل الآتي:

$$x = 25 + \frac{140}{1.5} x 0.625 = \frac{250}{3} \cong 83.33$$

$$y = 360 + \frac{140}{1.5} = \frac{540 + 280}{3} = \frac{800}{3} \cong 266.667$$

الوقت المتبقي يساوي صفر. كذلك الموازنة المتبقة تساوي الصفر. ويكون الربح الإجمالي Z6 يساوي في هذه الحالة حوالي 433.33:

$$\boldsymbol{Z6} = 2x\frac{250}{3} + 1x\frac{800}{3} = \frac{1300}{3} \cong \boldsymbol{433.33}$$

لنكرر العملية، ولنحســـب في هذه الحالة الربح الهامشـــي الناتج عن تخفيض آخر لإنتاج B بمقدار 10 آلاف قطعة مثلاً:

هامش ربح B ينقص بمقدار 10 آلاف $، نوفر 50 ساعة عمل و 10 آلاف $.

يسمح هذا التوفير في الوقت بإنتاج 6.25 = 50/8 ألف قطعة من A.

في حين أن التوفير في الموازنة يسمح بإنتاج 2.5 = 10/4 ألف قطعة من A.

بالتالي، لا يمكن إنتاج أكثر من 2.5 ألف من A. مما يؤدي إلى زيادة الربح الناجم عن هذه الزيادة في كمية A بمقدار 5 = 2*2.5 آلاف $.

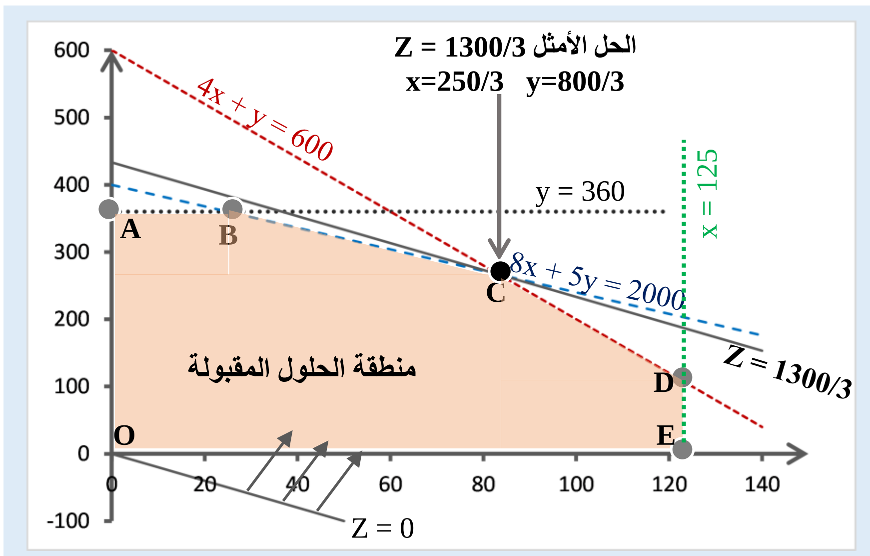
لكن الربح الإجمالي ينقص بمقدار 5 آلاف $: 5- = 10 – 5.

من الواضـح أنه من غير المفيد إجراء هذا التبديل، أي لم يعد بالإمكان تحسين الربح الإجمالي ووصـلنا إلى حدّه الأعظمي، القيم الأخيرة التي نحصل عليها تشكل أفضل حل قابل للتنفيذ وهو الحلّ الأمثل Optimal Solution.

هذه المحاكمة الاقتصادية قد تكون مفيدة عند الحديث عن عدد منتجات وقيود قليلة، لكنها بالتأكيد غير ناجعة إذا

زاد عدد المنتجات أو عدد القيود. وتُصبح مرهقة وشبه مستحيل الاستمرار فيها، لذلك سنرى أن الحل البياني يعطي نفس النتيجة بجهد ووقت أقل بكثير.

الدراسة البيانية: باعتبار أن المسألة لا تحوي إلا مجهولين x و y فيمكن تمثيلها على مستوي من محورين، والبحث على الشكل البياني (2−11) عن الحل الأمثل.




**الشكل (2−11) الحل البياني (حالة تعظيم ربح Max)**

نلاحظ من الشكل (2−11) أن المنطقة المقبولة تأخذ شكلاً محدباً، إذاً يكفي مقارنة قيم تابع الهدف Z عند نقاط تقاطع القيود واختيار الأكبر من بينها.

- النقطة O هي نقطة تقاطع x=0 و y=0، قيمة تابع الهدف تساوي Z(O)=0.
- النقطة A هي نقطة تقاطع x=0 و y=360، قيمة تابع الهدف تساوي Z(A)=360:

$$Z(A) = 2(0) + 1(360) = 360$$

- النقطة B هي نقطة تقاطع 8x+y=2000 و y=360، فتكون قيمة x=205 قيمة تابع الهدف تساوي

$Z(B) = 2(205) + 1(360) = 770$ :Z(B)=770

- النقطة C هي نقطة تقاطع $8x+y=2000$ و $4x+y=600$، بحل هاتين المعادلتين نجد قيمة $x=250/3$ وقيمة $y=800/3$ وتكون قيمة تابع الهدف تساوي $Z(C)=1300/3$:

$$Z(C) = 2(250/3) + 1(800/3) = 1300/3$$

- النقطة D هي نقطة تقاطع $x=125$ و $4x+y=600$، فتكون قيمة $y=100$، وتكون قيمة تابع الهدف تساوي

$Z(D) = 2(125) + 1(100) = 360$ :Z(D)=350

- النقطة E هي نقطة تقاطع $x=125$ و $y=0$، وتكون قيمة تابع الهدف تساوي $Z(E)=250$:

$$Z(E) = 2(125) + 1(0) = 250$$

بالمقارنة، الحل عند النقطة C هو الأفضـــــل حيث $x^*=250/3$، $y^*=800/3$ وتابع الهدف $Z^*=1300/3$ وهو الحل الأمثل.

أثناء الدراسـة الاقتصـادية، كنا ننتقل من حالة إلى أخرى مع تحسـين الربح الاقتصـادي في كل مرّة، لو تفحّصـنا عن قرب الحالات التي مر بها، لنجد بأنها تعبر عن ذرى المضـــــلع، وكنا ننتقل من ذروة إلى أخرى، يمكن الاعتماد على مبدأ المعالجة الاقتصـــــادية هذا ليكون قاعدة انطلاق نحو إجرائية عامة: الانتقال من ذروة إلى أخرى، والقاعدة التي تحكم هذا الانتقال هي كون الربح الهامشي الناتج من التبديل موجباً. ما فعلناه في هذه الفقرة هو في الواقع إيجاد مبادئ لطريقة عامة لإيجاد الحلّ الأمثل والمعروفة بخوارزمية الســـيمبلكس Simplex التي سنتحدث عنها في الفصل القادم.

## 6-2 حالات خاصة في التمثيل البياني

في العديد من المشــكلات، نواجه حالات متناقضـــة أو صـــعبة الحل يُظهرها التمثيل البياني، لكن التمثيل ليس السبب في وجودها بل يُظهرها فقط. من أهم هذه الحالات:

- عدم وجود منطقة حلول مقبولة Infeasible Region.
- منطقة القبول غير محدودة Unboundedness.
- قيود مكررة Redundancy.
- وجود عدة حلول مثلى Alternate Optimal Solutions.

### 2-6-1 عدم وجود منطقة حلول مقبولة Infeasible Region

قد يؤدي تقاطع مناطق الرفض الناجم عن عدة قيود إلى عدم وجود منطقة حلول مقبولة.

غالباً ما تقع هذه الحالة عندما تكون بعض متراجحات القيود من نمط أكبر $\geq$، وبعضــها الآخر من نمط أصــغر $\leq$. لذلك نصــحنا في بداية هذا الفصــل بصــياغة جميع القيود على شــكل متراجحات من اتجاه موحد (أكبر أو أصغر)، مما يقلل من ظهور هذه الحالة.

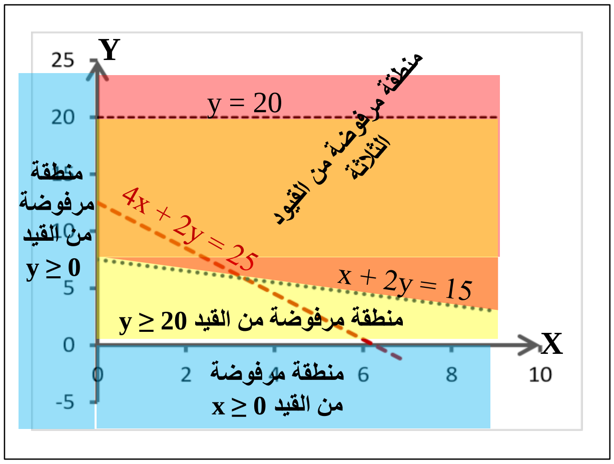
مثال (2-9) حالة عدم وجود منطقة مقبولة. ليكن مجموعة القيود الآتية:

$$4x + 2y \le 25 \qquad [1]$$

$$x + 2y \le 15 \qquad [2]$$

$$y \ge 20 \qquad [3]$$

$$x \ge 0 \;\; ; \;\; y \ge 0 \qquad [4]$$




**الشكل (2−12) حالة عدم وجود منطقة مقبولة**

نلاحظ أنه لا يمكن الحصـــول على منطقة مقبولة محددة من جملة القيود، بالتالي، لا يُمكن الحصـــول على أي حل. لتفادي هذه الظاهرة، يُنصح:

- بالتحقق أولاً من صياغة القيود.
- أو النظر بإمكانية التخلي عن بعض القيود المسببة مباشرةً للحالة.
- أو التخفيف من صرامة القيود المسببة للحالة.

مثلاً في الحالة أعلاه، النظر بإمكانية التخلي عن القيد $y \ge 20$ أو دراسة إمكانية تخفيف الحد الأدنى للقيد إلى قيم أقل من 20، مثلاً إلى القيمة 5؟

## 2−6−2 وجود قيود مكررة Redundancy

قد نجد أحياناً قيوداً (متراجحات) مشمولة بقيود أخرى (متراجحات تنتج عن أخرى). يكفي بالتالي أخذ أحدها.

مثال (2−10) حالة قيود مكررة.

لنأخذ جملة القيود الســابقة في المثال (2−9) عدا القيد الثالث ولنغير اتجاه المتراجحة فقط ليُصــبح أصــغر أو

يساوي $y \le 20$، كما هو مبين في الشكل (2−13).

يُصــبح هذا القيد مكرراً وغير مفيد كونه مشــمول بالقيدين الأول والثاني. بمعنى رياضـــي، أن حل المتراجحتين الأولى والثانية يتضمن حل المتراجحة الثالثة.

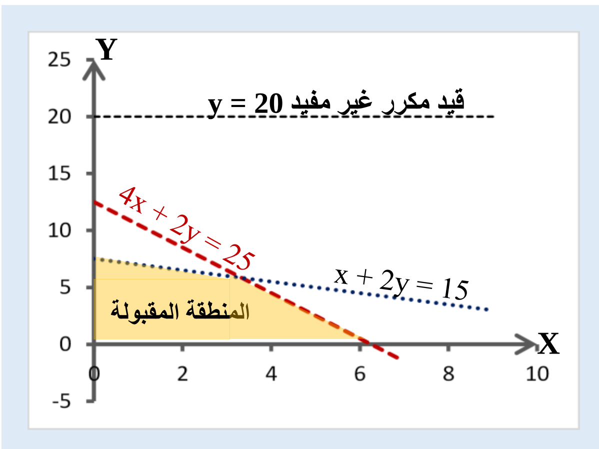
بالتالي، لا ضير أبداً من حذف هذا القيود المكررة، كونها لن تؤثر على الحل أبداً.

$$4x + 2y \le 25 \qquad [1]$$

$$x + 2y \le 15 \qquad [2]$$

$$y \le 20 \qquad [3]$$

$$x \ge 0 \;;\; y \ge 0 \qquad [4]$$




الشكل (2−13) حالة عدم وجود قيود مكررة

في بعض الحالات أيضــاً، قد تنتج بعض القيود من بعضــها الآخر عبر عمليات بسـيطة (جمع، طرح، ضــرب بمقدار سلمي، ...)، في هذه الحالة أيضاً قد يظهر لدينا قيود مكررة.

في المثال أعلاه، يُمكن الحصــول على عدم جدوى القيد الثالث بضــرب القيد (المتراجحة) الثانية بالقيمة 4- مع تغيير اتجاه المتراجحة كونها مضروبة بسالب، وجمعها للقيد (المتراجحة) الأولى:

| | |
|---|---|
| $4x + 2y \le 25$ | [1] |
| $-4 * (x + 2y \le 15)$ | [2] |
| $0 - 6y \ge - 35$ | [3'] |

بتقسـيم طرفي المتراجحة [3'] وتغيير الاتجاه، نجد $y \le 35/6$ وهي أصــغر من قيمة القيد الثالث 20. مما يعني

أن القيدين الأول والثاني يشملان القيد الثالث، مما يجعله مكرراً وغير مفيد.

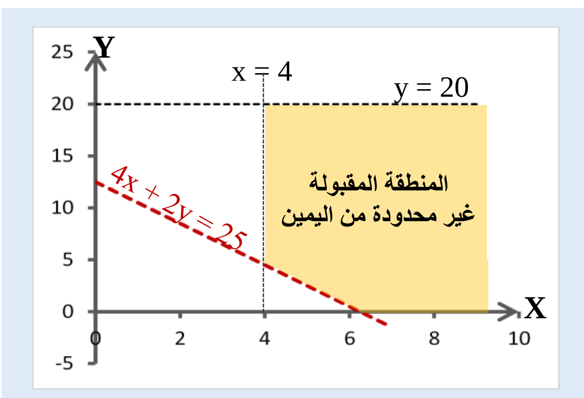
لن نتعرض لهذه الحالات بالتفصيل في الدراسة البيانية كون الشكل يُظهرها، لكن من الضروري التنبه إليها في الحالات المعقدة، حيث يجب اللجوء إلى دراسة الاستقلالية بين القيود واستخدام جبر المصفوفات.

### 2-4-3 منطقة القبول غير محدودة Unboundedness

في هذه الحالة، يكون لدينا منطقة حلول مقبولة، لكنها غير منتهية أي غير محدودة من أحد الأطراف.

مثال (2-11) حالة منطقة قبول غير محدودة. لنأخذ مجموعة القيود كما يلي:

$$4x + 2y \geq 25 \quad [1]$$
$$x \geq 4 \quad [2]$$
$$y \leq 20 \quad [3]$$
$$x \geq 0 \;;\; y \geq 0 \quad [4]$$

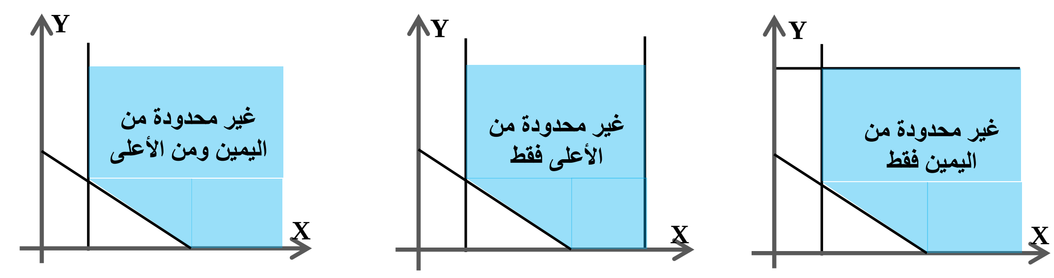



**الشكل (2-14) حالة عدم وجود منطقة مقبولة محدودة**

كما يوضح الشكل (2-14)، لدينا منطقة حلول ممكنة لكنها غير محدودة من اليمين. في هذه الحالة فقط، يُمكن تمييز حالتين حسب نمط تابع الهدف:

- إذا كان تابع الهدف من نمط تعظيم Max، فإنه لا يمكن إيجاد حل قابل للتنفيذ.
- إذا كان تابع الهدف من نمط تقليل Min، فمن الممكن إيجاد حد أدنى يُمثل الحل الأمثل.

بشكلٍ عام، إذا تحققت قيود اللاسلبية، قد نجد عدة حالات تكون منطقة الحلول غير محدودة، كما يوضح الشكل (2−15).




**الشكل (2−15) بعض حالات عدم محدودة منطقة القبول**

تظهر هذه الحالة في حال عدم كفاية القيود، أو في حال عدم صياغة "جيدة" للمشكلة.

كما يُمكن أن نستخلص أيضاً، أن المشكلة تتمثل بشكل رئيسي في حالة تعظيم تابع الهدف Max (ظاهرة الربح أو الإيرادات مثلاً).

أما في حالة تقليل تابع الهدف Min (ظاهرة التكاليف مثلاً)، ومع تحقق قيود اللاسلبية، أي أن الحد الأدنى لقيم جميع المتغيرات يساوي الصفر، وباعتبار أن تابع الهدف هو خطي، فإنه لدينا دوماً حل تافه Degenerated Solution وهو الحل الذي تساوي فيه جميع المتغيرات الصفر، وتابع الهدف يساوي الصفر أيضاً، أي خيار "ألاّ نفعل شيئاً".

يُمكن تفادي هذه الحالة بإضافة قيود "وهمية" على المتغيرات بحيث تُغلق الجوانب غير المحدودة، وهو حل منطقي، إذ يكاد يستحيل وجود متغيرات (المعبرة أصلاً عن موارد أو أنشطة اقتصادية) غير محدودة.

في المثال أعلاه، يُمكن وضع قيد إضافي على المتغير x فقط، أصغر أو يساوي قيمة كبيرة جداً $4 \le x \le M$.

## 2−4−4 وجود عدة حلول مثلى Alternate Optimal Solutions

لا يوجد ما يمنع من وجود عدة حلول يأخذ تابع الهدف في كل منها نفس القيمة المثلى، وربما تكون هذه الحالة مرغوبة أصلاً، إذ تُعطي صاحب القرار حرية الاختيار بين عدة حلول دون الانتقاص من القيمة المثلى للهدف.

مثال (2−12) حالة وجود أكثر من حل أمثل.

لنأخذ البرنامج الخطي الآتي:

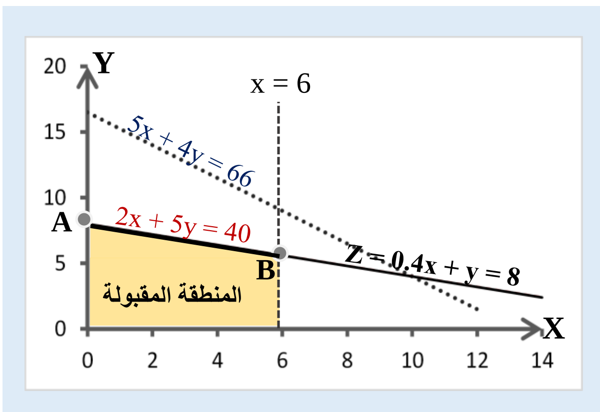
$$\text{Max } \{ Z = 0.4x + y\}$$

$$5x + 4y \leq 66 \qquad [1]$$

$$2x + 5y \leq 40 \qquad [2]$$

$$x \leq 6 \qquad [3]$$

$$x \geq 0 \;\; ; \;\; y \geq 0 \qquad [4]$$




**الشكل (2−16) وجود أكثر من حل أمثل**

يوضح الشكل (2−16)، مستقيم تابع الهدف Z يتطابق مع مستقيم القيد الثاني في جزء منه، وهو القطعة المستقيمة AB المبينة على الشكل. يأخذ التابع Z القيمة 8 عند النقطة B وتكون x=6، y=5.6 وهو حل أمثل. نلاحظ أيضاً أن تابع الهدف يأخذ نفس القيمة Z=8 عند النقطة A أيضاً حيث x=0, y=8، وأكثر من ذلك، فإنه يأخذ نفس القيمة Z=8 عند جميع النقاط على القطعة المستقيمة AB، فجميعها إذاً هي حلول مثلى.

كما أشرنا فإن هذه الحالة مرغوبة حيث يُمكن اختيار أية تركيبة من الزوج (x, y) بحيث تكون قيمة Z نفسها وتساوي 8. مثلاً الأزواج (2, 7.2)، (3, 6.8)، (4, 6.4)، (5, 6) ... جميعها تُحقق نفس القيمة للتابع الهدف Z=8.

اختبارات وأسئلة الفصل الثاني Tests

## 1) أسئلة صح / خطأ True/False

| | السؤال | صح | خطأ |
|---|---|---|---|
| 1 | كل مسألة برمجة خطية من متغيرين اثنين فقط، يمكن تمثيلها بيانياً. | √ | |
| 2 | تُدعى متغيرات المسألة التي يجب إيجاد قيم لها بمتغيرات القرار. | √ | |
| 3 | بحوث العمليات هي مجموعة من النماذج الرياضية حصراً لطرح المشكلة وحلها. | | √ |
| 4 | تأخذ بالاعتبار البرمجة الرياضية جميع القيود على تابع الهدف. | | √ |
| 5 | في البرمجة الرياضية، لا فرق بين الأهداف والقيود. | | √ |
| 6 | يُمكن دوماً في أي برنامج خطي التبديل بين القيود وتابع الهدف | | √ |
| 7 | تعتبر البرمجة الخطية جزء من نماذج البرمجة الرياضية. | √ | |
| 8 | يمكن التعبير عن أية مشكلة قرار ببرنامج خطي بسيط. | | √ |
| 9 | ونقول عن حل أنه حل أمثلي Optimal إذا كان أفضل الحلول المقبولة. | √ | |
| 10 | يُقصد بالأمثلة Optimization البحث عن القيمة المثلى لتابع بعدة متحولات تحت قيود محددة. | | |
| 11 | تُحدد مجموعة القيود منطقة الحلول المقبولة Feasible Region. | √ | |
| 12 | تشكل القيود في فضاء المتغيرات دوماً مضلعاً محدباً. | | √ |
| 13 | في حال كانت المنطقة المقبولة مضلعاً محدباً، يكفي البحث عن الحل الأمثل في نقاط الذرى. | √ | |
| 14 | تنص فرضية قابلية التجزئة على أنه يُمكن تجزئة القيود أو حذف بعضها دون أن يؤثر على تابع الهدف. | | √ |
| 15 | تختلف نماذج البرمجة الرياضية حسب طبيعة متغيرات القرار وشكل تابع الهدف والقيود. | √ | |
| 16 | تنص فرضية لاسلبية متغيرات القرار، أن تابع الهدف لايُمكن أن يأخذ قيماً سالبة. | | √ |
| 17 | يُقصد بالموارد الاقتصادية رأس المال، المواد الأولية، التجهيزات، الزمن، ... | √ | |
| 18 | تنص فرضية التأكد التام في البرنامج الخطي على أن كافة قيم معاملات البرنامج الخطي هي محددة ومؤكدة | √ | |
| 19 | تبحث البرمجة الرياضية في إيجاد أكبر أو أصغر قيمة لتابع هدف محدد. | √ | |
| 20 | تنص فرصية الطردية في البرنمجة الخطية أن تابع الهدف يتغير بأي شكل مع التغير في متغيرات التابع. | | √ |

## 2) أسئلة خيارات متعددة Multiple Choices

1- من أهم متطلبات البرمجة الرياضية Mathematical Programming ما يلي:

أ) وجود هدف محدد نسعى لتأويجه
ب) محدودية الموارد/المتغيرات
ج) جميع صيغ البرنامج خطية
د) جميع الأجوبة السابقة صحيحة

2- تعتبر نماذج البرمجة الرياضية Mathematical Programming من:

أ) نماذج البرمجة الخطية البسيطة
ب) النظريات الرياضية البحتة
ج) نماذج صناعة القرارات
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

3- يُقصد بصياغة البرنامج الرياضي لمشكلة اقتصادية ما يلي:

أ) نقل المشكلة من اللغة الاقتصادية إلى لغة رياضية
ب) تحديد التوابع الهدف على شكل صيغ أسية
ج) تحويل المشكلة إلى برنامج حاسوبي
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

4- يُقصد بالقيود في البرمجة الرياضية Mathematical Programming ما يلي:

أ) محدودية الموارد الاقتصادية
ب) التشريعات والأنظمة والقوانين
ج) السيولة والفوائد والمتغيرات المالية
د) جميع الأجوبة السابقة صحيحة

5- يُقصد بإيجاد الحل الأمثل في البرمجة الرياضية البحث عن:

أ) أكبر قيمة للتابع الهدف حصراً
ب) أكبر أو أصغر قيمة للتابع الهدف حسب الحالة
ج) أصغر قيمة للتابع الهدف حصراً
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

6- يمكن تصنيف نماذج البرمجة الرياضية كما يلي:

أ) برمجة أكيدة وبرمجة احتمالية
ب) برمجة خطية وبرمجة بسيطة
ج) برمجة الأمثلة وبرمجة الترتيب
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

7- لدينا القيد الآتي على السيولة لمنتجين $2x + 5y > 100$، فإن القيم الآتية تحقق هذا القيد:

أ) $x = 10,\ y = 10$
ب) $x = 10,\ y = 20$
ج) $x = 0,\ y = 15$
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

8- لدينا القيد الآتي على السيولة لمنتجين $5x + 2y \leq 100$، فإن القيم الآتية تحقق هذا القيد:

أ) $x = 12,\ y = 20$
ب) $x = 15,\ y = 6$
ج) $x = 0,\ y = 60$
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

9- من أهم فرضيات البرمجة الخطية Linear Programming ما يلي:

أ) التأكد التام Certainty
ب) الطردية/النسبية Proportionality
ج) قابلية التجزئة Divisibility
د) جميع الأجوبة السابقة صحيحة

10- لدينا القيدين الآتيين على منتجين اثنين $x + 2y \geq 100$، $y \geq 40$، فإنه يكون لدينا:

أ) القيد الأول محقق دوماً ب) القيدان محققان دوماً

ج) القيد الثاني محقق دوماً د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

11- حل البرنامج الخطي يعني إيجاد مجموعة قيم المتغيرات بحيث:

أ) تتحقق القيود الصفرية ب) تتحقق جميع القيود

ج) تكون القيود المحققة قابلة للتطبيق د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

12- في البرمجة الخطية، تعبر منطقة الحلول المقبولة (إن وجدت):

أ) الحلول المثلي للتابع الهدف ب) الحلول غير المقبولة للتابع الهدف

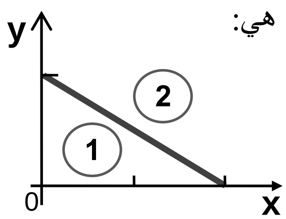
ج) تحقق جميع القيود بنفش الوقت د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

13- الحل الأمثل البرنامج الخطي يعني إيجاد مجموعة قيم المتغيرات بحيث:

أ) تتحقق جميع القيود ويأخذ التابع أفضل قيمة ب) تتحقق جميع القيود فقط

ج) يأخذ التابع أفضل قيمة بغض النظر عن القيود د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

14- لدينا القيد $y + 2x > 10$ الممثل على الشكل، فإن المنطقة التي تحقق القيد هي:




أ) المنطقة (1)

ب) المنطقة (2)

ج) الخط الأسود الفاصل بين المنطقتين فقط

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

15- لدى تمثيل مجموعة القيود على مستوي، فإن المنطقة المحصورة بين القيود تُدعى:

أ) منطقة تابع الهدف ب) المنطقة الفارغة

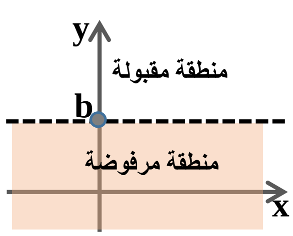
ج) منطقة الحلول المقبولة د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

16- في البرمجة الخطية، في حال كان شكل المنطقة المقبولة محدباً، فإن:

أ) الحل الأمثل يكون على إحدى ذرى المضلع ب) الحل الأمثل يكون داخل المضلع

ج) الحل الأمثل يكون خارج المضلع د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

17- يُمثل الشكل البياني المقابل قيداً من نمط:



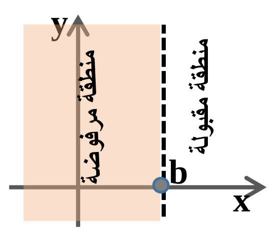

أ) $y \geq b$

ب) $x \geq b$

ج) $x + y \geq b$

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

18- يُمثل الشكل البياني المقابل قيداً من نمط:



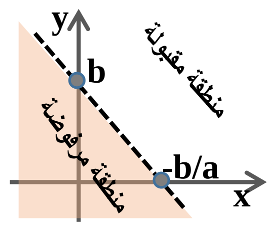

أ) $y \geq b$

ب) $x \geq b$

ج) $x + y \geq b$

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

19- يُمثل الشكل البياني المقابل قيداً من نمط:




أ) $y \geq ax + b$

ب) $y = ax$

ج) $x^2 + y^2 \geq b$

د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

20- يُقصد بالتمثيل البياني لبرنامج خطي بسيط من متغيرين اثنين ما يلي:

أ) تمثيل القيود بيانياً فقط　　　ب) تمثيل تابع الهدف بيانياً فقط

ج) تمثيل التابع والقيود على نفس الشكل البياني　　　د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

## 3) أسئلة / تمارين / قضايا للمناقشة

**السؤال (1)** ما المقصود بالبرمجة الرياضية، وما أهم مكونات مسألة البرمجة الرياضية؟

{مدة الإجابة: حوالي 10 دقيقة، الدرجة التقديرية: 15 درجة }

**السؤال (2)** ما هي أهم فئات البرمجة الرياضية، موضحاً موقع البرمجة الخطية بينها؟

{مدة الإجابة: حوالي 10 دقيقة، الدرجة التقديرية: 15 درجة }

**السؤال (3) اذكر بعض تطبيقات البرمجة الرياضية.**

{مدة الإجابة: حوالي 7 دقيقة، الدرجة التقديرية: 7 درجة }

**السؤال (4)** اشرح بإيجاز أهم فرضيات البرمجة الخطية.

{مدة الإجابة: حوالي 10 دقيقة، الدرجة التقديرية: 15 درجة }

**السؤال (5) حل بياني برنامج خطي Max.**

ليكن لدينا البرنامج الخطي البسيط الآتي والمطلوب حله بيانياً.

$$\text{Max } \{ Z = 3x + 2y \}$$

تحت القيود: $5x + 2y \leq 50$

$$2x + 3y \leq 31$$

$$x \; ; \; y \geq 0$$

{مدة الإجابة: حوالي 15 دقيقة، الدرجة التقديرية: 15 درجة }

**السؤال (6) حل بياني برنامج خطي Min.**

ليكن لدينا البرنامج الخطي البسيط الآتي والمطلوب حله بيانياً.

$$\text{Min } \{ Z = 3x + 2y \}$$

تحت القيود: $5x + 2y \geq 50$

$$2x + 3y \geq 31$$

$$x \; ; \; y \geq 0$$

{مدة الإجابة: حوالي 15 دقيقة، الدرجة التقديرية: 15 درجة }

**السؤال (7) حل بياني برنامج خطي بسيط قيود متداخلة.**

ليكن لدينا البرنامج الخطي البسيط الآتي، والمطلوب حله بالطريقة البيانية.

$$\text{Min } \{ Z = 3x + 9y \}$$

تحت القيود: $x + y \geq 18$

$$0.4x - 0.3y \leq 0$$

$$0.2x - 0.1y \leq 0$$

$$x \; ; \; y \geq 0$$

{مدة الإجابة: حوالي 20 دقيقة، الدرجة التقديرية: 20 درجة }

**السؤال (8) حالات خاصة في البرمجة الخطية.**

بين بالرسم الحالات الخاصة الآتية التي تؤدي إلى مشكلات في البرنامج الخطي:

1. منطقة القبول غير محدودة Unboundness.
2. حالة عدم وجود منطقة مقبولة Infeasible Region.
3. وجود قيود مكررة Redundancy.
4. وجود عدة حلول مثلى Alternate Optimal Solutions.

{مدة الإجابة: حوالي 20 دقيقة، الدرجة التقديرية: 20 درجة }

# الفصل الثالث: حل البرنامج الخطي بطريقة *Simplex*

## Chapter (3): Linear Programming & Simplex Method

**كلمات مفتاحية:**

برنامج خطي Linear Program، الشكل القياسي Standard Form، الصيغة الموسعة Augmented Form.

خوارزمية سيمبلكس Simplex Algorithm، حل قاعدي Basic Solution، اختبار الأمثلية Optimality Test.

نقاط الذرى Corner Point، المحور Pivot، متغير فرق Slack Variable، متغير اصـــطناعي Artificial Variable.

ما بعد الأمثلية PostOptimality، أسعار الظل Shadow Prices، تحليل حساسية Sensitivity Analysis.

**ملخص الفصل:**

يتناول هذا الفصـل أحد أهم أدوات حل برنامج خطي بسـيط بالصـيغة الموسـعة، وهي خوارزمية Simplex، حيث سنحاول التعريف بالمفاهيم الأساسية ومصطلحات الخوارزمية، ثم سنركز على كيفية إيجاد نقط انطلاق أي حل قاعدي أولي للبدء بجداول السيمبلكس عبر إجراء بعض العمليات الأساسية على صيغ البرنامج، كما سـيتم التطرق لكيفية التعامل مع الحالات الخاصـة، وسـيتم عرض آلية عمل الخوارزمية بالقياس إلى الحل البياني والجبري بحيث يسـهل على الطالب متابعة هذه الآلية عبر جداول Simplex، كما سـيتم التعرض لكيفية اسـتثمار خصـائص ونتائج الخوارزمية لإجراء بعض التحليلات الإضـافية مثل تحديد أسـعار الظل أو تعديلات الطرف الثاني أو تحليل حساسية بعض المعاملات، وسنختم الفصل بتطبيقات موجهة لتعلم استخدام خوارزمية Simplex.

**المخرجات والأهداف التعليمية:**

1. تذكر الشكل القياسي لبرنامج خطي.
2. التمكن من الصياغة الموسعة لبرنامج خطي.
3. التمكن من إيجاد حل قاعدي أولي لبرنامج خطي.
4. التمكن من إنجاز حسابات الانتقال من جدول Simplex إلى آخر.
5. تذكر مفاهيم سعر الظل، وتحليل الحساسية.

**مخطط الفصل:**

3-1 أساسيات خوارزمية Simplex.

3-2 خوارزمية Simplex بالشكل الجدولي/المصفوفي.

3-3 أقلمة خوارزمية Simplex على أشكال غير قياسية.

3-4 تحليل ما بعد الأمثلية PostOptimality.

3-5 تطبيقات على استخدام خوارزمية Simplex.

## 1-3 أساسيات خوارزمية *Simplex*

أشـــرنا إلى أن زيادة عدد المتغيرات أو المتراجحات يؤدي إلى زيادة جنونية في كم الحســـابات المطلوب إجرائها، فكانت خوارزمية Simplex التي ابتكرها عالم الرياضيات George Dantzig في خمسينيات القرن الماضـي حلاً فعّالاً لمسـألة البرمجة الخطية وتعطي نتائج مذهلة بأقل عدد من الحسـابات، سـنرى في هذا الفصـل كيفية عمل هذه الطريقة. مع الإشـــارة إلى توفر الكثير من البرمجيات المعلوماتية في الأســـواق تتضـــمن هذه الطريقة ومنها برنامج MS Excel.

الطريقة هي بالأصـل طريقة جبرية، لكن ربما لاحظنا في الفصـل السـابق أثناء الحل البياني بعض ملامح عمل هذه الطريقة هندسـياً، قبل الدخول في التفاصـيل الجبرية للطريقة، دعونا نتلمس ملامحها الهندسـية خصـوصـاً ما يتعلق بنقاط تقاطع القيود التي دعوناها الذرى Corners، وذلك على برنامج خطي من الشكل النموذجي/القياسي Standard Form.

أوجد قيم المتغيرات الحقيقية: $\mathbf{X = x_1, x_2, \dots, x_n}$

بحيث يكون: $\mathbf{Max\ \{Z = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n\}}$

تحت القيود:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{Y_1 = b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n} \\ \mathbf{Y_2 = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n} \\ \cdots \\ \cdots \\ \mathbf{Y_m = t_1x_1 + t_2x_2 + \dots + t_nx_n} \end{Bmatrix} \leq \begin{Bmatrix} \mathbf{B_1} \\ \mathbf{B_2} \\ \cdots \\ \cdots \\ \mathbf{B_m} \end{Bmatrix}$$

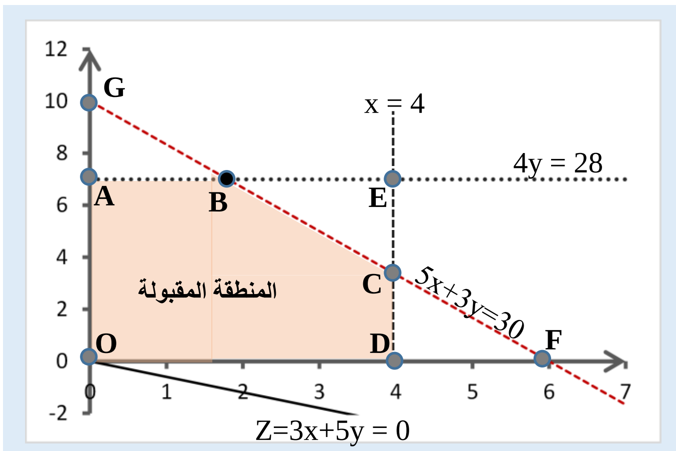
حيث الطرف الثاني $B_1, B_2, \dots, B_m$ هي مقادير حقيقية موجبة.

سـنشـرح الملامح البيانية للخوارزمية عبر مثال تعليمي، على أن نسـتخلص المبادئ وقواعد العمل من المثال ثم تعميمها.

مثال تعليمي (3−1) كيفية عمل Simplex هندسياً.

ليكن لدينا البرنامج الخطي، الحل البياني لهذا البرنامج هو المبين في الشـــكل (3−1)، حيث أشـــرنا إلى منطقة الحلول المقبولة، وإلى نقاط تقاطع القيود (الذرى Corners) صراحةً على الشكل.

$$\begin{aligned} \mathbf{Max}\ Z &= 3x + 5y \\ x &\le 4 \\ 4y &\le 28 \\ 5x + 3y &\le 30 \\ x \ge 0 \ &،\ \ y \ge 0 \end{aligned}$$




**الشكل (3−1) الحل البياني لمثال تعليمي**

ندعو كل نقطة تقاطع بين حدود قيدين "ذروة أو نقطة الزاوية Corner Point"[4]. حدود القيود في هذه الحالة التعليمية من متغيرين اثنين هي مستقيمات. ستعلب الذرى دوراً محورياً في التحليل اللاحق لفهم آلية عمل طريقة Simplex، نلاحظ على الشكل:

- هناك 5 ذرى O, A, B, C, D تقع على حدود المنطقة المقبولة، وهي طبعاً حلول مقبولة ندعوها نقاط الزاوية المقبولة أو الذرى المقبولة (**CPF**: Corner-Point Feasible).
- هناك 3 ذرى E, F, G تقع خارج المنطقة المقبولة وهي طبعاً حلول غير مقبولة.

4. إذا كان لدينا جملة معادلات من n متغير و m معادلة حيث m < n، وإذا فرضنا قيم المتغيرات الحرة (وعددها n – m متغير) تساوي الصفر، فإن الحد الأقصى لعدد الذرى الممكنة هو توافيق (n, m): $C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ .

سنهتم بالذرى المقبولة فقط أي التي تتشكل من تقاطع حدود القيود على حدود المنطقة المقبولة.

ندعو ذروتين مقبولتين بأنهما متجاورتين Adjacents إحداهما للأخرى إذا وقعتا على نفس القطعة المســـتقيمة لأحد حدود قيود المنطقة المقبولة. في المثال أعلاه، نجد ذرى الجوار لكل من الذرى المقبولة:

| الذروة المقبولة | الذرى المجاورة لها | قيمة Z عند الذروة المقبولة |
|---|---|---|
| O (0, 0) | A ، D | Z = 0 |
| A (0, 7) | O ، B | Z = 35 |
| B (1.8, 7) | A ، C | Z = 40.4 |
| C (4, 10/3) | B ، D | Z = 86/3 ≅ 28.67 |
| D (4, 0) | C ، O | Z = 12 |

كما نلاحظ، ليس بالضـــــرورة أن تكون الذرى المجاورة لذروة مقبولة متجاورة. مثلاً، A, D مجاورتين للنقطة O، لكنهما ليستا متجاورتين (ليست أي منهما جوار للأخرى)، فهي علاقة ثنائية غير متعدية.

كنا قد أشرنا أيضاً في الفصل الثاني، إلى أن الحل الأمثل يقع على حدود المنطقة المقبولة، وبالتحديد في إحدى نقاط التقاطع بين حدود القيود (أي الذرى) في حال كان شـــكل المنطقة المقبولة محدباً. لنســـتثمر مفهوم الذرى المجاورة لوضع خاصية جوهرية للحل الأمثل ندعوها اختبار الأمثلية.

**اختبار الأمثلية Optimality Test:** من أجل أي برنامج خطي لديه حل أمثلي واحد على الأقل، إذا كان لا يوجد لذروة مقبولة CPF أية ذروة مقبولة مجاورة لها أفضـــل منها، فتكون هذه الذروة هي الحل الأمثل. أي أنّ قيمة تابع الهدف عندها أفضل من قيم التابع عند جميع الذرى المجاورة.

بتطبيق هذا الاختبار على الذرى المقبولة أعلاه، نجد أن الحل الأمثل يقع عند النقطة B حيث إحداثياتها x=1.8 و y=7 وقيمة تابع الهدف Z* = 40.4: $Z = 3(1.8) + 5(7) = 40.4$

لنتذكر جيداً هذا الاختبار، سيكون له دوراً حاسماً في عمل طريقة Simplex. يُمكن تخيل آلية البحث عن الحل الأمثل كما يلي: نتحرك في جوار ذروة مقبولة، إذا وجدنا ذورة مجاورة أفضـــل منها، ننتقل إليها، ونعيد نفس العملية، حتى نصــل إلى ذروة لا يوجد أفضــل منها في جوارها، فتكون هذه الذروة هي الحل الأمثل. لنطبق هذه الآلية على المثال أعلاه.

(1) نقطة البدء: لا بد من الانطلاق من ذروة مقبولة ما. أبســط ذروة مقبولة يُمكن البدء بها هي مبدأ الإحداثيات O(x=0, y=0) فتكون قيمة تابع الهدف $Z = 3(0) + 5(0) = 0$، وهو حل مقبول لكنه غير مغري!

(2) الدورة الأولى من البحث Iteration (1): الانتقال إلى الذروة المقبولة التالية حيث تكون قيمة تابع الهدف أكبر من قيمته عند الذروة السابقة O أي أكبر من الصفر، كما يلي:

(أ) نوجد الذرى المجاورة للذروة السابقة O، نجد ذروتين مقبولتين هما A(x=0, y=7) و D(x=4, y=0).

(ب) حســـاب قيمــة Z عنــد كــل من الــذرى المجــاورة التي وجـدنــاهــا في الخطوة (أ). نجــد $Z(A)=3(0)+5(7)=35$، و $Z(D)=3(4)+5(0)=12$.

(ت) التحرك باتجاه الذروة التي يكون فيها قيمة Z هي الأكبر وهي A. ننتقل إذاً إلى النقطة A.

(ث) اختبار الأمثلية عند الذروة O: هل يوجد في جوار O ذروة مقبولة أفضـــل منها؟ النتيجة: نعم. الذروة A أفضل $Z(A)=35$.

(3) الدورة الثانية من البحث Iteration (2): ننتقل إذاً إلى الذروة A. ونعيد نفس الخطوات في الدورة الأولى في جوار النقطة A:

(أ) نوجد الذرى المجاورة للذروة المقبولة A، نجد ذروتين مقبولتين: O السابقة، و B(x=1.8, y=7).

(ب) حســــاب قيمـة Z عن كـل من الـذرى المجـاورة التي وجـدنـاهـا في الخطوة (أ). نجـد $Z(O) =0$، و $Z(B)=3(1.8)+5(7)=40.4$.

(ت) التحرك باتجاه الذروة التي يكون فيها قيمة Z عندها هي الأكبر. ننتقل إذاً إلى النقطة B، إذ لا يُمكن العودة إلى O كون Z عندها أقل.

(ث) اختبار الأمثلية عند الذروة الحالية: هل يوجد في جوار A ذروة مقبولة أفضـــل منها؟ النتيجة: نعم. الذروة B هي أفضل حيث $Z(B)=40.4$.

(3) الدورة الثالثة من البحث Iteration (3): ننتقل إذاً إلى الذروة B. ونعيد نفس الخطوات في الدورة الأولى في جوار النقطة B:

(أ) نوجد الذرى المجاورة للذروة المقبولة B، نجد ذروتين مقبولتين: A السابقة و $C(x=4, y=10/3)$.

(ب) حســــاب قيمـة Z عن كـل من الـذرى المجـاورة التي وجـدنـاهـا في الخطوة (أ). $Z(A)= 35$، و $Z(C)=3(4)+5(10/3)=86/3\cong 28.67$.

(ت) الانتقال إلى الذروة التي يكون فيها قيمة Z عندها هي الأكبر. نلاحظ أن $Z(C)$ وطبعاً النقطة السـابقة $Z(A)$ أقل من قيمة Z عند النقطة الحالية B.

(ث) اختبار الأمثلية عند الذروة: هل يوجد في جوار B ذروة مقبولة أفضـــل منها؟ النتيجة: كلا. فتكون B هي الحل الأمثل.

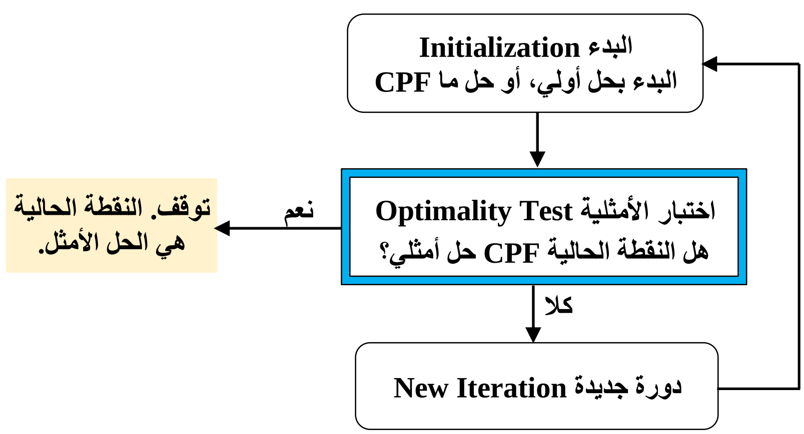
هناك الكثير من الأفكار المهمة في هذا المثال والتي بُنيت حولها طريقة Simplex، لنركز على أهم هذه الأفكار ولندعوها مبادئ عمل خوارزمية Simplex.

### 3-1-2 مبادئ عمل خوارزمية Simplex

تفترض الخوارزمية أن الفرضـيات المشـار إليها في الفصــل الثاني المتعلقة بالبرمجة الخطية محققة، وعلى وجه الخصـوص منطقة الحلول لها شـكل محدب (Hiller, & Lieberman, 2001)، ولدينا برنامج خطي من الشـكل القياسي، حيث تابع الهدف من نمط تعظيم Max وجميع القيود من نمط أصغر أو يساوي وقيود اللاسلبية أيضاً.

المبدأ الأول: إيجاد حلول الذرى المقبولة Corner Points Feasible (CPF). من أجل أي برنامج خطي لديه حل أمثل واحد على الأقل، فإن إيجاد هذا الحل الأمثل يتطلب إيجاد أفضـــل الذرى المقبولة. يعني هذا المبدأ تخفيض العدد اللانهائي من حلول المنطقة المقبولة إلى عدد منته وقليل من الذرى.

المبدأ الثاني: خوارزمية بحث تكرارية Iterative Algorithm. أي هناك مجموعة محددة من الخطوات المنطقية تُكرر بشكل منتظم حتى الحصول على الحل الأمثل. كما يلي:




المبدأ الثالث: نقطة البدء Initialization. حيثما يكون ذلك ممكناً، البدء بنقطة مبدأ الإحداثيات حيث جميع متغيرات القرار تأخذ القيمة صفر هو الأنسب. عندما يكون عدد المتغيرات كبيراً، لا يمكن الاعتماد على الحل "البصــــري" أي البياني للبدء بنقطة مقبولة. في حال كان مبدأ الإحداثيات O حل غير

مقبول، نحتاج إلى تطبيق بعض العمليات للانتقال إلى حل مقبول.

المبدأ الرابع: العمل على نقاط الجوار Agjacents. من أجل ذروة مقبولة ما، من الأسهل حساب الذرى المقبولة والمجاورة لها، بدلاً من العمل على حساب جميع الذرى المقبولة. وهكذا تعمل Simplex، في كل دورة تنتقل من ذروة مقبولة إلى ذروة مجاورة أفضل من السابقة. وكأنها تنتقل على ذرى المنطقة المقبولة فقط، أي من ذروة مقبولة إلى ذروة أفضل في كل دورة.

المبدأ الخامس: اختيار ذروة الجوار الأفضل. بعد تحديد إحدى الذرى المقبولة، تفحص Simplex كل ذروة مجاورة للذروة الحالية، لكن بدلاً من تفحص جميع الجوار وحسابها، تحسب الطريقة معدل التحسين الممكن في قيمة Z إذا تحركت على القطع المستقيمة الخارجة من الذروة الحالية، من المنطقي التحرك على القطعة المستقيمة التي يكون فيها معدل التحسين موجباً، لكن من الأفضل أيضاً اختيار التحرك على القطعة التي يكون فيها معدل التحسين هو الأكبر. تنتهي الدورة الحالية بانتقاء الذروة التي يكون التحسين على Z هو الأكبر، وتسميتها بالذروة الحالية واختبار الأمثلية والانتقال إلى الدورة التالية (إن كان الحل غير أمثلي).

### 2-1-3 التمثيل الجبري لخوارزمية Simplex

رأينا كيفية عمل خوارزمية Simplex هندسياً واستخلصنا أهم المبادئ لعملها، لنحاول الآن وضع الصيغ الجبرية للخوارزمية من خلال المثال.

ليكن لدينا نفس البرنامج أعلاه، تابع الهدف: $\mathbf{Max\ Z = 3x + 5y}$

تحت القيود: $\mathbf{x \le 4}$

$$\mathbf{4y \le 28}$$

$$\mathbf{5x + 3y \le 30}$$

$$\mathbf{y \ge 0 \;\text{،}\; x \ge 0}$$

يعتمد التمثيل الجبري على حل جملة معادلات خطية، بالتالي نحتاج إلى صياغة البرنامج على شكل معادلات، أي تحويل متراجحات القيود إلى معادلات. تستند فكرة التحويل إلى إدخال متغيرات الفرق Slack Variables بين طرفي كل متراجحة.

مثلاً، لنأخذ القيد $x \le 4$ حيث الطرف الثاني 4 أكبر من الطرف الأول x، لتصبح مساواة/معادلة، يجب إضافة مقدار $S_1$ إلى الطرف الأول يساوي الفرق بين الطرفين $S_1 = (x - 4)$ فتصبح المعادلة لها الشكل: $x + S_1 = 4$. بالتالي:

$x \le 4$ يكافئ القيدين $x + S_1 = 4$ و $S_1 \ge 0$

بإضافة متغيرات الفرق لكل من متراجحات القيود في البرنامج أعلاه، يُصبح على شكل معادلات:

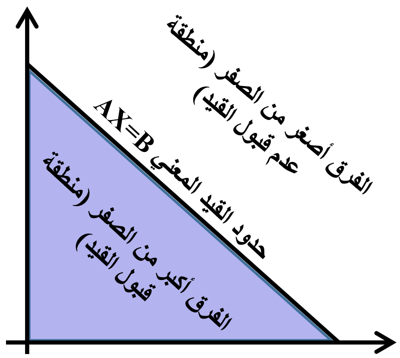
$$\begin{aligned}
&\mathbf{Max\ Z = 3x + 5y}\\
&\mathbf{x + S_1 = 4}\\
&\mathbf{4y + S_2 = 28}\\
&\mathbf{5x + 3y + S_3 = 30}
\end{aligned}$$

قيود اللاسلبية تبقى كما هي $x \ge 0$ ، $y \ge 0$

ندعو هذا الشكل بالصيغة الموسعة للبرنامج Augmented Model، وهو مكافئ تماماً للشكل الأولي للبرنامج الخطي أعلاه ويعبران عن نفس المشكلة. والشكل الموسع أكثر مواءمةً للبحث عن الذرى المقبولة.

نلاحظ أن معاملات متغيرات الفرق $S_i$ تساوي الصفر في الصيغة الحالية للتابع الهدف Z. بشكل عام، إذا كانت قيمة أحد متغيرات الفرق في الحل الجاري:

- تســـاوي الصـــفر، فهذا يعني أن هذا الحل يقع على حدود/مستقيم القيد المعني.
- أكبر من الصـــفر، يعني أن هذا الحل يقع في منطقة قبول القيد المعني.
- أصغر من الصفر، يعني أن هذا الحل يقع في منطقة عدم قبول القيد المعني.




لنعرف بعض مصطلحات البرنامج الخطي التي سنحتاجها في هذه الفقرة:

- يوسم كل متغير بأنه "متغير قاعدي Basic variable" أو "غير متغير قاعدي Nonbasic Variable".
- الحل الموسع Augmented Solution: هو حل للمتغيرات الأصلية (متغيرات القرار) بالإضافة إلى قيم متغيرات الفرق.
- حل قاعدي (الأســـاس) Basic Solution: أحد حلول الذرى بالإضـــافة إلى قيم متغيرات الفرق. مثلاً، الذروتين E أو G في المثال أعلاه.
- حل قاعدي مقبول Basic Feasible Solution: أحد حلول الذرى المقبولة بالإضـــافة إلى قيم متغيرات الفرق. مثلاً، الذرى A, B, C.

يُعتبر مفهومي الحل القاعدي والحل القاعدي المقبول أســاســيان جداً في البرمجة الخطية. لنحاول اســتخلاص

بعض خصائصها الجبرية.

في المثال أعلاه، لدينا 5 متغيرات وثلاثة معادلات للقيود، مما يعني لدينا الحرية في اختيار قيم متغيرين اثنين من بينها (2 = 3-5) ثم استبدالهما وحل المعادلات الثلاثة بالمتغيرات الثلاثة المتبقية.

يُمكن اختيار أي متغيرين من المتغيرات الخمسة بشكل عشوائي، عادةً ما يُعطى للمتغيرين قيماً تساوي الصفر. ندعو هذه المتغيرات "الحرة" بمتغيرات خارج القاعدة Nonbasic Variables.

تُحسب قيم المتغيرات الثلاثة المتبقية من المعادلات الثلاثة، وندعوها بمتغيرات القاعدة، والحل الناتج عنها ندعوه بالحل القاعدي، وله الخصائص الآتية:

- عدد متغيرات القاعدة يساوي عدد القيود التي أصبحت ممثلة على شكل معادلات. وعدد المتغيرات غير القاعدية يساوي الفرق بين العدد الكلي للمتغيرات وعدد متغيرات القاعدة.
- قيم المتغيرات غير القاعدية يساوي الصفر.
- نحصل على قيم المتغيرات القاعدية بحل مشترك لجملة المعادلات في الصيغة الموسعة.
- إذا حققت المتغيرات القاعدية شروط اللاسلبية، فالحل القاعدي هو حل قاعدي مقبول.

في المثال التعليمي أعلاه، تشكل نقطة مبدأ الإحداثيات قاعدة انطلاق مقبولة حيث $x=0$، $y=0$، ومتغيرات القاعدة هي متغيرات الفرق $S_1=4, S_2=28, S_3=30$. تُحقق قيم المتغيرات الخمسة معادلات القيود وتكون قيمة تابع الهدف تساوي الصفر $Z=0$، أي أن هذا الحل هو حل بدئي مقبول ويُمثل النقطة O في الحل البياني، فيكون لدينا إذاً أول حل مقبول:

متغيرات القاعدة: $S_1, S_2, S_3$ متغيرات خارج القاعدة: $x, y$

مثال (3−2) إيجاد حل قاعدي آخر مقبول.

لنأخذ البرنامج الموسع أعلاه، ولنضع مثلاً $x=0$، $S_2=0$ فتُصبح جملة المعادلات:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} \quad + \mathbf{S_1} \quad &= \mathbf{4}\\
\mathbf{4y} \quad + \mathbf{S_2} \quad &= \mathbf{28}\\
\mathbf{5x + 3y} \quad + \mathbf{S_3} &= \mathbf{30}
\end{aligned}
$$

لدينا 3 معادلات بثلاثة مجاهيل $S_1, y, S_3$، الحل المشترك لها:

$$\mathbf{S_3 = 30\text{-}3(7) = 9} \qquad \mathbf{y = 28/4 = 7} \qquad \mathbf{S_1 = 4}$$

حيث أن قيم المتغيرات الثلاثة غير سـالبة، فهي تُحقق شـروط اللاسـلبية، فهذا الحل القاعدي هو حل قاعدي آخر ومقبول: $x=0$ , $y=7$ , $S_1=4$ , $S_2=0$ , $S_3=9$.

متغيرات القاعدة: $S_1, y, S_3$ متغيرات خارج القاعدة: $x, S_2$

تبدو العملية وكأنها إدخال متغير وإخراج آخر من القاعدة، في المثال أعلاه، تم دخول المتغير $y$ إلى القاعدة وخروج المتغير $S_2$ منها.

قيمة تابع الهدف عند هذا الحل $Z=35$، يُمثل النقطة A في الحل البياني على الشكل (3−1).

$$Z = 3x + 5y + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$Z = 3(0) + 5(7) + 0(4) + 0(0) + 0(9) = 35$$

عرفنا في التمثيل البياني مفهوم جوار ذروة، يُمكن تعميم هذا المفهوم على جوار حل قاعدي مقبول:

نقول عن حلين قاعديين مقبولين أنهما متجاوران إذا كانت جميع المتغيرات غير القاعدية هي نفســـها في

الحلين عدا متغيراً واحداً. ويكافؤ القول أن جميع متغيرات القاعدة هي نفسها في الحلين عدا متغيراً واحداً.

مما يعني أن الانتقال من الحل القاعدي المقبول "الجاري/الحالي" إلى جوار مقبول يكافئ اســـتبدال متغير غير قاعدي بمتغير قاعدي. أي إخراج متغير من القاعدة وإدخال آخر محله.

مثال (3−3) استبدال متغير قاعدي بآخر غير قاعدي.

وجدنا حل قاعدي مقبول في المثال الســـابق: $x=0$ , $y=7$ , $S_1=4$ , $S_2=0$ , $S_3=9$. ويُمثل النقطة A على الشكل وهي ذروة حل مقبول. بطبيعة الحال، كل ذروة مقبولة هي حل قاعدي مقبول.

متغيرات القاعدة في الحل الحالي: $S_1, y, S_3$ متغيرات خارج القاعدة: $x, S_2$

كيف ننتقل إلى حل قاعدي آخر مقبول؟

رأينا في الحل البياني أن النقطتين B, O هي ذرى مقبولة مجاورة للنقطة A، وحيث أن A أفضـل من O، فلا يُمكن العودة إليها، إذاً نقرر الانتقال إلى النقطة B واختبار الأمثلية، فإن كانت أفضـــل ننتقل إليها وإلا تكون A هي الحل الأمثل.

بنفس المنطق، نوجد جوار الحل القاعدي الحالي A باســـتبدال متغير من القاعدة $S_1, y, S_3$ بأحد المتغيرات خارج القاعدة، يُمكن اسـتبدال $S_3$ مثلاً بالمتغير $x$ (حيث أن $y$ قد اسـتبدل في الخطوة السـابقة بالمتغير $S_2$)، فتصبح:

متغيرات القاعدة الجديدة: $S_1, y, x$ متغيرات خارج القاعدة: $S_3, S_2$

نعطي $S_2=0, S_3=0$، ونحل جملة المعادلات من جديد:

$$\begin{array}{llll} \mathbf{x} & + \mathbf{S_1} & & = \mathbf{4} \\ \mathbf{4y} & & + \mathbf{S_2} & = \mathbf{28} \\ \mathbf{5x + 3y} & & + \mathbf{S_3} & = \mathbf{30} \end{array}$$

فنجد: قيم متغيرات القاعدة $x=1.8$، $y=7$، $S_1=2.2$

قيمة تابع الهدف عندها يساوي $Z=40.4$ وهو الذروة المقبولة B في الحل البياني:

$$Z = 3(1.8) + 5(7) + 0(2.2) + 0(0) + 0(0) = 40.4$$

يُمكن التوقف عند هذا الحل كونه الحل الأمثل، إذ نلاحظ أن:

- المتغيرات التي تزيد من قيمة تابع الهدف Z (أي المتغيرين $x, y$ حيث معاملاتها في التابع موجبة) جميعها أصبحت في القاعدة.
- أن المتغيرات خارج القاعدة ($S_2, S_3$) لا تدخل في حساب Z أصلاً كونها خارج القاعدة.
- أن المتغير $S_1$ الموجود في القاعدة لا يساهم في زيادة قيم Z كون معامله في صيغة التابع يساوي الصفر.

بمعنى آخر، لا يوجد متغيرات قرار أخرى خارج القاعدة يُمكن أن تزيد من قيم Z، لذلك نعتبر أن الحل الحالي هو حل أمثل، مع الإشارة إلى أنه قد لا يكون وحيداً، لكن قيم Z للحلول المثلى الأخرى (إن وجدت) ستكون تساوي نفس القيمة الحالية $Z^*=40.4$ بمتغيرات أخرى.

تحدثنا حتى الآن عن الحلول القاعدية المقبولة التي تتشكل من تقاطعات حدود القيود وفق الصيغة الموسعة، لكن كيف نتعامل مع تابع الهدف وفق نفس المنظور الجبري؟

يتم الأمر ببساطة بإضافته كسطر إلى الصيغة الموسعة، وعادةً ما نضعه في أعلى الصيغة/الجدول وندعوه السطر رقم [0]. يتشكل هذا السطر من الفرق بين قيمة Z وصيغته (أو قيم متغيراته)، ولا يحتاج إلى إضافة متغير فرق كون صيغة التابع Z هي في الأصل معادلة، لكن يُضاف متغير جديد إلى مجموعة المتغيرات وهو المتغير التابع Z، لكن يُمكن إضافة متغيرات الفرق إلى صيغة Z بمعاملات كل منها يساوي الصفر حيث لا تغير من قيمة Z ويأخذ الشكل القياسي الآتي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Max** | $\mathbf{Z - 3x - 5y + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3}$ | $\mathbf{= 0}$ | **[0]** |
| | $\mathbf{x + S_1}$ | $\mathbf{= 4}$ | **[1]** |
| | $\mathbf{4y + S_2}$ | $\mathbf{= 28}$ | **[2]** |
| | $\mathbf{5x + 3y + S_3}$ | $\mathbf{= 30}$ | **[3]** |

قيود اللاسلبية تبقى كما هي $x \geq 0$ ، $y \geq 0$

قبل الانتقال إلى التعامل مع الخوارزمية بشكلها الجدولي، لنضع جدول مقارنة بين التمثيل البياني والتمثيل الجبري (عن Hiller & Liebreman, 2001 بتصرف)، ولنطبقه على المثال التعليمي في الفقرات السابقة، ولضرورة المقارنة بين الطريقتين نكرر أدناه الشكل (3−1) حيث يُمكن للقارئ متابعة مراحل الوصول إلى الحل الأمثل خطوة فخطوة عبر الجدول والشكل معاً.

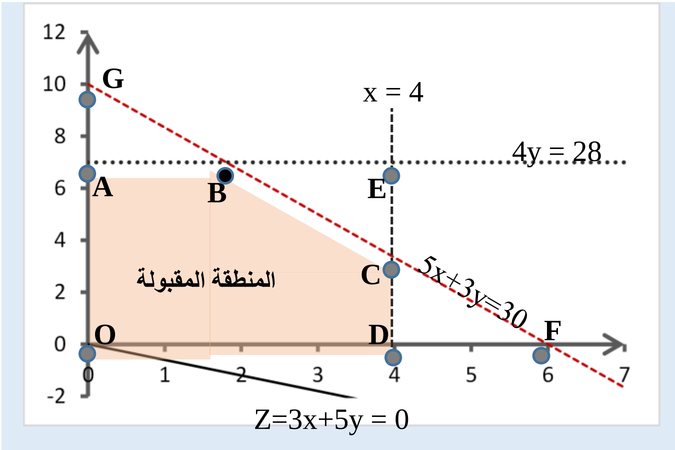
$$\text{Max } Z = 3x + 5y$$

$$x \leq 4$$

$$4y \leq 28$$

$$5x + 3y \leq 30$$

$$x \geq 0 \text{ ، } y \geq 0$$




**الشكل (3−2 مكرر الشكل 3−1) الحل البياني للمثال التعليمي**

**الجدول (3-1) مقارنة بين مراحل الحل الجبري والبياني لخوارزمية Simplex**

| مراحل العمل | الحل البياني | الحل الجبري |
|---|---|---|
| **البدء** | اختيار مبدأ الإحداثيات O(0, 0) كذروة مقبولة.<br>قيمة تابع الهدف:<br>$\mathbf{Z} = 3(0) + 5(0) = \mathbf{0}$ | اختيار المتغيرين x, y كمتغيرات غير قاعدية حيث x=y=0. متغيرات القاعدة هي نفسها متغيرات الفرق: $S_1, S_2, S_3$<br>$(x=0, y=0, S_1=4, S_2=28, S_3=30)$<br>قيمة تابع الهدف:<br>$\mathbf{Z} = 3(0)+5(0)+0(4)+0(28)+0(30) = \mathbf{0}$ |
| **اختبار الأمثلية** | غير أمثلي. لأن التحرك من النقطة O على حدود المنطقة المقبولة يزيد من قيم Z | غير أمثلي. لأن زيادة قيم المتغيرات غير القاعدية x أو y يؤدي إلى زيادة قيم Z، حيث معاملاتها موجبة. |
| **الدورة الأولى**<br>الخطوة (1) | التحرك في جوار O على المحور العمودي y. | زيادة قيمة y مع تعديل قيم المتغيرات الأخرى بما يتوافق مع جملة المعادلات. |
| الخطوة (2) | توقف التحرك عندما الوصول إلى حدود القيد [2] الجديد 4y=28. | توقف الزيادة في y عندما يصل أحد المتغيرات القاعدية $(S_1, S_2, S_3)$ إلى الصفر. هنا المتغير $S_2$ المضاف إلى القيد الثاني [2]. |
| الخطوة (3) | إيجاد قيم نقطة التقاطع بين القيدين اللاسلبية x≥0 والثاني [2]، فنجد x=0, y=7 وهي الذروة المقبولة A.<br>قيمة تابع الهدف:<br>$\mathbf{Z} = 3(0) + 5(7) = \mathbf{35}$ | يدخل y في القاعدة، ويخرج $S_2$ منها.<br>متغيرات القاعدة: $S_1, y, S_3$<br>متغيرات غير القاعدية: $x, S_2$<br>القيم الجديدة لجميع المتغيرات:<br>$(x=0, y=7, S_1=4, S_2=0, S_3=30)$<br>قيمة تابع الهدف:<br>$\mathbf{Z} = 3(0)+5(7)+0(4)+0(0)+0(30) = \mathbf{35}$ |
| **اختبار الأمثلية** | غير أمثلي. لأن التحرك على حدود المنطقة المقبولة باتجاه B يؤدي إلى زيادة قيم Z (قيم y ثابتة، في حين تزداد قيم x) | غير أمثلي. ما زال بالإمكان زيادة قيم x (معامله في تابع الهدف موجب) مما يؤدي إلى زيادة قيمة Z. |
| **الدورة الثانية**<br>الخطوة (1) | استمرار التحرك على طول القطعة المستقيمة AB | زيادة قيمة x مع تعديل قيم المتغيرات الأخرى بما يتوافق مع جملة المعادلات. |
| الخطوة (2) | توقف التحرك عندما الوصول إلى حدود القيد [3] الجديد 5x+3y=30. | توقف الزيادة في x عندما يصل أحد المتغيرات القاعدية $(S_1, y, S_3)$ إلى الصفر. هنا المتغير $S_3$ المضاف إلى القيد الثالث [3]. |

| | | |
|---|---|---|
| الخطوة (3) | إيجاد قيم نقطة التقاطع بين القيدين [2] و [3]، فنجد $x=9/5, y=7$ وهي الذروة المقبولة B.<br>قيمة تابع الهدف:<br>$\mathbf{Z} = 3(9/5) + 5(7) = \mathbf{40.4}$ | يدخل x في القاعدة، ويخرج $S_3$ منها.<br>متغيرات القاعدة: $S_1, y, x$<br>متغيرات غير القاعدية: $S_3, S_2$<br>القيم الجديدة لجميع المتغيرات:<br>$(x=9/5, y=7, S_1=2.2, S_2=0, S_3=0)$<br>قيمة تابع الهدف:<br>$\mathbf{Z} =3(9/5)+5(7)+0(2.2)+0(0)+0(0) = \mathbf{40.4}$ |
| **اختبار الأمثلية** | حل أمثلي $x=9/5, y=7$. لأن التحرك على حدود المنطقة المقبولة بعيداً عن B يؤدي إلى تناقص قيم Z. | حل أمثلي: $(x=9/5, y=7, S_1=2.2, S_2=0, S_3=0)$ زيادة اية متغير غير قاعدي على حساب متغيرات القاعدة، يؤدي إلى تناقص قيمة Z. |

## 3-2 خوارزمية *Simplex* بالشكل الجدولي/المصفوفي

استـخصـلنا في الفقرة السـابقة مبادئ عمل خوارزمية Simplex، ورأينا منطق وآلية الانتقال من ذورة مقبولة إلى ذروة أخرى، ومن حل قاعدي مقبول إلى حل قاعدي آخر مقبول أيضـاً، وذلك على مثال تعليمي مكون من متغيرين اثنين وعدد محدود من القيود. لكن للأسف ليست الحالة العامة، أغلب المشكلات الاقتصادية يكون عدد متغيراتها وقيودها كثيراً وأحياناً كثيراً جداً، فلا يُمكن اللجوء إلى الحل البياني أو الجبري أعلاه، لذلك سـنضـع المشكلة على شكل جداول/مصفوفات، وسنعتمد نفس المبادئ ومنطق الحل أعلاه سواء الهندسي أو الجبري.

لا يتطلب وضع جدول Simplex الكثير من المعلومات، كل ما نحتاجه:

(1) متغيرات القاعدة مرتبة حسب ورودها في كل معادلة.

(2) معاملات جميع المتغيرات القاعدية وغير القاعدية.

(3) المقادير الثابتة في الطرف الثاني من المعادلات.

### 3-2-1 مراحل عمل الخوارزمية

سنعرض مراحل عمل الخوارزمية في هذه الفقرة على الشكل القياسي، على أن نشير إلى الحالات الخاصة في موضعها عند الحاجة.

المرحلة (1) البدء: إدخال متغيرات الفرق Slack Variables.

- اختيار متغيرات القرار الأصلية، واعتبارها متغيرات خارج القاعدة، وتساوي الصفر.
- اختيار متغيرات الفرق كأول مجموعة لمتغيرات القاعدة.

المرحلة (2) اختبار الأمثلية Optimality Test.

- الحل القاعدي الحالي هو أمثلي إذا وفقط إذا كان كل معامل في سطر Z أي السطر رقم (0) أكبر أو يساوي الصفر. تعبر حالة المساواة (إن وجدت) عن وجود أكثر من حل أمثل متساوية القيمة.
- إذا كان أحد المعاملات في سطر Z أصغر تماماً من الصفر: فالحل القاعدي الحالي ليس أمثلياً. الانتقال إلى دورة جديدة للحصول على حل قاعدي جديد. مما يعني الحاجة إلى تبديل متغير غير قاعدي بآخر قاعدي، وحساب حل قاعدي جديد.

المرحلة (3) الدورة الحالية ( i ) Iteration.

الخطوة (1): تحديد المتغير غير القاعدي الجديد الذي سـيدخل القاعدة. يتم اختيار المتغير ذو المعامل السالب الأكبر بالقيمة المطلقة (أي المعامل الأكثر سلبيةً) في سطر Z[5]، ويكون هذا المتغير هو الذي سيدخل إلى القاعدة. تمييز عمود هذا المعامل وتسميته بعمود المحور Pivot Column. إذا وجد أكثر من متغير متساوية في قيمة المعاملات الأكثر سلبيةً، يُمكن اختيار أي منها دون تمييز.

الخطوة (2): تحديد المتغير القاعدي الذي سيخرج من القاعدة، بتطبيق اختبار المعدل الأدنى Ratio Test الآتي:

- تمييز المعاملات الموجبة فقط في عمود المحور.
- حساب معدل كل معامل موجب. المعدل هو حاصل قسمة الطرف الثاني المقابل للمعاملات الموجبة على نظيرتها من نفس السطر في عمود المحور.
- تمييز السطر ذو المعدل الأدنى، ندعو هذا السطر بسطر المحور Pivot Row، ويكون المتغير القاعدي لهذا السطر هو المتغير الذي سيخرج من القاعدة. إذا وجد أكثر من متغير متساوية في قيم المعدل الأدنى، يُمكن اختيار أي منها دون تمييز.
- ندعو الخلية/العنصر الذي يتقاطع فيه سطر المحور مع عمود المحور بعدد المحور أو المحور Pivot.

5. إذا كان اتجاه التأويج من نمط تصغير Min للتابع الهدف، ولم يتم تغييرها للشكل القياسي تعظيم Max، فنختار المعامل الموجب الأكبر.

الخطوة (3) إيجاد الحل القاعدي الجديد. وذلك بإجراء مجموعة من العمليات الأولية على الجدول/المصفوفة (جمع أو طرح أسطر، ضرب سطر بثابت وجمعه من سطر آخر، ...) بحيث نحصل في عمود المحور على القيمة واحد 1 في خلية المحور، وعلى القيمة صفر في جميع الخلايا الأخرى من نفس عمود المحور. كما يلي:

- تقسيم جميع عناصر سطر المحور على العدد الموجود في خلية المحور.
- من أجل الحصول على صفر في أحد خلايا عمود المحور (عدا خلية المحور طبعاً)، ضرب سطر المحور بقيمة الخلية المعنية بعد تغيير إشارتها، وجمع النتيجة إلى سطر الخلية المعنية.
- تكرار العملية لجميع خلايا عمود المحور، حتى نحصل على صفر في جميع خلايا عمود المحور وواحد في خلية المحور.

المرحلة (4) اختبار الأمثلية Optimality Test. إذا كان أحد المعاملات في سطر Z أصغر تماماً من الصفر: الانتقال إلى دورة جديدة للحصول على حل قاعدي جديد.

المرحلة (5) دورة جديدة (i+1 ) Iteration:

- تكرار نفس خطوات المرحلة الثالثة على الجدول الجديد الذي حصلنا عليه في نهاية الخطوة (3) من المرحلة الثالثة.
- تكرار المرحلتين الرابعة والخامسة حتى يُصبح جميع معاملات سطر Z موجبة تماماً.

لنطبق هذه المراحل على المثال التعليمي أعلاه.

## 3-2-2 تطبيق مراحل الخوارزمية (مثال تعليمي)

لنضع المثال التعليمي أعلاه على شكل جدول. المطلوب تعظيم التابع Z بحيث يكون:

$$Z - 3x - 5y - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 = 0 \qquad [0]$$

$$x + S_1 = 4 \qquad [1]$$

$$4y + S_2 = 28 \qquad [2]$$

$$5x + 3y + S_3 = 30 \qquad [3]$$

<u>المرحلة (1) جدول البدء (الحل الأول)</u>

من الضـــروري البدء بحل قاعدي، لنأخذ المتغيرين $x, y$ كمتغيرات غير قاعدية حيث $x=y=0$، وتكون متغيرات القاعدة هي نفسها متغيرات الفرق: $S_1, S_2, S_3$، نضعها في عمود خاص.

- نضع المعادلات على شكل أسطر.
- نضـــع جميع المتغيرات في أعمدة، كل منها في عمود خاص، ونضـــع في كل عمود المعاملات الموافقة للمتغير من المعادلات بنفس الترتيب.
- نضع عمود خاص للطرف الثاني من المعادلات.

| الجدول (1): جدول Simplex الموافق لمرحلة البدء | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| متغيرات القاعدة | رقم المعادلة | معاملات المتغيرات | | | | | | الطرف الثاني |
| | | Z | X | y | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | |
| Z | [0] | 1 | -3 | -5 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $S_1$ | [1] | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| $S_2$ | [2] | 0 | 0 | 4 | 0 | 1 | 0 | 28 |
| $S_3$ | [3] | 0 | 5 | 3 | 0 | 0 | 1 | 30 |

نقرأ الحل القاعدي الحالي/الجاري مباشرةً من الجدول كما يلي:

قيمة كل متغير قاعدي هي القيمة الظاهرة في عمود الطرف الثاني بما فيها قيمة تابع الهدف Z، وكل متغير لا يظهر في عمود القاعدة تكون قيمته تساوي الصفر، فنجد الحل الحالي:

| متغيرات القاعدة: | متغيرات خارج القاعدة: | تابع الهدف: |
|---|---|---|
| $S_1 = 4$ | $x = 0$ | $Z = 0$ |
| $S_2 = 28$ | $y = 0$ | |
| $S_3 = 30$ | | |

المرحلة (2) اختبار الأمثلية Optimality Test.

الحل القاعدي الحالي يكون أمثلياً إذا كان جميع المعاملات في سطر Z أكبر أو يساوي الصفر. نلاحظ أن سطر Z ما زال يحوي معاملات سالبة (في العمودين x و y)، مما يتطلب الانتقال إلى دورة جديدة للحصول على حل قاعدي جديد، أي تبديل متغير غير قاعدي بآخر قاعدي، وحساب الحل الجديد.

المرحلة (3) الدورة التالية (1) Iteration.

الخطوة (1): تحديد عمود المحور أي المتغير غير القاعدي الجديد الذي ســـيدخل القاعدة. نلاحظ من الجدول (1) أن المعامل السالب الأكبر بالقيمة المطلقة هو العمود الثاني في سطر Z ويساوي -5 المقابل للمتغير y، فيكون عمود y هو عمود المحور، والمتغير y سيدخل القاعدة.

الخطوة (2): تحديد المتغير القاعدي الذي سيخرج من القاعدة، بتطبيق اختبار المعدل الأدنى.

المعدل في سطر المعادلة الثانية [2] الموافق للمتغير $S_2$ هو الأقل، فيكون هو سطر المحور، أي أن المتغير $S_2$ سيخرج من القاعدة، وسيدخل y بدلاً منه.

**الجدول (1): جدول Simplex الموافق لمرحلة البدء**

| **متغير القاعدة** | رقم المعادلة | معاملات المتغيرات | | | | | | **الطرف الثاني** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Z | X | **y** | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | |
| **Z** | [0] | 1 | -3 | **-5** | 0 | 0 | 0 | **0** |
| **$S_1$** | [1] | 0 | 1 | **0** | 1 | 0 | 0 | **4** |
| **$S_2$** | **[2]** | **0** | **0** | **4** | **0** | **1** | **0** | **28 (28/4=7)** |
| **$S_3$** | [3] | 0 | 5 | **3** | 0 | 0 | 1 | **30** (30/3=10) |

الخطوة (3) إيجاد الحل القاعدي الجديد. يجب أن نحصــل في عمود المحور على القيمة 1 في خلية المحور، و 0 في جميع الخلايا الأخرى من نفس عمود المحور. نجري العمليات الآتية:

أ) تقسيم سطر المحور على قيمة خلية المحور 4، فيُصبح السطر الجديد الموافق:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **$S_2$** | [2] | **0** | **0** | **1** | **0** | **1/4** | **0** | **7** (28/4) |

ب) ضرب السطر الجديد للمحور بالقيمة 5 وجمعه لسطر Z المعادلة [0]، فيُصبح سطر Z:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Z** | [0] | **1** | **-3** | **0** | **0** | **5/4** | **0** | **35** (5*7+0) |

ت) ضرب السطر الجديد للمحور بالقيمة (-3) وجمعه لسطر المعادلة [3]، فيُصبح سطر $S_3$:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **$S_3$** | [3] | **0** | **5** | **0** | **0** | **-3/4** | **1** | **9** (-3*7 +30) |

بعد إنجاز هذه العمليات، أصـبحت جميع خلايا عمود المحور تسـاوي الصـفر عدا طبعاً خلية المحور التي تساوي الواحد، فيتشكل لدينا الجدول الجديد للمرحلة التالية:

**الجدول (2): جدول Simplex الموافق للمرحلة الثانية (1) Iteration**

| **متغير القاعدة** | رقم المعادلة | معاملات المتغيرات | | | | | | **الطرف الثاني** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Z | x | y | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | |
| **Z** | [0] | 1 | -3 | 0 | 0 | 5/4 | 0 | **35** |
| **$S_1$** | [1] | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | **4** |
| **y** | [2] | 0 | 0 | **1** | 0 | 1/4 | 0 | **7** |
| **$S_3$** | [3] | 0 | 5 | 0 | 0 | -3/4 | 1 | **9** |

المرحلة (2–مكرر) اختبار الأمثلية (1) Iterarion: الحل القاعدي الحالي يكون أمثلي إذا كان جميع معاملات سطر Z أكبر أو يساوي الصفر. ما زال سطر Z يحوي معاملات سالبة وهو معامل عمود x ويساوي 3- مما يتطلب الانتقال إلى دورة جديدة للحصول على حل قاعدي جديد.

المرحلة (3–مكرر) الدورة التالية (2) Iteration. نعيد نفس الخطوات على الجدول الجديد رقم (2).

الخطوة (1): عمود المحور، المتغير غير القاعدي الجديد الذي سـيدخل القاعدة هو ذو المعامل السـالب الأكبر بالقيمة المطلقة (يساوي 3-) ويوافق x، أي أن x سيدخل القاعدة.

الخطوة (2): تحديد المتغير القاعدي الذي سيخرج من القاعدة، بتطبيق اختبار المعدل الأدنى.

المعدل في سطر المعادلة الأخيرة [3] هو الأقل ويساوي 9/5، فيكون هو سطر المحور، أي أن المتغير $S_3$ سيخرج من القاعدة، وسيدخل x بدلاً منه.

الخطوة (3) إيجاد الحل القاعدي الجديد. تحويل جميع خلايا عمود المحور x إلى القيمة صفر وواحد 1 في خلية المحور. نجري العمليات الآتية:

- تقسيم سطر المحور أي المعادلة [3] على 5.
- ضرب سطر المحور بعد التقسيم بالعدد 3 وجمعه لسطر Z.
- ضرب سطر المحور بعد التقسيم بالعدد 1- وجمعه لسطر المعادلة [1].

فنحصل على الجدول الآتي:

| الجدول (3): جدول Simplex الموافق للمرحلة الثانية (الدورة الثانية) | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| متغير القاعدة | رقم المعادلة | معاملات المتغيرات | | | | | | الطرف الثاني | |
| | | Z | x | Y | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | | |
| **Z** | [0] | 1 | **0** | 0 | 0 | 16/20 | 3/5 | **40.4** | (35+3*9/5) |
| **$S_1$** | [1] | 0 | 0 | 0 | 1 | 3/20 | -1/5 | **2.2** | (4-9/5) |
| **y** | [2] | 0 | 0 | 1 | 0 | 1/4 | 0 | **7** | |
| **x** | [3] | 0 | **1** | 0 | 0 | -3/20 | 1/5 | **9/5** | |

المرحلة (2-مكرر) اختبار الأمثلية. الحل القاعدي الحالي يكون أمثلي إذا كان جميع معاملات سطر Z أكبر أو يساوي الصفر. نلاحظ أن جميع معاملات سطر Z أصبحت أكبر من الصفر، فالحل الحالي هو الحل الأمثل:

| متغيرات القاعدة: | متغيرات خارج القاعدة: | تابع الهدف: |
|---|---|---|
| $x^* = 9/5$ | $S_2 = 0$ | $Z^* = 40.4$ |
| $y^* = 7$ | $S_3 = 0$ | |
| $S_1 = 2.2$ | | |

رغم وجود متغير الفرق $S_1$ في القاعدة، لكنه لا يؤثر على قيمة Z كون معامله فيها صفر.

## 3-3 أقلمة خوارزمية *Simplex* على أشكال غير قياسية

رأينا حتى الآن كيفية عمل الخوارزمية على الشـكل القياسـي أي تعظيم تابع $Max\{Z\}$ تحت مجموعة قيود من نمط أصغر أو يساوي $AX \leq B$ حيث الطرف الثاني B هي مقادير موجبة، وقيود اللاسلبية $X \geq 0$.

سـنحاول في هذه الفقرة أقلمة الخوارزمية لحالات خاصــة أخرى من البرامج الخطية، من نمط قيود مختلطة أكبر أو يساوي أو أصـغر، أو توابع تقليل Min، أو بعض قيم معاملات الطرف الثاني سـالبة. وسـنرى أن غالبية هذه التعديلات ســتتم في مرحلة البدء خصـــوصـــاً البدء بحل قاعدي مقبول، في حين أن غالبية الخطوات اللاحقة للخوارزمية تكاد تكون متشابهة إن لم تكن نفسها.

في أغلب هذه الحالات، التقنية الأكثر استخداماً لمعالجتها هي بإدخال متغيرات وهمية أو مصـطنعة Artificial Variables، حيث يتم تشكيل مشكلة وهمية/مصطنعة أكثر مواءمةً لتطبيق الخوارزمية.

تقوم التقنية بإدخال متغير اصــطناعي على كل قيد يحتاجه، يُسـتخدم المتغير الاصــطناعي الجديد للبدء وإيجاد أول حل قاعدي مقبول، حيث يلعب هذا المتغير دور المتغير القاعدي في معادلة القيد المعني. كما يتم تعديل صـيغة تابع الهدف بإضــافة حد ذو قيمة سـالبة كبيرة (نوع من الجزاء) إليها. ويختفي لاحقاً تأثير هذه المتغيرات الاصـطناعية (قيمها صـفر) مع تقدم دورات الخوارزمية باتجاه الحل الأمثل، حتى يختفي كلياً مع الوصـول للحل الأمثل. سنوضح ذلك في الفقرة التالية على أول حالة خاصة من نمط قيود المساواة.

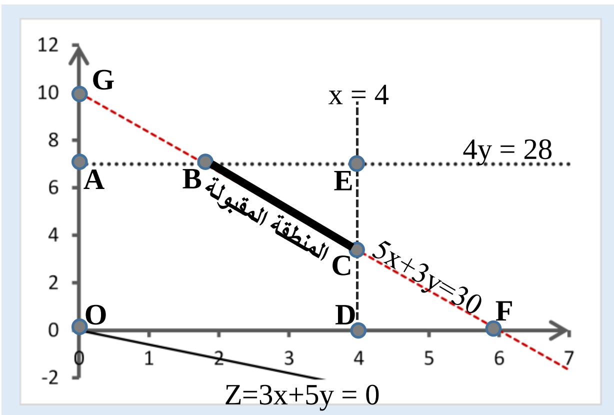
### 3-3-1 بعض القيود من نمط المساواة

ليكن لدينا قيد مساواة من الشكل $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$

يكافئ هذا القيد كتابته على شكل متراجحتين كما يلي: $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b$ و $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \ge b$

لكن تغيير قيود المسـاواة بمتراجحات يؤدي إلى زيادة عدد القيود، وبالتالي زيادة حجم الحسـابات بشكل كبير جداً، لنستخدم تقنية المتغيرات الاصطناعية.

لنعد إلى مثالنا التعليمي أعلاه، ولنعدّل صـيغة القيد الثالث فقط لتُصـبح مسـاواة بدلاً من "أصـغر أو يسـاوي"، فيصـبح البرنامج له الشـكل المبين أدناه. يُظهر الشـكل (3−3) أن مجموعة الحلول المقبولة هو فقط القطعة المستقيمة BA.




$$
\begin{array}{lr}
\text{Max } Z = 3x + 5y & [0] \\
x \leq 4 & [1] \\
4y \leq 28 & [2] \\
5x + 3y = 30 & [3] \\
x \geq 0 \text{ ، } y \geq 0 & [4]
\end{array}
$$

**الشكل (3−3) حالة خاصة: بعض القيود من نمط المساواة**

بإضافة متغيرات الفرق على القيدين [1] و [2] فقط، حيث القيد الثالث هو مساواة (معادلة) وبالتالي لا يوجد فرق بين طرفي القيد، يُصبح الشكل الموسع للبرنامج:

$$
\begin{array}{lr}
\textbf{Max } \; Z - 3x + 5y = 0 & [0] \\
x + S_1 = 4 & [1] \\
4y + S_2 = 28 & [2] \\
5x + 3y = 30 & [3] \\
x \geq 0 \; ; \; y \geq 0 & [4]
\end{array}
$$

رأينا في طرق الحل السـابقة، لا بدّ من الإنطلاق من نقطة أي حل قاعدي مقبول للبدء ثم تحسـين الحل، لكن جملة المعادلات الخطية الناتجة في الشكل الموسع لا تسمح بتمييز حل بدئي واضـح! إذ أن وضـع حل قاعدي عند مبدأ الإحداثيات حيث x=0، y=0 يؤدي إلى خرق القيد الثالث [3].

لحل هذه المعضــلة، ســنعتمد على مفهوم المتغير الاصــطناعي Artificial Variable، وذلك بتشــكيل مســألة اصطناعية تعطي نفس الحل الأمثل للمسألة الأصلية، كما يلي:

(1) إضــافة متغير اصــطناعي غير ســالب A إلى القيد الثالث (قيد المســاواة) كما فعلنا عند إضــافة متغيرات الفرق، فيُصبح القيد [3] له الشكل: $5x + 3y + A = 30$ وتكون قيمة A:

$$A = 30 - 5x - 3y$$

(2) تعديل صيغة تابع الهدف بإضافة مقدار كبير جداً $M$ بإشارة سالبة كما يلي:

$$Z = 5x + 3y - M.A$$

(3) البحث عن الحل الأمثل بتطبيق Simplex على المسألة المصطنعة الجديدة:

| | | |
|---|---|---|
| **Max** | $\mathbf{Z - 3x - 5y + M.A = 0}$ | **[0]** |
| | $\mathbf{x + S_1 = 4}$ | **[1]** |
| | $\mathbf{4y + S_2 = 28}$ | **[2]** |
| | $\mathbf{5x + 3y + A = 30}$ | **[3]** |
| | $\mathbf{x \geq 0 \;;\; y \geq 0 \;;\; A \geq 0}$ | **[4]** |

نلاحظ أنه أصــبح لدينا شــكلاً قياســياً للبرنامج الخطي، بمتغيرات فرق $S_1, S_2$ وبمتغير اصــطناعي A ويعامل معاملة متغيرات الفرق، بالتالي نوجد حل قاعدي مقبول للبدء.

المتغيرات القاعدية للحل الأولي (البدء): $S_1 = 4,\; S_2 = 28,\; A = 30$، يعني أن قيمة تابع الهدف $Z = -30M$.

لكن هذا الحل ليس بالشكل القياسـي (يجب أن تكون جميع معاملات متغيرات القاعدة تساوي الصفر في معادلة تابع الهدف)، إذ أن معامل المتغير الاصطناعي A في معادلة تابع الهدف [0] ليس معدوماً ويساوي $-M$، لذلك

يجب حذفه من صيغة Z، وإلا "سيعاقب" Z بقيمة كبيرة جداً M.

لحذف A من المعادلة [0]، نجري بعض العمليات الأســاســية على المعادلات، في هذه الحالة يكفي ضـــرب المعادلة [3] بالمقدار M– وجمع النتيجة إلى المعادلة [0]، فنحصـــل على ســـطر Z الجديد أي المعادلة [0] الجديدة:

$$\begin{array}{l} Z - 3x - 5y + M.A = 0 \\ -M(5x + 3y + \quad A = 30) \\ \hline \mathbf{Z - (5M + 3)x - (3M + 5)y = -30M \qquad [0]} \end{array}$$

نلاحظ أن المتغير الاصطناعي A قد تم حذفه من المعادلة [0]، وأصبحت صيغة تابع الهدف Z للمتغيرين غير القاعديين x, y فقط، لا ننسى أن M هي مقدار ثابت كبير جداً:

$$\mathbf{Z = (5M + 3)x + (3M + 5)y - 30M \qquad [0]}$$

يُمكن من هذه الصـــيغة معرفة أي من المتغيرين x, y ســـيدخل في القاعدة أولاً، حيث معيار الدخول أن يكون معامله في تابع الهدف هو الأكبر (أي تكون الزيادة في التابع هي الأكبر).

بمقارنة معاملي x, y في الصـيغة أي المقدارين (5M +3) و (3M + 5) نجد: $5M + 3 > 3M + 5$ (طالما أن M عدد كبير جداً، فالقيم 3 ,5 مهملة أمامه)، إذاً معامل x هو الأكبر، فالمتغير x هو الذي ســـيدخل القاعدة. هذا يعني التحرك من النقطة O(0, 0) إلى النقطة D(x=4, y=0) وتكون الزيادة في قيمة تابع الهدف Z=4(5M + 3)، وقيمة Z عند هذه النقطة تساوي (12 – 10M):

$$Z = (5M + 3)(4) + (3M + 5)(0) - 30M = 12 – 10M$$

لا يظهر المقدار M إلاّ في معادلة تابع الهدف [0]، بالتالي لن يؤخذ بالاعتبار إلا عند إجراء اختبار الأمثلية

وعند تحديد المتغير الذي سيدخل القاعدة.

يُمكن طبعاً إعطاء M عدداً كبيراً جداً في الصيغة، لكن ذلك قد يُحدث بعض الأخطاء الحسابية بسبب عدم تجانس كبر/صغر الأرقام مما يستدعي التقريب أحياناً ويبطل عمل اختبار الأمثلية. الطريقة الأنسب كما فعلنا أعلاه أي التعبير عن معاملات المتغيرات في المعادلة [0] بشكل صيغ خطية للمقدار M من الشكل (aM + b)، ومقارنة المعاملات لاحقاً، مع الأخذ بالاعتبار أن قيم b مهملة تجاه العدد M، لذلك يكفي مقارنة الجزء aM من معاملي متغيرين.

رأينا معالجة حالة "قيود على شكل معادلات" لقيد واحد فقط في مجموعة القيود، لكن يُمكن تطبيق نفس المعالجة في حال وجود أكثر من قيد من نمط المساواة.

وفي حال كان الطرف الثاني لقيد المساواة ذو قيمة سالبة، يكفي ضرب طرفي المعادلة بالسالب، واستكمال معالجتها على شكل قيد مساواة بطرف ثاني موجب.

يُمكن للقارئ استكمال حل المثال أعلاه، فسيحصل على الحل الأمثل عند النقطة B.

تذكير سريع بالمتغير الاصطناعي Artificial Variable وطريقة–M:

استخدمنا أعلاه طريقة لإدخال متغير اصطناعي إلى البرنامج وإضافة مقدار كبير جداً M إلى تابع الهدف Z. تُعرف هذه الطريقة بطريقة–M (M-Method). تًستخدم لمعالجة بعض الحالات الخاصة أو الشاذة في البرنامج الأصلي للعودة به إلى الشكل القياسي. يُضاف متغير اصطناعي إلى كل معادلة لا يوجد فيها متغير فرق Slack Variable، وذلك بهدف تشكيل حل أولي للبرنامج للبدء به، ويعامل المتغير الاصطناعي معاملة متغيرات الفرق. باعتبار أن هذه المتغيرات الاصطناعية ليست جزءاً من البرنامج الأصلي، نضيفها إلى تابع الهدف Z بعد ضرب كل منها بمقدار كبير جداً M، وكأنها نوع من العقوبة Penality لورود قيد المساواة ها وظهورها في تابع الهدف، وهذا يجعل قيمها تساوي الصفر في الحل الأمثل (في حال وجود منطقة مقبولة طبعاً)، وكأنها تستبعد تدريجياً خلال مراحل الوصول إلى الحل الأمثل. تُضاف M إلى تابع الهدف Z بإشارة

سالبة إذا كان تابع الهدف من نمط Max، وبإشارة موجبة إذا كان من نمط Min.

### 3-3-2 معاملات سالبة في الطرف الثاني

إذا كان الطرف الثاني في بعض القيود سالباً، يكفي ضرب طرفي القيد بالعدد (1-) أو تغيير إشارات جميع حدود الطرفين. وهنا يُمكن تمييز حالتين:

الحالة الأولى: القيد من نمط مساواة، فعملية ضرب طرفي المعادلة بسالب واحد تؤدي إلى تغيير إشارات جميع حدود الطرفين. يُمكن معالجتها حسب الفقرة السابقة عبر المتغيرات الاصطناعية.

مثال: $3x - 4y = -20$ بالضرب بسالب يُصبح $-3x + 4y = 20$

الحالة الثانية: حيث أن القيود من نمط متراجحة أصغر أو يساوي $\leq$ (لنتذكر أننا نتعامل مع الشكل القياسي للبرنامج الخطي)، فالضرب بسالب واحد يؤدي إلى تغيير اتجاه المتراجحة لتصبح "أكبر أو يساوي"، بالإضافة طبعاً لتغيير إشارات جميع حدود الطرفين.

مثال: $3x - 4y \leq -20$ بالضرب بسالب يُصبح $-3x + 4y \geq 20$

بعد تغيير إشارة الطرف الثاني لتُصبح موجبة في جميع القيود، يُمكن لخوارزمية Simplex أن تعمل. بعد وضع الصيغة الموسعة، تُصبح قيم الطرف الثاني موجبة وهي قيم متغيرات أول حل قاعدي، وتُحقق قيود اللاسلبية.

### 3-3-3 تابع الهدف من نمط تقليل Minimization

نُذكر بدايةً، أن منطقة الحلول المقبولة تنتج عن تقاطعات القيود، ولا علاقة لها بتابع الهدف، إذ بعد تحديد مجموعة الحلول المقبولة، نبحث من بينها عن الحل الأمثل. قد يعني الحل الأمثل أكبر قيمة للتابع الهدف Max(Z) أو أصغر قيمة Min(Z)، وفي جميع الأحوال نبحث عنه في المنطقة المقبولة.

فرضنا سابقاً شكلاً قياسياً للبرنامج الخطي أي تعظيم تابع الهدف Max(Z) تحت جملة من القيود جميعها من نمط أصغر أو يساوي $AX \leq B$، وقيود اللاسلبية.

في حال كان التابع من نمط تقليل Min(Z)، أي من الشكل:

$$Min \quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

فيمكن تحويله ببساطة إلى تابع تعظيم Max(z) بضرب جميع المعاملات $c_j$ بالسالب ليُصبح:

$$Max \quad -Z = \sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j$$

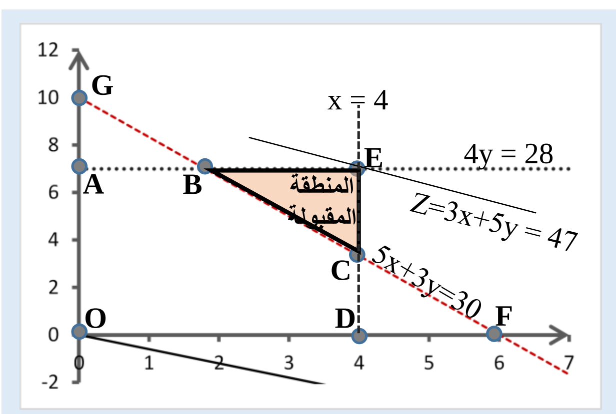
الشكلان السابقان متكافئان ولديهما نفس الحل الأمثل. وتكون أصغر قيمة للتابع Z هي أكبر قيمة للتابع Z–، فالحل الذي يعطي أصغر قيمة للتابع Z من منطقة الحلول المقبولة يعطي أكبر قيمة للتابع Z– في نفس المنطقة.

مثال: Max (Z = 5x + 3y) يكافئ Min (-Z = -5x -3y)

### 3-3-4 بعض القيود من نمط أكبر أو يساوي

حتى الآن، فرضنا التعامل مع الشكل القياسي للبرنامج الخطي أي Max(Z) والقيود من نمط أصغر أو يساوي ≤، بالإضافة إلى قيود اللاسلبية. لكن لا يوجد ما يمنع أن تكون بعض القيود من نمط "أكبر أو يساوي ≥". سنرى كيفية التعامل معها باستخدام مفهوم المتغيرات الاصطناعية.

لنأخذ نفس المثال التعليمي أعلاه، ولنغير في تابع الهدف بحيث يُصبح Min بدلاً من Max، ولنغير أيضاً في القيد الثالث ليُصبح من نمط أكبر أو يساوي، يُظهر الشكل (3-4) مجموعة الحلول المقبولة BCE، والحل الأمثل هو النقطة **C** حيث $x = 4\ ,\ y = 10/3$ وقيمته $\mathbf{Z = 86/3}$.




| | |
|---|---|
| **Min Z** $= \mathbf{3x + 5y}$ | **[0]** |
| $\mathbf{x \leq 4}$ | **[1]** |
| $\mathbf{4y \leq 28}$ | **[2]** |
| $\mathbf{5x + 3y \geq 30}$ | **[3]** |
| $\mathbf{x \geq 0}$ ، $\mathbf{y \geq 0}$ | **[4]** |

**الشكل (3-4) حالة خاصة: بعض القيود من نمط أكبر أو يساوي**

في حالة القيد الثالث [3]، يجب أولاً تحويل القيد إلى نمط مساواة بطرح مقدار منه، وذلك قبل إضافة المتغير الاصطناعي، كما يلي:

- نعدّل صيغة القيد الثالث [3] بإدخال متغير إضافي $S_3$ ليُصبح مساواة:

$$5x + 3y - S_3 = 30$$

• ثم نضيف المتغير الاصطناعي A كما فعلنا أعلاه لمعالجة حالة المساواة:

$$5x + 3y - S_3 + A = 30$$

وطبعاً، يجب تعديل صـيغة تابع الهدف بإضـافة الجزاءات إليه عبر المقدار M (مع ملاحظة أن التابع من نمط تقليل Min لذلك العملية هي إضافة وليست إنقاص كما في حالة التعظيم Max):

$$Z = 3x + 5y + M\,S_3 + M\,A$$

تُصبح الصيغة الموسعة للبرنامج (المسألة المصطنعة):

$$\mathbf{Min}\ \ (\mathbf{Z = 3x + 5y \qquad + M\,S_3 + M\,A})$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \quad + \mathbf{S_1} \qquad\qquad &= \mathbf{4} \\
\mathbf{4y} \quad + \mathbf{S_2} \qquad\quad &= \mathbf{28} \\
\mathbf{5x + 3y} \qquad - \mathbf{S_3} + \mathbf{A} &= \mathbf{30} \\
\mathbf{x \geq 0} \quad ; \quad \mathbf{y \geq 0} &
\end{aligned}$$

بالتالي، أصبح بالإمكان معالجتها باستخدام Simplex على أنها مسألة تقليل Min مع قيود مساواة.

## 4-3 تحليل ما بعد الأمثلية *PostOptimality*

يُقصـد بالتحليل ما بعد الأمثلية Postoptimality إجراء مجموعة من التعديلات على متغيرات/مكونات المسـألة بعد الحصول على الحل الأمثل للمسألة الأصلية.

هذا التحليل مفيد للغاية، خصوصاً عندما تكون المسألة مشكلة من مئات أو آلاف المتغيرات والقيود، وأي تعديل قد يتطلب الكثير من الجهد والوقت، لذلك يتم اللجوء إلى دراسـة أثر التعديلات على الحل الأمثل مباشـرةً، دون الحاجة لإعادة تشغيل الخوارزمية كاملةً.

سنستعرض بعض الحالات الأكثر أهميةً.

### 3-4-1 إعادة التأويج Reoptimization

في حال تعديل أي من مكونات المســألة، لا يوجد ما يمنع من اعتبار المشــكلة وكأنها مشــكلة جديدة وتطبيق خوارزمية Simplex عليها من جديد، لكن هذا الأسلوب قد يأخذ مزيد من الوقت والجهد.

لذلك قد يكون من الأفضل تقحص أحد الخيارين أو الاثنين معاً:

- العودة إلى مراحل بناء المشكلة خصوصاً مرحلة الصياغة واختيار طريقة البحث عن الحل، حيث يُمكن تفحص أثر تعديل صيغ المعادلات/المتراجحات على الحل النهائي.
- أو تفحص التعديلات على المشــكلة وما يُقابلها في جداول Simplex وتحديد تأثير هذه التعديلات على الحل الأمثل أي الجدول النهائي.

في جميع الأحوال، يجب ألا يغيب عن الذهن أثناء إجراء هذه المراجعات، كيفية استثمار أي من الحلول المقبولة التي حصــلنا عليها للمســألة الأصــلية، إذ قد يكون أي منها حلاً قاعدياً للبدء به، وحتى قد يكون الحل الأمثل السابق للمسألة الأصلية هو حل قاعدي مناسب للبدء به.

في كل مرحلة من مراحل دراسة التعديلات، قد يكون أيضاً من المفيد إجراء اختبار الأمثلية أول بأول، وحينها قد لا يكون ضرورياً الانتظار لإنجاز كافة مراحل الخوارزمية على المسألة الجديدة.

### 3–4–2 الأسعار الهامشية/الظل Shadow Prices

لنتذكر أن البرمجة الخطية هي نوع من دراسة توزيع الموارد على الأنشطة، فعندما نضع قيداً ما من نمط "أصغر أو يساوي" يعني بأن مجموع الموارد التي تستهلكها الأنشطة (متغيرات القرار) أي الطرف الأول، يجب ألا يتجاوز المقدار المحدد من المورد i أي الطرف الثاني $B_i$.

لا يوجد ما يمنع أن تُعدّل الإدارة الكميات في الطرف الثاني $B_i$ بالزيادة أو النقصان، إذا لاحظت أن هذا التعديل سيكون مربحاً. أي أن دراسة التأثير الاقتصادي للتعديلات الهامشية على أحد الموارد (الطرف الثاني) على تابع الهدف Z سيكون مفيداً للغاية للإدارة لتعديل قراراتها، وندعو هذه الظاهرة بأسعار الظل Shadow Prices. إذا كان تابع الهدف تابع تكاليف، فتعبر أسعار الظل عن التكاليف الهامشية، وإذا كان تابع منفعة مثلاً فتعبر عن المنفعة الهامشية.

سعر الظل لمورد محدد $y^*_i$ يقيس القيمة الهامشية للمورد i. بمعنى آخر، معدل التزايد في تابع الهدف Z مع زيادة طفيفة في الكمية المتاحة من المورد $B_i$. تفيدنا Simplex في تحديد هذا المعدل، وهو ليس إلا قيمة معامل متغير الفرق i في سطر التابع Z في الجدول النهائي.

مثال (3–4) أسعار الظل في الجدول النهائي Simplex.

لنأخذ الجدول الأخير رقم (3) في مثالنا التعليمي أعلاه (الفقرة 3–2–3)، نلاحظ أن قيم معاملات متغيرات الفرق التي أدخلت على قيود الموارد الأول، الثاني، والثالث على التوالي تفسر بأسعار الظل.

- من عمود متغير الفرق الأول $S_1$: قيمة المعامل $y_1^* = 0$، يعني أن الزيادة في الطرف الثاني

لهذا المورد الأول لا يؤدي إلى زيادة قيمة تابع الهدف.

- من عمود متغير الفرق الثاني $S_2$: قيمة المعامل $y_2^* = \frac{16}{20}$، أي أن الزيادة بمقدار وحدة معيارية واحدة في كمية الطرف الثاني لهذا المورد الثاني يؤدي إلى زيادة قيمة تابع الهدف بمقدار $\Delta Z = \frac{16}{20}$.

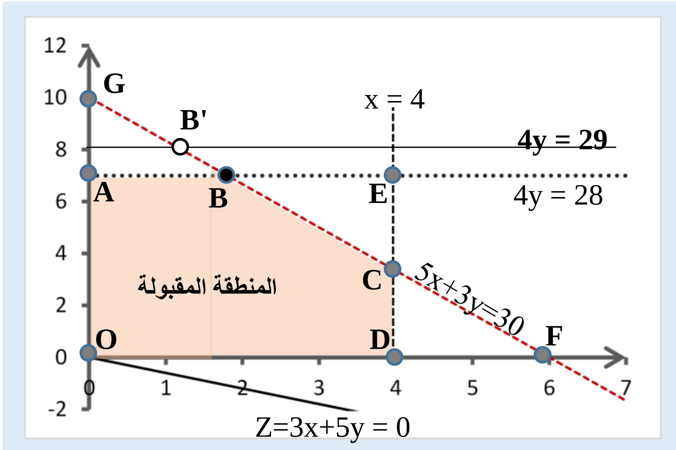
- من عمود متغير الفرق الثالث $S_3$: قيمة المعامل $y_3^* = \frac{3}{5}$، أي أن الزيادة بمقدار وحدة معيارية واحدة في قيمة الطرف الثاني لهذا المورد الثالث يؤدي إلى زيادة قيمة تابع الهدف بمقدار $\Delta Z = \frac{3}{5}$.

يُمكن للقارئ التأكد من هذه التغيرات بالعودة إلى الحل البياني في الشكل (3−5)، بزيادة الطرف الثاني لكل من هذه القيود، وتتبع التغير على قيم الحل الأمثل والتأكد بأنها ستزداد بهذه المقادير.

مثلاً، زيادة 1 على الطرف الثاني للقيد الثاني ليُصبح له الصيغة **$4y \leq 29$** ينقل الحل الأمثل إلى النقطة B' حيث:

$$Z(B') = 3 * 1.65 + 5 * 7.25 = 41.2 \quad ; \quad x = \frac{30-3*\frac{29}{4}}{5} = 1.65 \quad ; \quad y = \frac{29}{4} = 7.25$$

الفرق بين قيمة الحل الأمثل سابقاً عند B (Z(B)=40.4) والحل الأمثل الجديد عند B' يساوي 0.8 (Z(B') – Z(B) = 41.2 – 40.4 = 0.8) وهي نفسها معامل سعر الظل $y_2^* = \frac{16}{20}$.




**الشكل (3-5) تأثير أسعار الظل Shadow Prices**

## 3-4-3 تحليل الحساسية Sensitivity Analysis

يُقصد بتحليل الحساسية دراسة أثر تغيرات طفيفة في قيم المعاملات في البرنامج الخطي على قيمة الحل الأمثل. في الحالة السابقة مثلاً، رأينا أثر تعديل قيم الطرف الثاني على قيمة الحل الأمثل، وهو جزء من تحليل الحساسية أيضاً.

كنا قد فرضنا سابقاً أن قيم المعاملات في مسألة البرمجة الخطية هي مقادير محددة وأكيدة، لكنها في الحقيقة هي تقديرات لقيم هذه المعاملات، ولن نعلم القيم الحقيقية إلا بعد التطبيق الفعلي للحل.

يتمثل الهدف من تحليل الحساسية في تقليل مخاطر الحصول على حل أمثل غير واقعي، كذلك مراقبة تأثير بعض الموارد الحرجة أو كميات بعضها. يُمكن أن يُنجز تحليل الحساسية:

أ- على معاملات متغيرات القرار في تابع الهدف $c_j$. وهو الأكثر أهميةً كونه يؤثر بشكل مباشر على قيم التابع.

ب-  على معاملات الطرف الثاني في القيود $B_i$. رأينا هذه الحالة أعلاه.

ت-  على معاملات اسـتهلاك الموارد في القيود $a_{ij}$، وندعوها أحياناً المعاملات التكنولوجية Technological Coefficients وعادةً ما تكون تقديراتها مقبولة وقريبة من الواقع.

الحالة الأولى أي تأثير تعديلات طفيفة على معاملات متغيرات القرار في تابع الهدف $c_j$ هي الأكثر أهميةً، لكنها ليست بالسهولة التي يُظهرها الشكل الخطي للتابع، فالمعيار الحاسم الذي يجب أن يبقى في الذهن أن يبقى الحل أمثلياً في حال إجراء التعديلات:

- إذا كان التعديل على معامل واحد، فالأمر بسيط، يكفي دراسـة المشـتق الأول لهذا التابع بالنسبة للمتغير المعني وهو قيمة المعامل.

- إذا كان التعديل يمس أكثر من متغير، فمن الضروري اللجوء إلى المشتقات الجزئية والمشتقات الضمنية للمتغيرات التي جرى عليها التعديل. حيث يُمكن أن تُظهر معدلات التعويض بين المعاملات.

هناك عدة خيارات لإنجاز تحليل الحساسية:

- الخيار "الروتيني" دوماً يُمكن اللجوء إليه، بإعادة تطبيق الخوارزمية من جديد على كل تعديل ومقارنة الحلول الناتجة.

- اللجوء إلى البرمجة الخطية البرامترية Parametric Linear Programming، التي تدرس بشكل منهجي التغير على تابع الهدف بدلالة التغيرات في مجموعة من المعاملات، وليست مجال الأملية الحالية.

- أو اللجوء إلى البرمجة الثنائية التي سنتعرض لها في الفصل اللاحق.

## 3-5 تطبيقات على استخدام خوارزمية *Simplex*

**تطبيق (3-1) حل برنامج خطي بيانياً من نمط تعظيم Max**

ليكن لدينا البرنامج الخطي:

$$\begin{aligned} \mathbf{Max}\quad Z &= x + 2y \\ x \quad &\le 5 \\ y &\le 5 \\ x + y &\le 8 \\ x \ge 0 \; &; \; y \ge 0 \end{aligned}$$

والمطلوب: (1) تحديد المنطقة المقبولة بيانياً، وارسم على نفس الشكل منحنيات التابع Z.

(2) تحديد الذرى المقبولة على الشكل وقيم x, y من أجل كل ذروة مقبولة.

(3) تحديد الذرى المقبولة المجاورة لكل ذروة مقبولة.

(4) تحديد الحل الأمثل.

(5) حل البرنامج السابق باستخدام Simplex.

<u>الحل:</u>

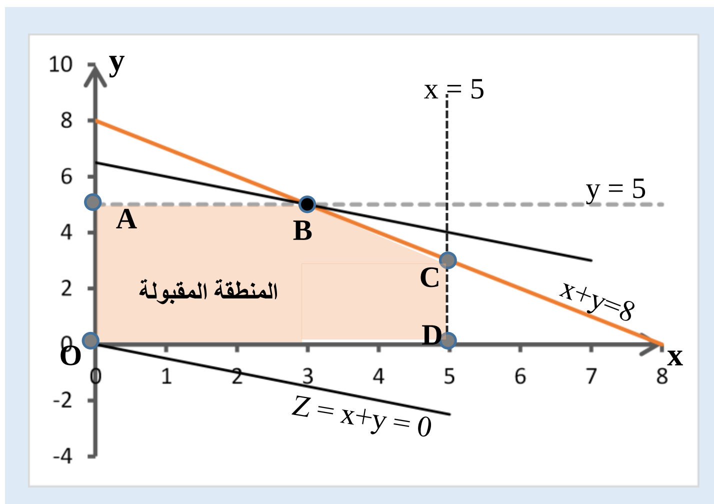
(1) تحديد المنطقة المقبولة بيانياً، ومنحنيات تابع الهدف Z على الشكل (3-6) كما يلي:

رسم جملة إحداثيات oxy، حيث المحور العمودي هو oy والمحور الأفقي ox.

تمثيل القيود على الجملة oxy: وضع كل متراجحة على شكل معادلة، ثم رسم المستقيم الحد الموافق لها.

وتحديد المنطقة المحصورة بين مستقيمات القيود، فتكون هي المنطقة المقبولة.

تمثيل تابع الهدف Z: لنتمكن من تمثيل تابع الهدف Z، يجب كتابة صـيغته على شـكل معادلة من الدرجة الأولى للمتغير y بدلالة x و Z، فنجد: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}Z$. لرسـم المسـتقيم يكفي تحديد نقطة منه وميل المسـتقيم. ميل هذا المسـتقيم يسـاوي 1/2- فتكون الزاوية التي يصـنعها مع المحور الأفقي منفرجة وتسـاوي $153^o$ تقريباً، كما نلاحظ أن قيمة Z=0 عندما x=0, y=0، فيمر هذا المستقيم Z=0 من مبدأ الإحداثيات.




**الشكل (3–6) التمثيل البياني لمسألة التطبيق (1)**

(2) الذرى المقبولة على الشكل وقيم x, y من أجل كل ذروة مقبولة:

الذروة O: نقطة تقاطع حدود قيدي اللاسلبية x = 0 ; y = 0. قيمة **Z=0**.

الذروة A: نقطة تقاطع حدود قيدي اللاسلبية x = 0 و y=5. قيمة **10**=1(0)+2(5)=**Z**.

الذروة B: نقطة تقاطع حدود القيدين x+y=8 و y=5، ⇐ x=3. قيمة **13**=1(3)+2(5)=**Z**.

الذروة C: نقطة تقاطع حدود القيدين x+y=8 و x=5، ⇐ y=3. قيمة **11**=1(5)+2(3)=**Z**.

الذروة D: نقطة تقاطع حدود قيدي اللاسلبية y = 0 و x=5. قيمة **5**=1(5)+2(0)=**Z**.

(3) تحديد الذرى المقبولة المجاورة لكل ذروة مقبولة.

للذروة O: الذروتين A، D. للذروة A: الذروتين O، B.

للذروة B: الذروتين A، C. للذروة C: الذروتين B، D.

للذروة D: الذروتين C، O.

(4) تحديد الحل الأمثل. بعد حساب قيمة Z عند كل من الذرى المقبولة، نجد أن أكبر قيمة للتابع الهدف تساوي Z=13 عند الذروة B، فيكون الحل الأمثل $x^* = 3$، $y^* = 5$، $Z^* = 13$.

(5) الحل باستخدام جداول Simplex

باعتبار أن جميع القيود من نمط "أكبر أو يساوي"، نضيف متغيرات الفرق $S_1$، $S_2$، $S_3$ على القيود الثلاثة على التوالي، فنحصل على الصيغة الموسعة:

$$
\begin{array}{llr}
\textbf{Max} & Z - x - 2y - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 = 0 & [0] \\
 & x + S_1 = 5 & [1] \\
 & y + S_2 = 5 & [2] \\
 & x + y + S_3 = 8 & [3] \\
 & x \geq 0 \;;\; y \geq 0 & [4]
\end{array}
$$

<u>المرحلة (1) البدء (الجدول الأول)</u>

نأخذ متغيرات الفرق كمتغيرات القاعدة: $S_1, S_2, S_3$، فيكون المتغيرين x, y متغيرات غير قاعدية حيث x=y=0، فنحصل على جدول البدء رقم (1) كما يلي:

| **الجدول (1): جدول Simplex الموافق لمرحلة البدء** | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **متغيرات القاعدة** | **رقم المعادلة** | **معاملات المتغيرات** | | | | | | **الطرف الثاني** |
| | | **Z** | **x** | **y** | **$S_1$** | **$S_2$** | **$S_3$** | |
| **Z** | **[0]** | **1** | **-1** | **-2** | **0** | **0** | **0** | **0** |
| **$S_1$** | **[1]** | **0** | **1** | **0** | **1** | **0** | **0** | **5** |
| **$S_2$** | **[2]** | **0** | **0** | **1** | **0** | **1** | **0** | **5** |
| **$S_3$** | **[3]** | **0** | **1** | **1** | **0** | **0** | **1** | **8** |

متغيرات وقيم الحل القاعدي الحالي: $\mathbf{S_1 = 5\ ,\quad S_2 = 5\ ,\quad S_3 = 8}$

متغيرات خارج القاعدة: $x = 0,\ \ y = 0$

قيمة تابع الهدف الحالي: $Z = 0$

المرحلة (2) اختبار الأمثلية Optimality Test: الحل القاعدي الحالي يكون أمثلياً إذا كان جميع المعاملات في سطر Z أكبر أو يساوي الصفر. ما زال سطر Z يحوي معاملات سالبة (في العمودين x و y)، أي أن الحل الحالي غير أمثلي، مما يتطلب الانتقال إلى دورة جديدة للحصول على حل قاعدي جديد، أي تبديل متغير غير قاعدي بآخر قاعدي، وحساب الحل الجديد.

المرحلة (3) الدورة التالية (1) Iteration.

الخطوة (1): تحديد عمود المحور أي المتغير غير القاعدي الجديد الذي سيدخل القاعدة.

المعامل السالب الأكبر بالقيمة المطلقة في سطر Z هو العمود الثاني ويساوي 5-، أي عمود y فيكون هذا العمود هو عمود المحور، والمتغير y سيدخل القاعدة.

الخطوة (2): تحديد المتغير القاعدي الذي ســــيخرج من القاعدة، بتطبيق اختبار المعدل الأدنى للمعاملات الموجبة فقط في عمود المحور.

المعدل الأدنى في سطر المعادلة الثانية [2] الموافق للمتغير $S_2$ هو الأقل، فيكون هو سطر المحور، أي أن المتغير $S_2$ سيخرج من القاعدة، وسيدخل y بدلاً منه.

**الجدول (1): جدول Simplex الموافق لمرحلة البدء**

| **متغير القاعدة** | رقم المعادلة | معاملات المتغيرات | | | | | | **الطرف الثاني** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Z | x | **y** | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | |
| **Z** | [0] | 1 | -1 | **-2** | 0 | 0 | 0 | **0** |
| $S_1$ | [1] | 0 | 1 | **0** | 1 | 0 | 0 | 5 |
| **$S_2$** | **[2]** | **0** | **0** | **1** | **0** | **1** | **0** | **5 (5/1=5)** |
| $S_3$ | [3] | 0 | 1 | **1** | 0 | 0 | 1 | 8 (8/1=8) |

الخطوة (3) إيجاد الحل القاعدي الجديد. تحويل عمود المحور بحيث نحصـــــل على القيمة 1 في خلية المحور (وهي أصـلاً موجودة، بالتالي لا حاجة لأية عملية إضـافية)، وعلى 0 في جميع الخلايا الأخرى من نفس عمود المحور. نجري العمليات الآتية:

- ضرب السطر الجديد للمحور بالقيمة 2 وجمعه لسطر Z المعادلة [0].
- ضرب السطر الجديد للمحور بسالب واحد (-1) وجمعه لسطر المعادلة [3].

فيتشكل لدينا الجدول الجديد للمرحلة التالية:

| الطرف الثاني | معاملات المتغيرات | | | | | | رقم المعادلة | متغير القاعدة |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $S_3$ | $S_2$ | $S_1$ | y | x | Z | | |
| **10** | 0 | 2 | 0 | 0 | -1 | 1 | [0] | **Z** |
| **5** | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | [1] | **$S_1$** |
| **5** | 0 | 1 | 0 | **1** | 0 | 0 | [2] | **y** |
| **3** | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | [3] | **$S_3$** |

**الجدول (2): جدول Simplex الموافق للمرحلة الثانية (الدورة الأولى)**

المرحلة (2–مكرر) اختبار الأمثلية: ما زال سطر Z يحوي معاملات سالبة وهو معامل عمود x ويساوي 1- مما يتطلب الانتقال إلى دورة جديدة للحصول على حل قاعدي جديد.

المرحلة (3–مكرر) الدورة التالية (2) Iteration. نعيد نفس الخطوات على الجدول الجديد رقم (2).

الخطوة (1): عمود المحور، المتغير غير القاعدي الجديد الذي سيدخل القاعدة هو ذو المعامل السالب الأكبر بالقيمة المطلقة ويوافق x، أي x سيدخل القاعدة.

الخطوة (2): تحديد المتغير القاعدي الذي سيخرج من القاعدة، بتطبيق اختبار المعدل الأدنى.

المعدل في سطر المعادلة الأخيرة [3] هو الأقل ويساوي 3، فيكون هو سطر المحور، أي أن المتغير $S_3$ سيخرج من القاعدة، وسيدخل x بدلاً منه.

الخطوة (3) إيجاد الحل القاعدي الجديد. تحويل جميع خلايا عمود المحور x إلى القيمة صفر وواحد 1 في خلية المحور. نجري العمليات الآتية:

- جمع سطر المحور إلى سطر Z.

- ضرب سطر المحور بالعدد 1- وجمعه لسطر المعادلة [1].

فنحصل على الجدول الآتي:

| **الجدول (3): جدول Simplex الموافق للمرحلة الثانية (الدورة الثانية)** | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **متغير القاعدة** | رقم المعادلة | معاملات المتغيرات | | | | | | | **الطرف الثاني** |
| | | Z | **x** | y | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | | |
| **Z** | [0] | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | | **13** (10+3*1) |
| **$S_1$** | [1] | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | -1 | | **2** (5-3*1) |
| **y** | [2] | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | | **5** |
| **x** | [3] | 0 | **1** | 0 | 0 | -1 | 1 | | **3** |

<u>المرحلة (2-مكرر) اختبار الأمثلية.</u> جميع معاملات سطر Z أصبحت أكبر من الصفر، فالحل الحالي هو الحل الأمثل، وهو نفس الحل الذي حصلنا عليه بيانياً:

| **متغيرات القاعدة:** | **متغيرات خارج القاعدة:** | **تابع الهدف:** |
|---|---|---|
| $\mathbf{x^* = 3}$ | $\mathbf{S_2 = 0}$ | $\mathbf{Z^* = 13}$ |
| $\mathbf{y^* = 5}$ | $\mathbf{S_3 = 0}$ | |
| $\mathbf{S_1 = 2}$ | | |

**تطبيق (3-2) حل برنامج خطي بيانياً من نمط تقليل Min**

ليكن لدينا البرنامج الخطي:

$$\mathbf{Min \quad Z = 2x + 5y}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x + 4y} &\geq \mathbf{37} \\ \mathbf{2x + 3y} &\geq \mathbf{59} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{15} \\ \mathbf{x \geq 0} \;&;\; \mathbf{y \geq 0} \end{aligned}$$

والمطلوب: (1) تحديد المنطقة المقبولة بيانياً، وارسم على نفس الشكل منحنيات التابع Z.

(2) تحديد الذرى المقبولة على الشكل وقيم x, y من أجل كل ذروة مقبولة.

(3) تحديد الذرى المقبولة المجاورة لكل ذروة مقبولة.

(4) تحديد الحل الأمثل بيانياً.

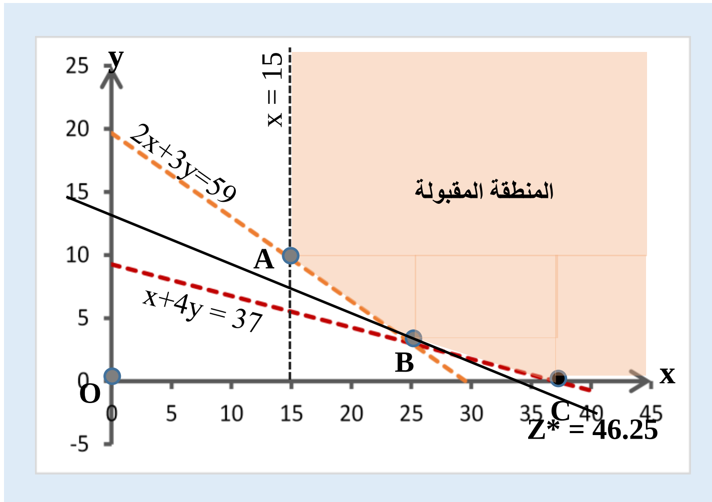
الحل:

(1) تحديد المنطقة المقبولة بيانياً، ومنحنيات تابع الهدف Z على الشكل (3−7) كما يلي:

رسم جملة إحداثيات oxy، حيث المحور العمودي هو oy والمحور الأفقي ox.

تمثيل القيود على الجملة oxy: وضع كل متراجحة على شكل معادلة، ثم رسم المستقيم الموافق لها. وتحديد المنطقة المحصورة بين مستقيمات القيود، فتكون هي المنطقة المقبولة،.

تمثيل تابع الهدف Z: صــيغة تابع الهدف على شــكل معادلة من الدرجة الأولى للمتغير y بدلالة x و Z، فنجد: $y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}Z$. ميل هذا المســتقيم يســاوي 2/5- فتكون الزاوية التي يصــنعها مع المحور الأفقي منفرجة وتســاوي $158^o$ تقريباً، كما نلاحظ أن قيمة Z=0 عندما x=0, y=0، فيمر هذا المســتقيم Z=0 من مبدأ الإحداثيات.




**الشكل (3–7) التمثيل البياني للتطبيق (2) حالة Min**

(2) الذرى المقبولة على الشكل وقيم x, y من أجل كل ذروة مقبولة:

الذروة A: نقطة تقاطع حدود القيدين x=15 و 2x+3y=59، ⇐ x=29/3.

قيمة تابع الهدف: **Z(A)** = 2(15) + 5(29/3) = **235/3 ≈ 78.33**.

الذروة B: نقطة تقاطع حدود القيدين x+4y=37 و 2x+3y=59، ⇐ x=25، y=3.

قيمة تابع الهدف: **Z(B)** = 2(25) + 5(3) = **65**.

الذروة C: نقطة تقاطع حدود القيدين y=0 و x+4y=37، ⇐ x=37.

قيمة تابع الهدف: **Z(C)** = 2(0) + 5(37/4) = **74**.

(3) تحديد الذرى المقبولة المجاورة لكل ذروة مقبولة.

للذروة A: الذروة B.

للذروة B: الذروتين A، C.

للذروة C: الذروة B.

(4) تحديد الحل الأمثل. حساب قيمة Z عند كل من الذرى المقبولة.

أصغر قيمة للتابع الهدف تساوي Z=65 عند الذروة B،

فيكون هو الحل الأمثل $x^* = 25$، $y^* = 3$، $Z^* = 65$.

**تطبيق (3−3) حل برنامج خطي بيانياً من نمط تقليل Min**

ليكن لدينا البرنامج الخطي:

$$\begin{array}{lr} \textbf{Min}\quad Z = x - 2y & [0] \\ x + y \geq 2 & [1] \\ -x + y \geq 1 & [2] \\ y \leq 3 & [3] \\ x \geq 0 \;;\; y \geq 0 & [4] \end{array}$$

الحل:

باعتبار أن القيدين الأول والثاني من نمط "أكبر أو يســاوي"، نطرح متغيرات الفرق $S_1$، $S_2$ من الطرف الأول، ثم نضيف متغيرات اصطناعية $A_1$، $A_2$ على المعادلتين الناتجتين.

القيد الثالث من نمط "أصغر أو يساوي"، نضيف متغير الفرق $S_3$ إلى الطرف الأول فقط.

كذلك نُدخل مقدار جزائي كبير جداً M كمعاملات للمتغيرات الاصطناعية في صيغة تابع الهدف.

نحصل على الصيغة الموسعة:

$$
\begin{array}{llr}
\textbf{Min} & \mathbf{Z - x + 2y - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 - M.A_1 - M.A_2 = 0} & \mathbf{[0]} \\
& \mathbf{x + y + S_1 + A_1 = 2} & \mathbf{[1]} \\
& \mathbf{-x + y + S_2 + A_2 = 1} & \mathbf{[2]} \\
& \mathbf{y + S_3 = 3} & \mathbf{[3]} \\
& \mathbf{x \geq 0 \ ; \ y \geq 0} & \mathbf{[4]}
\end{array}
$$

أصــبح لدينا شـكلاً قياسـياً للبرنامج الخطي، بمتغيرات فرق $S_1, S_2, S_3$ وبمتغيرين صــناعيين $A_1, A_2$ يعاملان معاملة متغيرات الفرق. ما زلنا بحاجة إلى معرفة القاعدة ومتغيراتها.

لدينا 7 متغيرات، وثلاثة معادلات. أي هناك 4 متغيرات حرة يُمكن إعطائها القيم 0، ولتكن $x, y, S_1, S_2$ جميعها تساوي الصفر، يبقى لدينا ثلاثة متغيرات لا تساوي الصفر تمثل متغيرات القاعدة للبدء: $A_1 = 2,\ A_2 = 1,\ S_3 = 3$، نجد أن قيمة تابع الهدف لا تساوي الصفر:

$$Z = -(0) - 2(0) + 0(0) + 0(0) + 0(3) + M.(2) + M.(1) = 3M$$

لكن هذا الحل ليس بالشكل القياسـي (يجب أن تكون جميع معاملات متغيرات القاعدة تساوي الصفر في معادلة تابع الهدف)، ما زالت معاملات المتغيرين الاصطناعيين في معادلة تابع الهدف Z غير معدومةً.

لحذف $A_1$، $A_2$ من المعادلة [0]، نجري بعض العمليات الأســاســية/الأولية على المعادلات(6). في هذه الحالة يكفي ضــرب كل من المعادلتين [1] و [2] بالمقدار M، وجمعهما (بعد الضــرب) إلى المعادلة [0]، فنحصــل على سطر Z الجديد أي المعادلة [0] الجديدة:

$$
\begin{array}{lr}
Z - x + 2y - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 - M.A_1 - M.A_2 = 0 & [0] \\
+ M( x + y + S_1 + A_1 ) = 2 & [1] \\
+ M(- x + y + S_2 + A_2 ) = 1 & [2] \\
\hline
\mathbf{Z - x + (2M + 2)y + M.S_1 + MS_2 = 3M} & \textbf{[0 الجديدة]}
\end{array}
$$

نلاحظ أن المتغيرين الاصــطناعيين $A_1$، $A_2$ قد تم حذفهما من المعادلة [0]. أصــبحت صــيغة تابع الهدف Z

6. للتذكير، يُمكن دوماً تمثيل جملة معادلات خطية على شكل مصفوفات، وهذه العمليات ليست إلا عمليات أولية على أسطر المصفوفة.

للمتغيرات غير القاعدية $x, y, S_1, S_2$ فقط:

$$Z = x - (2M + 2)y - M.S_1 - MS_2 + 3M \qquad [0]$$

يُمكن من هذه الصــيغة معرفة أي من المتغيرات ســيدخل في القاعدة أولاً، حيث معيار الدخول أن يكون معامله في تابع الهدف هو الأكبر، أي حيث تكون الزيادة في التابع هي الأكبر(7).

فيكون لدينا متغيرات القاعدة للبدء: $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $S_3=3$

والمتغيرات خارج القاعدة: $S_2 = 0$, $S_1 = 0$, $y = 0$, $x = 0$

وقيمة الحل الحالي (تابع الهدف): $Z = 3M$

يُمكن إذاً تشكيل الجدول الأول للبدء حسب Simplex:

**الجدول (1): جدول Simplex الموافق لمرحلة البدء**

| متغير القاعدة | رقم المعادلة | معاملات المتغيرات | | | | | | | | الطرف الثاني |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Z | x | y | $S_1$ | $S_2$ | $A_1$ | $A_2$ | $S_3$ | |
| **Z** | [0] | 1 | 1 | -(2M+2) | -M | -M | **0** | **0** | **0** | 3M |
| **$A_1$** | [1] | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | **1** | **0** | **0** | 2 |
| **$A_2$** | [2] | 0 | -1 | 1 | 0 | 1 | **0** | **1** | **0** | 1 |
| **$S_3$** | [3] | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | **0** | **0** | **1** | 3 |

بمقارنة معاملات المتغيرات في ســـطر تابع الهدف Z (الســـطر [0])، نجد أن معامل المتغير x هو الأكبر، المقادير الأخرى سالبة لوجود المقدار الكبير M-. إذاً المتغير x هو الذي سيدخل القاعدة.

لمعرفة أي متغير سـيخرج من القاعدة، نجري حسـابات المعدل الأدنى للقيم الموجبة فقط في عمود x، أي تقسـيم

---

[7]. في حال كان اتجاه التأويج من نمط تعظيم Max، نأخذ المعامل السالب الأكبر بالقيمة المطلقة.

الطرف الثاني على عمود المحور (عمود y)، ونأخذ المتغير القاعدي المقابل للأدنى منها:

| | | X | المعدل الأدنى |
|---|---|---|---|
| **$A_1$** | [1] | 1 | 2/1 = 2 |
| **$A_2$** | [2] | -1 | |
| **$S_3$** | [3] | 0 | |

إذاً المتغير الذي سيخرج من القاعدة هو $A_1$، وسيدخل x مكانه.

ويكون عنصر المحور هو خلية التقاطع بين عمود x وسطر $A_1$.

ننتقل إلى الدورة الأولى Iteration (1)، ونجري بعض العمليات الأساسية على المصفوفة بحيث نحصل على القيمة 1 في خلية المحور (أصلاً تساوي 1) وصفر في باقي عناصر العمود كما يلي:

- نضرب سطر المحور بسالب واحد (-1) ونجمعه إلى سطر Z أي المعادلة [0].
- نجمع سطر المحور إلى سطر $A_2$ أي المعادلة [1].

فنحصل على جدول الدورة الجديدة كما يلي:

**الجدول (2): جدول Simplex الموافق للمرحلة الأولى Iteration (1)**

| **متغير القاعدة** | رقم المعادلة | معاملات المتغيرات | | | | | | | | **الطرف الثاني** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Z | **x** | y | $S_1$ | $S_2$ | $A_1$ | $A_2$ | $S_3$ | |
| **Z** | [0] | 1 | **0** | 2M-3 | -M-1 | -M | -1 | 0 | 0 | 3M-2 |
| **x** | **[1]** | **0** | **1** | **1** | **0** | **0** | **1** | **0** | **0** | **2** |
| **$A_2$** | [2] | 0 | **0** | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 3 |
| **$S_3$** | [3] | 0 | **0** | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 |

نعيد نفس الخطوات على الجدول الجديد (2):

ما زال هناك معاملات سـالبة في سـطر Z. بمقارنة معاملات المتغيرات في سـطر Z، نجد المعامل الأكبر هو (2M-3) ويقابل المتغير y. إذاً المتغير y هو الذي سيدخل القاعدة.

لمعرفة أي متغير سيخرج من القاعدة، نحسب المعدل الأدنى المقابلة للقيم الموجبة فقط في عمود y:

| المعدل الأدنى | y | | |
|---|---|---|---|
| 2/1 = 2 | 1 | [1] | **x** |
| 3/2 = 1.5 | 2 | [2] | **$A_2$** |
| 3/1 = 3 | 1 | [3] | **$S_3$** |

إذاً المتغير الذي سـيخرج من القاعدة هو $A_2$، وسـيدخل y مكانه. ويكون عنصـر المحور هو خلية التقاطع بين عمود y وسطر $A_2$.

ننتقل إلى الدورة الثانية، ونجري بعض العمليات الأساسية على المصفوفة بحيث نحصل على القيمة 1 في خلية المحور وصفر في باقي عناصر العمود كما يلي:

- تقسيم جميع عناصر سطر المحور على المقدار 2.
- ضرب سطر المحور بعد التقسيم بالمقدار (2M-3)- وجمعه إلى سطر Z (المعادلة [0]).
- طرح سطر المحور من سطر x (المعادلة [1]).
- طرح سطر المحور من سطر $S_3$ (المعادلة [3]).

فنحصل على جدول الدورة الثانية كما يلي:

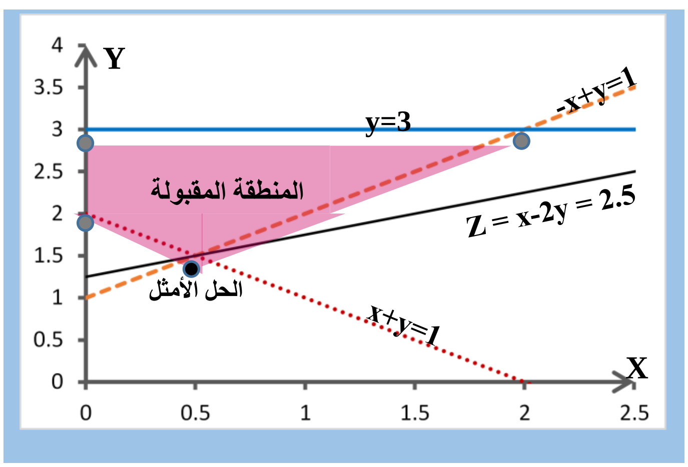
| متغير القاعدة | رقم المعادلة | معاملات المتغيرات | | | | | | | | الطرف الثاني |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Z | x | y | $S_1$ | $S_2$ | $A_1$ | $A_2$ | $S_3$ | |
| **Z** | [0] | 1 | 0 | **0** | -2M-5/2 | -2M-3/2 | -M-5/2 | -M-3/2 | 0 | **5/2** |
| **x** | [1] | 0 | **1** | **0** | 1/2 | -1/2 | 1/2 | -1/2 | 0 | **1/2** |
| **y** | **[2]** | **0** | **0** | **1** | **1/2** | **1/2** | **1/2** | **1/2** | **0** | **3/2** |
| **$S_3$** | [3] | 0 | 0 | **0** | -1/2 | -1/2 | -1/2 | -1/2 | 1 | **3/2** |

**الجدول (3): جدول Simplex الموافق للمرحلة الأولى Iteration (2)**

جميع المعاملات في سطر Z أصبحت سالبة أو صفر، فالحل الحالي هو الحل الأمثل:

| تابع الهدف | متغيرات خارج القاعدة | متغيرات القاعدة |
|---|---|---|
| **Z = 5/2** | **$S_1 = 0$**<br>**$S_2 = 0$**<br>**$A_1 = 0$**<br>**$A_2 = 0$** | **x = 1/2**<br>**y = 3/2**<br>**$S_3 = 3/2$** |

الحل البياني لهذا التطبيق:




**الشكل (3–8) الحل البياني للتطبيق (3) من نمط Min**

# اختبارات وأسئلة الفصل الثالث Tests

## 1) أسئلة صح / خطأ True/False

| | السؤال | صح | خطأ |
|---|---|---|---|
| 1 | يُقصد بذروة Corner Point نقطة التقاطع بين حدود قيدين اثنين على الأقل. | √ | |
| 2 | ندعو ذروتين مقبولتين بأنهما متجاورتين Adjacents إحداهما للأخرى إذا وقعتا على نفس القطعة المستقيمة لأحد حدود قيود المنطقة المقبولة. | √ | |
| 3 | تبحث البرمجة الرياضية في إيجاد أية قيمة لتابع هدف محدد. | | √ |
| 4 | في البرمجة الخطية، يتم التحرك من ذروة إلى أخرى إذا تحسن تابع الهدف Z. | √ | |
| 5 | في البرمجة الرياضية، لا فرق بين الأهداف والقيود. | | √ |
| 6 | يُقصد بعملية التأويج Optimization البحث عن القيمة المثلى لتابع بعدة متحولات تحت قيود محددة. | √ | |
| 7 | تعتبر البرمجة الرياضية والأمثلة جزء من نماذج البرمجة الخطية. | | √ |
| 8 | يمكن التعبير عن أية مشكلة اقتصادية ببرنامج خطي بسيط. | | √ |
| 9 | تُدعى متغيرات المسألة التي يجب إيجاد قيم لها بمتغيرات القرار. | √ | |
| 10 | كل مسألة برمجة خطية بسيطة من متغيرين اثنين فقط، يمكن تمثيلها وحلها بيانياً. | √ | |
| 11 | تُحدد مجموعة القيود منطقة الحلول القابلة للتنفيذ. | √ | |
| 12 | تشكل القيود في فضاء المتغيرات دوماً مضلعاً محدباً. | | √ |
| 13 | في حال كانت منطقة القيود مضلعاً محدباً، نبحث عن الحل الأمثل في نقاط الذرى. | √ | |
| 14 | تُضاف المتغيرات الاصطناعية و متغيرات الفرق إلى طرفي متراجحات القيود. | | √ |
| 15 | لا فرق أبداً بين المتغيرات الاصطناعية ومتغيرات الفرق والمتغيرات الإضافية. | | √ |
| 16 | نستخدم طريقة Simplex للبحث عن الحل الأمثل في حال كان تابع الهدف من نمط تعظيم فقط Max. | | √ |
| 17 | يتم تكرار دورات البحث عن الحل في طريقة Simplex طالما أن قيم تابع الهدف تتحسن. | √ | |
| 18 | تفترض طريقة Simplex أن جميع المتغيرات مستقلة. | √ | |
| 19 | يُقصد بالصيغة الموسعة في البرمجة الخطية، صياغة البرنامج الخطية على شكل معادلات. | √ | |
| 20 | يُعطي تطبيق طريقة Simplex دوماً حلاً وحيداً لأي برنامج خطي. | | √ |

## 2) أسئلة خيارات متعددة Multiple Choices

1- لدينا القيد الآتي $5x + 20 > x + 100$، فإن منطقة تحقق القيد هي:

أ) $x > 20$
ب) $x = 20$
ج) $x < 20$
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

2- من أجل أي برنامج خطي لدي على الأقل حل أمثل واحد، يُقصد باختبار الأمثلية ما يلي:

أ) إذا كان لا يوجد لذروة مقبولة أية ذروة مقبولة مجاورة لها أفضل منها، تكون هذه الذروة هي الحل الأمثل.
ب) إذا كان لا يوجد لذروة أية ذروة مجاورة لها، تكون الذروة المجاورة هي الحل الأمثل.
أ) إذا كان لا يوجد أية ذروة مقبولة، يكون الحل الأمثل يساوي الصفر.
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

3- من أهم مبادئ عمل خوارزمية Simplex في البرمجة الخطية ما يلي:

أ) البحث ضمن الذرى المقبولة.
ب) خوارزمية بحث تكرارية
أ) العمل على نقاط الجوار
د) جميع الأجوبة السابقة صحيحة

4- لدينا القيد الآتي $x \leq 8$ فإن هذا القيد يكافئ:

أ) $x \leq 8$ و $x \geq 0$
ب) $x + S = 8$ و $S \geq 0$
ج) $x - S = 8$ و $S \geq 8$
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

5- في البرمجة الخطية، يُقصد بحل قاعدي Basic Solution ما يلي:

أ) أي نقطة تقاطع بين حدود القيود
ب) جميع المتغيرات تساوي الصفر
ج) أحد حلول الذرى ومتغيرات الفرق
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

6- من أهم خصائص الحل القاعدي Basic Solution، أن يكون عدد متغيرات القاعدة:

أ) يساوي عدد القيود المستقلة
ب) يساوي الصفر
ج) يساوي عدد المتغيرات غير القاعدية
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

7- من أهم خصائص الحل القاعدي Basic Solution، ما يلي:

أ) قيم المتغيرات القاعدية تساوي الصفر
ب) قيم جميع المتغيرات يساوي الصفر
ج) قيم المتغيرات غير القاعدية تساوي الصفر
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

8- نقول عن حل قاعدي Basic Solution أنه مقبول إذا:

أ) كانت المتغيرات القاعدية تساوي الصفر
ب) حققت متغيرات القاعدة شروط اللاسلبية
ج) كانت قيم جميع المتغيرات تساوي الصفر
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

9- يُقصد بالقيود في البرمجة الرياضية Mathematical Programming ما يلي:

أ) محدودية الموارد
ب) التشريعات والأنظمة والقوانين
ج) السيولة والفوائد والمتغيرات المالية
د) جميع الأجوبة السابقة صحيحة

10- يُقصد بإيجاد الحل الأمثل في البرمجة الرياضية البحث عن:

أ) أكبر قيمة للتابع الهدف
ب) أكبر أو أصغر قيمة للتابع الهدف حسب الحالة
ج) أصغر قيمة للتابع الهدف
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

11- نقول عن حلين قاعديين مقبولين أنهما متجاوران إذا كانت جميع المتغيرات:

أ) القاعدية هي نفسها في الحلين عدا متغيراً واحداً
ب) هي متغيرات القاعدة
ج) تساوي الصفر عدا واحداً
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

12- لدينا قيد على السيولة لمنتجين كما يلي $3x_1 + 4x_2 > 100$، فإن القيم الآتية تحقق هذا القيد:

أ) $x_1 = 10,\ x_2 = 10$
ب) $x_1 = 10,\ x_2 = 20$
ج) $x_1 = 0,\ x_2 = 25$
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

13- لدينا القيدين الآتيين على موارد منتجين $3x_1 + 4x_2 > 100$، $x_2 > 40$، فإنه يكون لدينا:

أ) القيد الأول محقق مهما كانت قيم $x_1$
ب) القيدان محققان دوماً
ج) القيد الأول غير محقق دوماً
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

14- حل البرنامج الخطي يعني إيجاد مجموعة قيم المتغيرات بحيث:

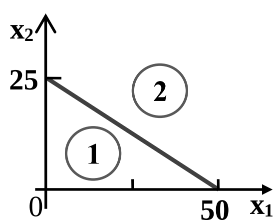
أ) تتحق القيود الصفرية
ب) تتحقق جميع القيود
ج) تكون القيود المحققة قابلة للتطبيق
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

15- الحل الأمثل البرنامج الخطي يعني إيجاد مجموعة قيم المتغيرات بحيث:

أ) تتحق جميع القيود ويأخذ تابع الهدف أفضل قيمة
ب) تتحقق جميع القيود فقط
ج) يأخذ التابع أفضل قيمة بغض النظر عن القيود
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

16- لدينا قيد السيولة لمنتجين $2x_1 + 4x_2 \geq 100$، فإن المنطقة على الشكل المقابل التي تحقق هذا القيد هي:

أ) المنطقة (1)
ب) المنطقة (2)
ج) الخط الأسود الفاصل بين المنطقتين فقط
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة




17- لدى تمثيل مجموعة القيود على مستوي، فإن المنطقة المحصورة بين القيود تُدعى:

أ) منطقة تابع الهدف
ب) المنطقة الفارغة
ج) منطقة الحلول المقبولة
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

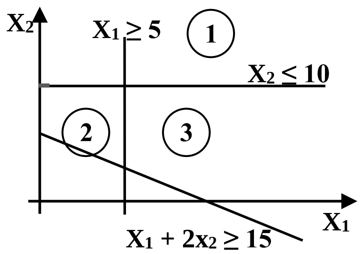
18- في مسألة البرمجة الخطية، ما ندعوه بمتغيرات الفرق Slack Variables ما يلي:

أ) الفرق بين كل متراجحتين للقيود
ب) الفرق عن الحل الأمثل
ج) الفرق بين طرفي متراجحات القيود
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

19- في خوارزمية Simplex، يتم تحديد المحور Pivot:

أ) تقاطع المتغيرين الداخل والخارج من وإلى القاعدة
ب) متوسط قيم عمود تابع الهدف
ج) نقطة تقاطع جميع القيود
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

20- منطقة الحلول المقبولة في الشكل المقابل هي:
أ) المنطقة (1)
ب) المنطقة (2)
ج) المنطقة (3)
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة




## 3) أسئلة \ قضايا للمناقشة

**السؤال (1) مفهوم البرمجة الرياضية وتطبيقاتها.**

1. ما هو المقصود بمصطلح البرمجة الرياضية، وما هي عناصر مسألة البرمجة الرياضية؟
2. ما هي أهم فئات البرمجة الرياضية، موضحاً موقع البرمجة الخطية فيها؟
3. اذكر بعض تطبيقات البرمجة الرياضية.

**{ مدة الإجابة التقديرية: 15 دقيقة. الدرجة التقريبية: 100/15 درجة }**

**السؤال (2) ملاحظات حول طريقة Simplex.**

ما أهم الملاحظات على عمل طريقة السيمبلكس Simplex لحل برنامج خطي؟

**{ مدة الإجابة التقديرية: 8 دقيقة. الدرجة التقريبية: 100/8 درجة }**

**السؤال (3) بعض الحالات الخاصة في البرمجة الرياضية.**

بين بالرسم الحالات الخاصة الآتية التي تؤدي إلى مشكلات في البرنامج الخطي:

5. حالة عدم وجود سقوف للقيود Unsoundness.
6. حالة عدم وجود حل Infeasible Region.
7. تكرار القيود Redundancy.
8. وجود عدة حلول مثلى Alternate Optimal Solutions.

**{ مدة الإجابة التقديرية: 20 دقيقة. الدرجة التقريبية: 100/20 درجة }**

**السؤال (4) حل برنامج خطي بسيط Max بيانياً.**

لدينا البرنامج الخطي البسيط الآتي والمطلوب حله بيانياً.

$$\text{Max } \{ Z = 5 x_1 + 3 x_2 \}$$

تحت القيود:

$$6 x_1 + 4 x_2 \le 30$$
$$x_1 + 2 x_2 \le 8$$
$$- x_1 + x_2 \le 2$$
$$x_1 \; ; \; x_2 \ge 0$$

**{ مدة الإجابة التقديرية: 15 دقيقة. الدرجة التقريبية: 100/15 درجة }**

**السؤال (5) حل برنامج خطي بسيط Max باستخدام Simplex.**

لدينا البرنامج الخطي البسيط في السؤال السابق (4) والمطلوب حله باستخدام خوارزمية Simplex.

**{ مدة الإجابة التقديرية: 15 دقيقة. الدرجة التقريبية: 100/15 درجة }**

**السؤال (6) حل برنامج خطي بسيط Min بيانياً.**

لدينا البرنامج الخطي البسيط الآتي، والمطلوب حله بالطريقة البيانية.

$$\text{Min } \{ Z = 3 x_1 + 7 x_2 \}$$

تحت القيود:

$$x_1 + x_2 \ge 80$$
$$8x_1 - 2x_2 \ge 30$$
$$- x_1 - x_2 \ge 60$$
$$x_1 \; ; \; x_2 \ge 0$$

**{ مدة الإجابة التقديرية: 15 دقيقة. الدرجة التقريبية: 100/15 درجة }**

**السؤال (7) حل برنامج خطي بسيط Min باستخدام Simplex.**

لدينا البرنامج الخطي البسيط في السؤال السابق (6) والمطلوب حله باستخدام خوارزمية Simplex.

**{ مدة الإجابة التقديرية: 15 دقيقة. الدرجة التقريبية: 100/15 درجة }**

**<u>السؤال (8) صياغة وحل مسألة برمجة خطية.</u>**

تصنع إحدى الشركات وتبيع منتجين اثنين A، B. يمر المنتجان بثلاث عمليات. تعمل يومياً 10 ساعات (600 دقيقة). يبين الجدول الآتي الزمن الذي تحتاجه كل قطعة من المنتجين في العمليات الثلاثة، وربح القطعة الواحدة. وترغب الشركة بتعظيم أرباحها من المنتجين.

| | العملية الأولى | العملية الثانية | العملية الثالثة | ربح القطعة |
|---|---|---|---|---|
| المنتج الأول A | 10 | 4 | 9 | 5 $ |
| المنتج الثاني B | 7 | 16 | 12 | 11 $ |

والمطلوب: (أ) صياغة المشكلة على شكل برنامج خطي.

(ب) إيجاد قيمة الربح الأعظمي بالطريقة البيانية.

**{ مدة الإجابة التقديرية: 20 دقيقة. الدرجة التقريبية: 100/20 درجة }**

**<u>السؤال (9) صياغة وحل مسألة برمجة خطية بطريقة Simplex.</u>**

لتكن نفس المشكلة السابقة في السؤال (6). والمطلوب صياغتها وحلها باستخدام طريقة Simplex.

**{ مدة الإجابة التقديرية: 25 دقيقة. الدرجة التقريبية: 100/20 درجة }**

# الفصل الرابع: البرمجة الخطية الثنائية

# Chapter (4): Duality in Linear Programming

**كلمات مفتاحية:**

برنامج ثنائي Dual Program، نظرية الثنائية Duality Theorem، متغيرات ثنائية Dual Variables، قيود ثنائية Dual Constraints. التفســير الاقتصــــادي للمتغيرات الثنائية Dual Variables Interpretation. التفسير الاقتصادي للقيود الثنائية Dual Constraints Interpretation.

**ملخص الفصل:**

في حيث العديد من الحالات، يكون البرنامج الخطي معقداً، لذلك أتت البرمجة الخطية الثنائية لتساعد في حل هذه المعضـــلة. نبدأ بمفاهيم عامة عن مكونات وخصـــائص البرنامج الثنائي لنخلص بأنه برنامج خطي آخر لنفس المشكلة، كما نورد في سياق الفقرات أنه لا فرق بين حل البرنامجي الأصلي أو الثنائي. نستعرض أيضاً مبادئ وقواعد التحويل بين البرنامجين، وكيفية اســتخلاص قيم متغيرات أحدها بدلالة الآخر. كما ســنســتخدم مفاهيم وأدوات بســيطة من نظرية المصــفوفات للتعامل مع البرنامجين الأصــلي والثنائي. وأخيراً نتعرض إلى التفســير الاقتصــادي للمتغيرات والقيود الثنائية، ونختم ببعض التطبيقات الشــاملة التي توضــح العلاقات بين مكونات البرنامجين.

**المخرجات والأهداف التعليمية:**

1. يتذكر الطالب مفهوم البرنامج الثنائي.
2. يتمكن الطالب من صياغة البرنامج الثنائي من البرنامج الأصلي.
3. يتمكن من حساب قيم مكونات البرنامج الثنائي من قيم مكونات البرنامج الأصلي.
4. يتذكر التفسير الاقنصادي للمتغيرات الثنائية.
5. يتذكر التفسير الاقتصادي للقيود الثنائية.

**مخطط الفصل:**

4-1 مفهوم وخصائص البرنامج الخطي الثنائي.

4-2 صياغة البرنامج الثنائي.

4-3 العلاقة بين البرنامجين الأصلي والثنائي.

4-4 تفسير المعنى الاقتصادي للنموذج الثنائي.

4-5 تطبيقات على البرنامجين الأصلي والثنائي.

## 4-1 مفهوم وخصائص البرنامج الخطي الثنائي

أحد أهم التطويرات للبرمجة الخطية هو مفهوم الثنائية وتطبيقاتها المتنوعة. كل برنامج خطي (البرنامج الأصلي Primal) مرفق ببرنامج خطي آخر يُدعى البرنامج الثنائي (Dual Program)، يُستخدم البرنامج الثنائي في أحيان كثيرة للتفسير الاقتصادي وتحليل الحساسية.

كل برنامج خطي من الشكل القياسي له برنامج مرافق ندعوه البرنامج الخطي الثنائي، يُعبر الاثنان عن نفس المشكلة. يرتبط كل من البرنامجين ارتباطاً وثيقاً بالحل الأمثل، إيجاد الحل الأمثل لأي منهما يعني إيجاد الحل الأمثل للآخر بشكل روتيني. لن يكون هناك ضرورة للتمييز بين البرنامجين "الأصلي" و"الثنائي"، فقط سنقول البرنامج الأول والبرنامج الآخر، فإذا كان البرنامج الأول هو الأصلي فالآخر هو الثنائي، والعكس صحيح.

من الأفضل التعبير عن البرنامج الخطي على شكل معادلات (الصيغة الموسعة)، تجنباً لاختلاف أشكال القيود (أكبر، أصغر، مساواة)، أو لاختلاف إشارة المتغيرات (سلبية، عدم السلبية)، أو اختلاف إشارات الطرف الثاني (سلبي أو لا سلبي)، أو شكل التابع (تعظيم Max أو تقليل Min). لذلك، يُنصح بوضع البرنامج على الشكل النموذجي تماشياً من جداول Simplex وتسهيلاً لإجراء الحسابات والانتقال من برنامج إلى آخر، أي وضع البرنامج حيث:

- جميع القيود على شكل معادلات.
- الطرف الثاني غير سلبي.
- المتغيرات غير سلبية.

تُلخص نظرية الثنائية Duality Theorem العلاقات بين البرنامجين الأصلي والثنائي كما يلي:

- إذا كان لأحد البرنامجين حلولاً مقبولة وتابع هدف محدود Bounded (أي هناك حل أمثل)، فللبرنامج الآخر أيضاً حلولاً مقبولة (بالتالي له حل أمثل أيضاً).
- إذا كان لأحد البرنامجين حلولاً مقبولة وتابع هدف غير محدود Unbounded (لا يوجد حل أمثل)، فلا يوجد حلولاً مقبولة للبرنامج الآخر أيضاً.
- إذا كان لا يوجد لأحد البرنامجين حلولاً مقبولة، فلا يوجد للبرنامج الآخر حلولاً مقبولة أيضاً أو أن تابع الهدف غير محدود (لا يوجد حل أمثل).

أحد أهم الاستنتاجات العملية لهذه النظرية:

- أنه يُمكن حل البرنامج الثنائي باستخدام Simplex واستخدام الحل الأمثل للبرنامج الثنائي لإيجاد الحل الأمثل للبرنامج الأصلي.
- إذا كان عدد القيود m أكبر من عدد المتغيرات n في البرنامج الأصلي، يكون لدينا كم كبير من الحسابات، ففي البرنامج الثنائي يكون عدد القيود n أقل من عدد المتغيرات m. بالتالي، فإن تطبيق Sumplex على البرنامج الثنائي على الأرجح يخفض كثيراً حجم الحسابات.
- تحليل حساسية عبر الانتقال إلى حلول البرنامج الثنائي والتعديل عليها مباشرةً.
- أهمية المتغيرات والقيود الثنائية في التفسير الاقتصادي.

يستخدم البرنامج الثنائي نفس معاملات البرنامج الأصلي، لكن بمواضع مختلفة من الصيغ. إذاً، ليست إلا إعادة صياغة للمشكلة بشكل برنامج خطي آخر مختلف عن الأصلي. حيث القيد يمثل على شكل متغير، والطرف الثاني على شكل معاملات تابع هدف.

يُمكن تلخيص قواعد بناء البرنامج الثنائي كما يلي:

| المسألة الأولى: تعظيم Max | | المسألة الثانية: تصغير Min |
|---|---|---|
| **قيود** | | **متغيرات** |
| أكبر أو يساوي $\leq$ | $\Leftrightarrow$ | أصغر أو يساوي $\geq$ |
| أصغر أو يساوي $\geq$ | $\Leftrightarrow$ | أكبر أو يساوي $\leq$ |
| مساواة $=$ | $\Leftrightarrow$ | غير مقيدة |
| **متغيرات** | | **قيود** |
| أصغر أو يساوي $\geq$ | $\Leftrightarrow$ | أكبر أو يساوي $\leq$ |
| أكبر أو يساوي $\leq$ | $\Leftrightarrow$ | أصغر أو يساوي $\geq$ |
| غير مقيدة | $\Leftrightarrow$ | مساواة $=$ |

يبين الجدول أن المسألتين متكافئتين، ولا يوجد مصطلحي برنامج أصلي أو ثنائي، المهم هو اتجاه عملية التأويج/الأمثلية Max أو Min. بمعنى آخر، إذا دُعي أي من البرنامجين بالبرنامج الأصلي، يُدعى الآخر بالبرنامج ثنائي.

## 4-2 صياغة البرنامج الثنائي Dual Program Formulation

ليكن لدينا برنامج خطي من الشكل النموذجي كما يلي:

$$Max/Min\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i = 1,2,\dots,m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\dots,n$$

حيـث $x_j$ هي جميع المتغيرات (متغيرات القرار، متغيرات الفرق، المتغيرات الاصـــطنـاعيـة، المتغيرات الإضافية).

يجري صياغة البرنامج الثنائي باعتماد القواعد الآتية:

(1) تعريف متغير ثنائي من أجل كل قيد (معادلة) في البرنامج الأصلي.

(2) تعريف قيد ثنائي من أجل كل متغير في البرنامج الأصلي.

(3) معاملات أحد المتغيرات في صيغ القيود (عمود) تُصبح معاملات أحد المتغيرات الثنائية في صيغ قيود (عمود) البرنامج الثنائي.

(4) معاملات متغيرات تابع الهدف في البرنامج الأصلي تُصبح معاملات الطرف الثاني في البرنامج الثنائي.

(5) معاملات الطرف الثاني في البرنامج الأصلي تُصبح معاملات متغيرات تابع الهدف في البرنامج الثنائي.

(6) إذا كان تابع الهدف الأصـــلي من نمط تعظيم Max يُصـــبح تابع الهدف الثنائي من نمط تقليل Min، والعكس صحيح: Min يُصبح Max.

(7) لا يوجد قيود مسبقة على الإشارة الجبرية لمتغيرات البرنامج الثنائي (غير مقيدة بسالب أو بموجب).

بتطبيق هذه القواعد، نحصل على الشكل العام للبرنامج الثنائي الموافق للبرنامج الأصلي أعلاه:

$$Min/Max\ \ W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j \qquad j = 1,2, \dots, n$$

$$y_i \geq 0 \qquad i = 1,2, \dots, m$$

يُمثل الجدول الآتي شكل التحويلات بين البرنامج الأصلي والبرنامج الثنائي (وفق الصيغة الموسعة):

**الجدول (4-1) شكل التحويلات بين البرنامجين الأصلي والثنائي**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | **البرنامج الأصلي Max** | | | | | |
| | | | **متغيرات البرنامج الأصلي** | | | | **الطرف الثاني** | |
| | | | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_n$ | | |
| **البرنامج الثنائي Min** | **متغيرات البرنامج الثنائي** | $y_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | … | $a_{1n}$ | $= b_1$ | **معاملات تابع الهدف الثنائي Min** |
| | | $y_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | … | $a_{2n}$ | $= b_2$ | |
| | | . | . | . | . | . | . | |
| | | . | . | . | . | . | . | |
| | | . | . | . | . | . | . | |
| | | $y_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | … | $a_{mn}$ | $= b_m$ | |
| | **الطرف الثاني** | | $= c_1$ | $= c_2$ | … | $= c_n$ | | |
| | | | **معاملات تابع الهدف الأصلي Max** | | | | | |

لتسهيل قراءة الجدول، يُمكن تدوير الصفحة فقط. مثلاً:

- القيد الأول (سطر المعادلة الأولى) في البرنامج الأصلي Max يُكتب بالشكل:

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n = b_1$$

- القيد الأول (عمود المعادلة الأولى) في البرنامج الثنائي Min يُكتب بالشكل:

$$a_{11}\, y_1 + a_{21}\, y_2 + \ldots + a_{m1}\, y_m = c_1$$

مثال (4−1) لنضع البرنامج الثنائي للبرنامج الخطي الآتي:

البرنامج الأصلي Primal:

$$\textbf{Max}\ \ Z = 7x_1 + 15x_2$$
$$x_1 \le 5$$
$$2x_2 \le 20$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 32$$

البرنامج الثنائي Dual:

$$\textbf{Min}\ \ W = 5y_1 + 20y_2 + 32y_3$$
$$y_1 + 3y_3 \ge 7$$
$$2y_2 + 2y_3 \ge 15$$

لنضعها على شكل الجدول أعلاه:

| | | البرنامج الأصلي Max Z | | الطرف الثاني للبرنامج الأصلي |
|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | |
| البرنامج | $y_1$ | 1 | 0 | $\leq 5$ |
| الثنائي | $y_2$ | 0 | 2 | $\leq 20$ |
| Min W | $y_3$ | 3 | 2 | $\leq 32$ |
| الطرف الثاني للبرنامج الثنائي | | $7 \leq$ | $15 \leq$ | |

مثال (2-4) لنضع البرنامج الثنائي للبرنامج الخطي الآتي بعد وضعه بالصيغة الموسعة.

$$\text{Min } Z = 15x_1 + 12x_2$$
$$x_1 + x_2 \geq 3$$
$$2x_1 - 4x_2 \leq 5$$
$$x_1 ; x_2 \geq 0$$

نلاحظ أن القيدين من نمطين مختلفين، من هنا أشرنا أعلاه إلى أنه من الأفضل العمل على الشكل الموسع للبرنامج والشكل القياسي (بعض الحالات قد لاتحتاج إذا كانت جميع القيود نمطية مثلاً أصغر أو يساوي مع تابع هدف Max، أو أكبر أو يساوي مع تابع هدف Min). فيكون الشكل الموسع للبرنامج:

$$\text{Min } Z = 15x_1 + 12x_2 + 0x_3 + 0x_4$$
$$x_1 + x_2 - x_3 + 0x_4 = 3 \qquad [y_1]$$
$$2x_1 - 4x_2 + 0x_3 + x_4 = 5 \qquad [y_2]$$
$$x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 \geq 0$$

فيُصبح الشكل الثنائي:

$$\text{Max } W = 3y_1 + 5y_2$$

$$y_1 + 2y_2 \leq 15 \qquad (1)$$

$$y_1 - 4y_2 \leq 12 \qquad (2)$$
$$-y_1 \qquad \leq 0 \qquad (3)$$
$$y_2 \leq 0 \qquad (4)$$

لدينا 4 قيود بما يساوي عدد متغيرات التابع الأصلي في الشكل الموسع.

حيث أننا لم نفرض مسبقاً على المتغيرات الثنائية $y_1, y_2$ قيود اللاسلبية، فإن القيد الثالث (بعد ضرب طرفي المتراجحة بسالب وتغيير اتجاهها) يُصبح $y_1 \geq 0$. في حين أن القيد الرابع يبقي $y_2$ سالبة (غير مقيدة).

مثال (3−4) لنضع البرنامج الثنائي للبرنامج الخطي الآتي بعد وضعه بالصيغة الموسعة.

$$\textbf{Max } Z = 5x_1 + 6x_2$$
$$x_1 + 2x_2 = 5$$
$$-x_1 + 5x_2 \geq 3$$
$$4x_1 + 7x_2 \leq 8$$
$$x_1 \text{ غير مقيدة } ; x_2 \geq 0$$

نلاحظ أن القيود من عدة أشكال، من الأفضل العمل على الشكل الموسع للبرنامج. باعتبار أن المتغير $x_1$ غير مقيد باللاسلبية (يُمكن أن يأخذ قيماً سالبة أو موجبة)، فيمكن تجزئته إلى متغيرين (أو جزأين سالب وموجب) $x_1^+$ و $x_1^-$ أو $x_1 = x_1^- + x_1^+$، فيصبح البرنامج الموسع:

$$\boldsymbol{Max\ Z = 5x_1^+ - 5x_1^- + 6x_2}$$
$$\boldsymbol{x_1^+ - x_1^- + 2x_2 = 5} \qquad [\boldsymbol{y_1}]$$
$$\boldsymbol{-x_1^+ + x_1^- + 5x_2 - x_3 = 3} \qquad [\boldsymbol{y_2}]$$
$$\boldsymbol{4x_1^+ - 4x_1^- + 7x_2 + x_4 = 8} \qquad [\boldsymbol{y_3}]$$
$$\boldsymbol{x_1^+ ;\ x_1^- ;\ x_2 ;\ x_3 ;\ x_4 \geq 0}$$

فيُصبح الشكل الثنائي: $\text{Min } W = 5y_1 + 3y_2 + 8y_3$

$$
\begin{array}{rlr}
y_1 - y_2 + 4y_3 & \geq 5 & (1) \\
-y_1 + y_2 - 4y_3 & \geq -5 & (2) \\
2y_1 + 5y_2 + 7y_3 & \geq 6 & (3) \\
-y_2 & \geq 0 & (4) \\
y_3 & \geq 0 & (5)
\end{array}
$$

**غير مقيدة** $y_1 ; y_2 ; y_3$

لدينا 5 قيود بما يساوي عدد متغيرات التابع الأصلي في الشكل الموسع.

يُمكن جمع القيدين الأول (1) والثاني (2) في قيد واحد وهو المساواة، بعد ضرب القيد الثاني (المتراجحة) بسالب، يُصبح الطرف الأول نفسه وهو أكبر وأصغر من الطرف الثاني 5 بنفس الوقت، فلا يُمكن إلا أن يكون مساواة: $(y_1 - y_2 + 4y_3 \geq 5)$ و $(y_1 - y_2 + 4y_3 \leq 5)$.

القيد الرابع $-y_2 \geq 0$ بعد ضربه بسالب وتغيير إشارة المتراجحة، يُكتب بالشكل $y_2 \leq 0$.

يُصبح الشكل النهائي للبرنامج الثنائي: $\text{Min } W = 5y_1 + 3y_2 + 8y_3$

$$
\begin{array}{rl}
y_1 - y_2 + 4y_3 & = 5 \\
2y_1 + 5y_2 + 7y_3 & \geq 6 \\
y_2 & \leq 0 \\
y_3 & \geq 0
\end{array}
$$

**غير مقيدة** $y_1 ; y_2 ; y_3$

## 3-4 العلاقة بين البرنامجين الأصلي والثنائي

يؤدي أي تعديل في البرنامج الخطي الأصلي إلى تعديلات في عناصر جداول Simplex للحل الجاري، مما قد يؤثر على الحل الأمثل أو قبول الحل الجاري. رأينا أن جداول Simplex ليست إلا مصفوفات تتمتع ببعض الخصائص المميزة، سنلجأ في هذه الفقرة إلى استخدام مفاهيم وأدوات بسيطة من نظرية المصفوفات كونها تُسهّل الانتقال والتعامل بين ومع البرنامجين وأسهل للتفسير الاقتصادي.

كنا قد رأينا كيفية عمل جداول خوارزمية Simplex. في الحقيقة، ما رأينا على الجداول ليس إلا مصفوفات ومجموعة من العمليات الأولية عليها. مثلاً، كنا نميز بين أعمدة متغيرات القاعدة وأعمدة المتغيرات خارج القاعدة، وكأن جدول/مصفوفة معاملات المتغيرات في صيغ القيود مقسمة إلى جزأين: الأول مصفوفة مربعة حيادية يُمثل مصفوفة متغيرات القاعدة، والثاني يُمثل باقي المتغيرات (متغيرات خارج القاعدة) كما يوضح الشكل العام لجدول البدء:

<table dir="rtl">
<tr><th colspan="5">الشكل العام لجدول البدء</th></tr>
<tr><td></td><td>متغيرات القاعدة $X_S$</td><td>متغيرات خارج القاعدة X</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>=</td><td></td><td></td><td>Z</td><td>سطر التابع Z</td></tr>
<tr><td>=</td><td>مصفوفة القاعدة الحيادية<br>I</td><td>مصفوفة معاملات متغيرات خارج القاعدة<br>A</td><td>متغيرات القاعدة</td><td>أعمدة القيود</td></tr>
</table>

عند أحد الحلول المقبولة، أي في إحدى دورات Simplex ولتكن ذات الرقم i، أجرينا بعض العمليات الحسابية على أسطر وأعمدة المصفوفة/الجدول، مثلاً تصفير جميع عناصر/خلايا أحد الأعمدة باستثناء خلية المحور التي جعلناها تساوي الواحد، تبدو هذه العملية وكأنها تغيير بين أحد متغيرات القاعدة بمتغير آخر من خارج القاعدة،

وتتغير عناصــر جدول البدء أعلاه لتأخذ نفس الشــكل أعلاه لكن بمضــامين مختلفة للمعاملات والمتغيرات، أي لدينا دوماً جزء قاعدي وآخر غير قاعدي، وربما لاحظ البعض في الجداول أن الجزء القاعدي له شـــكل جدول/مصفوفة مربعة:

| جدول الدورة رقم i | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | متغيرات القاعدة $X_S$ | متغيرات خارج القاعدة X | | |
| = | | | **Z** | **سطر التابع Z** |
| = | **مقلوب مصفوفة الحل الحالي رقم i**<br>**T** | **مصفوفة معاملات متغيرات خارج القاعدة**<br>**A'** | متغيرات القاعدة | أعمدة القيود |

جميع هذه العمليات على الجداول ليســت إلا تطبيق لعمليات على المصــفوفات، إذ تســتخدم جداول Simplex بعض العمليات البسيطة على المصفوفات، وبالتحديد:

- جداء شعاع سطر بمصفوفة.
- جداء مصفوفة بشعاع عمود.
- ضرب مصفوفة بعدد ثابت.
- مقلوب مصفوفة.

نذكر بشكل سريع بهذه العمليات.

ليكن لدينا الشعاع السطر X من الرتبة (1 x m): $X = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_m]$

والشعاع العمود B من الرتبة (n x 1): $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ : \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$

والمصفوفة A من الرتبة (m x n): $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

<u>جداء الشعاع السطر X بالمصفوفة A</u>: هو شعاع سطر C من الرتبة (1 x n): X.A = C،

$$X.A = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_m] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n]$$

حيث كل عنصر في العمود j يساوي $c_j = \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij}$، من أجل جميع الأعمدة j=1, 2, …, n.

<u>جداء المصفوفة A بالشعاع العمود B</u>: A.B = D، هو شعاع عمود D من الرتبة (mx1)، حيث كل عنصر في السطر رقم i يساوي هو $D_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_j$، من أجل جميع الأسطر i = 1, 2, …, m.

$$A.B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ . \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ . \\ D_m \end{bmatrix}$$

<u>جداء المصـــفوفة A بالعدد الثابت α</u>: هو مصـــفوفة 'A من نفس رتبة A: A' = α A، حيث كل عنصـــر من عناصرها مضروباً بالثابت: $a'_{ij} = \alpha\, a_{ij}$.

$$A' = \propto A = \begin{bmatrix} \propto a_{11} & \propto a_{12} & \dots & \propto a_{1n} \\ \propto a_{21} & \propto a_{22} & \cdots & \propto a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \propto a_{m1} & \propto a_{m2} & \dots & \propto a_{mn} \end{bmatrix}$$

نذكر أيضاً بالمصفوفة المربعة الحيادية I من الرتبة (n x n) حيث جميع عناصرها تساوي الصفر عدا عناصر القطر الرئيسي تساوي الواحد:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

<u>مقلوب مصفوفة مربعة A من الرتبة n</u> هو مصفوفة مربعة من نفس الرتبة $A^{-1}$ حيث: $A.A^{-1} = I$. قد يكون من المفيد التذكير بها، رغم عدم الحاجة المباشرة لحسابها في هذه الفصل.

- محدد Determinant مصفوفة مربعة A من الرتبة n بأنه حاصل جمع جداءات كل عنصر من سطر واحد محدد (أو عمود واحد محدد) مضروباً بمرافق هذا العنصر:

عبر سطر ما وليكن i: $Det(A) = |A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.A_{ik}$

أو عبر عمود ما وليكن j: $Det(A) = |A| = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.A_{kj}$

- مرافق العنصر $a_{ij}$ هو **محدد** المصفوفة الجزئية من الرتبة (n-1)(n-1) المشكلة من المصفوفة A بعد حذف السطر i، والعمود j، ومسبوقاً بإشارة المقدار $(-1)^{i+j}$، ونرمز له بالشكل $A_{ij}$:

$$A_{ij} = (-1)^{ij}|M_{ij}|$$

- مقلوب مصفوفة هو جداء منقول مصفوفة المرافقات $[A_{ij}]^T$ بمقلوب محدد المصفوفة $|A|$:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A_{adj}$$

من الواضح أنه لا يُمكن إيجاد مقلوب مصفوفة إذا كان محددها يساوي الصفر.

يُمكن كتابة البرنامج الخطي Max(Z) من n متغير و m قيد (حيث m>n) على شكل مصفوفات بعد تعريف عناصره كما يلي:

- تُعرّف متغيرات القرار على شكل شعاع عمود X من الرتبة (n x 1): $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$

- تُعرف معاملات المتغيرات في تابع الهدف على شكل شعاع سطر C من الرتبة (1 x n):

$$C = [c_1 \quad c_c \quad \cdots \quad c_n]$$

- تُعرّف معاملات المتغيرات في معادلات القيود على شكل مصفوفة A من الرتبة (m x n):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- يُعرّف الطرف الثاني على شكل شعاع عمود B من الرتبة (1 x n):

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- تُعرّف متغيرات الفرق والإضافية والاصطناعية على شكل شعاع عمود $X_S$ من الرتبة (n+m x 1):

$$X_S = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \cdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix}$$

فتصبح صيغة المعادلة المصفوفية لجميع القيود وقيود اللاسلبية كما يلي:

$$[A \quad I]\begin{bmatrix} X \\ X_S \end{bmatrix} = B$$

$$\begin{bmatrix} X \\ X_S \end{bmatrix} \geq [0]$$

حيث I هي المصفوفة الحيادية من الرتبة (m x m).

و [0] هو شعاع العمود الصفري من الرتبة (m+n x 1).

وأخيراً، يُكتب البرنامج الخطي بالشكل المصفوفي الموسع[8] كما يلي:

**تابع الهدف: $\mathbf{Max\ \ Z = C.X}$**

**تحت القيود :** $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{X_S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{X_S} \end{bmatrix} \geq [\mathbf{0}]$

بعد الحصـــــول على الحل الأمثل لأي من البرنـامجين، يُمكن اســــتخلاص الحل الأمثل للآخر بإجراء بعض الحسابات البسيطة، باعتماد إحدى الطريقتين الآتيتين.

الأولى: حساب قيم كل متغير بشكل مستقل وفق الصيغة (1) كما يلي:

**الصيغة (1):**

**القيمة المثلى للمتغير الثنائي $y_i$ = القيمة المثلى لمعامل المتغير الأصلي $x_i$ في التابع الأصلي Z**
**+ القيمة الأولية لمعامل $x_i$ في التابع الأصلي Z**

الثانية: باستخدام المصفوفات وفق الصيغة (2) كما يلي:

**الصيغة (2):**

**القيم المثلى للمتغيرات الثنائية = شعاع سطر معاملات تابع الهدف لمتغيرات القاعدة في الحل الأمثل الأصلي x مقلوب مصفوفة الحل الأمثل في البرنامج الأصلي.**

---

8. عندما يتم التعبير عن البرنامج الخطي بالشكل المصفوفي، يُمكن أيضاً تطبيق خوارزمية Simplex مع الأخذ بالاعتبار لقواعد المصفوفات، وتُدعى بالخوارزمية المعدلة Revised Simplex، أوردنا في هذه الأملية ما نحتاجه فقط دون أن يعني ذلك أنه كافٍ لتطبيق الخوارزمية المعدلة. خصوصاً وأنها غير مقررة في المقرر الحالي، مع ذلك ننصح الطلبة بالاطلاع عليها.

حسب هذه الصيغة، يجب أن يكون عناصر السطر الشعاع مرتبة بنفس ترتيب متغيرات القاعدة في عمود القاعدة في جدول السيمبلكس.

يُقصــد بمقلوب مصــفوفة الحل الحالي (الأمثل) هي مصــفوفة معاملات أعمدة متغيرات القاعدة الأولية (البدء)، ويُمكن قراءتها من جدول قيم الدورة الحالية (النهائية) الواردة في أعمدة متغيرات القاعدة الأولية مباشـــرةً دون أي إجراء إضافي.

يُمكن الحصـــول على قيم أي عمود من جدول Simplex في أية دورة من دورات الخوارزمية. كل ما نحتاجه هو قيم المعاملات الأولية في البرنامج الأصــلي، ومقلوب المصــفوفة في الدورة المعنية، والبرنامج الثنائي. بالاعتماد على الشــكل العام لجدول الدورة المعنية، يُمكن حســاب معاملات أعمدة القيود والطرف الثاني لها، وقيم متغيرات تابع الهدف، كما يلي.

حساب معاملات أعمدة القيود والطرف الثاني (يُعامل معاملة أي عمود) في أية دورة وفق الصيغة (3) الآتية:

**الصيغة (3):**

**عمود قيد ما في الدورة المعنية = مقلوب مصفوفة الدورة المعنية x العمود الأصلي للقيد المعني**

حساب معاملات متغيرات سطر Z في أية دورة وفق الصيغة (4) كما يلي:

**الصيغة (4):**

**معامل المتغير $x_j$ في معادلة تابع الهدف في البرنامج الأصلي = الطرف الأيسر في معادلة قيد المتغير الثنائي j**

**– الطرف الأيمن في نفس معادلة قيد المتغير الثنائي j.**

مثال (4–4) إيجاد قيم المتغيرات الثنائية ومعاملات البرنامج الثنائي من حل البرنامج الأصلي.

ليكن لدينا البرنامج الخطي:

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$$

$$x_1 ; x_2 ; x_2 \geq 0$$

لنضع هذا البرنامج تحت الشكل الموسع، والبرنامج الثنائي المقابل له:

البرنامج الأصلي

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 - M.S$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 10$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + S = 8$$

$$x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 ; S \geq 0$$

البرنامج الثنائي

$$\text{Min } W = 10y_1 + 8y_2$$

$$y_1 + 2y_2 \geq 5$$

$$2y_1 - y_2 \geq 12$$

$$y_1 + 3y_2 \geq 4$$

$$y_1 \geq 0$$

($y_2$ غير مقيدة)  $y_2 \geq -M$

وليكن الحل الأمثل للبرنامج الأصلي (نتائج الدورة النهائية من Simplex):

| القاعدة | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | S | الحل |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 0 | $\frac{3}{5}$ | $\frac{29}{5}$ | $-\frac{2}{5} + M$ | $54\frac{4}{5}$ |
| $x_2$ | 0 | 1 | $-\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $-\frac{1}{5}$ | $\frac{12}{5}$ |
| $x_1$ | 1 | 0 | $\frac{7}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{26}{5}$ |

حسب الطريقة الأولى:

يُظهر الجدول أن المتغيرين $x_4$ و S يوافقان المتغيرين الثنائيين $y_1$ و$y_2$ على التوالي (أثناء صياغة البرنامج الثنائي، تم وضع $y_1$ مقابل القيد الأول و $y_2$ مقابل القيد الثاني في البرنامج الأصلي)، نحدد قيمة الحل الثنائي في هذه المرحلة من Simplex (النهائية) كما يلي:

| متغيرات القاعدة عند البدء في البرنامج الأصلي | $x_4$ | S |
|---|---|---|
| معاملات متغيرات القاعدة في تابع الهدفZ | $\frac{29}{5}$ | $-\frac{2}{5}+M$ |
| المعاملات الأصلية لمتغيرات القاعدة في تابع الهدف | 0 | - M |
| المتغيرات الثنائية في البرنامج الثنائي | $y_1 =$ | $y_2 =$ |
| قيم المتغيرات الثنائية في الحل الأمثل الثنائي | $\frac{29}{5}+0=\frac{29}{5}$ | $-\frac{2}{5}+M+(-M)=-\frac{2}{5}$ |

حسب الطريقة الثانية:

مقلوب مصــفوفة الحل الحالي T هي المصــفوفة الظاهرة في الجدول في عمودي متغيري القاعدة عند البدء $x_4$ و R:
$$T=\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}$$

يظهر المتغيرين الأصـليين $x_1, x_2$ في جدول الحل الأمثل بترتيب مختلف حيث $x_2$ في السطر الأول و $x_1$ في الســــطر الثاني، لذلك يجب تغيير ترتيب معاملاتهما في تابع الهدف ليظهرا بنفس الترتيب، وليكن 'C شعاع السطر لهذين المتغيرين بعد تغيير الترتيب: $C' = [12 \quad 5]$

نوجد حالياً قيم المتغيرات الثنائية $y_1, y_2$ بجداء الشعاع 'C في مقلوب مصفوفة الحل الأمثل T:

$$[y_1 \quad y_2]=C'.T=[12 \quad 5]\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{29}{5} & -\frac{2}{5}\end{bmatrix}$$

وهي نفس القيم التي حصلنا عليها وفق الطريقة الأولى.

وتكون قيم تابع الهدف للبرنامج الأصلي **Z* = 54.8**:

$$Z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 = 5(26/5) + 12(12/5) + 4(0) = 274/5 = 54.8$$

وقيمة تابع الهدف للبرنامج الثنائي هي نفسها **W* = 54.8**:

$$W = 10y_1 + 8y_2 = 10(29/5) – 8(2/5) = 274/5 = 54.8$$

لنوضـــح عبر هذا المثال أيضـــاً، كيفية الحصـــول على جميع عناصـــر جدول Simplex للدورة الحالية (الدورة النهائية أو الحل الأمثل):

مقلوب مصفوفة متغيرات القاعدة الأولية في الدورة الحالية: $T = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

عمود $x_1$ في الدورة الحالية يساوي مقلوب مصفوفة الدورة المعنية مضروباً بالعمود الأصلي للمتغير $x_1$. العمود الأصلي الموافق لـ $x_1$ في جدول البدء هو $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$، فتكون قيم عمود $x_1$ في الدورة الحالية:

$$\boldsymbol{x_1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بنفس الطريقة، نوجد قيم جميع أعمدة الجدول الحالي (الذي هو الجدول النهائي للحل الأمثل):

$$\boldsymbol{x_2} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x_3} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x_4} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

الطرف الأيمن يُحسب بنفس الطريقة أيضاً كأي عمود: $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{26}{5} \end{bmatrix}$

كما يُمكن حساب معاملات سطر تابع الهدف Z باستخدام الصيغة الثانية عند الدورة الحالية أي الدورة النهائية الموافقة للحل الأمثل، حيث لدينا قيم المتغيرات الثنائية في الدورة الحالية كما يلي:

$y_2 = -2/5$ و $y_1 = 29/5$

**معامل المتغير $x_j$ في تابع هدف البرنامج الأصلي = الطرف الأيسر في معادلة قيد المتغير الثنائي j**

**– الطرف الأيمن في نفس معادلة قيد المتغير الثنائي j.**

$$\mathbf{Z(x_1) = y_1 + 2y_2 – 5 = (29/5) + 2(-2/5) – 5 \quad = 0}$$

$$\mathbf{Z(x_2) = 2y_1 - y_2 – 12 = 2(29/5) - (-2/5) – 12 = 0}$$

$$\mathbf{Z(x_3) = y_1 + 3y_2 – 4 = (29/5) + 3(-2/5) – 4 \quad = 3/5}$$

$$\mathbf{Z(x_4) = y_1 – 0 = 29/5 – 0 \qquad = 29/5}$$

$$\mathbf{Z(S) = y_2 – (-M) = (-2/5) – (-M) \qquad = -2/5 + M}$$

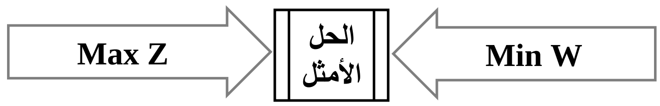
من المفيد الإشارة إلى أن هذه الحسابات يُمكن أن تُنجز في أي دورة من دورات Simplex سواء على البرنامج الأصلي أو الثنائي، كل ما نحتاجه هو مقلوب المصفوفة للدورة المعنية، والبيانات الأولية للمشكلة.

لدينا أيضاً العلاقة الآتية محققة بين أي حلين مقبولين للبرنامجين الأصلي والثنائي المرافق له:

الصيغة (5):
قيمة تابع الهدف Z في مسألة التعظيم Max هي دوماً أصغر أو يساوي قيمة تابع الهدف W في مسألة التصغير Min: $Z \leq W$. وعند الحل الأمثل تتساوى القيمتان $Z = W$.

لا تُحدد هذه العلاقة أي من البرنامجين هو الأصلي أو الثنائي، فقط اتجاه عملية التأويج/الأمثلية فيما إذا كانت تعظيم Max أو تصغير Min هو المهم فيها. كما أن الحل الأمثل لا يحصل إذا كانت Z أصغر تماماً من W: $Z < W$.

تبدو العملية وكأنها تقارب البرنامجين من نفس الحل، Min من اليمين، وMax من اليســار، ويحصــل الأمثلية عندما يلتقيان عند نفس القيمة.




## 4-4 تفسير المعنى الاقتصادي للنموذج الثنائي

يستند التفسير الاقتصادي إلى تفسيرات المشكلة الأصلية، وقد رأينا في الفصول السابقة أن مسألة البرمجة الخطية تتعامل مع مشكلة توزيع الموارد المحدودة على الأنشطة بحيث تكون الفوائد المعبر عنها على شكل تابع لتعظيم الإيرادات (أو تقليل التكاليف). سننظر إلى التفسير الاقتصـادي من هذه الزاوية أي تعظيم تابع الإيرادات وبما لا يتجاوز القيود على الموارد.

لتسهيل التفسير، لنبقي البرنامجين أمام ناظرينا:

| البرنامج الثنائي Dual | البرنامج الأصلي Primal |
|---|---|
| $Min\ W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ | $Max\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ |
| $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \quad j = 1, 2, \dots, n$ | $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m$ |
| $y_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$ | $x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$ |

ولنناقش التفسير الاقتصادي لكل من المتغيرات الثنائية Dual Variables، والقيود الثنائية Dual Constraintes.

## 1-4-4 التفسير الاقتصادي للمتغيرات الثنائية

لدينا في البرنامج الأصلي $n$ نشاط (معبر عنها بمتغيرات)، و $m$ مورد (معبر عنها بقيود). يعبر المعامل $c_j$ في $Z$ عن الإيراد الواحدي من النشاط رقم $j$، أي إيراد وحدة معيارية واحدة من النشاط $j$. فيكون تابع الهدف $Z$ يُعبر عن مجموع الإيرادات من جميع الأنشطة (مجموع جبري).

كما رأينا من العلاقة بين أي حلين مقبولين (الصيغة 5)، أن قيمة الحل الأمثل للتابع الهدف $Z$ في البرنامج الأصلي هو دوماً أصغر أو يساوي قيمة الحل الأمثل للتابع الهدف $W$ في البرنامج الثنائي:

$$\boldsymbol{Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = W}$$

وتُصبح هذه الصيغة مساواة عند الحل الأمثل للبرنامجين $Z = W$. ويعني أيضاً أن $Z$ و $W$ من نفس الطبيعة (مقادير مالية دولارات مثلاً). لنناقش كل من الحالتين: المساواة، والأصغر.

(أ) الحالة الأولى المتعلقة بالحل الأمثل حيث $Z = W$

عند الحل الأمثل، $Z$ هي قيمة الإيرادات المثلى، لنركز على الجزء الثاني $W$ من المعادلة $Z = W$، دون أن يغيب عن الذهن أن $b_i$ هي عدد الوحدات المتوفرة من المورد $i$:

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{m} b_i y_i = W}$$

تفيد هذه الصيغة أن قيمة $W$ المثلى هي أيضاً مجموع جبري لجداء حدين: الأول يعبر عن موارد $b_i$، والثاني $y_i$ يُعبر عن مساهمة هذه الموارد في التابع $W$. ومنه يُمكن صياغة هذه العلاقة بالشكل الآتي:

**الصيغة (6):**

**القيمة المثلى $W$ = مجموع (الوحدات من المورد $i$) مضروباً بـ (مساهمة الوحدة المعيارية من المورد $i$)**

بمقابلة الصياغتين: $b_i$ تمثل الوحدات المستهلكة من المورد $i$ عند الحل الأمثل.

$y_i$ تُمثل مساهمة الوحدة المعيارية من المورد $i$ في الحل الأمثل.

مما يعني أن المتغير الثنائي $y_i$ يعبر عن وحدة الثروة المعيارية التي يُمكن أن يُضـــيفها المورد $i$ إلى قيمة التابع $W$ عند اســـتهلاك وحدة معيارية واحدة من المورد المعني (يُكافئ القول الثروة الهامشـــية)، وكنا قد دعونا هذا المفهوم بأسـعار الظلّ Shadow Prices. وكأننا نقول بأن $W$ تُمثل حجم الثروة كمخرجات التي يُمكن أن تخلقها الموارد كمدخلات.

<u>(ب) الحالة الثانية عندما $Z < W$</u>

بنفس المنطق نناقش الحالة الثانية عند أي حلين مقبولين للبرنامجين الأصلي والثنائي حيث $Z < W$.

في هذه الحالة، يكون حجم الثروة التي يُمكن أن تخلقها الموارد أقل من الإيرادات الممكنة. مما يعني أنه ما زال يجب العمل على تحسين أداء عملية خلق الثروة لتكافئ حجم الإيرادات الممكن تحقيقها.

الحل الأمثل –بالمعنى الاقتصـادي في هذه الحالة– يعني الاسـتثمار الكامل لجميع الموارد المتاحة، أي يجب أن يكون حجم المدخلات (الثروة المضـــافة الممكنة) تســـاوي المخرجات (الإيرادات)، ويعبر عن ذلك بالمصـــطلح الاقتصـــادي "نظام اقتصـــادي غير مســـتقر Unstable" للقول بأنه غير أمثلي Nonoptimal وذلك عندما تكون المدخلات (الثروة الكامنة التي تحملها الموارد) أكبر من المخرجات (الإيرادات الممكنة)، وبأنه مستقر إذا تساوت القيمتان.

## 2-4-4 التفسير الاقتصادي للقيود الثنائية

يستند التفسير الاقتصادي للقيود الثنائية من العلاقة بين معاملات متغيرات تابع الهدف والقيود الثنائية.

لدينا الصيغة الآتية محققة في أية دورة للبرنامج الأصلي:

**الصيغة (7):**

**معامل المتغير $x_j$ في معادلة تابع الهدف في البرنامج الأصلي $c'_j$ = الطرف الأيسر في معادلة قيد المتغير الثنائي j – الطرف الأيمن في نفس معادلة قيد المتغير الثنائي j.**

بإعادة كتابتها بشكل رياضي، من أجل كل قيد j:

$$c'_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j$$

تعبر $c_j$ عن الإيرادات (بالدولار مثلاً) المتحقق من وحدة معيارية واحدة من النشاط j.

مما يعني أن المقدار $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$ هو من نفس طبيعة $c_j$ أي إيرادات (بالدولار مثلاً).

وحيث أن المقدارين متعاكسين بالإشارة، فإن $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$ يجب أن تعبر عن تكاليف.

ندعو الفرق $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j$ بالتكلفة المخفضة أو غير المستثمرة Reduced Cost للنشاط j، أي الفرق بين تكلفة الكميات المستهلكة من المورد من قبل وحدة معيارية مُنتجة والإيراد الناجم عن وحدة معيارية واحدة من نفس المنتج.

نلاحظ أن المقدار $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$ هو مجموع جداء مقدارين:

- الأول $a_{ij}$ يعبر عن استخدام وحدة معيارية واحدة من المورد i لكل وحدة معيارية من النشاط j (دعوناها سابقاً المعاملات التكنولوجية).
- الثاني $y_j$ يُعبر عن تكلفة الوحدة المعيارية الواحدة من المورد i. بمعنى آخر يعبر عن التكلفة المخفضة Imputed Cost من أجل كل وحدة معيارية من المورد i.

أي أن المقدار $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$ هو مجموع التكاليف المخفضة للموارد اللازمة لإنتاج وحدة معيارية واحدة من النشاط j.

في مسألة تعظيم الإيرادات، ينص شرط الأمثلية في Simplex على أن الزيادة في مستوى/حجم النشاط غير المستخدم j (متغير غير قاعدي) يُمكن أن يُحسّن من الإيرادات (تابع الهدف) إذا كانت تكاليفه المخفضة سالبة (لنتذكر سطر Z حيث نأخذ القيمة الأكثر سلبية). هذا الشرط يعني بشكل آخر أن: "التكلفة المخفضة للموارد المستخدمة لإنتاج وحدة معيارية واحدة من النشاط j " يكون أصغر تماماً من "الإيراد الممكن تحقيقه من وحدة معيارية واحدة من النشاط j ".

في هذه الحالة، فإن شرط الأمثلية يقول بأنه من المفيد اقتصادياً زيادة حجم النشاط j إلى مستوى/قيمة موجب في حال كان الإيراد الواحدي من هذا النشاط أكبر من تكلفته الواحدية المخفضة.

في نهاية هذه الفقرة، قد يكون من المفيد إدراج جدول مقارنة بين مكونات البرنامجين: الأصلي والثنائي، وذلك لتسهيل المقارنة والتفسير الاقتصادي لعناصر كل منهما.

| **الجدول (4-2) مقارنة التفاسير الاقتصادية لمكونات البرنامجين الأصلي والثنائي** | | | |
|---|---|---|---|
| **البرنامج الأصلي: تعظيم الإيرادات Max Z** | | **البرنامج الثنائي: تقليل التكاليف Min W** | |
| **متغيرات القرار $x_j$** | مساهمة الوحدة المعيارية من النشاط j في تابع الهدف | **متغيرات القرار $y_i$** | مساهمة الوحدة المعيارية من المورد i في تابع الهدف |
| **معاملات تابع الهدف $c_j$** | إيراد وحدة معيارية واحدة من النشاط j | **معاملات تابع الهدف $b_j$** | تكلفة استهلاك وحدة معيارية من النشاط j من جميع الموارد |
| **تابع الهدف Z** | الإيرادات الإجمالية من جميع الأنشطة | **تابع الهدف W** | التكاليف الإجمالية للموارد المستهلكة من جميع الأنشطة |
| **الطرف الثاني $b_i$** | الحجم المتوفر من المورد i | **الطرف الثاني $c_i$** | الحد الأدنى لمساهمة المورد i |
| **معاملات المتغيرات في القيود $a_{ij}$** | احتياجات وحدة معيارية واحدة من النشاط j من المورد i | **معاملات المتغيرات في القيود $a_{ij}$** | حجم استهلاك وحدة معيارية من النشاط j من المورد i |

## 4-5 تطبيقات على البرنامجين الأصلي والثنائي

**تطبيق شامل (4-1) إنتاج نوعين من الدهان.**

تُنتج إحدى شـركات الدهان نوعين من الدهان (داخلي وخارجي). ترغب بوضـع طريقة لإدارة مثلى لاسـتهلاك المواد وتلبية طلب العملاء في السوق وبما يُعظم أرباحها اليومية.

يستخدم النوعان نفس المواد الأولية M1 و M2، كما يلي:

- كل طن من النوع الأول الداخلي يستهلك 6 طن من المادة M1 و طن واحد من M2.
- كل طن من النوع الثاني الخارجي يستهلك 1 طن من المادة M1 و 2 طن من M2.
- الحد الأقصى للكميات المتوفرة يومياً: 24 طن من M1، و 6 طن من M2.

تشـــير دراســـة الســـوق إلى أن الطلب اليومي على النوع الداخلي لا يتجاوز النوع الخارجي بأكثر من طن واحد يومياً. كما أن الطلب على النوع الخارجي لا يتجاوز 2 طن يومياً.

وأخيراً، تربح الشـــركة 5 آلاف دولار من الطن الواحد من النوع الخارجي، و 4 آلاف دولار من الطن الواحد من النوع الداخلي.

المطلوب: (1) صياغة البرنامج الخطي لهذه المشكلة.

(2) إيجاد الحل الأمثل عبر التمثيل البياني.

(3) إيجاد الحل الأمثل باستخدام Simplex.

(4) تحقق من القيود، وحجم الموارد المتوفرة (المتبقية) عند الحل الأمثل.

(5) صياغة البرنامج الثنائي.

(6) إيجاد الحل الأمثل الثنائي.

(7) تفسير المتغيرات الثنائية.

الحل:

(1) صياغة البرنامج الخطي للمشكلة

ليكن $x_1$ حجم الإنتاج اليومي من النوع الأول الداخلي. و $x_2$ حجم الإنتاج اليومي من النوع الثاني الخارجي، مقدرة بالطن يومياً.

فيكون تابع الهدف: $\text{Max } (Z = 5x_1 + 4x_2)$ [0]

القيود: القيد الأول المتعلق بالمادة الأولية M1: $6x_1 + 4x_2 \leq 24$ [1]

القيد الثاني المتعلق بالمادة الأولية M2: $x_1 + 2x_2 \leq 6$ [2]

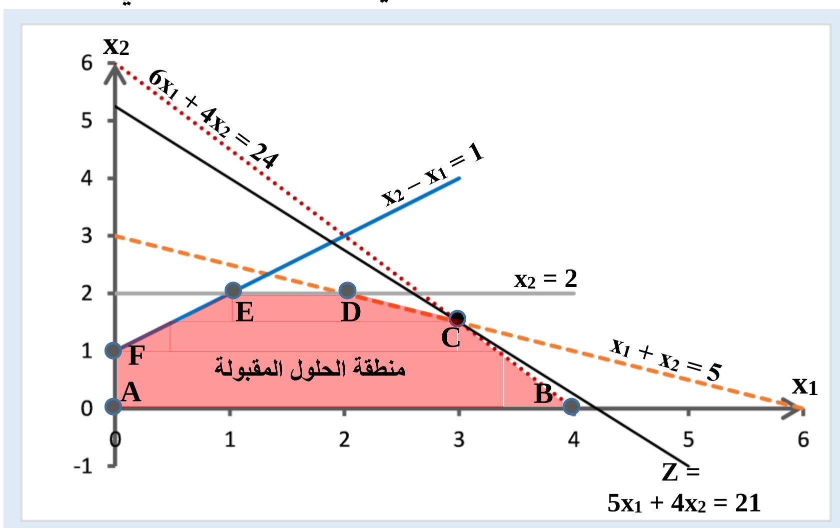
القيد الثالث المتعلق بحدود السوق: $x_2 - x_1 \leq 1$ [3]

القيد الرابع المتعلق بالطلب على النوع الثاني: $x_2 \leq 2$ [4]

قيود اللاسلبية: $x_1, x_2 \geq 0$ [5]

(2) الحل الأمثل عبر التمثيل البياني

نُمثل في جملة إحداثيات حيث $x_2$ المحور العمودي، و $x_1$ المحور الأفقي:




**الشكل (4−1) الحل البياني للتطبيق الشامل (1)**

ويكون الحل الأمثل من الشكل البياني عند الذروة C: $\mathbf{x_1 = 3}$، $\mathbf{x_2 = 1.5}$، $\mathbf{Z^* = 21}$

(3) إيجاد الحل الأمثل باستخدام Simplex

وضع البرنامج بالصيغة الموسعة على شكل معادلات، وذلك بإضافة متغيرات الفرق:

$x_3$ للقيد [1] $x_4$ للقيد [2] $x_5$ للقيد [3] $x_6$ للقيد [4]

فتصبح الصيغة الموسعة لها الشكل:

$$\textbf{Max } (Z = 5x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6) \qquad [0]$$

$$\begin{array}{llll} 6x_1 + 4x_2 + x_3 & & = 24 & [1] \\ x_1 + 2x_2 \quad + x_4 & & = 6 & [2] \\ -x_1 + x_2 \qquad + x_5 & & = 1 & [3] \\ x_2 \qquad\qquad + x_6 & & = 2 & [4] \\ x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 ; x_5 ; x_6 & & \geq 0 & [5] \end{array}$$

المرحلة (1) جدول البدء:

الجدول (1): جدول Simplex الموافق لمرحلة البدء

| متغيرات القاعدة | رقم المعادلة | معاملات المتغيرات | | | | | | | الطرف الثاني |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | |
| Z | [0] | 1 | -5 | -4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $x_3$ | [1] | 0 | 6 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 24 |
| $x_4$ | [2] | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 6 |
| $x_5$ | [3] | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $x_6$ | [4] | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 |

متغيرات القاعدة في هذا الحل البدئي (قيم عمود الطرف الثاني من جدول البدء):

$$x_3 = 24; \quad x_4 = 6; \quad x_5 = 1; \quad x_6 = 2$$

متغيرات خارج القاعدة في الحل البدئي (كونها لا تظهر بين متغيرات القاعدة):

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 0$$

قيمة تابع الهدف Z في الحل البدئي تساوي الصفر:

$$Z = 5(0) + 4(0) + 0(24) + 0(6) + 0(1) + 0(2) = 0$$

المرحلة (2) اختبار الأمثلية Optimality Test.

يكون الحل الحالي أمثلياً إذا كان جميع معاملات سطر Z أكبر أو يساوي الصفر. ما زال سطر Z يحوي معاملات سالبة (في العمودين $x_1$ ; $x_2$)، مما يتطلب الانتقال إلى دورة جديدة للحصول على حل جديد، أي تبديل متغير غير قاعدي بآخر قاعدي، وحساب الحل الجديد.

المرحلة (3) الدورة التالية (1) Iteration.

الخطوة (1): تحديد عمود المحور أي المتغير غير القاعدي الجديد الذي سيدخل القاعدة:

نختار من الجدول (1) المعامل السالب الأكبر بالقيمة المطلقة في سطر Z (يساوي 5-). نجد أنه متغير العمود الأول $x_1$ فيكون هو عمود المحور، أي أن المتغير $x_1$ سيدخل القاعدة.

الخطوة (2): تحديد المتغير القاعدي الذي سيخرج من القاعدة، بتطبيق اختبار المعدل الأدنى.

بتقسيم الطرف الثاني على عمود المحور، نجد أن المعدل الأدنى (24/6=4) يوافق سطر المعادلة الأول [1] الموافق للمتغير $x_3$، فيكون هو سطر المحور، أي أن المتغير $x_3$ سيخرج من القاعدة، وسيدخل $x_1$ بدلاً منه.

الخطوة (3) إيجاد الحل القاعدي الجديد. يجب أن نحصل في عمود المحور على القيمة 1 في خلية المحور، و 0 في جميع الخلايا الأخرى من نفس عمود المحور. نجري العمليات الآتية:

أ- تقسيم سطر المحور على قيمة خلية المحور 6.

ب- ضرب السطر الجديد للمحور بالقيمة 5 وجمعه لسطر Z المعادلة [0].

ت-   طرح السطر الجديد للمحور من سطر المعادلة [2].

ث-   جمع السطر الجديد للمحور مع سطر المعادلة [3].

بعد إنجاز هذه العمليات، أصـــبحت جميع خلايا عمود المحور تســاوي الصـــفر عدا طبعاً خلية المحور التي تساوي الواحد، ويتشكل لدينا الجدول الجديد (2) للمرحلة التالية:

**الجدول (2): جدول Simplex الموافق للمرحلة الثانية Iterration (1)**

| متغيرات القاعدة | رقم المعادلة | معاملات المتغيرات | | | | | | | الطرف الثاني |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | |
| Z | [0] | 1 | **0** | -2/3 | 5/6 | 0 | 0 | 0 | 20 |
| $x_1$ | [1] | **0** | **1** | **2/3** | **1/6** | **0** | **0** | **0** | **4** (24/6) |
| $x_4$ | [2] | 0 | **0** | 4/3 | -1/6 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| $x_5$ | [3] | 0 | **0** | 5/3 | 1/6 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| $x_6$ | [4] | 0 | **0** | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 |

متغيرات القاعدة في الحل الحالي Iteration (1): $x_1 = 4; x_4 = 2; x_5 = 5; x_6 = 2$

متغيرات خارج القاعدة في الحل الحالي: $x_3 = 0; x_2 = 0$

قيمة تابع الهدف في الحل الحالي: $Z = 5(4) + 4(0) + 0(0) + 0(2) + 0(5) + 0(2) = 20$

<u>المرحلة (2-مكرر) اختبار الأمثلية للدورة الأولى Iteration (1).</u>

ما زال سـطر Z يحوي معاملات سـالبة (في العمود $x_2$)، أي أن الحل الحالي غير أمثلي، ويتطلب الانتقال إلى دورة جديدة، أي تبديل متغير غير قاعدي بآخر قاعدي، وحساب الحل الجديد.

<u>المرحلة (3-مكرر) الدورة التالية Iteration (2).</u>

الخطوة (1): عمود المحور من الجدول (1) ذو المعامل الســالب الأكبر بالقيمة المطلقة في ســطر Z هو عمود $x_2$ (الوحيد الذي معامله سالب أصلاً)، أي أن المتغير $x_2$ سيدخل القاعدة.

الخطوة (2): تحديد المتغير القاعدي الذي ســيخرج من القاعدة، بتطبيق اختبار المعدل الأدنى على الجدول (2).

تقسيم الطرف الثاني على عمود المحور، نجد أن المعدل الأدنى $\frac{2}{4/3} = 1.5$ يوافق سطر المعادلة [2] الموافق للمتغير $x_4$، فيكون هو سطر المحور، أي أن المتغير $x_4$ سيخرج من القاعدة، وسيدخل $x_2$ بدلاً منه.

الخطوة (3) إيجاد الحل القاعدي الجديد. يجب أن نحصـــل في عمود المحور على القيمة 1 في خلية المحور، و 0 في جميع الخلايا الأخرى من نفس عمود المحور. نجري العمليات الآتية:

أ- تقسيم سطر المحور على قيمة خلية المحور (4/3).

ب- ضرب السطر الجديد للمحور بالقيمة 2/3 وجمعه لسطر Z المعادلة [0].

ت- ضرب السطر الجديد للمحور بالقيمة (2/3-) وجمعه لسطر المعادلة [1].

ث- ضرب السطر الجديد للمحور بالقيمة (5/3-) وجمعه لسطر المعادلة [3].

ج- طرح السطر الجديد للمحور من سطر المعادلة [4].

بعد إنجاز هذه العمليات، أصــبحت جميع خلايا عمود المحور تســاوي الصــفر عدا طبعاً خلية المحور التي تساوي الواحد، ويتشكل لدينا الجدول الجديد (3) للمرحلة التالية:

| **الجدول (3): جدول Simplex الموافق للمرحلة الثانية (2) Iteration** | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| متغيرات القاعدة | رقم المعادلة | معاملات المتغيرات | | | | | | | الطرف الثاني |
| | | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | |
| Z | [0] | 1 | 0 | **0** | 3/4 | 1/2 | 0 | 0 | 21 |
| $x_1$ | [1] | 0 | 1 | **0** | 1/4 | -1/2 | 0 | 0 | 3 |
| **$x_2$** | **[2]** | **0** | **0** | **1** | **-1/8** | **3/4** | **0** | **0** | **3/2** |
| $x_5$ | [3] | 0 | 0 | **0** | 3/8 | -5/6 | 1 | 0 | 5/2 |
| $x_6$ | [4] | 0 | 0 | **0** | 1/8 | -3/4 | 0 | 1 | 1/2 |

متغيرات القاعدة في الحل الحالي: $x_1 = 3;\ x_2 = 3/2;\ x_5 = 5/2;\ x_6 = 1/2$

متغيرات خارج القاعدة في الحل الحالي: $x_3 = 0;\ x_4 = 0$

قيمة تابع الهدف في الحل الحالي: $Z = 5(3) + 4(3/2) + 0(0) + 0(0) + 0(5/2) + 0(1/2) = 21$

المرحلة (2–مكرر) اختبار الأمثلية للدورة الثانية.

نلاحظ أن سطر Z لم يعد يحوي أية معاملات سالبة، أي أن الحل الحالي هو الحل الأمثل.

| **متغيرات القاعدة في الحل الأمثل:** | **متغيرات خارج القاعدة عند الحل الأمثل:** | **تابع الهدف عند الحل الأمثل:** |
|---|---|---|
| **متغير قرار: $x_1 = 3$** | **متغير فرق: $x_3 = 0$** | **$Z^* = 5(3) + 4(3/2) = 21$** |
| **متغير قرار: $x_2 = 3/2$** | **متغير فرق: $x_4 = 0$** | معاملات متغيرات الفرق القاعدية في تابع الهدف تساوي الصفر. |
| **متغير فرق: $x_5 = 5/2$** | | قيم متغيرات خارج القاعدة تساوي الصفر. |
| **متغير فرق: $x_6 = 1/2$** | | |

(4) التحقق من القيود والموارد المتوفرة عند الحل الأمثل

القيد الأول المتعلق بالمادة الأولية M1: $6x_1 + 4x_2 \leq 24$ [1]

$6(3) + 4(3/2) = 24$ تساوي الحد الأقصى للمورد M1.

أي أن هذا المورد استنفد بشكل كامل.

القيد الثاني المتعلق بالمادة الأولية M2: $x_1 + 2x_2 \leq 6$ [2]

$3 + 2(3/2) = 6$ تساوي الحد الأقصى للمورد M2.

أي أن هذا المورد أيضاً استنفد بشكل كامل.

القيد الثالث المتعلق بحدود السوق: $x_2 - x_1 \leq 1$ [3]

$3/2 - 3 = -3/2$ والقيد محقق ولكن هناك فائض.

لمعرفة الفائض من هذا المورد (الفرق بين المنتجين)، نطرح الطرف الأول من الثاني:

$1 - [3/2 - 3] = 5/2$ أي ما يعادل 2.5 طن فرق بين كميتي المنتجين.

القيد الرابع المتعلق بالطلب على النوع الثاني: $x_2 \leq 2$ [4]

حيث أن $x_2 = 3/2$ أي ما زال هناك فائض في الطلب يعادل نصف طن $(2 - 3/2 = 1/2)$.

قيود اللاسلبية: محققة $x_1, x_2 \geq 0$ [5]

كان يُمكن أيضـاً معرفة فيما إذا كان كل مورد قد اسـتنفد أو لدينا فائض منه، عبر التحقق من متغيرات الفرق الموافقة لكل قيد عند الحل الأمثل، وذلك دون الحاجة للتحقق من القيود، كما يلي:

- قيمة متغير الفرق الموافق لقيد ما هي بالأصل تساوي الفرق بين طرفي القيد: الطرف الثاني مطروحاً منه الطرف الأول.
- إذا كان متغير الفرق للقيد المعني يساوي الصفر، فالقيد أشبع كلياً أي تم استهلاك كل الكمية المتوفرة من المورد الذي يُمثله القيد.
- إذا كان متغير الفرق للقيد المعني أكبر من الصـفر، فالقيد لم يُشـبع، وما زال هناك فائض من المورد الذي يُمثله هذا القيد.

(5) صياغة البرنامج الثنائي

| البرنامج الأصلي **Primal** | البرنامج الثنائي **Dual** |
|---|---|
| $\text{Max } (Z = 5x_1 + 4x_2)$ | $\text{Min } (W = 24y_1 + 6y_2 + y_3 + 2y_4$ |
| $6x_1 + 4x_2 \leq 24$<br>$x_1 + 2x_2 \leq 6$<br>$x_2 - x_1 \leq 1$<br>$x_2 \leq 2$<br>$x_1, x_2 \geq 0$ | $6y_1 + y_2 - y_3 \geq 5$<br>$4y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 \geq 4$<br>$y_1 ; y_2 ; y_3 ; y_4 \geq 0$ |

(6) الحل الأمثل الثنائي

يُمكن تحديد قيم المتغيرات الثنائية بإحدى الصيغتين (1) أو (2) أعلاه.

حسب الصيغة الأولى:

**القيمة المثلى للمتغير الثنائي $y_i$ = القيمة المثلى لمعامل المتغير الأصلي $x_i$ في التابع الأصلي Z**

**+ القيمة الأولية لمعامل $x_i$ في التابع الأصلي Z**

| متغيرات القاعدة البدء | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|---|---|---|---|---|
| **المعاملات في تابع الهدف Z عند الحل الأمثل** | **3/4** | **1/2** | **0** | **0** |
| **المعاملات الأولية في تابع الهدف Z** | **0** | **0** | **0** | **0** |
| **المتغيرات الثنائية المقابلة** | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ |
| **قيم المتغيرات الثنائية** | **0+3/4 = 0.75** | **0+1/2 = 0.5** | **0+0 = 0** | **0+0 = 0** |

الثانية: باستخدام المصفوفات وفق الصيغة (2) كما يلي:

**القيم المثلى للمتغيرات الثنائية = شعاع سطر معاملات تابع الهدف لمتغيرات القاعدة في الحل الأمثل الأصلي x مقلوب مصفوفة الحل الأمثل في البرنامج الأصلي.**

شعاع سطر متغيرات القاعدة في الحل البدئي: $\begin{array}{cccc} y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ \end{array}$ $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

لا ننسى أن المتغيرين الثنائيين y1 و y2 يقابلان المتغيرين الثنائيين x1 و x2.

مقلوب مصفوفة القاعدة في الحل الأمثل: $\begin{bmatrix} 1/4 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/8 & 3/4 & 0 & 0 \\ 3/8 & -5/6 & 1 & 0 \\ 1/8 & -3/4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

فيكون الجداء :

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/8 & 3/4 & 0 & 0 \\ 3/8 & -5/6 & 1 & 0 \\ 1/8 & -3/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{cccc} y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0.75 & 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(7) تفسير المتغيرات الثنائية عند الحل الأمثل:

- المتغير الثنائي $y_1 = 0.75$ يعبر عن سعر الظل للمادة الأولية M1 (المورد الأول) أي مساهمة الوحدة المعيارية من هذا المورد في تكوين الثروة، أي ما يعادل 750 دولار بالطن.
- المتغير الثنائي $y_2 = 0.5$ يعبر عن سعر الظل للمادة الأولية M2 (المورد الثاني) أي مساهمة الوحدة المعيارية من هذا المورد في تكوين الثروة، أي ما يعادل 500 دولار بالطن.
- المتغير الثنائي $y_3 = 0$ يعبر عن سعر الظل للسوق أي مساهمة الوحدة المعيارية من هذا المورد في تكوين الثروة، أي ما يعادل 0 دولار بالطن.
- المتغير الثنائي $y_4 = 0$ يعبر عن السعر الظل للطلب أي مساهمة الوحدة المعيارية من هذا المورد في تكوين الثروة، أي ما يعادل 0 دولار بالطن.

# اختبارات وأسئلة الفصل الرابع Tests

## 1) أسئلة صح / خطأ True/False

| | السؤال | صح | خطأ |
|---|---|---|---|
| 1 | البرنامج الثنائي Dual هو نفسه البرنامج الأصلي Primal مع تغيير Min إلى Max | | √ |
| 2 | البرنامج الثنائي Dual لبرنامج ثنائي يتطابق مع البرنامج الأصلي Primal | √ | |
| 3 | إذا كانت قيود البرنامج الأصلي على شكل معادلات، فإن متغيرات البرنامج الثنائي تكون غير مقيدة | √ | |
| 4 | إذا كان تابع الهدف في البرنامج الأصلي من نمط تعظيم Max فإن قيود البرنامج الثنائي من نمط "أصغر أو يساوي" $\leq$ . | | √ |
| 5 | إذا كان تابع الهدف في البرنامج الأصلي من نمط تصغير Min فإن قيود البرنامج الثنائي من نمط "أصغر أو يساوي" $\leq$ . | √ | |
| 6 | ليس بالضرورة أن يكون لكل برنامج خطي برنامج ثنائي | | √ |
| 7 | إذا كان لأحد البرنامجين الأصلي أو الثنائي حلولاً مقبولة، فللبرنامج الآخر أيضاً حلولاً مقبولة. | √ | |
| 8 | إذا كان لأحد البرنامجين الأصلي أو الثنائي حلاً أمثلياً، فليس بالضرورة أن يكون للبرنامج الآخر حلاً أمثلياً. | | √ |
| 9 | إذا كان لأحد البرنامجين الأصلي أو الثنائي حلاً أمثلياً، فالضرورة للبرنامج الآخر حلاً أمثلياً يساويه. | √ | |
| 10 | يُمكن استخدام Simplex لإيجاد الحل الأمثل للبرنامج الثنائي، ومنه إيجاد الحل الأمثل للبرنامج الأصلي | √ | |
| 11 | في مسألة الثنائية، يجري تعريف متغير ثنائي من أجل كل قيد (معادلة) في البرنامج الأصلي | √ | |
| 12 | القيود في البرنامج الثنائي هي نفسها قيود البرنامج الأصلي | | √ |
| 13 | لدى صياغة البرنامج الثنائي، فإن معاملات متغيرات تابع الهدف في البرنامج الأصلي تُصبح معاملات الطرف الثاني في البرنامج الثنائي | √ | |
| 14 | المهم في مسألة الثنائية هو اتجاه عملية التأويج Max أو Min وليس اتجاه القيود | √ | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 15 | لا يُمكن أبداً استخدام المصفوفات في حل البرنامج الخطي، يكفي بعض الجداول | | √ |
| 16 | يُقصد بمقلوب مصفوفة الحل الحالي هي مصفوفة معاملات أعمدة متغيرات القاعدة الأولية في جدول البدء. | √ | |
| 17 | قيمة تابع الهدف Z في مسألة التعظيم Max هي دوماً أصغر أو يساوي قيمة تابع الهدف W في مسألة التصغير Min: $Z \leq W$. | √ | |
| 18 | عند الحل الأمثل، تتساوى قيمة تابع الهدف Z في مسألة التعظيم Max مع قيمة قيمة تابع الهدف W في مسألة التصغير Min: $Z = W$. | √ | |
| 19 | يعبر المتغير الثنائي $y_i$ عن وحدة الثروة المعيارية التي يُمكن أن يُضيفها المورد i إلى قيمة التابع W عند استهلاك وحدة معيارية واحدة من المورد المعني | √ | |
| 20 | يستند التفسير الاقتصادي للقيود الثنائية من العلاقة بين معاملات متغيرات تابع الهدف والقيود الثنائية | √ | |

## 2) أسئلة خيارات متعددة Multiple Choices

1- كل برنامج خطي من الشكل القياسي له برنامج ثنائي حيث الحل الأمثل:
أ) لأي منهما هو مقلوب الحل الأمثل للآخر ب) لا علاقة أبداً بين الحلين
ج) لأي منهما هو الحل الأمثل للآخر د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

2- من أهم خلاصات نظرية الثنائية Duality Theorem على ما يلي:
أ) إذا كان لأحد البرنامجين حلولاً مقبولة فللبرنامج الآخر أيضاً حلولاً مقبولة
ب) إذا كان لأحد البرنامجين حلاً أمثلياً، فللبرنامج الآخر أيضاً حلاً أمثلياً
ج) يُمكن استخدام الحل الأمثل للبرنامج الثنائي لإيجاد الحل الأمثل للبرنامج الأصلي
د) جميع الأجوبة السابقة صحيحة

3- من أهم قواعد التقابل بين البرنامجين الأصلي والثنائي ما يلي:
أ) تابع هدف Max في أحدهما يُصبح Min في الآخر
ب) قيد من نمط أصغر أو يساوي $\geq$ في أحدهما يُصبح أكبر أو يساوي في الآخر $\leq$
ج) قيد مساواة في أحدهما يُقابل متغيرات غير مقيدة في الآخر
د) جميع الأجوبة السابقة صحيحة

4- من أهم قواعد التحويل بين البرنامجين الأصلي والثنائي ما يلي:
أ) تعريف متغير ثنائي من أجل كل قيد في البرنامج الأصلي
ب) تعريف قيد ثنائي من أجل كل متغير في البرنامج الأصلي
ج) معاملات تابع الهدف في الأصلي تُصبح معاملات الطرف الثاني في الثنائي
د) جميع الأجوبة السابقة صحيحة

5- لدينا تابع الهدف من نمط تعظيم Max في البرنامج الأصلي، فإنه يُكتب في البرنامج الثنائي كما يلي:

أ) يبقى كما هو من نمط تعظيم Max
ب) على شكل تصغير Min
ج) بصيغة تعظيم أو تصغير لا فرق
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

6- لدى صياغة البرنامج الثنائي، فإن إشارات المتغيرات الثنائية:
أ) بالضرورة إشارتها سالبة
ب) بالضرورة إشارتها موجبة
ج) تكون غير مقيدة بسالب أو موجب
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

7- إذا كان أحد المتغيرات x غير مقيد باللاسلبية في البرنامج الخطي، فإنه يُجزأ إلى قسمين كما يلي:
أ) جزء في البرنامج الأصلي وآخر للثنائي
ب) $x = x^+ + x^-$
ج) جزء غير مقيد وجزء مقيد
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

8- في أية دورات Iteration من دورات Simplex، تُقسم مصفوفة المعاملات التكنولوجية إلى قسمين:
أ) الأول مقلوب مصفوفة الدورة الحالية، والثاني مصفوفة متغيرات خارج القاعدة
ب) الأول مقلوب مصفوفة المتغيرات الأصلية، والثاني مصفوفة متغيرات الثنائية
ج) الأول مقلوب مصفوفة المتغيرات الموجبة، والثاني مصفوفة المتغيرات السالبة
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

9- عند الحل الأمثل، يُمكن استخلاص قيمة المتغير الثنائي $y_i$ كما يلي:
أ) مجموع قيمتي المتغير $x_i$ الأولية والمثلى في التابع الأصلي
ب) الفرق بين قيمتي المتغير $x_i$ الأولية والمثلى في التابع الأصلي
ج) الفرق بين قيمتي التابع الأصلي والثنائي المثلى
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

10- عند الحل الأمثل، يُمكن استخلاص قيم المتغيرات الثنائية كجداء بين مقلوب مصفوفة الدورة الحالية (الحل الأمثل) كما يلي:
أ) وشعاع سطر معاملات تابع الهدف لمتغيرات القاعدة في الحل الأمثل الأصلي
ب) وقيم متغيرات القاعدة الحل الأمثل
ج) وقيم المتغيرات الثنائية القاعدية
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

11- يُقصد بمقلوب مصفوفة الدورة الحالية ما يلي:
أ) مصفوفة معاملات تابع الهدف
ب) مصفوفة معاملات جميع المتغيرات
ج) مصفوفة معاملات أعمدة متغيرات القاعدة الأولية عند البدء
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

12- يُمكن حساب قيم عمود قيد ما الدورة الحالية كما يلي:
أ) جداء مصفوفة الحل الأمثل وسطر القيد المعني
ب) جداء مقلوب مصفوفة الدورة المعنية والعمود الأصلي للقيد المعني
ج) جداء مصفوفة القاعدة وعمود الطرف الثاني
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

13- لدينا متغير قاعدي x قيمته في قاعدة البدء تساوي الصفر و 7 في الحل النهائي، ويقابل المتغير الثنائي y، فإن قيمة y تُحسب كما يلي:

أ) $y = 7 + 0 = 7$ ب) $y = 0 – 7 = -7$
ج) $y = 0/7 = 0$ د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

14- عند الحل الأمثل، إن قيمة معامل المتغير $x_j$ في تابع هدف البرنامج الأصلي تساوي الفرق بين:

أ) بين قيمتي الحلين الأصلي والثنائي ب) بين قيمتي المتغيرين الأصلي والثنائي
ج) الطرفين الأيسر والأيمن في معادلة قيد المتغير الثنائي j د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

15- لدينا العلاقة الآتية دوماً محققة بين قيمتي التابعين الأصلي Z والثنائي W:

أ) $Z \leq W$ ب) $Z = W$ و $Z \# W$
ج) $Z \geq W$ د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

16- التفسير الاقتصادي للمتغير الثنائي $y_i$ هو كما يلي:

أ) مساهمة الوحدة المعيارية من المورد i في الحل الأمثل
ب) مساهمة المورد i في استيفاء القيد رقم i
ج) مساهمة تابع الهدف رقم i في المورد y.
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

17- التفسير الاقتصادي للمتغير الثنائي $y_i$ هو كما يلي:

أ) سعر الظل Shadow Price للمورد i
ب) مساهمة المورد i في استيفاء القيد رقم i
ج) مساهمة تابع الهدف رقم i في المورد y.
د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

18- إذا كان قيمة تابع الهدف Z للبرنامج الأصلي أصغر تماماً من قيمة تابع الهدف للبرنامج الثنائي W (أي $Z < W$) فإن ندعو النظام الاقتصادي بأنه:

أ) نظام أمثلي Optimal ب) مستقر Stable
ج) غير مستقر Unstable د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

19- في البرمجة الخطية، ندعو الفرق $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j$ بتكلفة:

أ) المتغير الثنائي j ب) مخفضة أو غير مستثمرة Reduced Cost للنشاط j
ج) الوحدة المعيارية للنشاط j د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

20- في البرنامج الخطي الثنائي، يُعبر الطرف الثاني في القيود:

أ) الحد الأدنى لمساهمة الموارد ب) تكلفة استخدام الموارد
ج) الربح الإجمالي من الأنشطة د) جميع الأجوبة السابقة خاطئة

## 3) أسئلة \ قضايا للمناقشة

**<u>السؤال (1) إيجاد البرنامج الثنائي.</u>**

أوجد البرنامج الثنائي للبرنامج الآتي:

$$\text{Max} \quad Z = 5x_1 + 2x_2$$
$$3x_1 + x_2 \leq 27$$
$$2x_1 + 5x_2 \leq 57$$
$$x_1 \,;\; x_2 \geq 0$$

**{ المدة التقديرية للإجابة: 10 دقيقة. الدرجة التقديرية: 100/10 درجات}**

**<u>السؤال (2) مقارنة حلي البرنامج الأصلي والبرنامج الثنائي.</u>**

ليكن لدينا البرنامج الخطي في السؤال (1)، والمطلوب بعد صياغة البرنامج الثنائي:

أ- إيجاد الحل الأمثل للبرنامج الأصلي بالطريقة التي تراها مناسبة.

ب- إيجاد الحل الأمثل للبرنامج الثنائي بالطريقة التي تراها مناسبة.

ت- مقارنة الحلين السابقين.

**{ المدة التقديرية للإجابة: 30 دقيقة. الدرجة التقديرية: 100/25 درجات}**

**<u>السؤال (3) إيجاد البرنامج الثنائي.</u>**

أوجد البرنامج الثنائي للبرنامج الآتي:

$$\text{Min} \quad Z = 6x_1 + 3x_2$$
$$6x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 2$$
$$3x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 5$$
$$x_1 \,;\; x_2 \,;\; x_3 \geq 0$$

**{ المدة التقديرية للإجابة: 15 دقيقة. الدرجة التقديرية: 100/15 درجات}**

**<u>السؤال (4) مقارنة حلي البرنامج الأصلي والبرنامج الثنائي.</u>**

ليكن لدينا البرنامج الخطي في السؤال (3)، والمطلوب بعد صياغة البرنامج الثنائي:

أ- إيجاد الحل الأمثل للبرنامج الأصلي بالطريقة التي تراها مناسبة.

ب- إيجاد الحل الأمثل للبرنامج الثنائي بالطريقة التي تراها مناسبة.

ت- مقارنة الحلين السابقين.

**{ المدة التقديرية للإجابة: 30 دقيقة. الدرجة التقديرية: 100/25 درجات}**

**السؤال (5) إيجاد البرنامج الثنائي.**

أوجد البرنامج الثنائي للبرنامج الآتي:

$$\text{Min} \quad Z = 2x_1 + 7x_2$$
$$2x_1 + x_2 = 6$$
$$3x_1 - x_2 = 4$$

$x_1 \; ; \; x_2$ غير مقيدة

**{ المدة التقديرية للإجابة: 15 دقيقة. الدرجة التقديرية: 100/15 درجات}**

**السؤال (6) مقارنة حلي البرنامج الأصلي والبرنامج الثنائي.**

ليكن لدينا البرنامج الخطي في السؤال (5)، والمطلوب بعد صياغة البرنامج الثنائي:

أ- إيجاد الحل الأمثل للبرنامج الأصلي بالطريقة التي تراها مناسبة.

ب- إيجاد الحل الأمثل للبرنامج الثنائي بالطريقة التي تراها مناسبة.

ت- مقارنة الحلين السابقين.

**{ المدة التقديرية للإجابة: 30 دقيقة. الدرجة التقديرية: 100/25 درجات}**

# الفصل الخامس: نماذج النقل

# Chapter (5): Transportation Models

**كلمات مفتاحية:**

نموذج النقل Transportation Model، طريقة الركن الشـــمالي الغربي Northwest corner method، طريقة أقل التكاليف The least cost transportation problem، طريقة فوجل Vogel's Approximation Method، طريقة المسار الحجر المتنقل Stepping Stone Method.

**ملخص الفصل:**

تعد مشـكلة النقل أحد النماذج في مشـكلة البرمجة الخطية. الهدف من هذه الورقة هو نقل العنصـر من الأصـل إلى الوجهة بحيث يتم تقليل تكلفة النقل إلى الحد الأدنى، مع تقليل وقت النقل. يهدف هذا الفصـــل إلى عرض مشـكلات النقل TP من خلال تقديم شـرح للخصـائص المسـتخدمة لحل المشـكلات والاختلافات في متغيرات مشكلات النقل. حيث نتناول طرائق إيجاد الحل الأساسي الأولي لمسائل النقل باستخدام أساليب التوزيع الثلاث: طريقة الركن الشـمالي الغربي، طريقة إيجاد التكاليف، وطريقة فوجل التقريبية، وللتأكد من أمثلية الحل الأسـاسـي الأولي تم تطبيق طريقة المسار الحجر المتنقل.

**المخرجات والأهداف التعليمية:**

1. استيعاب مشكلات النقل.
2. التمكّن من كتابة مسألة النقل بالشكل الرياضي.

3. استيعاب كيفية موازنة جدول النقل.

4. التمكّن من الطرائق الثلاث لإيجاد الحل الأساسي الأولي.

5. التمكّن من التأكد من أمثلية الحل الأساسي الأولي وذلك باستخدام طريقة الدرج أو الحجر المتنقل.

**مخطط الفصل:**

5-1 مقدمة

5-2 الإطار العام لمشكلة النقل.

5-3 حل مسألة النقل.

5-4 موازنة جدول النقل.

5-5 إيجاد الحل الأساسي الأولي بطريقة الركن الشمالي الغربي.

5-6 إيجاد الحل الأساسي الأولي بطريقة إيجاد التكاليف.

5-7 إيجاد الحل الأساسي الأولي بطريقة فوجل.

## 5-1 مقدمة

مشكلات النقل Transportation Problem (TP) هو الاسم العام الذي يطلق على فئة كاملة من المشكلات التي يكون فيها النقل ضرورياً. تتمثل مشكلات النقل في تقليل تكلفة نقل الموارد أو البضائع أو الأشخاص من موقع واحد (غالباً ما يعرف بالمصادر) إلى موقع آخر (غالباً ما يُعرف بالوجهات) باستخدام أنواع متنوعة من وسائط النقل عن طريق الهواء والماء والطرق والفضاء والأنابيب والكابل مع بعض القيود مثل الطاقة والفترة الزمنية. وهي ذات أهمية كبيرة بالنظر لما توفره الدراسة المتقنة لهذه المسألة من أموال. إذ تبحث هذه المسألة عن تقليل كلفة نقل التوريدات من المواد أو البضائع أو الأشخاص أو الآليات؛ وذلك من جهة المصدر إلى جهة الهدف المخصصة للاستفادة من هذه التوريدات. والمعلمات العامة ل TP هي كما يلي.

- **الموارد.** الموارد هي تلك العناصر التي يمكن نقلها من المصادر إلى الوجهات. ومن الأمثلة على الموارد المنفصلة السلع والآلات والأدوات والأشخاص والبضائع؛ وتشمل الموارد كالطاقة والسوائل والمال.
- **المواقع.** المواقع هي نقاط التوريد، أو المستودع، أو محطات السكك الحديدية، أو محطات الحافلات، أو ميناء التحميل، أو الموانئ البحرية، أو المطارات، أو مستودعات التزود بالوقود، أو المدرسة.
- **أوضاع النقل.** وسائل النقل هي شكل من أشكال نقل بعض الموارد إلى المواقع. تستخدم أوضاع النقل المياه والفضاء والجو والطرق والسكك الحديدية والكابلات. شكل النقل له بنية تحتية وسعة وأوقات وأنشطة ولوائح مختلفة. من أمثلة وسائل النقل السفن والطائرات والشاحنات والقطارات وخطوط الأنابيب والدراجات النارية وغيرها.

## 5-2 الإطار العام لمشكلة النقل

مشـكلة النقل هي إحدى الفئات الفرعية لمشـكلة البرمجة الخطية، حيث يكون الهدف هو نقل كميات مختلفة من منتج متجانس يتم تخزينه مبدئياً في أصـول مختلفة، إلى وجهات مختلفة بطريقة تجعل تكلفة النقل الإجمالية عند أدنى حد لها.

تهتم نماذج أو مشكلات النقل بشكل أساسي بالطريقة المثلى (الأفضل الممكنة) التي يمكن من خلالها نقل منتج من مصنع أو مصانع مختلفة (تسمى أصول التوريد) إلى عدد من المستودعات (تسمى وجهات الطلب). الهدف في مشـكلة النقل هو تلبية متطلبات الوجهة بالكامل ضـمن قيود القدرة الإنتاجية التشـغيلية مع البحث عن إيجاد أقل تكلفة ممكنة.

عندما تكون هناك حركة فعلية للبضـائع من نقطة التصـنيع إلى المسـتهلكين النهائيين من خلال مجموعة متنوعة من قنوات التوزيع (تجار الجملة وتجار التجزئة والموزعين وما إلى ذلك)، تكون هناك حاجة لتقليل تكلفة النقل من أجل زيادة الربح على المبيعات. تنشـأ مشـكلات النقل في جميع الحالات التي تهدف إلى تقديم المسـاعدة للإدارة العليا في التأكد من أن عدد وحدات منتج معين التي يجب نقلها من كل مصدر توريد إلى كل وجهة طلب بحيث يتم تلبية إجمالي الطلب السائد على منتج الشركة، وفي نفس الوقت يتم تقليل إجمالي تكاليف النقل. وعادة تتناسب تكلفة الشحن من المصدر إلى الوجهة طرداً مع عدد الوحدات المشحونة.

تعود الجذور التاريخية لنموذج النقل، أو مشـكلة هيتشـكوك Hitchcock Transportation Problem، إلى عام 1941 عندما قدم هيتشكوك دراسة بعنوان "توزيع الإنتاج من عدة مصادر إلى مواقع مختلفة" إذ تطورت أساليب إيجاد الحل الأمثل لمشكلات النقل خلال الحرب العالمية الثانية واتسعت بعد تطور الطريقة المبسطة.

**تعريف مشكلة النقل:**

مشـكلة النقل عبارة عن عملية نقل مواد متشـابهة (من حيث النوع) من مراكز تمثل الاصـول (Sources) إلى مراكز أخرى تسمى النهايات (Destination). تمثل الاصـول مراكز العرض والتي قد تكون المراكز الإنتاجية أو مراكز التسويق أو مخازن حفظ (أو خزن) البضائع، أما النهايات فأنها تمثل مراكز الطلب أو الاستهلاك والتي قد تمثل مراكز البيع (الأسواق مثلاً) أو أي مركز للاستهلاك. وتتعامل مسألة النقل مع توزيع البضائع من عدة نقاط من الموردين (مصـدر العرض) إلى عدة نقاط من المسـتهلكين (وجهة الطلب). ويمكن أن تسـتخدم نماذج النقل عندما تريد شـركة أن تقرر موقع منشـأة جديدة. فالقرارات المالية الجيدة بشـأن موقع منشـأة هي محاولة لتقليل إجمالي تكاليف النقل والإنتاج للنظام بأكمله. فمن المفيد جداً قبل افتتاح مصـنع أو مسـتودع جديد أو متجر مبيعات جديد، الأخذ بالاعتبار عدد من المواقع البديلة. إذ أن القرارات المالية الجيدة المتعلقة بموقع المشروع تقلل من تكاليف الإنتاج والشحن.

تبحث هذه النماذج في إيجاد طريقة لتقليل التكلفة الممكنة لنقل الموارد (كمنتجات المصـانع والمزارع والطاقة الكهربائية والمائية وغيرها) إلى غايات معينة (كالمخازن أو مراكز التوزيع والتسـويق) بطريقة تلبي احتياج هذه الغايات من تلك الموارد في حال كون هذه الأخيرة لا تقل عن هذا الاحتياج أو بطريقة تسـتنفذ فيها جميع الموارد في حال كون هذه الموارد إيجاد من احتياج تلك الغايات. ولا يقتصـر تطبيق هذه النماذج على إيجاد الطرق ذات

التكلفة الأقل في نقل المنتجات بل يمكن تطبيقها في الحالات التي يكون الهدف فيها جعل العوائد الربحية أكبر ما يمكن.

**أنواع مشكلات النقل:**

- **متوازنة:** عندما تكون كل من الإمدادات والطلبات متســاوية، يقال إن المشــكلة هي مشــكلة نقل متوازنة بنموذج النقل المغلق.
- **غير متوازنة:** عندما لا يكون العرض والطلب متساويين، يُقال إن مشكلة النقل غير متوازنة بنموذج النقل المفتوح. في هذا النوع من المشــكلات، يتم إضــافة صــف وهمي أو عمود وهمي وفقاً للمتطلبات لجعلها مشكلة متوازنة، فيتم حلها بطريقة مشابهة للمشكلة المتوازنة.

## 5-3 حل مسألة النقل

لحل مشكلة النقل يجب قبل كل شيء صياغة مشكلة النقل.

### 5-3-1 صياغة نموذج النقل

لنرمز للأصــول (المصــانع) بالرمز ($O_i$) حيث ($i = 1,2,\ldots,m$) أي لدينا ($m$) من الأصــول التي تنقل منها البضــائع أو الوحدات. ولنرمز للنهايات (المتاجر) بالرمز ($D_j$) حيث ($j = 1,2,\ldots,n$) أي لدينا ($n$) من النهايات التي تُنقل إليها البضــائع أو الوحدات. وكلفة نقل الوحدة الواحدة من الأصـل رقم ($i$) الى النهاية رقم ($j$) يرمز لها بالرمز ($C_{ij}$).

تتوفر في الأصـول كميات من المواد المتاحة والتي تمثل الكميات المعروضـة (Supply) ويرمز لها بالرمز ( si ; i = 1,2,.., m ). وكـل نـهـايـة تحتـاج الى كميات من المواد والتي تمثـل الاحتيـاجـات أو الكميـات المطلوبـة (Demand) ويرمز لها بالرمز (dj: j = 1,2,…,n)

مجموع الكميات المعروضة يجب أن تساوي مجموع الكميات المطلوبة أي أن (Σsi = Σdj).

كمية الوحدات المنقولة من الاصـــل (i) الى النهاية (j) يرمز لها ($X_{ij}$) وتمثل متغيرات القرار في نموذج النقل.

وبما أنه لدينا عدد (m) من الاصول وعدد (n) من النهايات، لذا فإن عدد متغيرات نموذج النقل تساوي (mn).

ونرمز لتكلفة نقل والوحدة الواحدة من الأصـــل أو المصـــدر (i) إلى النهاية (j) بالرمز ($C_{ij}$) وأي نموذج نقل يمكن تمثيله بالجدول الآتي:

| النهايات / الأصول | $D_1$ | $D_2$ | ............ | $D_j$ | ............ | $D_n$ | الكميات المعروضة Supply |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $O1$ | $C_{11}$ $X_{11}$ | $C_{12}$ $X_{12}$ | ............ | $C_{1j}$ $X_{1j}$ | ............ | $C_{1n}$ $X_{1n}$ | $S1$ |
| $O2$ | $C_{21}$ $X_{21}$ | $C_{22}$ $X_{22}$ | ............ | $C_{2j}$ $X_{2j}$ | ............ | $C_{2n}$ $X_{2n}$ | $S2$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $Oi$ | $C_{i1}$ $X_{i1}$ | $C_{i2}$ $X_{i2}$ | ............ | $C_{ij}$ $X_{ij}$ | ............ | $C_{in}$ $X_{in}$ | $Si$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $Om$ | $C_{m1}$ $X_{m1}$ | $C_{m2}$ $X_{m2}$ | ............ | $C_{mj}$ $X_{mj}$ | ............ | $C_{mn}$ $X_{mn}$ | $Sm$ |
| الكميات | $d1$ | $d2$ | ............ | $dj$ | ............ | $dn$ | $\sum Si=\sum dj$ |

حيث:

(O1, O2, …, Oi,…, On ): مصادر العرض أو الأصول.

(D1, D2, …, Dj,…, Dn): مواقع الطلب أو النهايات.

$C_{ij}$: كلفة نقل الوحدة الواحدة من المصدر i إلى الموقع j.

$X_{ij}$: عدد الوحدات المنقولة من المصدر I إلى الموقع j.

وفي مراجع كثيرة يتم تمثيل نموذج مشكلة النقل بشكل مبسط كما في الجدول الآتي:

| | | Destinations الوجهة | | | | العرض Supply ($S_i$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | D1 | D2 | D3 | D4 | |
| المصدر Source | O1 | $C_{11}$ | $C_{12}$ | $C_{13}$ | $C_{14}$ | $S_1$ |
| | O2 | $C_{21}$ | $C_{22}$ | $C_{23}$ | $C_{24}$ | $S_2$ |
| | O3 | $C_{31}$ | $C_{32}$ | $C_{33}$ | $C_{34}$ | $S_3$ |
| | O4 | $C_{41}$ | $C_{42}$ | $C_{43}$ | $C_{44}$ | $S_4$ |
| Demand (dj) الطلب | | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | $d_4$ | |

في الجدول أعلاه D1 و D2 و D3 و D4 هي الوجهات التي يتم فيها تسليم المنتجات / البضائع من مصادر مختلفة O1 و O2 و O3 و O4 . مثلاً S4 هو العرض من المصدر O4 ، وd2 هو طلب الوجهة D2، و C23 هي التكلفة عند تسليم المنتج من المصدر O2 إلى الوجهة D3.

**قاعده أساسية:** قبل حل أي تمرين، لا بدّ من التأكد من الفرضية الأساسية لحل نموذج النقل وهي أن مجموع العروض من مصادر العرض يساوي مجموع الطلب في الوجهات أي:

إجمالي الطاقات = إجمالي الاحتياجات

$$\Sigma s_i = \Sigma d_j$$

وفي هذه الحالة يسمى نموذج النقل نموذجاً متوازناً. أي لدينا ثلاثة حالات ممكنة:

أ) إجمالي الطاقات = إجمالي الاحتياجاتk لا توجد مشكله

ب) إجمالي الطاقات < إجمالي الاحتياجات، توجد مشكله عدم توازن ويتم الحل بـ:

إضافة عمود وهمي بتكلفة نقل = صفر

واحتياجاته تساوي: الفرق بين مجموع الطاقات ومجموع الاحتياجات

ج) إجمالي الطاقات > إجمالي الاحتياجات، توجد مشكله عدم توازن ويتم:

إضافة عمود وهمى بتكلفة نقل = صفر

وطاقته تساوي: الفرق بين مجموع الاحتياجات ومجموع الطاقات

## 5-3-2 الصيغة الرياضية لنموذج البرمجة الخطية لمشكلة النقل

دالة الهدف تأخذ صيغة التصغير (الهدف من حل مشكلة النقل تحقيق أقل كلفة ممكنة):

$$Min.Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}$$

**قيود النموذج:**

مجموعة القيود الأولى وعددها (m) من القيود:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \leq s_i \qquad , i= 1,2,\dots, m$$

تلك القيود تضـــمن أن تكون الكمية المطلوبة من الأصـــل رقم (i) يجب ألا تزيد عن المتاح في ذلك الأصـــل.

ومجموعة القيود الثانية وعددها (n) من القيود:

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \leq d_j \qquad , j= 1,2,\dots, n$$

تضـــمن هذه القيود أن تكون الكمية المنقولة للنهاية (j) لا تقل عن حاجة تلك النهاية. بالإضـــافة، إلى قيود اللاسلبية أي أن الكميات المنقولة من الأصل i الى النهاية j أكبر من أو تساوي الصفر $X_{ij} \geq 0$ .

إذا كان مجموع الكميات المعروضــة تفي باحتياجات السـوق الممكنة (أي مجموع الكميات المطلوبة) بمعنى أن:

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

والذي يمثل شرط التوازن لمشكلة النقل، وبموجب هذا الشرط يصبح النموذج في صيغة النموذج القياسي والنموذج في هذه الحالة يسـمى بنموذج النقل المتوازن وقيوده تكون جميعها بهيئة معادلات. صـيغة نموذج النقل المتوازنة تكون كالآتي:

$$Min. Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}$$

S.T.

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = s_i \quad , i= 1,2,\dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = d_j \quad , j= 1,2,\dots, n$$

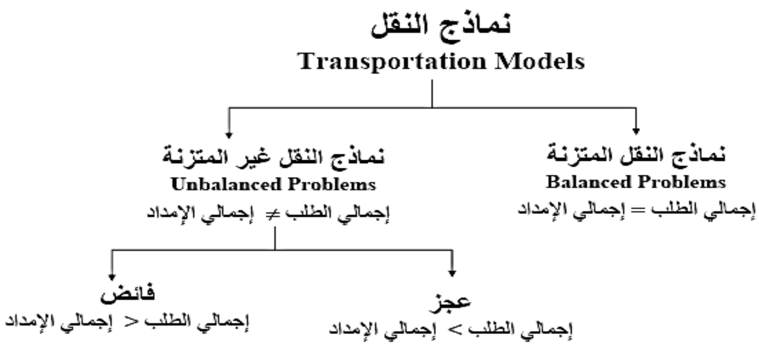
$$X_{ij} \geq 0$$

إن الهدف من حل مشكلة النقل هو تقليل التكاليف إلى أدنى حد ممكن.

## 4-5 موازنة جدول النقل

في كثير من المجالات التطبيقية في المجالات الاقتصـــادية يصـــعب تحقيق شــرط التوازن، أي أن مجموع كمية العرض لا تســاوي مجموع كمية الطلب وفي هذه الحالة يكون جدول النقل غير متوازن، عندها نقوم بإضــافة إما

صف يمثل جهة طلب أو عمود يمثل مصدر عرض وهمي حسب المسألة المراد حلها لجعل مشكلة النقل متوازنة كما يبينه الشكل التالي.




- إذا كان مجموع كمية الطلب أكبر من مجموع كمية العرض في جدول النقل نضـــيف مصـــدر عرض وهمي، كمية العرض فيه تساوي حاصل الفرق بين مجموع الطلب ومجموع العرض، لسد العجز الحاصل في كمية العرض وجعل جدول النقل متوازن.

- أما إذا كان مجموع كمية العرض أكبر من مجموع كمية الطلب في جدول النقل نضـــيف جهة طلب وهمية، كمية الطلب فيه تساوي حاصل الفرق بين مجموع العرض ومجموع الطلب، لسد العجز الحاصل في كمية الطلب وجعل جدول النقل متوازن وأن كلفة نقل وحدة واحدة من أي مصـدر وهمي إلى أي جهة طلب تسـاوي صـفر وكذلك كلفة نقل أي وحدة واحدة من أي مصـدر إلى أي جهة طلب وهمية تسـاوي صفر.

ولكي نحصل على حل صحيح بأي طريقة يجب تحقق المعادلة الآتية:

**عدد الخلايا الممتلئة = (عدد الصفوف i + عدد الأعمدة j) − 1**

للعثور على حل أولي أساسي ممكن لحل مشكله النقل، يتم إعداد جدول النقل بأحد الطرق الثلاثة:

- طريقة الركن أو الزاوية الشمالي الغربي Northwest corner method.
- طريقة أقل التكاليف The least cost transportation problem.
- طريقة فوجل Vogel's Approximation Method.

حيث يكون في كل جدول:

1) عدد الصفوف (عدد المصانع أو مصادر العرض المراد النقل منها) = عدد أعمدتها (عدد الوجهات أو المنافذ أو المواقع أماكن الطلب المراد النقل إليها).

2) تقاطع كل صف مع كل عمود يسمى خلية، ويوضع في الخلية (الكمية) المراد نقلها من مصادر العرض الى مواقع الطلب.

3) كل خليه لها تكلفه نقل للوحدة من المصدر إلى الموقع (توضع في مربع صغير في زاوية الخلية).

4) ليس من الضروري تساوى عدد المصادر مع عدد المواقع ولكن يجب تساوى مجموع طاقات المصادر مع مجموع احتياجات المواقع.

ملاحظة: تختلف الطرق في نتائج الحل الأساسي الذي تقدمه وينتج الحل الابتدائي الأفضل إذا كانت قيمة دالة الهدف أقل ما يمكن.

## 5-5 إيجاد الحل الأساسي الأولي بطريقة الركن الشمالي الغربي

**North West Corner Cell**

تعتبر أســـهل الطرق، إلا أنها في أغلب الأحيان لا تحقق حلاً أمثلاً للمشـــكلة، أي أنها لا تحقق أقل التكاليف الممكنة الناجمة عن نقل السلع من المصادر إلى المراكز النهائية (التسويقية، الاستهلاكية أو البيعية...).

أما فيما يخص خطوات الحل بموجب هذه الطريقة فهي:

1- تنظيم مصفوفة، توضح فيها مصادر التجهيز ومناطق الاستخدام والطاقات الاستيعابية والطلب، فضلاً عن كلفة نقل الوحدة من كل مصدر إلى كل منطقة استخدام.

2- ينبغي أن تكون المصفوفة متوازنة قبل البدء في الحل بمعنى آخر يجب أن تكون الطاقات التجهيزية مساوية لطلبات المراكز الاســتهلاكية، فإذا لم تكن كذلك فيجب إضـــافة صـــف وهمي Row Dummy إذا كانت الطاقة التجهيزية إيجاد من الطلب، أو إضـــافة عمود وهمي Column Dummy إذا كان الطلب إيجاد من الطاقة التجهيزية.

3- تغطية كافة احتياجات الخلية الواقعة في الركن الشـمالي الغربي من المصـفوفة ككل وبغض النظر عن كلفة النقل إليها، إن كان ذلك ممكناً، أي إذا توفرت في المصـدر كمية مساوية لاحتياجات منطقة الاسـتخدام أو تزيد عنها، أي إذا كانت الطاقة التجهيزية أكبر أو مســاوية للطلب. أما إذا حدث العكس أي إذا كان ما هو متوفر من المصدر الأول أقل من احتياجات منطقة الاستخدام فإنه يمكن تلبية جزء من احتياجات الخلية.

ثم يستمر التخصيص بالطريقة نفسها حتى الحصول على الحل الأساسي الممكن.

**ملاحظة:** لزيادة الاستيعاب والتعامل مع مختلف المصادر والمراجع، في الجداول المتتالية ولتسهيل الحل سنتبع طريقتين:

الطريقة الأولى: نضع خط على السطر (المصنع) الذي يُستنفذ إنتاجه، ونضع خط على العمود (المنفذ) الذي يحصل على احتياجاته، أو أي طريقة أخرى نجدها ملائمة.

أو بطريقة ثانية: سنقوم بالحذف تباعاً لكل سطر (مصنع) يُستنفذ إنتاجه، وكذلك حذف كل عمود (منفذ) يحصل على احتياجاته.

مثال (5−1). سنقوم بهذا المثال بوضع التكاليف بشكل عادي في الخلايا، ونضع الكميات المنقولة في مربع صغير في زاوية الخلية. ونقوم بوضع خط على السطر (المصنع) الذي يُستنفذ إنتاجه، ونضع خط على العمود (المنفذ) الذي يحصل على احتياجاته.

بتطبيق هذه الطريقة على المثال السابق. ليكن لدينا ثلاثة مصادر (مصانع) هي **O1** و **O2** و **O3** عرضها **300**و **400** و **500** على التوالي، وأربع وجهات (مواقع) هي: **D1** و **D2** و **D3** و **D4**. تتطلب الوجهات طلبات **250** و **350** و **400** و **200** على التوالي.

| | | Destinations الوجهة | | | | العرض |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | D1 | D2 | D3 | D4 | Supply ($S_i$) |
| المصدر Source | O1 | 3 | 1 | 7 | 4 | 300 |
| | O2 | 2 | 6 | 5 | 9 | 400 |
| | O3 | 8 | 3 | 3 | 2 | 500 |
| Demand (dj) الطلب | | 250 | 350 | 400 | 200 | 1200 |

الحل:

يجب أن تكون نقطة البداية هي تقاطع العرض O1، والطلب D1 أي (O1, D1)، في الزاوية الشـــمالية الغربية للجدول. كل قيمة في الخلية تعتبر تكلفة النقل. نقارن الطلب على العمود D1 والعرض من المصـــدر O1 ونقوم بتخصـــيص الحد المطلوب (كمية الطلب) من O1، إلى الوجهة (كمية الطلب) D1. حيث يكون تخصـــيص العرض الخاص بالصف المعني وطلب العمود المعني أيهما أصغر. كما هو موضح في الجدول الآتي:

| | | Destinations الوجهة | | | | العرض |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | D1 | D2 | D3 | D4 | Supply ($S_i$) |
| المصدر Source | O1 | 250 / 3 | 1 | 7 | 4 | ~~300~~ 50 |
| | O2 | 2 | 6 | 5 | 9 | 400 |
| | O3 | 8 | 3 | 3 | 2 | 500 |
| Demand (dj) الطلب | | ~~250~~ 0 | 350 | 400 | 200 | 1200 |

اكتمل الطلب على العمود D1، لذلك ســيتم إلغاء العمود D1 بأكمله، ويتبقى من العرض أي المصـــدر O1 الكمية: 300-250 = 50

الآن من الجدول المتبقي السـابق، أي باسـتثناء العمود D1، نتحقق من الزاوية الشـمالية الغربية أي تقاطع (O1, D2)، ونقوم بتخصـيص ما تبقى من العرض للصـف O1 للعمود والصـف المعني D2. العرض من O1 هو 50وهو أقل من الطلب من D2 أي 350، لذا نخصـــص 50 للخلية (O1, D2)، وبعد اكتمال التوريد من الصف O1، نقوم بإلغاء الصف O1. ويتبقى من الطلب في العمود D2 الكمية: 350-50 = 300

| | | Destinations الوجهة | | | | العرض |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | D1 | D2 | D3 | D4 | Supply ($S_i$) |
| المصدر Source | O1 | 250 / 3 | 50 / 1 | 7 | 4 | ~~300~~ ~~50~~ 0 |
| | O2 | 2 | 6 | 5 | 9 | 400 |
| | O3 | 8 | 3 | 3 | 2 | 500 |
| Demand (dj) الطلب | | ~~250~~ 0 | ~~350~~ 300 | 400 | 200 | 1200 |

من الجدول المتبقي، نقوم بتعبئة حاجة خلية الزاوية الشمالية الغربية (O2, D2)، حيث العرض من المصدر O2 يساوي 400، والطلب المتبقي للعمود D2 يساوي 300، لذا نورد 300 للخلية (O2, D2) من المصدر O2، ليكتمل الطلب على العمود D2، ثم نقوم بإلغاء العمود D2 والعرض المتبقي من المصدر O2 هو: 300 - 400 = 100

| | | Destinations الوجهة | | | | العرض |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | D1 | D2 | D3 | D4 | Supply ($S_i$) |
| المصدر Source | O1 | **250** / 3 | **50** / 1 | 7 | 4 | ~~**300**~~ ~~**50**~~ **0** |
| | O2 | 2 | **300** / 6 | 5 | 9 | ~~**400**~~ **100** |
| | O3 | 8 | 3 | 3 | 2 | **500** |
| Demand (dj) الطلب | | ~~**250**~~ **0** | ~~**350**~~ ~~**300**~~ **0** | **400** | **200** | 1200 |

الآن من الجدول المتبقي السابق، نبحث عن الخلية في الركن الشمالي الغربي أي (O2, D3)، ونقارن بين عرض O2 أي المتبقي 100، والطلب من D2 أي 400، ونقوم بتخصيص كامل الكمية المتبقية في O2 (أي 100) للخلية (O2, D3) فيكتمل التوريد من O2، ثم نقوم بإلغاء الصف O2. والطلب المتبقي للعمود D3يساوي: 300 = 400-100.

| | | Destinations الوجهة | | | | العرض Supply ($S_i$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | D1 | D2 | D3 | D4 | |
| المصدر Source | O1 | **250** / 3 | 50 / 1 | 7 | 4 | ~~**300**~~ ~~**50**~~ **0** |
| | O2 | 2 | **300** / 6 | **100** / 5 | 9 | ~~**400**~~ ~~**100**~~ **0** |
| | O3 | 8 | 3 | 3 | 2 | **500** |
| Demand (dj) الطلب | | ~~**250**~~ **0** | ~~**350**~~ ~~**300**~~ **0** | ~~**400**~~ **300** | **200** | 1200 |

بالطريقة نفسها، ستكون القيم النهائية للخلايا هي:

| | | Destinations الوجهة | | | | العرض Supply ($S_i$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | D1 | D2 | D3 | D4 | |
| المصدر Source | O1 | 250<br>3 | 50<br>1 | 7 | 4 | ~~300~~ ~~50~~ 0 |
| | O2 | 2 | 300<br>6 | 100<br>5 | 9 | ~~400~~ ~~100~~ 0 |
| | O3 | 8 | 3 | 300<br>3 | 2 | ~~500~~ 200 |
| Demand (dj) الطلب | | ~~250~~ 0 | ~~350~~ ~~300~~ 0 | ~~400~~ ~~300~~ 0 | 200 | 1200 |

والجدول الأخير:

| | | Destinations الوجهة | | | | العرض Supply ($S_i$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | D1 | D2 | D3 | D4 | |
| المصدر Source | O1 | 250<br>3 | 50<br>1 | 7 | 4 | ~~300~~ ~~50~~ 0 |
| | O2 | 2 | 300<br>6 | 100<br>5 | 9 | ~~400~~ ~~100~~ 0 |
| | O3 | 8 | 3 | 300<br>3 | 200<br>2 | ~~500~~ ~~200~~ 0 |
| Demand (dj) الطلب | | ~~250~~ 0 | ~~350~~ ~~300~~ 0 | ~~400~~ ~~300~~ 0 | ~~200~~ 0 | 1200 |

**ملاحظة:** في الخلية الأخيرة المتبقية، يكون الطلب على الأعمدة والصــفوف المعنية متســاوياً وهي الخلية (O3, D4)، حيث كان العرض من O3 هو 200 والطلب على D4 هو 200 والذي يتم تخصـــيصـــه لهذه الخلية. أخيراً، لم يبق شيء لأي صف أو عمود.

الآن ولحساب التكلفة الكلية للنقل: نقوم بضرب القيمة المخصصة مع قيمة الخلية المعنية (أي التكلفة) ونضفهم جميعاً للحصول على الحل الأساسي:

$$(250 * 3) + (50 * 1) + (300 * 6) + (100 * 5) + (300 * 3) + (200 * 2) = 4400$$

يلاحظ من هذه الطريقة، إن عملية تحديد الخلية التي ســـوف تُغطى احتياجاتها يعتمد على موقعها وليس على كلفة النقل من المصـــادر إلى مناطق الاســتخدام، مع أن الهدف هو تخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن ولهذا فإننا لا نتوقع من هذه الطريقة في الغالب التوصل إلى الحل الأمثل .

مثال (5−2). شركة للصناعات الغذائية تمتلك 3 مصانع في المواقع التالية: حلب، الحسكة، دير الزور، طاقتها الإنتاجية (العرض): 1200، 800، 800 على التوالي. وتقوم بتســـويق إنتاجها من خلال 3 منافذ للبيع هي: دمشـــق، حمص، حماه، وتبلغ طاقتها الاســـتيعابية (طلبياتها أو احتياجاتها): 1500، 700، 600 على التوالي.

فإذا علمت أن تكلفة نقل الوحدة من المصانع إلى منافذ البيع كانت كما يلي:

| إلى / من | دمشق | حمص | حماة | العرض |
|---|---|---|---|---|
| حلب | 8 | 5 | 6 | 1200 |
| الحسكة | 15 | 10 | 12 | 800 |
| دير الزور | 3 | 9 | 10 | 800 |
| الطلب | 1500 | 700 | 600 | 2800 |

الخطوة الأولى:

| إلى / من | دمشق | حمص | حماة | العرض |
|---|---|---|---|---|
| حلب | 8<br>1200 | 5 | 6 | 1200/0 |
| الحسكة | 15 | 10 | 12 | 800 |
| دير الزور | 3 | 9 | 10 | 800 |
| الطلب | 1500 | 700 | 600 | 2800 |

الخطوة الثانية

| من \ إلى | دمشق | حمص | حماة | العرض |
|---|---|---|---|---|
| الحسكة | $\boxed{15}$ 300 | $\boxed{10}$ | $\boxed{12}$ | 800-300=500 |
| دير الزور | $\boxed{3}$ | $\boxed{9}$ | $\boxed{10}$ | 800 |
| الطلب | 300/0 | 700 | 600 | |

الخطوة الثالثة:

| من \ إلى | حمص | حماة | العرض |
|---|---|---|---|
| الحسكة | $\boxed{10}$ 500 | $\boxed{12}$ | 500/0 |
| دير الزور | $\boxed{9}$ | $\boxed{10}$ | 800 |
| الطلب | 700/200 | 600 | |

الخطوة الرابعة:

| من \ إلى | حمص | حماة | العرض |
|---|---|---|---|
| دير الزور | $\boxed{9}$ 200 | $\boxed{10}$ | 800/600 |
| الطلب | 0/200 | 600 | |

والجدول الأخير يكون كما يلي:

| من \ إلى | دمشق | حمص | حماة | العرض |
|---|---|---|---|---|
| حلب | $\boxed{8}$ 1200 | $\boxed{5}$ | $\boxed{6}$ | 1200/0 |
| الحسكة | $\boxed{15}$ 300 | $\boxed{10}$ 500 | $\boxed{12}$ | 800 |
| دير الزور | $\boxed{3}$ | $\boxed{9}$ 200 | $\boxed{10}$ 600 | 800 |
| الطلب | 1500 | 700 | 600 | 2800 |

**الخطوة الأخيرة:** لحساب تكاليف النقل بطريقة الركن الشمال الغربي للحصول على الحل الأساسي، فقط نضرب القيمة المخصصة للخلايا بتكلفة الخلية المقابلة ونجمع الكل للحصول على التكلفة النهائية: أي ضرب قيم كل متغير (باللون الأزرق) في تكلفته (باللون الأحمر).

تكاليف النقل = $1200 * 8 + 15*300 + 10*500 + 9*200 + 10*600 = 26900$

## 5-6 إيجاد الحل الأساسي الأولي بطريقة أقل التكاليف

تعالج هذه الطريقة مشكلات النقل؛ إذ تقوم بترتيب تكاليف النقل من المصدر إلى الهدف تصاعدياً بحيث يؤدي إ لى إظهار التكلفة الأقل بوضوح.

إن إحدى مساوئ طريقة الزاوية الشمالية الغربية هو عدم تحقيق الاستفادة من التكلفة القليلة المتوفرة في مشكلة نقل معينة عند تلبية احتياجات مراكز الطلب، لذا وضعت طريقة أقل التكاليف لمعالجة مثل هذا النوع من العيوب في نماذج النقل، حيث يتم البحث والتركيز بموجب هذه الطريقة على أقل تكلفة متوفرة في جدول النقل ومن ثم تحديد جهتي الطلب والعرض.

يتطلب هذا استعراض جدول التكاليف وتحديد أصغر كلفة نقل ممكنة وتخصص قيمة لهذا المتغير على ضوء الكمية المعروضة في الصف والكمية المطلوبة في العمود (أي الصف والعمود اللذان يحددان موقع هذا المتغير)، بعد ذلك نحدد أصغر كلفة ممكنة أخرى ونخصص قيمة لهذا المتغير وهكذا نستمر إلى أن يتم توزيع كافة الوحدات المعروضة.

وفي حالة تساوي أصغر كلفتين في الجدول نختار واحدة بينهما عشوائياً.

وستتضح الخطوات بتطبيق هذه الطريقة على المثال (5−1) السابق:

| | | Destinations الوجهة | | | | العرض Supply ($S_i$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **D1** | **D2** | **D3** | **D4** | |
| **المصدر Source** | **O1** | 3 | 1 | 7 | 4 | **300** |
| | **O2** | 2 | 6 | 5 | 9 | **400** |
| | **O3** | 8 | 3 | 3 | 2 | **500** |
| **Demand (dj) الطلب** | | **250** | **350** | **400** | **200** | **1200** |

**الحل:** وفقاً لطريقة الخلية الأقل تكلفة، يجب العثور على أقل تكلفة بين جميع الخلايا في الجدول وهي التكلفة 1 أي في الخلية (O1, D2). نتحقق الآن من العرض من الصف O1 والطلب في العمود D2 ونقوم بملء القيمة المطلوبة للخلية وفق حاجة الطلب في العمود D2 وتساوي 350 لذا نخصص كامل العرض من الصف O1 للخلية. فنجد أنه قد اكتمل التوريد من الصف O1، ثم نقوم بإلغاء هذا الصف والطلب المتبقي للعمود D2 هو 50 = 350-300.

| | | Destinations الوجهة | | | | العرض Supply ($S_i$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **D1** | **D2** | **D3** | **D4** | |
| **المصدر Source** | **O1** | 3 | **300** / 1 | 7 | 4 | ~~300~~ **0** |
| | **O2** | 2 | 6 | 5 | 9 | **400** |
| | **O3** | 8 | 3 | 3 | 2 | **500** |
| **Demand (dj) الطلب** | | **250** | ~~350~~ **50** | **400** | **200** | 1200 |

نبحث الآن عن الخلية الأقل تكلفة بين الخلايا المتبقية.، نجد أنه توجد خليتان في المصفوفة بأقل تكلفة هما (O2, D1)، (O3,D4) بتكلفة 2، في هذه الحالة نختار ملء الخلية (O2, D1)، لأن كمية الطلب تساوي 250 وهي أكبر من كمية الطلب للخلية (O3,D4)، نخصص جزء من العرض من الصف O2 والبالغ 400

للخلية. فنجد أنه قد اكتمل التوريد للطلب D1، ثم نقوم بإلغاء هذا العمود والعرض المتبقي للصف O2 هو 400- 250 = 150.

| | | Destinations الوجهة | | | | العرض Supply ($S_i$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | D1 | D2 | D3 | D4 | |
| المصدر Source | O1 | 3 | 300 1 | 7 | 4 | ~~300~~ 0 |
| | O2 | 250 2 | 6 | 5 | 9 | ~~400~~ 150 |
| | O3 | 8 | 3 | 3 | 2 | 500 |
| Demand (dj) الطلب | | ~~250~~ 0 | ~~350~~ 50 | 400 | 200 | 1200 |

ثم ننتقل مباشـــرة للخلية الأقل تكلفة وهي (O3,D4) بتكلفة 2 فننقل لهذه الخلية الكمية 200 فقط وهو الطلب الإجمالي للطلب D4 من عرض الصـــف O3 البالغ 500. ويتم إلغاء العمود D4 لاكتمال توريده. والعرض المتبقي للصف O3 هو: 400-250 = 150.

| | | Destinations الوجهة | | | | العرض Supply ($S_i$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | D1 | D2 | D3 | D4 | |
| المصدر Source | O1 | 3 | 300 1 | 7 | 4 | ~~300~~ 0 |
| | O2 | 250 2 | 6 | 5 | 9 | ~~400~~ 150 |
| | O3 | 8 | 3 | 3 | 200 2 | ~~500~~ 300 |
| Demand (dj) الطلب | | ~~250~~ 0 | ~~350~~ 50 | 400 | ~~200~~ 0 | 1200 |

حتى الآن يتبقى خليتان من بين الخلايا غير المخصـــصـــة بنفس التكلفة وهما(O3, D2)، (O3, D3)، فنقوم باختيار الخلية الأقل تكلفة (O3, D2)، لاسـتكمال طلبها، ثم نقوم بتخصـيص هذه الخلية بما يتوافق مع ما تبقى من حاجة طلب العمود المعني D2 وتسـاوي 50 من الصـف المعني O3، الذي تبقى لديه عرض 300 ونقوم بإلغاء العمود D2 لاكتمال توريده. والعرض المتبقي للصف O3 هو: 250 = 50 - 300.

| | | Destinations الوجهة | | | | العرض Supply ($S_i$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | D1 | D2 | D3 | D4 | |
| المصدر Source | O1 | 3 | 300 / 1 | 7 | 4 | ~~300~~ 0 |
| | O2 | 250 / 2 | 6 | 5 | 9 | ~~400~~ 150 |
| | O3 | 8 | 50 / 3 | 3 | 200 / 2 | ~~500~~ ~~300~~ 250 |
| Demand ($d_j$) الطلب | | ~~250~~ 0 | ~~350~~ ~~50~~ 0 | 400 | ~~200~~ 0 | 1200 |

الآن الخلية المطلوبة ذات التكلفة الأقل هي (O3 ,D3)، نقوم بتخصـــيص هذه الخلية بما يتوافق مع ما تبقى من عرض الصـــف O3 وهو 250 فيتبقى من طلب D3 كمية تســـاوي: 150=250 − 400 وإلغاء الصـــف O3 لإنتهاء عرضه.

| | | Destinations الوجهة | | | | العرض Supply ($S_i$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | D1 | D2 | D3 | D4 | |
| المصدر Source | O1 | 3 | 300 / 1 | 7 | 4 | ~~300~~ 0 |
| | O2 | 250 / 2 | 6 | 5 | 9 | ~~400~~ 150 |
| | O3 | 8 | 50 / 3 | 250 / 3 | 200 / 2 | ~~500~~ ~~300~~ ~~250~~ 0 |
| Demand ($d_j$) الطلب | | ~~250~~ 0 | ~~350~~ ~~50~~ 0 | ~~400~~ 150 | ~~200~~ 0 | 1200 |

الخلية الوحيدة المتبقية هي (O2, D3)، بتكلفة 5 وعرضـــــها المتبقي من O2 هو 150 والطلب المتبقي من D3هو 150 أي أن كلاً من العرض والطلب متساويان، فيتم تخصيص العرض لطلب هذه الخلية.

| | | Destinations الوجهة | | | | العرض Supply ($S_i$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | D1 | D2 | D3 | D4 | |
| المصدر Source | O1 | 3 | 300 / 1 | 7 | 4 | ~~300~~ 0 |
| | O2 | 250 / 2 | 6 | 150 / 5 | 9 | ~~400~~ ~~150~~ 0 |
| | O3 | 8 | 50 / 3 | 250 / 3 | 200 / 2 | ~~500~~ ~~300~~ ~~250~~ 0 |
| Demand ($d_j$) الطلب | | ~~250~~ 0 | ~~350~~ ~~50~~ 0 | ~~400~~ ~~150~~ 0 | ~~200~~ 0 | 1200 |

ولحساب تكلفة النقل بطريقة أقل التكاليف للحصول على الحل الأساسي، فقط نضرب القيمة المخصصة للخلايا بتكلفة الخلية المقابلة ونجمع الكل للحصول على التكلفة النهائية:

$$(300 * 1) + (25 * 2) + (150 * 5) + (50 * 3) + (250 * 3) + (200 * 2) = 2400$$

حيث نجد أن تكلفة النقل بطريقة أقل التكاليف (2400) قد انخفضت عن تكلفة النقل المحسوبة بطريقة الركن الشمالي الغربي (4400).

## 5-7 إيجاد حل أساسي أولي بطريقة فوجل *Vogel* التقريبية

تمت مناقشة طريقة الركن الشمالي الغربي وطريقة أقل التكاليف في الفقرات السابقة. في هذه الفقرة، ستتم مناقشة طريقة فوجل Vogel التقريبية.

تتلخص طريقة فوجل التقريبية لإيجاد حل أولي ممكن لمشكلة النقل في الخطوات الآتية:

1 – يُحسب الجزاء أو الغرامة (opportunity cost) لكل صف وعمود؛ وذلك بإيجاد الفرق بين أقل تكلفتين في هذا الصف أو العمود.

2 – يُحدد الصف أو العمود الذي له أكبر جزاء أو غرامة، وإذا وُجد صفان أو عمودان أو صف وعمود لهما الجزاء نفسه يُختار أحدهما عشوائياً، ثم تحدد الخلية التي لها أقل تكلفة في الصف أو العمود المختار، ويُخصص لها أكبر كمية ممكنة بالمقارنة بين مجموع الصف والعمود لهذه الخلية، وتُملأ بأقل المجموعين، وفي هذه الحالة يُشطب الصف أو العمود الذي نفد مجموعه ويُعدل المجموع الآخر. وإذا كان مجموع الصف يساوي مجموع العمود يُشطب أحدهما ويكون مجموع الآخر صفراً ويظل مفتوحاً.

3 – يُعاد حســـاب الجزاء أو الغرامة لكل صـــف وعمود غير مشـــطوب، وتُكرر الخطوات (1) و (2) حتى يتم التخصيص كاملاً.

**ملاحظة:** عند تساوي الفروق في الصفوف والأعمدة نأخذ الفرق الثاني وذلك بشطب أقل قيمة من الصف والعمود ونأخذ الفرق الذي بعده، أما إذا كانت كل الفروق في الصفوف والأعمدة متساوية في كل المراحل تفشل طريقة فوجل ونأخذ طريقة أقل التكاليف.

بأخذ بيانات المثال (5–1) السابق:

| | | **Destinations الوجهة** | | | | **العرض Supply ($S_i$)** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **D1** | **D2** | **D3** | **D4** | |
| **المصدر Source** | **O1** | 3 | 1 | 7 | 4 | **300** |
| | **O2** | 2 | 6 | 5 | 9 | **400** |
| | **O3** | 8 | 3 | 3 | 2 | **500** |
| **Demand (dj) الطلب** | | **250** | **350** | **400** | **200** | 1200 |

نقوم بإيجاد الحل الأساسي الأولي بطريقة فوجل التقريبية كما يلي:

- لكل صـــــف، نبحث عن أقل قيمة ثم ثاني أقل قيمة وأخذ الفرق بالقيمة المطلقة | | بين هاتين القيمتين الصغرى ونكتبه في فرق الصف المقابل كما هو موضح في الجدول أدناه. في الصف O1، القيمة 1 هي أقل قيمة والقيمة 3 هي ثاني أقل قيمة والفرق بالقيمة المطلقة بينهما هو 2. وبالمثل، بالنسـبة للصـف O2و O3، فإن الفروق المطلقة هي 3 و1 على التوالي.

| المصدر \ الوجهة | D1 | D2 | D3 | D4 | العرض | الفرق في الأسطر |
|---|---|---|---|---|---|---|
| O1 | 3 | 1 | 7 | 4 | 300 | **2** |
| O2 | 2 | 6 | 5 | 9 | 400 | **3** |
| O3 | 8 | 3 | 3 | 2 | 500 | **1** |
| الطلب | 250 | 350 | 400 | 200 | 1200 | |
| الفرق في الأعمدة | **1** | **2** | **2** | **2** | | |

- نبحث عن أقل قيمة لكل عمود ثم ثاني أقل قيمة وأخذ الفرق بالقيمة المطلقة | | بين هاتين القيمتين الصغرى ثم نكتبه في فرق العمود المقابل كما هو موضح في الجدول أدناه. في العمود D1، القيمة 2 هي أقل قيمة والقيمة 3 هي ثاني أقل قيمة والفرق بالقيمة المطلقة بينهما هي 1. وبالمثل، بالنسبة للعمود D2 و D3 و D3، فإن الفروق بالقيمة المطلقة هي 2 و 2 و 2 على التوالي.
- تسمى قيمة اختلاف الصفوف واختلاف العمود أيضاً الجزاء (أو الغرامة)، ثم نحدد أقصى غرامة. أقصى غرامة هي 3 الموجودة في صف O2، فنبحث الآن عن الخلية الأقل تكلفة في الصف O2 ثم نقوم بتخصيص العرض الخاص بالصف المعني وطلب العمود المعني أيهما أصغر. هنا نجد أن الطلب أصغر من العرض، لذا نخصص طلب العمود أي 250 للخلية، ثم نقوم بإلغاء العمود D1.

الوجهة

| المصدر | D1 | D2 | D3 | D4 | العرض | الفرق في الأسطر |
|---|---|---|---|---|---|---|
| O1 | 3 | 1 | 7 | 4 | 300 | 2 |
| O2 | 250 / 2 | 6 | 5 | 9 | ~~400~~ 150 | 3 |
| O3 | 8 | 3 | 3 | 2 | 500 | 1 |
| الطلب | ~~250~~ 0 | 350 | 400 | 200 | 1200 | |
| الفرق في الأعمدة | 1 | 2 | 2 | 2 | | |

في الخلايا المتبقية، نقوم بحساب فرق الصف وفرق العمود:

الوجهة

| المصدر | D1 | D2 | D3 | D4 | العرض | الفرق في الأسطر | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| O1 | 3 | 1 | 7 | 4 | 300 | 2 | 3 |
| O2 | 250 / 2 | 6 | 5 | 9 | ~~400~~ 150 | 3 | 1 |
| O3 | 8 | 3 | 3 | 2 | 500 | 1 | 1 |
| الطلب | ~~250~~ 0 | 350 | 400 | 200 | 1200 | | |
| الفرق في الأعمدة | 1 | 2 | 2 | 2 | | | |
| | - | 2 | 2 | 2 | | | |

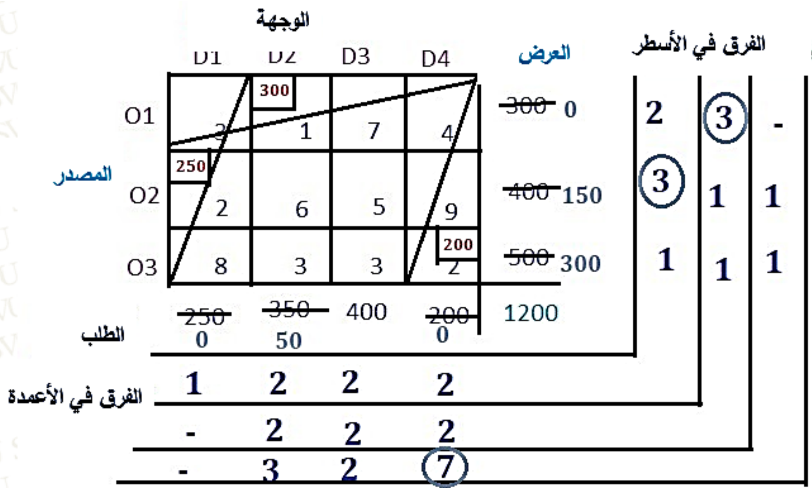
نحدد مرة أخرى الحد الأقصى للغرامة وهو 3 المقابل للصف O1 والخلية الأقل تكلفة في الصف O1 هي (O1, D2)، مع تكلفة 1. نقوم بنقل الحد الأدنى بين العرض والطلب من الصف والعمود المعنيين إلى الخلية، ثم نقوم بإلغاء الصف الذي ينتهي عرضه أو العمود الذي تكتمل حاجته.

| | الوجهة | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| المصدر | D1 | D2 | D3 | D4 | العرض | الفرق في الأسطر | | |
| O1 | 3 | 300 1 | 7 | 4 | ~~300~~ 0 | 2 | 3 | |
| O2 | 250 2 | 6 | 5 | 9 | ~~400~~ 150 | 3 | 1 | |
| O3 | 8 | 3 | 3 | 2 | 500 | 1 | 1 | |
| الطلب | ~~250~~ 0 | ~~350~~ 50 | 400 | 200 | 1200 | | | |
| الفرق في الأعمدة | 1 | 2 | 2 | 2 | | | | |
| | - | 2 | 2 | 2 | | | | |

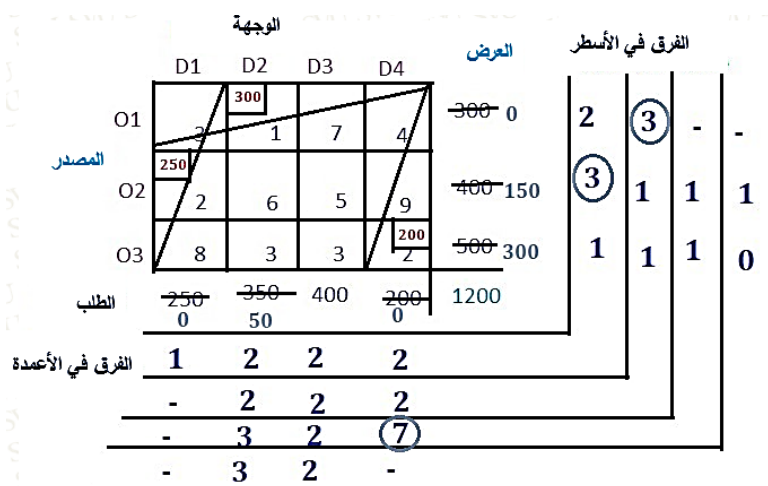
نبحث الآن عن فرق الصف وفرق العمود للخلايا المتبقية.

| | الوجهة | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| المصدر | D1 | D2 | D3 | D4 | العرض | الفرق في الأسطر | | |
| O1 | 3 | 300 1 | 7 | 4 | ~~300~~ 0 | 2 | 3 | - |
| O2 | 250 2 | 6 | 5 | 9 | ~~400~~ 150 | 3 | 1 | 1 |
| O3 | 8 | 3 | 3 | 2 | 500 | 1 | 1 | 1 |
| الطلب | ~~250~~ 0 | ~~350~~ 50 | 400 | 200 | 1200 | | | |
| الفرق في الأعمدة | 1 | 2 | 2 | 2 | | | | |
| | - | 2 | 2 | 2 | | | | |
| | - | 3 | 2 | 7 | | | | |

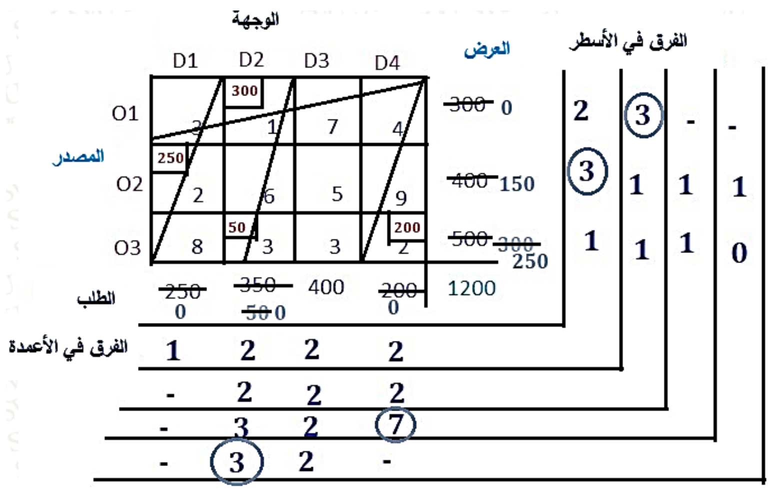
نحدد الآن الحد الأقصـــى للغرامة وهي القيمة 7 المقابلة للعمود D4 والصــف O3 المقابلة لأقل تكلفة في الخلية (O3, D4) بتكلفة 2 والطلب أصغر من العرض للخلية (O3, D4). ونمدها بـ 200.



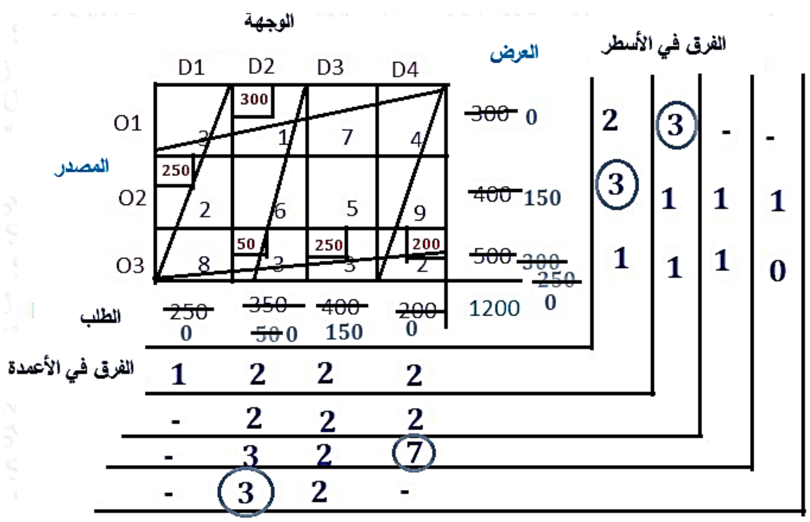

ثم نبحث عن فرق الصف وفرق العمود للخلايا المتبقية.



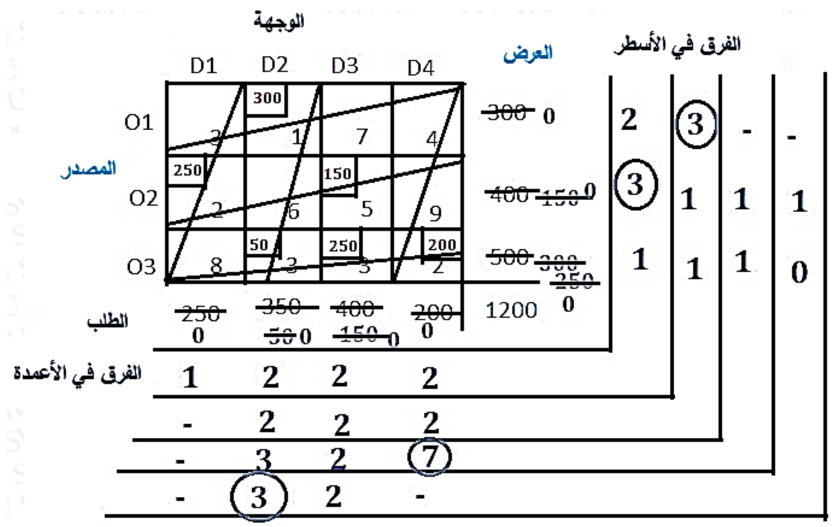

للخلايا المتبقية نجد الحد الأقصـــى للغرامة هو 3 المقابل للعمود D2 وفيه نجد أن الخلية (O3, D2) ذات القيمة الأقل في العمود، فيتم تخصيص الحد الأدنى للعرض والطلب وإلغاء العمود.




يوجد الآن عمود واحد فقط، لذا نحدد الخلية الأقل تكلفة ونخصص القيمة كما في الخطوات السابقة.




الآن هناك خلية واحدة فقط، لذا نخصص الطلب أو العرض المتبقي للخلية




فنجد أنه لا يوجد رصيد متبقي. ولحساب تكلفة النقل بطريقة فوجل التقريبية والحصول على الحل الأساسي، فقط نضرب القيمة المخصصة للخلايا بتكلفة الخلية المقابلة ونجمع الكل للحصول على التكلفة النهائية، أي:

$$(300 * 1) + (250 * 2) + (50 * 3) + (250 * 3) + (200 * 2)\ ) + (150 * 5) = 2850$$

وللاستمرار في العمليات الحسابية لإيجاد الحل الأمثل، فإنه من الضروري أن يكون عدد الخلايا المستخدمة في المصفوفة المتمثلة بالجدول السابق متماشياً مع القاعدة:

عدد الخلايا المستخدمة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة – 1.

حيث أنه يوجد خمسة صفوف وأربعة أعمدة، فإن فحص الجدولين الأخيرين يبين أنه توجد ثمان خلايا مستخدمة، وعلى ذلك فإن هذا الحل يهيئ للخطوة التالية في إيجاد الحل الأمثل.

## 8-5 مثال توضيحي شامل مع الحل الأمثل لمشكلة النقل

مثال (5-3). قدمت لك بيانات خاصة بنقل بضائع من مصانع شركة أرام الأربعة إلى محلات تسويقها الثلاثة، حيث تكلفة نقل الوحدة من كل مصنع لكل محل، والكميات المتاحة والمطلوبة مبينة في الجدول الآتي:

| المصانع | المحلات | | | الكميات المتاحة |
|---|---|---|---|---|
| | $D_1$ | D2 | D3 | |
| $F_1$ | 11 | 9 | 5 | 22 |
| $F_2$ | 10 | 6 | 8 | 25 |
| F3 | 4 | 7 | 10 | 23 |
| F4 | 6 | 8 | 7 | 15 |
| الكميات المطلوبة | 45 | 15 | 25 | 85 |

المطلوب: حساب تكلفة نقل البضائع وفق الطرق المختلفة للنقل.

**الحل بطريقة الركن الشمالي الغربي:**

تكوين مصـــفوفة الحل: حيث نبدأ التغطية من زاوية الشـــمال الغربي المعبر عنها بالســـهم، وتتم تغطية حاجات المحلات المختلفة بدءاً بإنتاج المصــنع الأول والذي يغطي "22" وحدة من احتياجات المحل الثالث، ثم المصــنع الثاني، والذي يغطي "3" وحدات من احتياجات المحل الثالث، وكل احتياجات المحل الثاني، و"7" وحدات من احتياجات المحل الأول، ثم المصنع الثالث والذي يغطي "23" وحدة من احتياجات المحل الأول، فالمصنع الرابع والذي يغطي "15" وحدة من احتياجات المحل الأول.

| المصانع | $D_1$ | D2 | D3 | الكميات المتاحة |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| | المحلات | | | |
| $F_1$ | 11 | 9 | [22] 5 | 22 |
| F2 | [7] 10 | [15] 6 | [3] 8 | 25 |
| $F_3$ | [23] 4 | 7 | 10 | 23 |
| F4 | [15] 6 | 8 | 7 | 15 |
| الكميات المطلوبة | 45 | 15 | 25 | 85 |

**حساب تكلفة النقل = (5 × 22) + (8 × 3) + (6 × 15) + (10 × 7) + (4 × 23) + (6 × 15) = 476**

**طريقة إيجاد التكاليف:**

تكوين مصــفوفة الحل: نبحث عن أقل تكلفة في مصــفوفة التكاليف، وهي القيمة "4"، حيث نبدأ تغطية الكميات المطلوبة بدءاً بالمصــنع الثالث، والذي يغطي "23" وحدة من احتياجات المحل الأول، ثم التكلفة التي بعدها، إلى أن يتم توزيع جميع الكميات المتاحة على جميع المحلات حســـب احتياجاتها المختلفة، وفي حال وجد أكثر من قيمة متشابهة، نبدأ بالتغطية للخلية التي تأخذ أكبر كمية ممكنة.

| المصانع | $D_1$ | D2 | D3 | الكميات المتاحة |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| | المحلات | | | |
| $F_1$ | 11 | 9 | [22] 5 | 22 |
| $F_2$ | [7] 10 | [15] 6 | [3] 8 | 25 |
| F3 | [23] 4 | 7 | 10 | 23 |
| $F_4$ | [15] 6 | 8 | 7 | 15 |
| الكميات المطلوبة | 45 | 15 | 25 | 85 |

**حساب تكلفة النقل = (5 × 22) + (8 × 3) + (6 × 15) + (10 × 7) + (4 × 23) + (6 × 15) = 476**

**أسلوب أو طريقة فوجل الغرامة أو الندم:**

الندم هو مقدار ما سـيتحمله متخذ القرار من إدراك ندم في حال اتخاذه قرار خاطئ بالنقل. وللتأكد من الحل، ومعرفة عدد مرات الندم التي سيتم عملها، نتبع ما يلي: عدد الصفوف أو عدد الأعمدة أيهما أكبر + 1.

- يتم حساب قيمة الندم في كل صف وكل عمود، وذلك بإيجاد الفرق بين إيجاد تكلفتين في كل صف وكل عمود.
- بعد حساب قيمة الندم الأول نبحث عن أعلى قيمة ندم، ونحددها عند أي صف أو أي عمود، ثم نبدأ التغطية عند إيجاد تكلفة في الصف أو العمود الذي يقابله أعلى ندم.
- الصف أو العمود الذي لا يبقى فيه أي قيمة تلغى جميع قيمه.
- نكرر الخطوات السابقة بشكل متتابع حتى نصل إلى نقل كافة الكميات المتاحة إلى المحلات المختلفة.
- حساب تكلفة الندم النهائية.

| المصانع | $D_1$ | D2 | D3 | الكميات المتاحة | ندم1 | ندم2 | ندم3 | ندم4 | ندم5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **F1** | 11 | 9 | (22) 5 | 22 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **F2** | (7) 10 | (15) 6 | (3) 8 | 25 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| **F3** | (23) 4 | 7 | 10 | 23 | 3 | 3 | 0 | 0 | 0 |
| **F4** | (15) 6 | 8 | 7 | 15 | | | | | |
| الكميات المطلوبة | 45 | 15 | 25 | 85 | | | | | |
| ندم1 | 2 | 1 | 2 | | | | | | |
| ندم2 | 2 | 1 | 1 | | | | | | |
| ندم3 | 4 | 1 | 1 | | | | | | |
| ندم4 | 1 | 1 | 1 | | | | | | |
| ندم5 | 1 | 0 | 1 | | | | | | |

**حساب تكلفة النقل = (5 × 22) + (8 × 3) + (6 × 15) + (10 × 7) + (4 × 23) + (6 × 15) = 476**

## 5-8-1 الحل الأمثل لمشكلة النقل: طريقة الحجر المتنقل

بعد الحصـــــول على الحل الأولي بإحدى الطرق التي تناولناها، نقوم باختبار أمثلية هذا الحل باســـتخدام طرق أخرى، وذلك بقصد الحصول على أفضل الحلول أي الحصول على أقل تكاليف النقل الكلية. هناك ثلاث طرق لإيجاد الحل الأمثل لمشـــكلات النقل بالاعتماد على الحل الذي تم إيجاده في بالطرق الثلاث الســـابقة، الذي اعتبرناه حلاً أوليّاً، هما:

1. طريقة المسار الحجر المتنقل (الدرج أو المسار المتعرج) stepping stone method.
2. طريقة التوزيع المعدل Method Distribution Modified .
3. طريقة عوامل الضرب multipliers method.

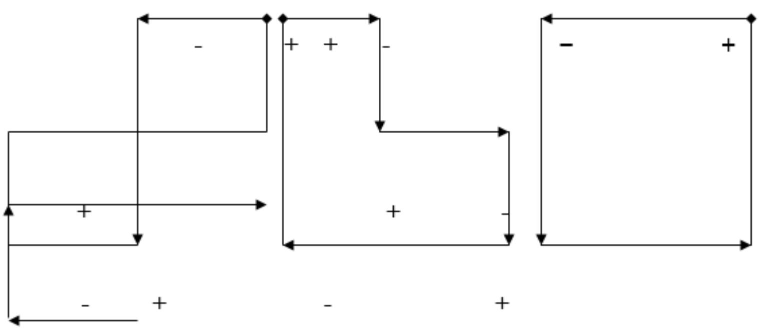
حيث تقوم طريقة الحساب المختارة بتطوير الحل بطريقة فعالة إلى أن تصل إلى الحل الأمثل. وسنكتفي بعرض الطريقة الأولى.

**<u>طريقة مسار الحجر المتنقل:</u>**

خطوات طريقة الحجر المتنقل:

التأكد من أن المصفوفة قابلة للتأكد من الحل، وذلك من خلال المعادلة التالية:

- عدد الخلايا الممتلئة = (عدد الصفوف + عدد الأعمدة) − 1
- تحديد الخلايا الفارغة لكي يتم تقييمها.
- تقييم الخلايا الفارغة من خلال تحديد مســـار القفز من الخلية الفارغة إلى الخلايا الممتلئة، رجوعاً إلى الخلية الفارغة ذاتها، حيث تأخذ مسارات القفز ثلاثة أشكال لا رابع لها، وهي:




- الخلية الفارغة تأخذ دائماً قيمة موجبة، والتي تليها سالبة، والتي تلي السالبة موجبة، وهكذا.
- يتم تقييم الخلية الفارغة من خلال جمع وطرح قيم التكاليف من بعضـــها البعض على مســـار كل خلية فارغة.
- إذا وجد في النتائج قيمة سالبة فإنه يمكن تعديل الحل، وذلك على النحو التالي:

1. نحدد المسار للخلية التي كان تقييمها أعلى قيمة تأخذ إشارة سالبة، حيث أنه في حال وجد قيمتين سالبتين، فإننا نأخذ القيمة الأعلى ذات الإشارة السالبة.
2. نأخذ إيجاد كمية على مسار الخلية التي كان تقييمها أعلى قيمة تأخذ إشارة سالبة، ونضيفها عند الخلايا الموجبة، ونطرحها عند الخلايا السالبة.

- حساب تكلفة النقل النهائية.

| المصانع | المحلات | | | الكميات المتاحة |
|---|---|---|---|---|
| | $D_1$ | D2 | D3 | |
| **F1** | 11 | 9 | [22] 5 | 22 |
| **F2** | [7] 10 | [15] 6 | [3] 8 | 25 |
| **F3** | [23] 4 | 7 | 10 | 23 |
| **F4** | [15] 6 | 8 | 7 | 15 |
| **الكميات المطلوبة** | 45 | 15 | 25 | 85 |

**الحل:**

**F1D1**

| | |
|---|---|
| 5 - | 11 + |
| 8 + | 10 - |

**$F_1D_2$**

| | |
|---|---|
| 5 - | 9 + |
| 8 + | 6 - |

**$F_3D_2$**

| | |
|---|---|
| 6 - | 10 + |
| 7 + | 4 - |

**$F_3D_3$**

| | |
|---|---|
| 8 - | 10 + |
| 10 + | 4 - |

**$F_4D_2$**

| | |
|---|---|
| 6 - | 10 + |
| 8 + | 6 - |

**$F_4D_3$**

| | |
|---|---|
| 8 - | 10 + |
| 7+ | 6 - |

$$F_1D_1 = + 11 - 5 + 8 - 10 + = 4$$

$F_1D_2 = +9 - 5 + 8 - 6 + = 6$

$F_3D_2 = + 7 - 4 + 10 - 6 + = 7$

$F_3D_3 = + 10 - 4 + 10 - 8 + = 8$

$F_4D_2 = + 8 - 6 + 10 - 6 + = 6$

$F_4D_3 = + 7 - 6 + 10 - 8 + = 3$

إذاً نكون قد توصلنا للحل الأمثل بسبب عدم وجود إشارة سالبة في المسارات المختلفة.

## 5-8-2 الحالات الخاصة في مسألة النقل

مسألة النقل كبقية المسائل لها بعض الحالات الخاصة التي سنتطرق لها فيما يلي:

أولاً: نموذج النقل غير المتوازن. في هذه الحالة قد يزيد العرض أو الطلب أحدهما على الآخر، وعند مواجهة مثل هذه المشكلة نضيف صفاً أو عموداً وهمياً أو فرضياً يوضع به مقدار الفرق بين العرض والطلب وتكون جميع تكاليف هذا الصف أو العمود أصفاراً"، يمكن توضيح ذلك كما يلي:

1. **إذا كان العرض أكبر من الطلب**، فإننا نبحث عن سوق وهمي، حيث تكون كلفة النقل من المصانع إلى مكان السوق الوهمي مساوي للصفر. كما في المثال (5-4) التالي:

مثال (5-4):

| المصانع | مستودع W1 | مستودع W2 | مستودع W3 | مستودع وهمي W4 | الطاقة الانتاجية للمصنع |
|---|---|---|---|---|---|
| | المستودعات | | | | |
| F1 | 3 | 4 | (250) 5 | (0) 0 | 250 |
| F2 | (50) 3 | (200) 4 | (50) 8 | (0) 0 | 250 |
| F3 | (150) 5 | 7 | 9 | (150) 0 | 300 |
| حاجة المستودع | 200 | 200 | 300 | 150 | 850 |

بالحل بإحدى الطرق السابقة نجد:

**Total cost = 250(\$5) + 50(\$8) + 200(\$4) + 50(\$3) + 150(\$5) + 150(\$0) = \$3,350**

2. **إذا كان الطلب أكبر من العرض،** فإننا نبحث عن مصـــنع وهمي لتغطية الطلب الزائد، حيث تكون تكلفة النقل من المصنع الوهمي إلى السوق مساوية للصفر كما في المثال التالي.

مثال (5-5):

| المصانع | مستودع W1 | مستودع W2 | مستودع W3 | الطاقة الانتاجية للمصنع |
|---|---|---|---|---|
| F1 | 3 | 4 | (250) 5 | 200 |
| F2 | (50) 3 | (200) 4 | (50) 8 | 175 |
| F3 | (150) 5 | 7 | 9 | 75 |
| حاجة المستودع | 150 | 100 | 250 | 450 / 500 |

نضيف مصنع وهمي كما يلي:

| المصانع | مستودع W1 | مستودع W2 | مستودع W3 | الطاقة الانتاجية للمصنع |
|---|---|---|---|---|
| F1 | 9 | 4 | [200] 6 | 200 |
| F2 | [25] 8 | [100] 5 | [50] 10 | 175 |
| F3 | [75] 6 | 7 | 12 | 75 |
| F4 مصنع وهمي | 0 | 0 | [50] 0 | 50 |
| حاجة المستودع | 150 | 100 | 250 | 500 |

بالحل بإحدى الطرق السابقة نجد:

Total cost = 200($6) + 50($8) + 100($5) + 25($8) + 75 ($6) + 50($0) = $2,850

ثانيا: حالة تعظيم الأرباح. المعروف أن مسألة النقل تبحث عن أحسن الطرق لتدنية تكاليف نقل السلع والبضائع من مكان العرض إلى مكان الطلب، وفي بعض الحالات نجد هناك شركات مهمتها هي نقل السلع والبضائع وهدفها هو تحقيق أكبر ربح ممكن، وبذلك فهذه الشركات تبحث عن الخطوط أو المسارات التي تحقق أعظم ربح ممكن، وفي هذه الحالة فإن حل المشكلة يكون بالبحث عن أكبر ربح في الجدول، ويتم إرسال السلع والبضائع إلى الخلايا التي تحقق أعظم ربح، ونكرر العملية إلى غاية توزيع كل السلع والبضائع المتاحة إلى الأسواق والمخازن.

ثالثاً: وجود أكثر من حل أمثل. في بعض الحالات عند القيام بحل مسائل النقل نجد عند القيام بتقييم الخلايا غير المشغولة فيها أكثر من خلية ذات قيمة صفر، هذا يعني وجود إمكانية تغيير اتجاهات بعض الشحنات إلى اتجاهات أخرى ونحصل على نفس الكلفة الكلية، أي وجود حلول مثلى متعددة.

رابعاً: المسارات غير مقبولة أو ممنوعة. تحدث هذه الحالة في بعض الأحيان عند وجود طرق مقطوعة أو فاسدة لا يمكن عبورها لمدة طويلة أو وجود أحوال جوية سـيئة لمدة طويلة أو وجود حروب، مما يجعل وسـائل النقل تتعرض لأضـرار أو تتحمل تكاليف باهظة ... في هذه الحالة المسـار الممنوع أو الغير مقبول نحمله تكاليف عالية جدا وفي حالة التعظيم نحمله خسارة كبيرة جداً ونكمل الحل بالطرق المعروفة التي تطرقنا لها.

خامسـاً: حالة التحلل. تحدث هذه الحالة عندما يكون عدد الخلايا المشـغولة أقل من مجموع عدد الصـفوف والأعمدة ناقص واحد (1-n+m)، (تحدث هذه الحالة عند الحل الأولي)، في هذه الحالة تتعرقل عملية اختبار الحل حيث لا يمكن رسم مسارات مغلقة لبعض الخلايا الغير مشغولة، ولمعالجة هذه الحالة فإنه يتم إشغال إحدى الخلايا الغير مشغولة (الاختيار يكون بدقة) بقيمة صفرية ومعاملتها كأنها خلية مشغولة وإكمال الحل.

مثال (5−6).

يفكر أحد المسـتثمرين في مشـروع لإنتاج الألبسـة تتوزع وحداته الإنتاجية في مناطق دمشـق، حمص، حلب، ثم تنقل المنتجات إلى ثلاثة مراكز تسـويق هي (اللاذقية، طرطوس، حماه) وقد وضـع خطة أولية تعتمد على أن الطاقة الإنتاجية لوحدة إنتاج هي 100 وحدة لدمشـق و300 وحدة لحلب و300 وحدة لحمص. وقد افترض أن جميع كميات الانتاج سـيتم توزيعها على المراكز الثلاثة المطلوبة بمقدار (300، 200، 200) وحدة على التوالي. وقد لاحظ أن تكلفة النقل من مراكز الإنتاج لمراكز التوزيع كانت كالآتي:

| مراكز التوزيع / مراكز الانتاج | اللاذقية | طرطوس | حماه | العرض Supply ($S_i$) |
|---|---|---|---|---|
| دمشق | 5 | 4 | 3 | 100 |
| حمص | 8 | 4 | 3 | 300 |
| حلب | 9 | 7 | 5 | 300 |
| الطلب Demand (dj) | 300 | 200 | 200 | 700 |

تكاليف نقل الوحدات من مراكز الإنتاج إلى مراكز التوزيع

**المطلوب:** ساعد هذا المستثمر للوصول لأقل تكلفة نقل باستخدام طرق النقل؟

الحل: بطريقة أقل التكاليف:

| | | الوجهة Destinations | | | العرض |
|---|---|---|---|---|---|
| | | اللاذقية | طرطوس | حماه | Supply ($S_i$) |
| المصدر Source | دمشق | 5 | 0<br>4 | 100<br>3 | 100 |
| | حمص | 8 | 200<br>4 | 100<br>3 | 300 |
| | حلب | 300<br>9 | 7 | 5 | 300 |
| الطلب Demand (dj) | | 250 | 350 | 400 200 | 700 |

إن عدد الخلايا المشــغولة هنا هو 4 في حين أنه يجب أن يكون (3+3−1=5)، لذا فإن الحل يعتبر متحللا وهنا لا بد من وضــع قيمة صــفرية في إحدى الخلايا الفارغة للتمكن من اختبار الحل مثلا يمكنك وضــع صــفر في الخلية (دمشق/طرطوس) ومعاملتها وكأنها خلية مشغولة والاستمرار في اختيار الحل.

تكاليف النقل = 4*0+ 3*100 + 4*200 + 3*100 + 9*300 = 4100

اختبارات وأسئلة الفصل الخامس Tests

## 1) أسئلة صح / خطأ True/False

| | السؤال | صح | خطأ |
|---|---|---|---|
| 1 | تتمثل مشكلات النقل في زيادة نقل الموارد أو البضائع أو الأشخاص من جهة المصدر إلى جهة الهدف | | √ |
| 2 | الهدف في مشكلة النقل هو تلبية متطلبات الوجهة بالكامل ضمن قيود القدرة الإنتاجية التشغيلية بإيجاد تكلفة ممكنة | √ | |
| 3 | عادة تتناسب تكلفة الشحن من المصدر إلى الوجهة طرديا مع عدد الوحدات المشحونة | √ | |
| 4 | يقتصر تطبيق هذه نماذج النقل على إيجاد الطرق ذات التكلفة الإيجاد في نقل المنتجات | | √ |
| 5 | عندما لا يكون العرض والطلب متساويين، يُقال إن مشكلة نقل غير متوازنة | √ | |
| 6 | في نموذج النقل المتوازن يتساوى العرض مع الطلب دائما | √ | |
| 7 | الموارد هي نقاط التوريد، أو المستودع، أو محطات السكك الحديدية | | √ |
| 8 | المواقع هي تلك العناصر التي يمكن نقلها من المصادر إلى الوجهات | | √ |
| 9 | في طريقة الزاوية الشمالية الغربية يعتمد عملية تحديد الخلية التي سوف تُغطى احتياجاتها على موقعها وليس على كلفة النقل من المصادر إلى مناطق الاستخدام | √ | |
| 10 | بموجب طريقة أقل التكاليف يتم البحث والتركيز على أكبر تكلفة متوفرة في جدول النقل ومن ثم تحديد جهتي الطلب والعرض. | | √ |
| 11 | إحدى مساوئ طريقة الزاوية الشمالية الغربية هو عدم تحقيق الاستفادة من التكلفة القليلة المتوفرة في مشكلة نقل معينة عند تلبية احتياجات مراكز الطلب | √ | |
| 12 | عندما لا يكون العرض والطلب متساويين، يُقال إن مشكلة النقل غير متوازنة | √ | |
| 13 | في نموذج النقل المتوازن يتساوى العرض مع الطلب دائما | √ | |
| 14 | إذا كان مجموع كمية الطلب أكبر من مجموع كمية العرض في جدول النقل نضيف جهة طلب وهمية | | √ |
| 15 | إذا كان مجموع كمية العرض أكبر من مجموع كمية الطلب في جدول النقل نضيف مصدر عرض وهمي | | √ |
| 16 | يُحسب الجزاء أو الغرامة في طريقة فوجل لكل صف وعمود؛ وذلك بإيجاد الفرق بين أقل تكلفتين في هذا الصف أو العمود. | √ | |
| 17 | إذا كانت كل الفروق في الصفوف والأعمدة متساوية في كل المراحل تفشل طريقة فوجل ونأخذ طريقة أقل التكاليف | √ | |
| 18 | لإيجاد الحل الأمثل، فإنه من الضروري أن يكون عدد الخلايا المستخدمة في المصفوفة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة + 1. | | √ |
| 19 | الندم هو مقدار ما سيتحمله متخذ القرار من ندم في حال اتخاذه قرار خاطئ بالنقل. | √ | |
| 20 | هناك سبع طرق لإيجاد الحل الأمثل لمشاكل النقل بالاعتماد على الحل الأولي الذي تم إيجاده | | √ |

## 2) أسئلة خيارات متعددة Multiple Choices

1- ليس من المعلمات العامة لمشكلة النقل:

أ) الموارد | ب) أوضاع النقل
ج) الترتيب الداخلي | د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

2) عندما تكون كل من الإمدادات والطلبات متساوية، يقال إن المشكلة هي:

أ) مشكلة نقل معتدلة | ب) مشكلة نقل غير معتدلة
ج) مشكلة نقل متوازنة | د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

3) يسمى نموذج النقل نموذجاً متوازناً إذا كان:

أ) إجمالي المخزونات يساوي إجمالي المنتجات | ب) إجمالي المنتجات يساوي إجمالي التوريدات
ج) إجمالي الطاقات يساوي إجمالي الاحتياجات | د) جميع الإجابات السابقة صحيحة

4) تمثل طريقة الشمال الغربي واحدة من الطرق التي تساعد على الحصول على:

أ) الحل الأمثل | ب) الحل المرضي
ج) الحل أولي | د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

5) طريقة الشمال الغربي لا تأخذ بعين الاعتبار:

أ) التكاليف | ب) كميات الموردين
ج) حاجات المستفيدين | د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

6) عند تحسن حل مسألة النقل نصل الى الحل الأمثل إذا كانت:

أ) كل القيم موجبة أو مساوية للصفر | ب) بعض القيم تساوي الصفر
ج) كل القيم سالبة أو تساوي الصفر | د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

7) يعتبر شرطاً أساسياً في مسألة النقل التوازن في:

أ) عدد الموردين وعدد المستفيدين | ب) كميات الموردين
ج) العرض والطلب | د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

8) يمثل التوازن بين العرض والطلب شرطاً أساسياً لحل مسائل:

أ) البرمجة الخطية | ب) اختيار الموقع
ج) النقل | د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

9) ليست من خصائص المشكلات التي تتعامل معها طريقة النقل:
أ) تكلفة معلومة لنقل الوحدة ب) عدم تجانس الوحدات المنقولة
ج) وجود عدد محدد من الموردين د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

10) نضيف مستفيداً وهمياً في مسائل:
أ) البرمجة الخطية ب) النقل
ج) إدارة المشاريع د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

11) في طريقة الركن الشمال الغربي عند البحث عن حل أولي:
أ) تأخذ التكاليف بعين الاعتبار ب) لا تأخذ التكاليف بعين الاعتبار
ج) تأخذ الاقتصاد بعين الاعتبار د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

12) تكاليف التعامل مع المورد الوهمي:
أ) تساوي أكبر تكلفة لدى الموردين الفعليين ب) تساوي أدني تكلفة لدى الموردين الفعليين
ج) تساوي صفراً د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

13) تتمثل طريقة الركن الشمالي الغربي في التوزيع على:
أ) الخانة المتواجدة في شمال غرب الجدول ب) المستفيد المتواجد في شمال غرب الجدول
ج) المورد المتواجد في شمال غرب الجدول د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

14) يضاف مستفيد وهمي عندما يكون مجموع الكميات المتوفرة:
أ) أكبر من مجموع الحاجات ب) إيجاد من مجموع الحاجات
ج) يساوي مجموع الحاجات د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

15) طريقة الشمال الغربي هي طريقة للحصول على:
أ) الحل الامثل في اختيار الموقع ب) حل أولي في مسائل النقل
ج) حل أولي في مسائل البرمجة الخطية د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

16) في مسائل النقل، إذا كان الطلب أكبر من العرض:
أ) نضيف سطرا ب) نضيف عمودا
ج) نضيف مادة د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

17) إذا كانت لدينا مسألة نقل بـ 5 موردين و 7 مستفيدين يكون الحل الاولي قاعدي:
أ) 9 خانات ب) 10 خانات
ج) 11 خانة د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

18) $(m + n - 1)$ هو عدد الخانات المملوءة في:

أ) الحل الأولي لمسألة النقل
ب) الحل الاولي في مسألة البرمجة الخطية
ج) الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية
د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

19) لاستعمال طريقة النقل يجب أن يكون:
أ) الايراد مساوياً للتكاليف
ب) العرض مساويا للطلب
ج) الإنتاج مساويا للاستهلاك
د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

20) ليس من طرق إيجاد الحل الأمثل لمشكلات النقل:
أ) طريقة المسار الحجر المتنقل
ب) طريقة العوامل الأسية
ج) طريقة التوزيع المعدل
د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

## 3) أسئلة \ قضايا للمناقشة

**السؤال (1): ليكن لدينا الحالة الدراسية الآتية:**

يبلغ إنتاج معامل مياه الدريكيش والســن والفيجة S1 , S2 , S3 الكميات التالية: 150، 200 و 250 ألف لتر ماء معبأ يومياً على التوالي. تباع في أربعة محافظات هي حمص ودمشق وحلب وحماة C1 , C2 , C3 , C4 واحتياجاتها 80، 100، 120 و 150 ألف لتر ماء يومياً . على التوالي.

**المطلوب** التوصــل إلى ترتيب نقل عبوات الماء بين معامل المياه الثلاثة والمدن الأربعة بطريقة الركن الشــمالي الغربي (بفرض إن تخزين الماء الفائض عن الحاجة لا يسبب أية كلفة) استنادا لكلـف النقل لكل ألف لتر) المبينة في الجدول أدناه:

| المدن / المعامل | C1 حمص | C2 دمشق | C3 حلب | C4 حماة | العرض |
|---|---|---|---|---|---|
| S1 الدريكيش | 2 | 3 | 4 | 5 | 150 |
| S2 السن | 3 | 2 | 5 | 2 | 200 |
| S3 الفيجة | 4 | 1 | 2 | 3 | 250 |
| الطلب | 80 | 100 | 120 | 150 | 600 / 450 |

**السؤال (2): ليكن لدينا الحالة الدراسية التالية:**

يبلغ إنتاج معامل مياه الدريكيش والســن والفيجة S1 , S2 , S3 الكميات التالية: 150، 200 و 250 ألف لتر ماء معبأ يومياً على التوالي. تباع في أربعة محافظات هي حمص ودمشق وحلب وحماة C1 , C2 , C3 , C4 واحتياجاتها 80، 100، 120 و 150 ألف لتر ماء يوميـاً . على التوالي.

**المطلوب** التوصـل إلى ترتيب نقل عبوات الماء بين معامل المياه الثلاثة والمدن الأربعة بطريقة إيجاد التكاليف (بفرض إن تخزين الماء الفائض عن الحاجة لا يسبب أية كلفة) استنادا لكلفـ النقل لكل ألف لتر) المبينة في الجدول أدناه:

| المدن / المعامل | C1 حمص | C2 دمشق | C3 حلب | C4 حماة | العرض |
|---|---|---|---|---|---|
| S1 الدريكيش | 2 | 3 | 4 | 5 | 150 |
| S2 السن | 3 | 2 | 5 | 2 | 200 |
| S3 الفيجة | 4 | 1 | 2 | 3 | 250 |
| الطلب | 80 | 100 | 120 | 150 | 600 / 450 |

**<u>السؤال (3): ليكن لدينا الحالة الدراسية التالية:</u>**

يبلغ إنتاج معامل مياه الدريكيش والســن والفيجة S1 , S2 , S3 الكميات التالية: 150، 200 و 250 ألف لتر ماء معبأ يومياً على التوالي. تباع في أربعة محافظات هي حمص ودمشق وحلب وحماة C1 , C2 , C3 , C4 واحتياجاتها 80، 100، 120 و 150 ألف لتر ماء يوميـاً . على التوالي.

**المطلوب** التوصـل إلى ترتيب نقل عبوات الماء بين معامل المياه الثلاثة والمدن الأربعة بطريقة فوجل (بفرض إن تخزين الماء الفائض عن الحاجة لا يسبب أية كلفة) استناداً لكلفـ النقل لكل ألف لتر) المبينة في الجدول أدناه:

| المدن / المعامل | C1 حمص | C2 دمشق | C3 حلب | C4 حماة | العرض |
|---|---|---|---|---|---|
| S1 الدريكيش | 2 | 3 | 4 | 5 | 150 |
| S2 السن | 3 | 2 | 5 | 2 | 200 |
| S3 الفيجة | 4 | 1 | 2 | 3 | 250 |
| الطلب | 80 | 100 | 120 | 150 | 600 / 450 |

**السؤال (4): ليكن لدينا الحالة الدراسية التالية:**

يبلغ إنتاج معامل مياه الدريكيش والسـن والفيجة S1 , S2 , S3 الكميات التالية: 150، 200 و 250 ألف لتر ماء معبأ يومياً على التوالي. تباع في أربعة محافظات هي حمص ودمشق وحلب وحماة C1 , C2 , C3 , C4 واحتياجاتها 80، 100، 120 و 150 ألف لتر ماء يوميـاً . على التوالي.

المطلوب التوصـــل إلى ترتيب نقل عبوات الماء بين معامل المياه الثلاثة والمدن الأربعة بإيجاد الحل الأمثل باســتخدام طريقة حجر التنقل (بفرض إن تخزين الماء الفائض عن الحاجة لا يسبب أية كلفة) استناداً لكلـــف النقـــل لكل ألف لتر المبينة في الجدول أدناه:

| المدن / المعامل | حمص C1 | دمشق C2 | حلب C3 | حماة C4 | العرض |
|---|---|---|---|---|---|
| الدريكيش S1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 150 |
| السن S2 | 3 | 2 | 5 | 2 | 200 |
| الفيجة S3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 250 |
| الطلب | 80 | 100 | 120 | 150 | 600 / 450 |

# الفصل السادس: نماذج التخصيص والتعيين

# Chapter (6): Assignment Models

**كلمات مفتاحية:**

مشكلات التخصيص Assignment Problems، طريقة التوافيق المختلفة Different combination method، الطريقة الهنغارية The Hungarian Method.

**ملخص الفصل:**

يعتبر التخصيص أحد أساليب علم بحوث العمليات ومن الوسائل الرياضية التي تستخدم لإيجاد أفضل تخصيص للموارد المتاحة للوصول إلى الأهــداف المطلوب تحقيقها ويعمل على مساعدة الإدارة في عملية التخطيط للتوزيع الأمثل للموارد. يتناول هذا الفصــل مفهوم مسـألة التخصـيص، فنسـتعرض معنى مشـكلة التخصـيص، وتعريف مشـكلة التخصـيص، والصـياغة الرياضـية، طريقة التوافيق والطريقة الهنغارية في حالتي تقليل التكاليف وتعظيم الأرباح.

**المخرجات والأهداف التعليمية:**

1. استيعاب مسألة التخصيص
2. التعرف على تطبيقات مسألة التخصيص في المؤسسات.
3. التمكن من حل مسألة التخصيص بطريقة التوافيق المختلفة.
4. التمكن من حل مسألة التخصيص بالطريقة الهنغارية.

**مخطط الفصل:**

6–1 مقدمة.

6–2 مفهوم وشروط مشكلة التخصيص (التعيين).

6–3 الصيغة العامة لمشكلات التخصيص.

6–4 طرق حل مشكلات التخصيص.

6–5 الحالات الخاصة لمشكلات التخصيص.

## 6-1 مقدمة

إن مشـــكلة التخصـــيص واحدة من أهم المشـــكلات في اختيار القرار المناســـب لعديد من التطبيقات في الحياة العملية، وبشكلٍ خاص في المؤسسات الإنتاجية والخدمية وذلك بهدف اتخاذ القرار المناسب للحصول على أفضل تخصـــــيص للمكائن أو الوظائف أو العمال تحقيقاً لتقليل الكلفة (Cost) أو زيادة الربح (Profit) إلى أعلى حد ممكن أو تقليل الوقت (Time) إلى أقل حد ممكن، مع تحول معظم بيئات العمل في الســـنوات الأخيرة إلى بيئة ذات بيانات ضبابية.

تُعنى مشكلة التخصيص بربط عناصر مجموعتين بأقل تكلفة ممكنة. فمثلا يتم تحديد أي من العمال سيتحكم في أي من المعدات بأقل تكلفة ممكنة. وكمثال آخر يتم تحديد البوابات لرحلات الطيران بحيث تضـــمن للمســـافرين أقصى درجة ممكنة من الراحة في ظل القيود المفروضة من طبيعة عمليات المطار وذلك بأقل تكلفة ممكنة.

## 6-2 مفهوم وشروط مشكلة التخصيص (التعيين)

### 6-2-1 مفهوم مشكلة التخصيص

مشكلة التخصيص هي حالة خاصة لمشكلة النقل، حيث يكون الهدف هو تخصيص عدد من الموارد لعدد متساوٍ من الأنشـطة لتقليل التكلفة الإجمالية أو زيادة إجمالي ربح التخصـيص. تنشـأ مشـكلة التخصـيص لأن الموارد المتاحة مثل الأفراد والآلات وما إلى ذلك لها درجات متفاوتة من الكفاءة لأداء أنشـــطة مختلفة، حيث إن تكون التكلفة أو الربح أو الخســـارة لأداء الأنشـــطة المتعددة مختلفة. وبالتالي، فإن المشـــكلة هي "كيف ينبغي إجراء

التخصيصات من أجل تحسين الهدف المحدد؟". يمكن أن تعرف مشكلـــة التخصيص بـــأنها وسيلة تساهم في تحقيق الاستعمال الأمثـــل للموارد المتاحة بهدف تحقيق أقصـى العوائد أو تخفيض التكاليف إلى أدنى مستوى ممكن، ويمكن تعريفها أيضـاً بأنها أسـلوب رياضـي يستعمل من قبل متخذي القرار في المنظمات هدفه تخفيض التكاليف وزيادة الارباح.

تنطوي مشكلات التخصيص على توزيع الموارد بين البدائل المتنافسة من أجل تقليل التكاليف الإجمالية أو تعظيم العائد الإجمالي. هذه المشكلات لها المكونات الآتية:

- مجموعة من الموارد المتاحة بكميات معينة؛
- مجموعة من الوظائف التي يتعين القيام بها، كل منها يستهلك كمية محددة من الموارد؛
- مجموعة من التكاليف أو العوائد لكل وظيفة ومورد.

تكمن المشـكلة في تحديد مقدار تخصـيص كل مورد لكل وظيفة. إذا توفرت موارد أكثر من المطلوب، يجب أن يشـير الحل إلى الموارد التي لن يتم اسـتخدامها، مع مراعاة التكاليف المرتبطة. وبالمثل، إذا كان هناك وظائف أكثر مما يمكن القيام به بالموارد المتاحة، فيجب أن يشير الحل إلى الوظائف التي لا يجب القيام بها، مع مراعاة التكاليف المرتبطة مرة أخرى.

إذا تم التعبير عن كل من الوظائف والموارد في وحدات على نفس المقياس، يُطلق عليها اسـم النقل أو مشـكلة التوزيع. إذا لم يتم التعبير عن الوظائف والموارد في نفس الوحدات، فهذه مشكلة تخصيص عامة.

قد تتكون مشـكلة التخصـيص من تعيين العمال في المكاتب أو الوظائف، أو الشـاحنات إلى طرق التسـليم، أو

السائقين للشاحنات. تتضمن مشكلة النقل النموذجية توزيع عربات شحن السكك الحديدية الفارغة عند الحاجة أو تعيين الطلبات للمصانع للإنتاج، أو قد تتكون مشكلة التخصيص العامة من تحديد الآلات التي يجب استخدامها لصـــنع منتج معين أو مجموعة المنتجات التي يجب تصـــنيعها في مصـــنع خلال فترة معينة. في مشـــكلات التخصـيص، قد تكون تكاليف الوحدة أو العوائد إما مسـتقلة أو مترابطة؛ على سـبيل المثال، قد يعتمد العائد من اسـتثمار دولار في جهد البيع على المبلغ الذي يتم إنفاقه على الإعلان. إذا كانت المخصـصـات التي تم إجراؤها في فترةٍ واحدة تؤثر على الفترات اللاحقة، فيُقال إن المشكلة ديناميكية، ويجب مراعاة الوقت في حلها.

### 6-2-2 شروط مشكلة التخصيص

هناك عدد من الشروط التي ينبغي توافرها عند استخدام طريقة التخصيص، وهي:

1. ضرورة وجود عدد متساو من العمال والعمليات (أو المكائن أو السلع...، الخ).
2. لا يمكن للوسيلة (عامل، ماكينة) من القيام بأكثر من مهمة واحدة في نفس الوقت.
3. إن كلفة أداء كل عمل من قبل (العامل أو الماكنة) معروفة ومحددة مسبقاً.
4. عدم السلبية، إذ يفترض عدم وجود مبالغ سالبة لإنجاز المهام والتي تمثل أرباحاً أو تكاليف.

وعلى العموم، تختلف مشكلات التخصيص عن مشكلات النقل في أن:

1. المصادر تمثل العمليات (الأعمال، الأفراد) وتمثلها $i$ حيث $i=1,2,3,\dots,m$
2. تمثل مراكز الطلب التســـهيلات أو المهمات أو الإمكانات المتاحة مثل المكائن وتمثلها $J$ حيث $j=1,2,3,\dots n$

3. وأن $m$ دائماً تساوي $n$ أي أن المصفوفة دائماً مربعة.

4. أيضــاً، $X_{ij}$ دائماً إما 0 أو 1 حيث تمثل $X_{ij}$ الأعمال أو الأفراد $i$ المخصـصــة إلى $j$ من التسـهيلات أو المهمات أو الإمكانات المتاحة.

5. على حين $C_{ij}$ تمثل كلفة تخصــــيص الماكينات، الأعمال أو الأفراد $i$ إلى التســــهيلات أو المهمات أو الإمكانات المتاحة $j$.

## 3-6 الصيغة العامة لمشكلات التخصيص

في الأغلب يكون الهدف من بناء أنموذج التخصــــيص هو لتخفيض التكلفة الكلية أو لتقليل الزمن الكلي لإنجاز مهام معينة إلى أدنى مستوى ممكن ويساهم كذلك في الاستعمال الأمثل للموارد المتاحة، بحيث يتم إنجاز العمل بأقل وقت ممكن وأفضل كفاءة وتصبح الأرباح الكلية أكبر ما يمكن والتكلفة الكلية تصبح أقـــل ما يمكن، وغالبا ما يكون الهدف من بناء أنموذج التخصيص هو لتخصيص كل وسيلة إلى مهمة واحدة فقط.

لنفترض أن هنـاك عـدداً من الوظـائف يتعين أداؤهـا وأن هنـاك عـدداً من الأشــــخـاص متـاحين للقيـام بهـذه الوظائف. نفترض أن كل شــــخص يمكنه القيام بكل وظيفة، ولكن بدرجات متفاوتة من الكفاءة، نفترض $C_{ij}$ هي التكلفة إذا تم تعيين الشــخص الأول في الوظيفة $j$، تكمن المشــكلة في العثور على المهمة (الوظيفة التي يجب تعيينها لأي شــــخص على أســــاس واحد) بحيث تكون التكلفة الإجمالية لأداء جميع الوظائف في الحد الأدنى، تُعرف المشكلة من هذا النوع بمشكلة التخصيص أو التعيين.

يمكن تحديد مشكلة التخصيص في شكل مصفوفة تكلفة (n * n) كما يلي:

| | الوظائف | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | ....... | n | المصدر |
| العمال | 1 | C11 | C12 | ....... | C1n | 1 |
| | 2 | C21 | C22 | ....... | C2n | 1 |
| | . | . | . | | . | . |
| | . | . | . | | . | . |
| | . | . | . | | . | . |
| | n | Cn1 | Cn2 | ....... | Cnn | 1 |
| الوجهة | | 1 | 1 | ...... | 1 | |

الصياغة الرياضية لمشكلة التخصيص:

رياضيا يمكن ذكر مشكلة التخصيص على النحو التالي: تقليل التكلفة الإجمالية

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$$ من أجل $j = 1,2,\ldots n$ كل عامل لديه وظيفة واحدة

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1$$ من أجل $i = 1,2,\ldots m$ كل وظيفة تنجز بعامل واحد

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{إذا تم تكليف العامل } i \text{ بالوظيفة } j \\ 0, & \text{إذا لم يتم تكليف العامل } i \text{ بالوظيفة } j \end{cases}$$

## 6-4 طرق حل مشكلات التخصيص

هناك عدة طرق متبعة لحل مشكلات التخصيص أو التعيين منها:

- طريقة حصر جميع الحلول البديلة والممكنة (العد الكامل) Enumeration Complete.
- الطريقة الهنغارية Method Hungarian.
- طريقة البرمجة الخطية Method Programming Linear.
- طريقة النقل Method Transportation.

يتم تصـنيف مشـكلة التخصـيص إلى مشـكلة تخصـيص متوازن أو مشـكلة تخصـيص غير متوازن. إذا كان عدد الصـفوف مسـاوياً لعدد الأعمدة، فإن المشـكلة تسـمى مشـكلة تخصـيص متوازن. خلاف ذلك، تكون المشـكلة غير متوازنة. إذا كانت المشـــكلة غير متوازنة، مثل مشـــكلة النقل غير المتوازنة، فيتم إضـــافة العدد الضـــروري من الصـفوف/الأعمدة الوهمية بحيث تكون مصـفوفة التكلفة عبارة عن مصـفوفة مربعة. يجب أن تكون قيم الإدخالات في الصــف (الصــفوف)/الأعمدة الوهمية صــفرا. في هذه الحالة، أثناء تنفيذ الحل، لن يكون للصــف (الصــفوف) الوهمي أو العمود (الأعمدة) الوهمية مهمة (مهام).

### 6-4-1 طريقة العد الكامل Enumeration Complete

تعتبر طريقة العد الكامل من أبســط الطرق المســتخدمة في عملية حل نماذج التخصــيص عندما لا يتجاوز عدد المهام أو الوســـائل (ثلاثة) لكل منها، إذ يتم بموجبها تحديد جميع البدائل لعملية التوزيع [حســـاب جميع الطرق

الممكنة لعملية التخصيص]، ويتم ذلك وفقاً لقاعدة المفكوك –"Factorial" وعدد الحالات يتم حسابها بـــــ (n!) حيث n هي عدد الصفوف أو عدد الأعمدة.

أو n Factorial (أي n عاملي) الآتية:

$$\mathbf{n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-m)}$$

$2! = 2x1 = 2$

$3! = 3x2x1 = 6$

$4! = 4x3x2x1 = 24$

… etc.

مثال (1−6). اشـــترى أحد المســـتثمرين ألتين جديدتين ولجأ إلى خبرته ومعرفته بموظفيه لتقدير الوقت اللازم لتشغيلهما، فقام بتقدير التكاليف الخاص بتشغيل كل موظف لألة من الألتين وفقا لخبرتهم وحاجتهم للتدريب، كما يبينه الجدول الآتي:

| الآلات / الموظفين | الألة A | الألة B |
|---|---|---|
| خالد | 10000 L.S | 9000 L.S |
| حسن | 12000 LS | 15000 L.S |

**المطلوب:** تخصيص الموظفين للعمل على الآلتين بحيث يؤدي ذلك إلى تقليل التكاليف اللازمة.

<u>الحل:</u>

وفق قاعدة المفكوك هناك احتمالين للحل وهما: **2!= 2x1=2**

الاحتمال الأول هو عمل خالد على الألة A، وقيام حســن بالعمل على الألة B، حيث تصـــبح التكاليف

الكلية: **10000+15000 = 25000 L.S**

أما الاحتمال الثاني فهو عمل حسن على الألة A، وقيام خالد بالعمل على الألة B، حيث تصبح التكاليف

الكلية: **12000+9000 = 21000 L.S**

وعليه يكون التخصيص حسب الاحتمال الثاني هو الأفضل.

مثال (6−2). يرغب مدير الســـورية للطيران بتعيين ثلاثة مدراء (أحمد، إلياس، أكرم) لإنجاز ثلاث مهام: التسويق، الصيانة، والبحث والتطوير خلال الفترة القادمة. وبعد دراسة ملفاتهم، قدرت تكاليف إنجاز المهام للثلاثة كما هي موضحة بالجدول الآتي:

| **المهام / الموظفين** | **التسويق** | **الصيانة** | **البحث والتطوير** |
|---|---|---|---|
| أحمد (A) | 1000000 | 1100000 | 3000000 |
| إلياس (B) | 1050000 | 1300000 | 3500000 |
| أكرم (C) | 1100000 | 800000 | 4000000 |

**المطلوب:** تحديد أفضل تخصيص بأقل تكاليف وبطريقة الحل اليدوي.

وفق قاعد المفكوك: **!3 = 6 طرق**

نلاحظ أن هناك ستة بدائل يمكن توضيحها بالجدول الآتي:

| **المهام / البدائل** | **التسويق** | **الصيانة** | **البحث والتطوير** | **مجموع تكاليف البدائل (بالمليون M)** | **التكاليف الكلية (TC) مليون ليرة سورية (M L.S)** |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | A | B | C | 1+1.3+4 | 6.3 M L.S |
| 2 | A | C | B | 1+0.8+3.5 | 5.3 M L.S |
| 3 | B | A | C | 1.05+1.1+4 | 6.15 M L.S |
| 4 | B | C | A | 1.05+0.8+3 | 4.85 M L.S |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | C | A | B | 1.1+1.1+3.5 | 5.7 M |
| 6 | C | B | A | 1.1+1.3+3 | 5.4 M |

يتضـح من الجدول السـابق أن البديل الرابع هو الأفضـل لأنه يحقق أقل التكاليف (4.85) مليون ليرة سورية ( M L.S)، وعليه يكون أفضل تخصيص هو:

العامل (إلياس B) لمهمة التسويق

العامل (أكرم C) لمهمة الصيانة

العامل (أحمد A) لمهمة البحث والتطوير

وبتكلفة مقدارها: مليون ليرة سورية Tc=1.050.000 + 800.000 + 3000.000 = 4.850.000

## 6-4-2 الطريقة الهنغارية Method Hungarian

**مشكلة التخصيص المتوازن – مشكلة التدنية بالطريقة الهنغارية**

تعتبر هذه الطريقة من أكثر الطرق شيوعاً والتي تسمى أيضـاً خوارزمية جونسون، حيث يتم التوصـل إلى أحسن تخصيص وذلك بتحديد خلايا في كل صف وخلايا في كل عمود، حيث في مشكلات التكاليف فإن أفضل الخلايا هي التي تحتوي على أقل التكاليف.

يمكن حل مشكلة التخصيص بسهولة من خلال تطبيق الطريقة الهنغارية (المجرية) التي تتكون من مرحلتين لكل منها عدة خطوات بعد تهيئة مصفوفة الكلف لمشكلة التخصيص:

- في المرحلة الأولى، يتم إجراء تخفيضات الصفوف وتخفيضات الأعمدة.
- في المرحلة الثانية، يتم تحسين الحل على أساس تكراري.

المرحلة الأولى:

**الخطوة 1:** النظر في المصـفوفة المعطاة لمشـكلة معينة، إذا كان عدد الصـفوف لا يسـاوي عدد الأعمدة أو عدد الأعمدة لا يساوي عدد الصفوف، فنقوم بإضـافة صف وهمي أو عمود وهمي. حيث يتم دائماً وضع تكاليف التعيين للخلايا الوهمية على أنها صفر.

**الخطوة 2:** نقوم بتقليل المصــفوفة عن طريق تحديد أصــغر عنصــر في كل صــف وطرحه من العناصــر الأخرى في هذا الصف.

المرحلة الثانية:

**الخطوة 3:** نقلل حجم المصفوفة الجديدة باستخدام نفس الطريقة الموضحة في الخطوة 2.

**الخطوة 4:** نرسم الحد الأدنى من المستقيمات لتغطية جميع الأصفار.

**الخطوة 5:** إذا كان عدد المستقيمات المرسومة = يساوي عدد صفوف (أو أعمدة الجدول)، فيتم الوصـول إلى الخطوة 7 على النحو الأمثل، لذا ننتقل إلى الخطوة 7. إذا لم يتم الوصــول إلى المســتوى الأمثل، ننتقل إلى الخطوة 6.

**الخطوة 6:** نحدد أصــغر عنصــر من العناصــر غير المغطاة بمســتقيمات في المصــفوفة بأكملها. نطرح هذا العنصـر الأصـغر مع كل العناصـر المتبقية الأخرى غير المغطاة بالمستقيمات ونضـيف العنصـر للعناصــر عند تقاطع الخطوط. نترك العناصــر المغطاة بســطر واحد كما هي، ثم نعود الآن إلى الخطوة 4.

**الخطوة 7:** نأخذ أي صف أو عمود به صفر واحد ونقوم بتعيينه. نكرر العملية حتى يتم إجراء جميع التعيينات.

**الخطوة 8:** نكتب نتائج المهمة ونبحث عن الحد الأدنى للتكلفة / الوقت.

ملاحظة: أثناء التخصيص أو التعيين، إذا كان هناك صفران أو أكثر في صف أو عمود ولا يمكن اختيار واحد عن طريق الفحص، فنختار الخلية بشكل عشوائي للتعيين. نشطب الأصفار المتبقية في هذا العمود أو الصف، ونكرر نفس الشيء مع المهام الأخرى أيضاً. إذا لم يكن هناك تخصيص صفري واحد، فهذا يعني وجود عدة حلول. لكن التكلفة ستبقى كما هي لمجموعات مختلفة من التخصيصات.

نتأكد من أن جميع مراكز الطلب حصلت على التخصيص المناسب. فإذا كان الجواب لا، يتم إعادة الخطوتين (4) و(5) مرة أخرى لحين حصول جميع مراكز الطلب على التخصيصات المناسبة، ويتم حساب الكلفة الإجمالية لمشكلة التخصيص عن طريق جمع الكلف الأصلية للخلايا التي تشكل لها الحسابات في الخطوات السابقة مع قطر ذو كلفة صفرية.

سنشرح أدناه الطريقة الهنغارية أو الخوارزمية المجرية باستخدام هذا المثال.

**مثال (6−3). مشكلة التدنية**

نقوم بتعيين المهام الأربع إلى أربعة عوامل تشغيل. ترد تكاليف التخصيص في الجدول.

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \text{العمال} \\
 & & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
 & \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 20 & 28 & 19 & 13 \\ 15 & 30 & 31 & 28 \\ 40 & 21 & 20 & 17 \\ 21 & 28 & 26 & 12 \end{pmatrix} \\
\text{المهام} & &
\end{array}
$$

<u>الحل:</u>

الخطوة (1) المصفوفة المعطاة عبارة عن مصفوفة مربعة وليس من الضروري إضافة صف / عمود وهمي

الخطوة (2) تقليل المصـــفوفة عن طريق اختيار أصـــغر قيمة في كل صـــف والطرح من القيم الأخرى في ذلك الصف المقابل .في الصفA، أصغر قيمة هي 13، وفي الصف B هو 15، وفي الصف C هو 17، وفي الصف D هو 12. ويظهر الجدول أدناه.

**مصفوفة التخفيض:**

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \text{العمال} \\
 & & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
 & \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 7 & 15 & 6 & 0 \\ 0 & 15 & 16 & 13 \\ 23 & 4 & 3 & 0 \\ 9 & 16 & 14 & 0 \end{pmatrix} \\
\text{المهام} & &
\end{array}
$$

الخطوة (3) نقوم بتقليل المصـفوفة الجديدة الواردة في الجدول التالي عن طريق تحديد أصـغر قيمة في كل عمود وطرحها من القيم الأخرى في هذا العمود المقابل .في العمود 1، أصـغر قيمة هي 0، وفي العمود 2 هو

4، وفي العمود 3 هو 3 وفي العمود 4 هو 0. ويظهر الجدول التالي مصفوفة التخفيض حسب العمود.

**مصفوفة التخفيض على مستوى العمود:**

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{العمال} \\
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\text{المهام} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 7 & 11 & 3 & 6 \\ 0 & 11 & 13 & 13 \\ 23 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 12 & 11 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

الخطوة (4) نرسم أقل عدد ممكن من المستقيمات لتغطية جميع الأصفار في المصفوفة الواردة في الجدول.

**المصفوفة مع جميع الأصفار مغطاة:**

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{العمال} \\
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\text{المهام} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 7 & 11 & 3 & 0 \\ 0 & 11 & 13 & 13 \\ 23 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 12 & 11 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

نلاحظ أن عدد الخطوط المرسومة لتغطية الأصفار لا يساوي ترتيب المصفوفة، وبالتالي لم نصل للحل الأمثل. حيث يتم رسم المستقيم الأول مغطياً للصف C الذي يغطي ثلاثة أصفار، ويرسم المستقيم الثاني مغطياً للعمود 4 ويغطي صفرين والمستقيم الثالث يرسم مغطياً للعمود 1 أو الصف B ويغطي صفراً واحداً.

الخطوة (5) نتحقق مما إذا كان عدد المستقيمات المرسومة يساوي عدد أسطر أو أعمدة المصفوفة، أي 4. وهنا

لا يساوي، لذلك لم يتم الوصول إلى الوضع الأمثل .ننتقل إلى الخطوة 6.

الخطوة (6) نأخذ أصغر عنصر في المصفوفة غير مغطى بمستقيم واحد، وهو 3. نطرح 3 من جميع القيم الأخرى التي لم تتم تغطيتها ونضيف 3 عند تقاطع المستقيمات. نترك القيم التي يغطيها مستقيم واحد. والجدول التالي يوضح التفاصيل العمليات مطروحاً أو مضافاً إلى القيم غير المغطاة وخطوط التقاطع على التوالي.

**العمال**

$$
\textbf{المهام}\quad
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} &
\begin{pmatrix} 7 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 10 & 13 \\ 26 & 0 & 0 & 3 \\ 9 & 9 & 8 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

الخطوة (7) الآن، نرسم الحد الأدنى من المستقيمات لتغطية جميع الأصفار، ونتحقق من الوصول للحل الأمثل، هنا في الجدول، الحد الأدنى لعدد المستقيمات المرسومة هو 4 وتساوي عدد أسطر المصفوفة، ثم يتم الوصول إلى الحل الأمثل.

**مصفوفة الأمثلية:**

العمال

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \text{المهام} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 7 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 10 & 13 \\ 26 & 0 & 0 & 3 \\ 9 & 9 & 8 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

**نلاحظ أن عدد الخطوط المرسومة يساوي ترتيب المصفوفة. ومن ثم حصلنا على الحل الأمثل.**

الخطوة (8) إسناد المهام إلى العمال. نحدد صفاً يحتوي على صفر واحد ونقوم بتعيينه. وإذا كان هناك أكثر من صفر واحد موجود في الصف أو العمود، نختار أي صفر ونقوم بتعيينه. نشطب الأصفار المتبقية في هذا العمود أو الصف، ونكرر نفس الشيء مع المهام الأخرى أيضاً. إذا لم يكن هناك تخصيص صفري واحد، فهذا يعني وجود عدة حلول. لكن التكلفة ستبقى كما هي لمجموعات مختلفة من التخصيصات.

**الحل النهائي: التخصيص الأمثل**

العمال

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{array} \\ \text{المهام} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 7 & 9 & \boxed{0} & \cancel{0} \\ \boxed{0} & 9 & 10 & 13 \\ 26 & \boxed{0} & \cancel{0} & 3 \\ 9 & 9 & 8 & \boxed{0} \end{pmatrix} \end{array}$$

لذلك، نصل إلى التعيين الأمثل وهو:

| المهام | العمال | التكلفة |
|---|---|---|
| A | 3 | 19 |
| B | 1 | 15 |
| C | 2 | 21 |
| D | 4 | 12 |
| | التكلفة الكلية = | 67.00 $ |

وتكون التكلفة الكلية تساوي مجموع التكاليف بعد التخصيص: $ 67=19+15+21+12

**مثال (6-4).** مشكلة التخصيص – الطريقة الهنغارية

لدى شركة Funny Toys Company أربعة عمال للعمل في أربع وظائف منفصلة .يمكن لرجل واحد فقط العمل في أي وظيفة واحدة .تكلفة تعيين كل رجل لكل وظيفة مبينة في الجدول التالي .والهدف من ذلك هو تعيين الأفراد في الوظائف بحيث تكون التكلفة الإجمالية للمهمة هي الحد الأدنى.

| الوظائف | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **العمال** | **1** | **2** | **3** | **4** |
| **A** | 20 | 25 | 22 | 28 |
| **B** | 15 | 18 | 23 | 17 |
| **C** | 19 | 17 | 21 | 24 |
| **D** | 25 | 23 | 24 | 24 |

الخطوة 1: نحدد الحد الأدنى للقيم في كل صف ونطرحه من كل قيمة في هذا الصف. كما يوضح الجدول:

| الوظائف | | | | |
|---|---|---|---|---|
| العمال | 1 | 2 | 3 | 4 |
| A | 0 | 5 | 2 | 8 |
| B | 0 | 3 | 8 | 2 |
| C | 2 | 0 | 4 | 7 |
| D | 2 | 0 | 1 | 1 |

**الخطوة 2:** نحدد الحد الأدنى للقيم في كل عمود ونطرحه من كل قيمة في هذا العمود. كما يوضح الجدول:

| الوظائف | | | | |
|---|---|---|---|---|
| العمال | 1 | 2 | 3 | 4 |
| A | 0 | 5 | 1 | 7 |
| B | 0 | 3 | 7 | 1 |
| C | 2 | 0 | 3 | 6 |
| D | 2 | 0 | 0 | 0 |

**الخطوة 3:** نقوم بإجراء التخصـــيصـــات للمصـــفوفة المختصـــرة التي تم الحصـــول عليها من الخطوتين 1 و 2 بالطريقة التالية:

أ- لكل صف أو عمود بخلية واحدة ذات قيمة صفرية لم يتم تعيينها أو إزالتها، نقوم بتكوين هذه القيمة الصفرية كخلية معينة.

ب- لكل صفر يتم تعيينه، نشطب (X) جميع الأصفار الأخرى في نفس الصف والعمود نفسه.

ت- إذا كان هناك صفران أو أكثر في صف أو عمود ولا يمكن اختيار واحد عن طريق الفحص، فنختار الخلية بشكل عشوائي للتعيين.

ث- قد تستمر العملية المذكورة أعلاه حتى يتم تعيين أو تجاوز كل خلية صفرية (X).

**الخطوة 4:** نعثر على التعيين الأمثل، إذا كان عدد الخلايا المعينة يساوي عدد الصفوف (أو الأعمدة). في حالة اختيارنا خلية صفرية بشكل تعسفي، فقد تكون هناك حلول مثالية بديلة. إذا لم يتم العثور على الحل الأمثل، فننتقل إلى الخطوة 5.

| **الوظائف** | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **العمال** | **1** | **2** | **3** | **4** |
| **A** | 0 | 5 | 1 | 7 |
| **B** | ~~0~~ | 3 | 7 | 1 |
| **C** | 2 | 0 | 3 | 6 |
| **D** | 2 | ~~0~~ | 0 | ~~0~~ |

**الخطوة الخامسة:** نرسم الحد الأدنى من المستقيمات الرأسية والأفقية اللازمة لتغطية جميع الأصفار في المصفوفة المختصرة التي تم الحصول عليها من الخطوة 3 باعتماد الإجراء التالي:

أ- نقوم بتمييز كافة الصفوف التي لا تحتوي على مهام.

ب- نقوم بتمييز جميع الأعمدة (التي لم يتم تمييزها بالفعل) التي تحتوي على أصفار في الصفوف المحددة.

ت- نقوم بتمييز جميع الصفوف (التي لم يتم تمييزها بالفعل) التي تحتوي على مهام في أعمدة محددة.

ث- نكرر الخطوتين 5 (2) و (3) حتى لا يمكن تمييز المزيد من الصفوف أو الأعمدة.

ج- نرسم مستقيمات عبر جميع الصفوف والأعمدة التي لم يتم تمييزها.

| الوظائف | | | | |
|---|---|---|---|---|
| العمال | **1** | **2** | **3** | **4** |
| **A** | 0 | 5 | 1 | 7 |
| **B** | 0 | 3 | 7 | 1 |
| **C** | 2 | 0 | 3 | 6 |
| **D** | 2 | 0 | 0 | 0 |

الخطوة 6 نحدد أصـغر عنصـر (أي 1) من جميع العناصـر غير المغطاة، ثم نطرح هذا العنصـر الأصـغر من كل العناصـر المكشـوفة ونضـيفه إلى العناصـر التي تقع عند تقاطع السـطرين. وبالتالي، نحصـل على مصـفوفة مصغرة أخرى لتعيين جديد.

| الوظائف | | | | |
|---|---|---|---|---|
| العمال | **1** | **2** | **3** | **4** |
| **A** | **0** | **4** | **0** | **6** |
| **B** | **0** | **2** | **6** | **0** |
| **C** | **3** | **0** | **3** | **6** |
| **D** | **3** | **0** | **0** | **0** |

الآن مرة أخرى نقوم بالتخصيصات للمصفوفة المصغرة. فنصل للجدول النهائي:

| مهنة | | | | |
|---|---|---|---|---|
| شخص | 1 | 2 | 3 | 4 |
| A | $\boxed{0}$ | 4 | $\cancel{0}$ | 6 |
| B | $\cancel{0}$ | 2 | 6 | $\boxed{0}$ |
| C | 3 | $\boxed{0}$ | 3 | 6 |
| D | 3 | $\cancel{0}$ | $\boxed{0}$ | $\cancel{0}$ |

| الوظائف | | | | |
|---|---|---|---|---|
| العمال | 1 | 2 | 3 | 4 |
| A | **20** | 25 | 22 | 28 |
| B | 15 | 18 | 23 | **17** |
| C | 19 | **17** | 21 | 24 |
| D | 25 | 23 | **24** | 24 |

نظراً لأن عدد المهام يساوي عدد الصفوف (والأعمدة)، فهذا هو الحل الأمثل.

التكلفة الإجمالية للمهمة: $A1 + B4 + C2 + D3 = 20 +17 + 17 +24 =78\ \$$

## 6-3-4 طريقة البرمجة الخطية (Linear Programming Method (simplex

تعتبر مشكلة التخصيص من المشكلات الخاصة لمشكلات النقل والتي بدورها حالة خاصة من البرمجة الخطية، وتنشـــأ هذه الحالة عندما تكون هناك مجموعة من المهام أو الأعمال (Task) يراد إســـنادها إلى مجموعة من الأفراد/الآلات (Facilities) بحيث تكون عدد المهام أو الأعمال مســـاوية لعدد الأفراد أو الآلات، أي أن العامل أو الماكينة تســـند إليه مهمة واحدة فقط بحيث يؤدي ذلك إلى تقليل الكلفة أو الوقت (تم تفصـــيلها في الفصـــل الثاني).

## 6-4-4 طريقة النقل Method Transportation

تعتبر مشكلة التخصيص من المشكلات الخاصة لمشكلة النقل، وتنشأ هذه الحالة عندما تكون هناك مجموعة من الوظائف أو الأعمال المراد توزيعها على الآلات أو الأفراد بالشـــكل الذي يحقق أقل كلفة أو أقل وقت أو يعطي

أكبر عائد ممكن، ويشترط في عملية التخصيص Assignment تساوي عدد الأعمال أو المهام Tasks مع عدد الآلات أو الأفراد Facilities بحيث يخصص كل آلة أو فرد لإنجاز مهمة واحدة فقط وكل عمل أو وظيفة تنجز من قبل آلة أو عامل واحد فقط، ويعتبر كل من (دوير) Dwyer.S.P و(فلود) Flood. M.M وكاهن Kuhu. W.A من المساهمين الأوائل في تطوير أساليب مشكلة النقل (تم تفصيلها في الفصل الخامس).

## 5-6 الحالات الخاصة لمشكلات التخصيص

سوف نتطرق إلى الحالات الخاصة في مسألة التخصيص، والتي يتم معالجتها قبل البدء في عملية الحل أو أثناء عملية الحل وهي:

**أولاً: حالة عدم تساوي الصفوف والأعمدة:** في بعض الحالات لا يتحقق شرط أساسي من شروط مسألة التعيين وهو ضرورة تساوي الصفوف والأعمدة، أي عندما لا تكون مصفوفة التكلفة لمشكلة التخصيص عبارة عن مصفوفة مربعة (ضرورة تساوي العمال مع أمكن العمل المراد شغلها مثلا)، لذلك يجب معالجة هذه الإشكالية من خلال إضافة صف وهمي أو عمود وهمي حسب الحالة، لجعل عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة بقيمة صفر، ثم الانطلاق في الحل بالطرق المعروفة.

يمكن استخدام الطريقة المجرية لحل المشكلة.

**مثال (6-5).** مشكلة التخصيص غير المتوازن

في تخطيط المصنع، يجب تركيب أربع آلات مختلفة M1 و M2 و M3 و M4 في ورشة ماكينات. هناك خمس

مناطق شاغرة A و B و C و D و E. بسبب المساحة المحدودة، لا يمكن تركيب الماكينة M2 في المنطقة C ولا يمكن تركيب الماكينة M4 في المنطقة A. تم توضيح تكلفة تركيب الآلات في الجدول.

**مشكلة التدنية:**

$$\begin{array}{ccc} & & \text{المناطق} \\ & & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \text{الآلات} & \begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & -- & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 8 & 5 & 1 \\ -- & 2 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

نبحث عن خطة التعيين المثلى.

**الحل:** نظراً لأن المصفوفة المعطاة غير متوازنة، نضيف صفاً وهمياً D5 بقيم تكلفة صفرية. نحدد تكلفة عالية H لـ (M2, C) و (A M,4). أثناء اختيار أقل عنصر تكلفة، تُهمل التكلفة العالية المعينة H، كما هو موضح في الجدول أدناه.

**تمت إضافة الصف الوهمي D5**

$$\begin{array}{ccc} & & \text{المناطق} \\ & & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \text{الآلات} & \begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ D_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & H & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 8 & 5 & 1 \\ H & 2 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

يظهر التخفيض الصفي للمصفوفة في الجدول.

**تخفيض المصفوفة:**

المناطق

$$\text{الآلات}\quad \begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ D_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & H & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 4 & 0 \\ H & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

**ملحوظة:** التخفيض حسب العمود ليس ضرورياً، حيث يحتوي كل عمود على صفر واحد على الأقل .الآن، ارسم الحد الأدنى لعدد الأسطر لتغطية جميع الأصفار، انظر الجدول.

**تم وضع الخطوط لتغطية جميع الأصفار:**

المناطق

$$\text{الآلات}\quad \begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ D_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & H & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 4 & 0 \\ H & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

عدد الخطوط المرسومة لا يساوي ترتيب المصفوفة. ومن ثم لم نصل للحل الأمثل.

نحدد أصغر عنصر مكشوف، في هذه الحالة 1. نطرح 1 من كل العناصر المكشوفة الأخرى ونضيف 1 مع العناصر الموجودة عند التقاطع. يظل العنصر المغطى بسطر واحد بدون تغيير. يتم نعرض هذه التغييرات في

الجدول. نحاول الآن رسم الحد الأدنى من عدد الخطوط لتغطية جميع الأصفار.

المناطق

الآلات

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\
\begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ D_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & H & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 0 \\ H & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

الآن عدد الخطوط المرسومة = ترتيب المصفوفة، ومن ثم تم الوصول إلى الحل الأمثل. حيث يجري التخصيص الأمثل للآلات للمناطق في الجدول.

**فنحصل على التخصيص الأمثل:**

المناطق

الآلات

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\
\begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ D_5 \end{array} & \begin{pmatrix} \boxed{0} & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & \boxed{0} & H & 1 & \cancel{0} \\ 2 & 3 & 6 & 4 & \boxed{0} \\ H & 0 & 4 & \boxed{0} & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \boxed{0} & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

ومن ثم فإن الحل الأمثل هو:

| الآلات | المناطق | تكلفة التركيب |
|---|---|---|
| $M_1$ | A | 4 |
| $M_2$ | B | 4 |
| $M_3$ | C | 1 |
| $M_4$ | D | 1 |
| $D_5$ | E | 0 |
| | إجمالي تكلفة التركيب = | 10.00 $ |

**ثانياً: حالة تعدد الحلول المثلى:** تحدث هذه الحالة عندما نستطيع تخصيص أكثر من وسيلة لأداء مهمة وحيدة، وهنا نستنتج وجود حلول بديلة لهذه المسألة، مما يعطي لمتخذ القرار مرونة كبيرة في اختيار وسيلة أداء المهمة وتكون كلفة الحلول البديلة متساوية.

**ثالثاً: حالة التعظيم:** في بعض الأحيان يكون الهدف من مسألة التخصيص هو تعظيم الأرباح، هنا يجب إضافة خطوة قبل البدء في عملية الحل وهي طرح جميع قيم المصفوفة من أكبر رقم فيها ثم إتباع خطوات الحل المعروفة في مسألة التخصيص حسب تسلسلها .

.إذا كان الهدف من التخصيص تعظيم الأرباح أو كفاءة الأداء نقوم بالآتي:

يتم تحويل الحالة إلى حالة تقليل عن طريقة إيجاد الكلف النسبية. حيث يتم إيجاد الكلف النسبية من خلال طرح كل قيم المصفوفة من أكبر قيمة فيها ثم نتابع الحل بالطريقة الاعتيادية.

**مثال (6-6).** ما هو أفضل تخصيص للفنيين، بحيث تكون الأرباح المتحققة أقصى ما يمكن، مستخدما الطريقة الهنغارية.

| المكائن / الفنيين | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 4 | 7 |
| 2 | 8 | 3 | 1 |
| 3 | 5 | 6 | 2 |
| 4 | 4 | 1 | 7 |

الحل:

1- بما أن $m > n$ يضاف ماكينة (D) واحدة وهمية لتصبح المصفوفة مربعة كالتالي:

| W \ M | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 4 | 7 | 0 |
| 2 | 8 | 3 | 1 | 0 |
| 3 | 5 | 6 | 2 | 0 |
| 4 | 4 | 1 | 7 | 0 |

2- نجد مصفوفة الكلف النسبية بطرح كل القيم من أكبر قيمة في المصفوفة والبالغة (8) ثم نحصل على الجدول التالي (بالقيم المطلقة):

| W \ M | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 4 | 1 | 8 |
| 2 | 0 | 5 | 7 | 8 |
| 3 | 3 | 2 | 6 | 8 |
| 4 | 4 | 7 | 1 | 8 |

3- نختار أصغر قيمة في كل صف ثم نطرحها من كل القيم في ذلك الصف:

| W \ M | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 4 | 1 | 8 |
| 2 | 0 | 5 | 7 | 8 |
| 3 | 3 | 2 | 6 | 8 |
| 4 | 4 | 7 | 1 | 8 |

| W \ M | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 3 | 0 | 7 |
| 2 | 0 | 5 | 7 | 8 |
| 3 | 1 | 0 | 4 | 6 |
| 4 | 3 | 6 | 0 | 7 |

4- نطرح أقل رقم من العمود (D) من بقية الأرقام للحصول على أصفار في هذا العمود كالتالي:

| W \ M | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 3 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 5 | 7 | 2 |
| 3 | 1 | 0 | 4 | 0 |
| 4 | 3 | 6 | 0 | 1 |

5- بعد تغطية الأصــفار نلاحظ أن عدد المســتقيمات لا يســاوي عدد الصــفوف أو الأعمدة لذلك نقوم بتحديد أصــغر رقم غير مغطى (1) وطرحه من الأرقام غير المغطاة (1,2,3,5,1,6) وإضــافته إلى الأرقام الواقعة على نقاط التقاطع (1,4) فنحصل:

| W \ M | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 2 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 4 | 7 | 1 |
| 3 | 2 | 0 | 5 | 0 |
| 4 | 3 | 5 | 0 | 0 |

6- بما أن عدد المسـتقيمات = عدد الصـفوف أصـبح بالإمكان إجراء عملية التخصـيص والتي تبدأ في الصـف الذي يكون فيه الصفر وحده ثم نتبع الأصفار الأخرى.

| W \ M | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 4 | 7 | 0 |
| 2 | 8 | 3 | 1 | 0 |
| 3 | 5 | 6 | 2 | 0 |
| 4 | 4 | 1 | 7 | 0 |

| الفني | الماكينة |
|---|---|
| 2 | A |
| 1 | C |
| 3 | B |
| 4 | D |

مجموع العوائد = 8 + 7 + 6 + 0 = 21

**رابعاً: عدم قبول التخصـيص:** في بعض الحالات تواجهنا قيود على عملية التخصـيص تمنعنا من اختيار وسـيلة معينة لأداء مهمة معينة، وذلك يرجع لوجود مانع قانوني أو تكنولوجي، فنقوم بإعطاء تكلفة عالية جداً في هذه الحالة لكي نجعل من المستحيل قيام هذه الوسيلة للمهمة المعنية.

# اختبارات وأسئلة الفصل السادس Tests

## 1) أسئلة صح / خطأ True/False

| | السؤال | صح | خطأ |
|---|---|---|---|
| 1 | تُعنى مشكلة التخصيص بربط عناصر مجموعتين بأقل تكلفة ممكنة. | √ | |
| 2 | مشكلة التخصيص هي حالة خاصة لمشكلة النقل | √ | |
| 3 | يشير الحل في مشكلة التخصيص إلى التكاليف التي لن يتم استخدامها، مع مراعاة الموارد المرتبطة. | | √ |
| 4 | يجب أن يشير الحل في مشكلة التخصيص إلى الوظائف التي لا يجب القيام بها، مع مراعاة التكاليف المرتبطة مرة أخرى. | √ | |
| 5 | إذا تم التعبير عن كل من الوظائف والموارد في وحدات على نفس المقياس، يُطلق عليها اسم النقل أو مشكلة التوزيع. | √ | |
| 6 | إذا لم يتم التعبير عن الوظائف والموارد في نفس الوحدات، فهذه مشكلة تخصيص عامة. | √ | |
| 7 | الهدف من بناء أنموذج التخصيص هو لإلغاء التكلفة الكلية أو إلغاء الزمن الكلي لإنجاز المهام | | √ |
| 8 | الهدف من بناء أنموذج التخصيص هو لتخصيص كل وسيلة إلى مهمة واحدة فقط. | √ | |
| 9 | يُفترض أن تكون قيم الإدخالات في الصف (الصفوف) / الأعمدة الوهمية عددا موجبا. | | √ |
| 10 | يتم تصنيف مشكلة التخصيص إلى مشكلة التخصيص الموجبة ومشكلة التخصيص السالبة | | √ |

## 2) أسئلة خيارات متعددة Multiple Choices

1. تشير الوسيلة التي تساهم في تحقيق الاستعمال الأمثل للموارد المتاحة بهدف تحقيق أقصى العوائد أو تخفيض التكاليف الى أدنى مستوى ممكن إلى:
أ) مشكلة الشبكات    ب) مشكلة المبيعات
ج) مشكلة التخصيص    د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

2. تنطوي مشكلات التخصيص على توزيع الموارد بين البدائل المتنافسة من أجل:
أ) تقليل التكاليف الإجمالية أو تعظيم العائد الإجمالي.
ب) تقليل العوائد الإجمالية أو تعظيم الموارد الإجمالية.
ج) زيادة الحسابات الكلية أو تقليل العمالة الإجمالية.

د) جميع الإجابات السابقة صحيحة

3. من الشروط التي ينبغي توافرها عند استخدام طريقة التخصيص:
أ) القيام بأكثر من مهمة واحدة في نفس الوقت.
ب) إن كلفة أداء كل عمل غير معروفة وغير محددة مسبقا.
ج) ضرورة وجود عدد متساو من العمال والعمليات
د) جميع الإجابات السابقة صحيحة

4. ليس من الطرق المتبعة لحل مشكلات التخصيص أو التعيين:
أ) طريقة السيمبلكس
ب) طريقة البرمجة الخطية
ج) طريقة العد الكامل
د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

5. تستخدم طريقة العد الكامل في حل نماذج التخصيص عندما لا يتجاوز:
أ) عدد المهام أو الوسائل ستة لكل منها
ب) عدد المهام أو الوسائل خمسة لكل منها
عدد المهام أو الوسائل ثلاثة لكل منها
د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

6. تستخدم الطريقة الهنغارية في حل نماذج التخصيص عندما يتجاوز:
أ) عدد المهام أو الوسائل ستة لكل منها
ب) عدد المهام أو الوسائل خمسة لكل منها
ج) عدد المهام أو الوسائل ثلاثة لكل منها
د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

7. من الحالات الخاصة لمشكلات التخصيص:
أ) حالة عدم تساوي الإيرادات والتكاليف
ب) حالة عدم تساوي الصفوف والأعمدة
ج) حالة عدم تساوي النتائج والموارد
د) كل الإجابات السابقة صحيحة

8. تحدث حالة تعدد الحلول المثلى عندما نستطيع:
أ) تخصيص أكثر من بديل لأداء مهمات متعددة
ب) تخصيص أكثر من نتيجة للوصول للأهداف
ج) تخصيص أكثر من وسيلة لأداء مهمة وحيدة
د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

9. يعتبر تقليل المصفوفة عن طريق تحديد أصغر عنصر في كل صف وطرحه من العناصر الأخرى في هذا الصف:
أ) خطوة من خطوات حل مشكلة النقل
ب) خطوة من خطوات حل مشكلة التخصيص
ج) خطوة من خطوات حل مشكلة السيمبلكس
د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

10. أثناء التعيين أو التخصيص، إذا لم يكن هناك صفر واحد موجود في الصف أو العمود:
أ) نختار أي رقم ونقوم بتعيينه
ب) نختار أي قيمة موجبة ونقوم بتعيينها
ج) نختار أي صفر ونقوم بتعيينه
د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

### 3) أسئلة \ قضايا للمناقشة

**مسألة (1) الطريقة الهنغارية**

لدينا أربع وظائف J1 و J2 و J3 و J4 يجب تنفيذها بواسطة أربعة عمال W1 و W2 و W3 و W4 ، وظيفة واحدة لكل عامل. توضح المصفوفة أدناه تكلفة تعيين عامل معين لوظيفة معينة. والمطلوب تقليل التكلفة الإجمالية للمهمة.

| | J1 | J2 | J3 | J4 |
|---|---|---|---|---|
| W1 | 82 | 83 | 69 | 92 |
| W2 | 77 | 37 | 49 | 92 |
| W3 | 11 | 69 | 5 | 86 |
| W4 | 8 | 9 | 98 | 23 |

**{مدة الإجابة: 15 دقيقة. الدرجات من 100: 15. توجيه للإجابة: الفقرة 7.4.2. الطريقة الهنغارية}**

**مسألة (2) الطريقة الهنغارية**

شركة استشارية لديها أربعة خبراء في التسويق يختلفون في إمكانياتهم وقدراتهم من حيث انجاز وأداء المهام الموكلة إليهم. تلقت الشركة ثلاثة عروض من ثلاثة زبائن لتسويق منتجاتهم، وعلى الشركة دراستها وإنجازها في أسرع وقت ممكن. يوضح الجدول الآتي الوقت اللازم لكل خبير من الخبراء الأربعة لدراسة أي من العروض الثلاثة:

| المهام (العروض) / الخبراء | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| سامر | 12 | 16 | 32 |
| نادر | 14 | 21 | 40 |
| زاهر | 22 | 24 | 33 |
| ماهر | 13 | 18 | 36 |

ما هو الحل الأمثل الذي يضمن إنجاز المهام الثلاث في أقل وقت ممكن؟ ومن هو الخبير الذي لم يكلف بأي عمل؟

**{مدة الإجابة: 15 دقيقة. الدرجات من 100: 15. توجيه للإجابة: الفقرة 7.4.2. الطريقة الهنغارية}**

# الفصل السابع: التخطيط الشبكي

# Chapter (7): Networking Planning

**كلمات مفتاحية: Key Words**

التخطيط الشــبكي Network Planning، النشــاط Activity، الحدث Event، تقنية تقييم ومراجعة المشــروع PERT، طريقة المسار الحرج CPM.

**ملخص الفصل: Chapter Summary**

يشار إلى تقنيات بحوث العمليات المستخدمة للتخطيط والجدولة والتحكم في المشاريع الكبيرة والمعقدة باسم تحليل الشبكة. تستخدم الشبكة التمثيل الرسومي المكون من الأسهم والعقد لإظهار التسلسل المنطقي لمختلف المهام التي يتعين القيام بها لتحقيق أهداف المشــروع. يمثل تحليل الشــبكة التقنيات المحددة التي يمكن اســتخدامها لتخطيط وإدارة ومراقبة المشاريع. يتناول هذا الفصل المخططات الشبكية وطرق استخدامها في جدولة أنشطة المشاريع ودراسة الأزمنة اللازمة لإتمام المشروع في الوقت المناسب دون وجود أي تأخير أو فائض في الأزمنة.

**المخرجات والأهداف التعليمية:**

1. استيعاب مفهوم التخطيط الشبكي.

2. تبيان الطرق المختلفة المستخدمة لتمثيل المخططات الشبكية.

3. التمييز بين المخططات الشبكية المؤكدة والمخططات الشبكية الاحتمالية.

4. التمكن من رسم الشبكات الخاصة بأنشطة المشروع.

5. التمكن من طرق التخطيط الشبكي: PERT، CPM، GANTT.

6. تقدير في الوقت والكلف المصاحبة لأنشطة المشروع.

7. استيعاب على المشكلات المصاحبة لاستخدام المخططات الشبكية.

**مخطط الفصل**

7–1 مقدمة

7–2 تعاريف ومفاهيم أساسية

7–3 دراسة المشروع

7–4 تحليل شبكات الأعمال

7–5 المخططات الشبكية المؤكدة

7–6 المخططات الشبكية الاحتمالية

7–7 تعجيل المخططات الشبكية

7–8 مخطط القضبان (المخطط الشريطي)

## 1-7 مقدمة Introduction

تعد إدارة المشاريع مهمة لنجاح وتطور المنظمات، فبناء المساكن والعمارات والجسور والطرق وصناعة الطائرات والسفن وإنشاء المصانع وكتابة رسائل الدكتوراه وإعداد مشاريع التخرج من قبل الطلاب في مختلف التخصصات، وكذلك تطوير المنتجات الجديدة في المصانع ما هي إلا صور للمشاريع المختلفة. إن نجاح أي من هذه المشاريع يعتمد بدرجة أساسية على وجود إدارة فاعلة تقوم بالتخطيط والمراقبة لأنشطة المشروع وجدولة أنشطته بشكل صحيح واتخاذ الإجراءات اللازمة للتعجيل بإنجاز بعض الأنشطة للوفاء بالتزام إنجاز المشروع في وقته المحدد.

عادة ما يُنظر إلى النشاط في مشروع ما على أنه وظيفة تتطلب موارد لإكمالها، وأي مشروع، مثل إنشاء مصنع جديد والبحث والتطوير في منظمة وتطوير منتج جديد وتسويق منتج وما إلى ذلك، هو مزيج من الأنشطة (المهام) المترابطة التي يجب تنفيذها بترتيب معين قبل أن تكتمل المهمة. حيث الأنشطة مترابطة في تسلسل منطقي بحيث لا يمكن أن تبدأ بعض الأنشطة حتى يتم الانتهاء من بعض الأنشطة الأخرى.

طريقة التخطيط الشبكي Network Planning هي أحد أساليب بحوث العمليات التي تستخدم في مجال التخطيط والمراقبة على الأداء والعملية التخطيطية والمراقبة تؤدي الى إنجاح المشاريع، بكونها ذات طابع هندسي يعتمد على الأشكال والرسومات البيانية والهندسية كأساس لتطبيق العلاقات الرياضية التي تربط بين متغيرات التخطيط والمتابعة المختلفة. يعد أسلوب تحليل الشبكة من الأساليب الفريدة التي توضح العلاقات المختلفة بين الأعمال والأنشطة اللازمة للمشروع من البداية إلى النهاية. يوفر أسلوب تحليل الشبكة الأساس العلمي للتخطيط والمتابعة حيث أنه يقدم للقائمين على المشروع معلومات وافية عن ظروف سير العمل في تنفيذ المشروع والبدائل التي يمكن إتباعها لتجنب المشكلات والمعوقات أثناء مراحل التنفيذ مما يسهم في وضوح الصورة عن التفاصيل التي

يتكون منها المشروع، إلى جانب ذلك فإن تحليل الشبكة يساعد في تقدير التكلفة التقديرية وحساب الوقت المتوقع للتنفيذ والمستلزمات البشرية والمادية اللازمة.

تعتبر طريقة التخطيط الشـبكي إحدى الطرق الحديثة نسـبياً في إدارة المشـاريع كتقنية تسـتخدم لتخطيط وجدولة المشاريع الكبيرة، فعندما ترغب المؤسسة في تنفيذ مشروعات مثل إنشاء خط إنتاج جديد أو إحداث إضافات أو تعديلات في المرافق أو الخدمات وكذلك مشـروعات الأتمتة كإنشـاء نظام معلومات فإن المشـكلة التي تثار بين إدارة الإنتاج أو مركز المعلومات من جهة والمؤسسة أو الشركة التي يعهد إليها بتنفيذ المشروع، ومن جهة أخرى تتعلق بالتفاصـيل الخاصـة بأداء العمل أو في تكلفته أو في مواعيد التسـليم كما يمكن أن تنشـأ حالة من عدم وضـوح الرؤية لدى إدارة الإنتاج أو مركز المعلومات بسـبب عدم اكتمال البيانات المتعلقة بالمراحل التي يتكون منها المشروع، كما أن من أهم أسباب فشل المشروعات ضعف التخطيط وضعف المتابعة مما يؤدي إلى خسارة مبالغ كبيرة بل ربما يؤدي ذلك إلى ما هو أهم وهو توقف الإنتاج أو الخدمة أو فقدان المعلومات، ومن هنا كان من الضـروري برمجة المشـروع وفقا لخطة عمل واضـحة تتحدد فيها الأنشـطة والفترة الزمنية والموارد اللازمة لتنفيذها وهو ما يسـاعد ليس فقط على التخطيط ولكن أيضـا على التنبؤ بالمشـكلات التي يمكن أن تطرأ أثناء التنفيذ حيث تستخدم نفس الآليات للرقابة ومقارنة ما أنجز على أرض الواقع بما تم التخطيط له.

في السـنوات الأخيرة، تم تطبيق أسـلوب تحليل الشـبكة بنجاح نتيجة تطور التقنيات والأدوات الفنية للتخطيط والجدولة والتحكم في مراحل المشـاريع المعروفة باسـم طريقة المسـار الحرج "CPM" وتقنية تقييم ومراجعة المشـروع "PERT" في اتخاذ قرارات التصـميم والتنسـيق والرقابة المتعلقة بتنفيذ المشـروعات، وسـاعد ذلك في تقليص الفترة الزمنية وترشيد وضبط النفقات والتعامل مع مشكلة ضيق الوقت ومحدودية الموارد.

## 2-7 تعاريف ومفاهيم أساسية

فيما يلي أهم المصطلحات المستخدمة في تخطيط وتحليل وتصميم شبكات الأعمال:

**المشروع** Project: هو مجموعة من الأنشطة المتداخلة والتي يجب تنفيذها في تتابع محدد بهدف إنجاز المشروع كاملاً، حيث تداخل الأنشـــطة منطقياً، بمعنى أن بعض الأنشـــطة لا يمكن البدء فيها قبل أن يتم الانتهاء من أنشطة أخرى.

**شبكة الأعمال** Network: هي تمثيل بياني لمجموعة من الأنشطة المرتبطة ببعض والمتتابعة والتي يتكون منها المشروع. يظهر التمثيل البياني تسلسل تنفيذ أنشطة المشروع (مرتبة بشكل منطقي وفقا لتسلسل التنفيذ الفني).

**التخطيط الشـــبكي Network planning**: أســـلوب من الأســـاليب العلمية، يســـتخدم في برمجة ومراقبة تنفيذ المـــــشـــروعات، ذات الموارد البشـرية والمادية الكبيرة، التي ترمي من خلال توظيفها إلى تحقيق هدف أو جملة أهداف معينة.

**عناصر المشروع Elements Project**: يمكن تجزئة المشروع، بالتخطيط الشبكي، وفق مؤشـــــرات مناسبة إلى مشروعات جزئية تمثل أعمالاً وأنشطة ذات خصائص معينة، تربطها علاقات محددة. مثال ذلك: مشروع بناء سد والذي يمكـن تجزئتـه إلـى مشروعات جزئية، منها: دراسة ووضـع المخططـات الإنـشائية، تحويل مياه النهر إلى قناة التحويل والأنفاق وإقفال مجري النهر، تـسوية الأرض، نقل الردم، رص الردم، بناء جسم السد، بناء المفيض، بدأ تخزين المياه بالكامل، ....، الخ.

**علاقات المشـــروع Relations Project:** أي مشـــروع عبارة عن نظام، يتكون من مجموعة من العناصـــر (الأنــشطة والأحــداث)، تربطها علاقات تتجلى كعلاقات سببية، تنعكس في تلاحــق وتــسابق أنــشطة وأحــداث المشــروع، وتعبر عن علاقات طبيعية، كالعلاقات الفيزيائية والحيوية: العلاقة بين التبخر والتســخين، الحصــاد والنضــوج، أو علاقات تقنية: صــب الســقف وبناء الجدران، أو علاقات تنظيمية – إدارية كجمع المعلومات عن مشكلة ما والبحث عن بدائل الحل وغيرها.

**جدولة المشـروع Project Scheduling:** تقوم الجهة المعينة بتنفيذ المشـروع بتحديد كافة الأنشـطة التي يتكون منها المشروع، وجدولتها حسب تسلسلها المنطقي التتابعي، وتحديد الزمن اللازم لإنجاز كل نشاط بالاعتماد على متطلبات تنفيذ كل نشــاط. يوجد أســلوبين يمكن اعتماد أحدهما في جدولة الأنشــطة حســب تســلســل إنجازها كم يوضح الجدول (7–1) الآتي.

| الأول | |
|---|---|
| النشاط | النشاط السابق |
| A | ---- |
| B | A |
| C | A |
| D | B |

| الثاني | |
|---|---|
| النشاط اللاحق | النشاط السابق |
| 2 | 1 |
| 3 | 2 |
| 4 | 3 |
| 6 | 5 |

**الجدول (7-1) أسلوبي جدولة الأنشطة حسب تسلسل إنجازها**

لإنجاز أي مشروع، لا بد من القيام بعمل معين أو مجموعة من الأعمال تسمى بالأنشـطة. وإتمـــــام إنجاز أي نشاط يؤدي إلى وقوع حدث. ومنه فإن أي مشروع عبارة عن مجموعة من الأنـشطة والأحداث المترابطة بعلاقات سببية.

**النشـاط Activity:** هو جزء من المشـروع ويمثل العمل اللازم إنجازه لإنهاء مهمة (وظيفة) معينة، فهو مهمة أو مرحلة في مشـروع تتطلب وقتاً وموارد لكي يتم إنجازها. وبصـفة عامة يكون المشـروع مجهود اً لمرة واحدة بحيث أن نفس التتابع للأنشـطة قد لا يتكرر في المستقبل. أو بصـيغة أكثر تبسيطاً، النشاط هو أداء عمل معين يتميز بوجود نقطة بداية ونقطة نهاية ويقاس بالزمن ويمثل بسـهم يصـل بين حدثين، ويرمز له بالسـهم → تمثل بداية السـهم بداية تنفيذ النشـاط وتمثل نهايته نهاية تنفيذ النشـاط. كل نشـاط بتطلب تنفيذه موارد بشـرية ومادية وعلى أساسها يتم تحديد زمن تنفيذ النشاط.

من المعروف أن تنفيذ أي نشـاط من أنشـطة المشـروع، يتوقف على إنجاز أنشـطة أخرى، مما يسـتوجب وجود علاقة سببية بين الأنشطة يجعلها تتـسابق وتتلاحـق وراء بعـضها البعض. لذلك ميز المختصون، انطلاقاً من اتجاه العلاقة السببية وتوضـع الأنشطة وتلاحقها زمنياً، بين نوعين من الأنشطة:

- **النشاط السابق (Previous Activity):** هو كل نشاط يتوقف على تنفيذه إمكانية البـــدء بتنفيذ نشاط آخر.
- **النشاط اللاحق (Next Activity):** هو كل نشاط يمكن البدء بتنفيذه، بعد إتمـــام إنجـــاز نشاط آخر (سابق).

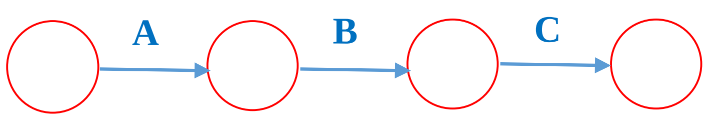
ويوصف النشاط بأرقام أو بأحرف أبجدية أو عبارة توضيحية تشير الى ما يمثله النشاط من عمل جزئي.


**الشكل (7-1) تمثيل النشاط**

هنا، يُعرف "**A**" بالنشاط، حيث توجد أنواع متعددة من الأنشطة:

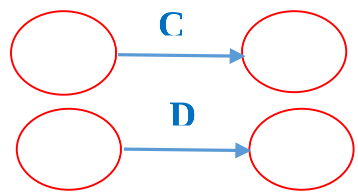
- **النشـــاط الحقيقي (Real Activity):** يعبر عن العمل الذي يجب تنفيذه للانتقال من حدث معين على شبكة العمل الخاصـة بتنفيذ المشـروع المعين إلى حدث آخر، ويتطلب هذه النشاط وقت اً وموارد معينة، ويُعبر عن النشـاط الحقيقي بخط متصـل يربط بين الأحداث للأنشـطة المختلفة، ومثال ذلك: صـــــب الأسـاس. وقد يكون النشـاط اعتيادي Normal Activity لا يؤثر على تأخر المشـروع، أو نشـاط حرجة Critical Activityوهو ذلك النشاط الذي يؤدي تأخر إتمامه إلى تأخر إنجاز المشروع.
- **النشاط الانتظاري (Wait Activity):** هو كل نشـاط لا يحتاج إلى توظيف أي عنـــصـر من عناصر الموارد البشـــرية و/أو المادية، ولكنه يحتاج إلى فترة انتظار لتنفيذه ومثال ذلك: تصـــلب الأســـاس بعد الصب.

في الشـبكة قد تكون الأنشـطة متتابعة، أي تكون الأنشـطة متعاقبة وفق ترتيب معين حيث لا يمكن إنجاز نشـاط لاحق إلا بعد الانتهاء من النشاط السابق وتقدم كما في الشكل (7–2).




**الشكل (7-2) تمثيل الأنشطة المتتابعة**

وقد تكون الأنشـطة متوازية: هي الأنشـطة التي يمكن إنجازها في نفس الوقت، أي إنجاز أي منها لا يتوقف على الآخر ويمكن أن يكون هناك نشـــاطين متوازيين، منا يمكن أن تكون هناك عدة أنشـــطة متوازية ويظهر ذلك في الشكل (7–3).



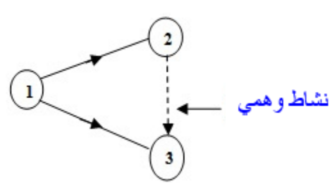

**الشكل (7-3) تمثيل الانشطة المتوازية**

**مثال (7-1).** يتكون مشروع أتمتة المنظمة من الأنشطة الآتية: إعداد كراسة المواصفات، طرح المناقصة، مراجعة العروض، توقيع العقد، تجهيز الموقع، تركيب الأجهزة، تحميل البيانات، التدريب. فيكون: النشاط (إعداد كراسة المواصفات) نشاط سابق لنشاط (طرح المناقصة)، والنشاط (مراجعة العروض) نشاط لاحق لنشاط (طرح المناقصة) وسابق لنشاط (توقيع العقد).

**النشاط الوهمي Dummy Activity:** هو ذلك النشاط الذي لا يلزمه زمن أو موارد للقيام به إنما يستخدم فقط ويتم رسمه. يمثل هذا النشاط في شبكة الاعمال بأسهم متقطعة بسهم منقط **...→** ويستخدم لتوضيح منطقية تتابع العمليات أي تطبيق التسلسل والترابط المنطقي لفعاليات المشروع والوقت المخصص له يساوي صفر.

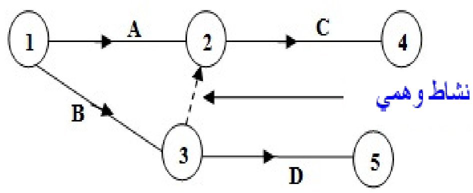
يتم إدخال النشاط الوهمي في الشبكة لتصنيف نمط النشاط في المواقف الآتية:

- ليجعل الأنشطة ذات نقاط البداية والنهاية المشتركة قابلة للتمييز.
- ليحدد ويحافظ على علاقة الأسبقية بين الأنشطة التي لا ترتبط بالأحداث، الشكل (7-4).




**الشكل (7-4) تمثيل النشاط الوهمي**

على سـبيل المثال، لنضـع في اعتبارنا موقفاً يكون فيه "A" و "B" أنشـطة متزامنة ويعتمد النشـاط "D" على "B" ويعتمد "C" على كل من "A" و "B". الشكل (7-5).




**الشكل (7-5) تمثيل الانشطة المتوازية**

للتأكد من أن كل نشــاط له وصــف فريد عند الرجوع إليه برقم عقدة البداية والنهاية، غالباً ما نســتخدم النشــاط الوهمي لتحسين تخطيط الشبكة. يحدث هذا غالباً في بداية أو نهاية الشبكة حيث يبدأ عدد من الأنشطة من نقطة معينة أو تتقارب إلى نقطة معينة.

كل نشاط يؤدي إلى وقوع حدث، ينتهي إليه النشاط السابق ومنه ينطلق النشاط اللاحــق. كما يمكن لعدة أنشطة أن تنتهي إلى وقوع حدث واحد، ومن الحدث الواحد يمكن أن تنطلق عدة أنشطة.

**الحدث Event:** هو لحظة من الزمن تمثل بداية تنفيذ النشـاط وعندها يسـمى بحدث بداية النشـاط، وتمثل ايضـا نهاية تنفيذ النشــاط ويســمى عندها حدث نهاية النشــاط. يمثل الحدث في شـبكة الاعمال بالدائرة O وتكون في بداية السـهم (حدث بداية النشـاط) وتكون في نهاية السـهم (حدث نهاية النشـاط). والحدث نقطة معينة من الزمن لها مدلولان:

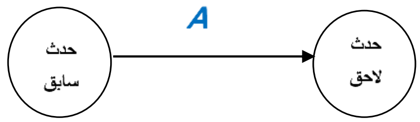
- **الأول:** البدء بإنجاز العمل أو مجموعة من الأعمال قد تكون منفصلة أو مترابطة مع بعض في المشروع.

- **الثاني:** الانتهاء من عمل واحد أو أكثر من أعمال جزئية في المشروع، تتجلى أهمية الحدث في توضيح علاقات التسلسل المنطقي في إنجاز أنشطة وأعمال المشروع على شبكة العمل من جهة، ومن جهة أخرى يشار إليه بيانياً على شبكة العمل بسهم موجه يربط بين مستطيلين أو مربعين أو دائرتين ولا يكون خط متقطع.

كل مشروع يبدأ بحدث واحد فقط يمثل حدث بداية المشروع وأيضا ينتهي بحدث واحد فقط هو حدث نهاية المشروع. مثال ذلك النشاط (تركيب الأجهزة) ينتهي بوقوع الحدث (الأجهزة مركبة)، النشاط (تحميل البيانات) يؤدي إلى وقوع الحدث (البيانات محملة) وهكذا. إن وقوع الأحداث مرهون بتنفيذ الأنشطة. وبما أن الأنشطة تتسابق وتتلاحق وراء بعضها البعض خلال فترات زمنية معينة، فإن الأحداث تتسابق وتتلاحق وراء بعضها البعض أيضاً، فتكون أحداث سابقة وأحداث لاحقة:

- **الحدث السابق (Event Previous):** هو الحدث الذي يسبق حدثا أو مجموعة من الأحداث الأخرى يشترط وقوعها وقوع هذا الحدث. مثال: الحدث (تجهيز الموقع)، حدث سابق للحدث (تركيب الأجهزة).
- **الحدث اللاحق (Event Next):** هو كل حدث يقع بعد وقوع حدث ما أو مجموعة الأحداث السابقة، نتيجة لتنفيذ أنشطة معينة. مثلاً، حدث (تركيب أجهزة) هو حدث لاحق للحدث (تجهيز الموقع) ونشاط (التجهيز).

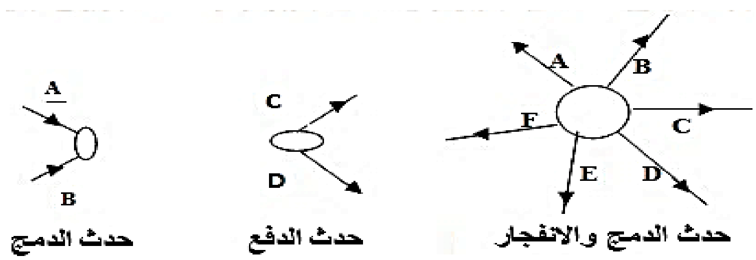
جميع الأحداث السابقة والأحداث اللاحقة تقع نتيجة لإنجاز نشاط أو مجموعة من الأنشطة السابقة، ويتمخض عنها إمكانية البدء بتنفيذ نشاط أو مجموعة من الأنشطة اللاحقة، عدا حدثي بداية ونهاية المشروع. كما يبين الشكل (7−6).




**الشكل (7−6) تمثيل الأحداث**

يمكّن الحدث مدير المشـــروع من مقارنة ما أنجز من أعمال مع ما هو مخطط عند هذه اللحظة الزمنية، مما يساعد في معرفة أسباب التأخر ومعالجتها بسرعة وإجراء التعديلات على خطة المشروع حتى لا يتأخر إنجاز المشروع عن الموعد المحدد له. ويمكن تصنيف الأحداث إلى ثلاث فئات:

- **حدث الدمج (التقاء):** عندما يأتي نشاطان أو أكثر من حدث يُعرف باسم حدث الدمج.
- **حدث الدفع:** عندما يخرج منه أكثر من نشاط واحد، يُعرف الحدث باسم حدث الدفع.
- **حدث الدمج والتشعب (الانفجار):** قد يتم دمج النشاط وتفجيره في نفس الوقت.




**الشكل (7−7) تصنيف الأحداث**

**الفرق بين الحدث والنشاط Difference between event and activity:**

الحدث هو تلك اللحظة المحددة من الوقت التي يتم فيها تحقيق جزء معين من المشـروع بينما يكون النشـاط هو الأداء الفعلي للمهمة. يتم وصـف الأحداث عموماً بكلمات مثل كاملة، وبدء، وإصـدار، وموافقة، وما إلى ذلك، بينما تُظهر كلمة مثل التصـميم، والمعالجة، والاختبار، والتطوير، والإعداد وما إلى ذلك، تشـير إلى أعمال يتم إنجازها وبالتالي تمثل النشـاط، يتطلب أي نشـاط الوقت والموارد لإكماله، يمكن أن يكون لدينا أنشـطة داخل

الأحداث. على ســبيل المثال، المهرجان الثقافي هو حدث يكون فيه أنشــطة مختلفة، مثال آخر، تعتبر الألعاب الأولمبية حدثاً، ويقام لها حفل في البدء كنشاط.

**المسار Path:** بعد الانتهاء من رسم شبكة الاعمال تتكون لدينا مجموعة من المسارات التي تبدأ من حدث بداية المشروع وتنتهي بحدث نهاية المشروع. المسار هو مجموعة من الأنشطة المتتالية والمترابطة والتي تبدأ كما بينا سابقاً من حدث بداية المشروع وتنتهي بحدث نهاية المشروع. وهناك نوعين من المسارات:

- الأول هو **المسار الحرج (Critical Path)** هو المسار الذي يمثل مجموعة الأنشطة الحرجة، وتبدأ من بداية المشروع وتستمر حتى نهايته، ويمثل أطول مسار لإتمام المشروع. أي المسار الذي يجب أن تنفذ الأنشــطة المكونة له في وقتها المحدد وإلا أدى الى تأخير تنفيذ المشــروع بأكمله وعليه يتوقف حســاب وقت إنجاز المشروع بالكامل.
- الثاني هو **المســار غير الحرج (Slack Path)** وهو ذلك المســار الذي يمكن تأجيل أنشطته دون التأثير على وقت إنجاز المشروع بالكامل.

تحديد هذين النوعين من المسارات من أهم أهداف تحليل شبكات الاعمال.

## 7-3 دراسة المشروع

يعتبر التأكد من نجاح أي مشـــــروع قبل تنفيذه على أرض الواقع أمراً مهماً من أجل تفادي التعرض للكثير من المخاطر والخسائر التي من الممكن أن تؤدي لفشل المشروع، لذلك لا بد من إجراء دراسة للمشروع لمعرفة مدى نجاح المشروع من حيث الفكرة، والتركيز على مدى حاجة السوق لنوع المنتج، أو الخدمة التي سيقدمها المشروع،

ومدى توفر المواد والقوى البشـرية التي سـيتم توظيفيها من أجل الخروج بالمشـروع، وبعد ذلك وحسـب النتيجة النهائية للدراسـة يتم الوصـول للقرار حول ما إذا كان المشروع اقتصـادياً يحقق ربح للشركة، أو غير مجدٍ ويسبب خسارة كبيرة في حال تم تنفيذه على أرض الواقع، هذا كله ضـمن إطار الوقت المتاح لتنفيذ المشروع. يجب على مديري المشـاريع اختيار أداة لإدارة المشـروع تتلاءم بشـكل أفضـل مع أسـلوب إدارتهم فلا توجد أداة واحدة تعالج جميع احتياجات إدارة المشروع. وتتكون المنهجية المتبعة في دراسة للمشروع من المراحل الثلاث التالية الموضحة بالشكل (7–8).


**الشكل (7–8) مراحل دراسة المشروع**

**الخطوة الأولى، التخطيط:** تبدأ مرحلة التخطيط بتقسيم المشروع الإجمالي إلى مشاريع صـغيرة. وتقسيم المشـاريع الصــغيرة بدورها إلى أنشـطة يتم تحليلها من قبل القسـم المعني. يتم تحديد وإنشــاء علاقة كل نشــاط فيما يتعلق بالأنشـطة الأخرى، ويتم تحديد المسـؤوليات والسـلطة المقابلة أيضـاً. وبالتالي، فإن إمكانية الإفراط في البحث عن أي مهمة ضرورية لإنجاز المشروع تقل بشكل كبير.

**الخطوة الثانية، الجدولة:** جدول المشـــروع هو الأداة التي تنقل العمل الذي يجب القيام به، وموارد المنظمة التي ســتؤدي العمل والأطر الزمنية التي يجب أن يتم تنفيذ هذا العمل فيها. يجب أن يعكس الجدول الزمني للمشــروع

كل الأعمال المرتبطة بتسليم المشروع في الوقت المحدد. بدون جدول كامل ومتكامل، لن يتمكن مدير المشروع من توصيل الجهد الكامل، من حيث التكلفة والموارد، اللازمة لتسليم المشروع. الهدف النهائي لمرحلة الجدولة هو إعداد مخطط زمني يوضح وقت البدء والانتهاء لكل نشاط بالإضافة إلى علاقته بالأنشطة الأخرى للمشروع. علاوة على ذلك، يجب أن يحدد الجدول الزمني أنشطة المسار الحرج التي تتطلب اهتماماً خاصاً إذا كان المشروع سينتهي في الوقت المناسب. بالنسبة للأنشطة غير الحرجة، يجب أن يُظهر الجدول مقدار أوقات الركود أو التعويم التي يمكن استخدامها بشكل مفيد عند تأخير مثل هذه الأنشطة أو عندما يتم استخدام الموارد المحدودة بشكل فعال. في هذه المرحلة، يتم تخصيص الموارد لتحقيق الهدف المنشود. المورد هو متغير مادي مثل العمالة والتمويل والمعدات والمساحة وما إلى ذلك والتي تفرض قيوداً على إكمال المشروع. عندما تكون الموارد محدودة ويتم إجراء مطالب متضاربة لنفس الموارد، تصبح طريقة منهجية لتخصيص الموارد ضرورية .عادةً ما ينطوي تخصيص الموارد على حل وسط ويعتمد اختيار هذا الحل الوسط على حكم المديرين.

**الخطوة الثالثة، الرقابة أو السيطرة:** المرحلة النهائية في إدارة المشروع هي السيطرة. بعد وضع خطة الشبكة وتحديد المسار الحرج، يتم التحكم في المشروع عن طريق التحقق من التقدم مقابل الجدول الزمني وتعيين وجدولة القوى العاملة والمعدات وتحليل آثار التأخير. يتم ذلك من خلال تقرير التقدم من وقت لآخر وتحديث الشبكة بشكل مستمر. يتم استخدام مخطط السهم والمخططات الزمنية لعمل تقارير مرحلية دورية. تسهل طريقة المسار الحرج تطبيق مبدأ الإدارة عن طريق الاستثناء لتحديد المجالات ذات الأهمية الحاسمة، والشكل (7–8) أعلاه يبرز مراحل دراسة المشروع.

## 4-7 تحليل شبكات الأعمال

يتضمن تحليل شبكات الأعمال وظيفتين هما التخطيط والرقابة. يتم من خلال وظيفة التخطيط بلورة الأهداف إلى خطط يمكن تنفيذها، ويتم من خلال ووظيفة الرقابة معرفة الانحراف عن الأداء التنفيذي. كل مشـــروع يجزأ إلى عدة أنشطة صغيرة فرعية ويحدد متطلبات تنفيذ كل نشاط من مواد وعمال ومعدات ... الخ، والتي على أساسها يتم تحديد زمن تنفيذ النشاط.

أهم مزايا تحليل شبكات الأعمال:

أ- توفير إمكانية إعداد خطط دقيقة تصف مراحل تنفيذ المشروع.

ب- تحديد الزمن المتوقع للمشروع.

ت- تحديد الموارد اللازمة لإنجاز المشروع.

ث- تحديد زمن البدء في نشاط معين وزمن الانتهاء منه.

ج- تحديد كيفية استخدام الموارد المتاحة في تخفيض زمن انجاز المشروع.

ح- تحديد الأنشطة التي يجب أن تنجز في وقتها المحدد تفاديا لتأخر إنجاز المشروع، تلك الأنشطة تسمى بالأنشطة الحرجة.

خ- إمكانية تحويل الموارد من الأنشطة غير الحرجة الى الأنشطة الحرجة وذلك لإنجاز المشروع بأقصر وقت ممكن.

د- إمكانية تحديد المدة الزمنية التي يمكن فيها تأجيل تنفيذ الأنشـــطة غير الحرجة دون التأثير على وقت إنجاز المشروع.

ذ- تحديد احتمال انتهاء المشروع في وقت معين.

**المخطط الشبكي (شبكة الأعمال) Network:**

شبكة الأعمال هي نموذج يمثل المشروع، ويمكن تمثيل عناصرها بمجموعة من الأسهم الموجهة والدوائر، ويمثل السهم النشاط بينما تمثل الدائرة الحدث وتعرض الشبكة العلاقات المنطقية بين هذه العناصر. وتدعى الشبكة المخطط التتابعي Procedure Diagram وتوصف الشبكة بأنها شبكة متصلة إذا كان هناك مسار واحد على الأقل يصل بين كل زوج من الأحداث، فالشبكة ليست إلا التمثيل البياني لخطة تنفيذ المشروع الذي يعرض العلاقات المنطقية المتسلسلة بين الأنشطة المختلفة للمشروع مع عرض نتائج التقديرات الزمنية والحسابات، وتعد شبكة العمل أداة لجدولة المشروع أي تحديد الأنشطة بالتفصيل بعد معرفة المشروع وتقسيمه الى مجموعات من العمليات والمهمات التي تمثل كل منها نشاطاً من أنشطة المشروع وتحديد بداية ونهاية كل نشاط.

**بناء المخطط الشبكي:**

يتكون المشروع من عدد معروف من الأنشطة وليكن (Y) وعدد غير معروف من الأحداث وليكن (Z) لا يمكن معرفته إلا بعد رسم المخطط الشبكي. لتمثيل الشبكة، من الضروري تسمية العقد المختلفة بشكل صحيح. للسهولة، يتم وضع العلامات على مخطط الشبكة. يتم استخدام إجراء قياسي يسمى قاعدة i-j Rule التي طورها DRF Fulkerson لهذا الغرض، وتتضمن:

- الرقم عند نهاية السهم دائماً أكبر من الرقم عند بدايته.
- لا يمكن ترقيم الحدث حتى يتم ترقيم الأحداث السابقة له.
- هنالك فقط حدث بداية واحد لكل نشاط وحدث نهاية واحد، أي كل حدث ممثل بحدث بداية معين وحدث نهاية معين.
- لا يوجد ازدواجية في الأرقام.

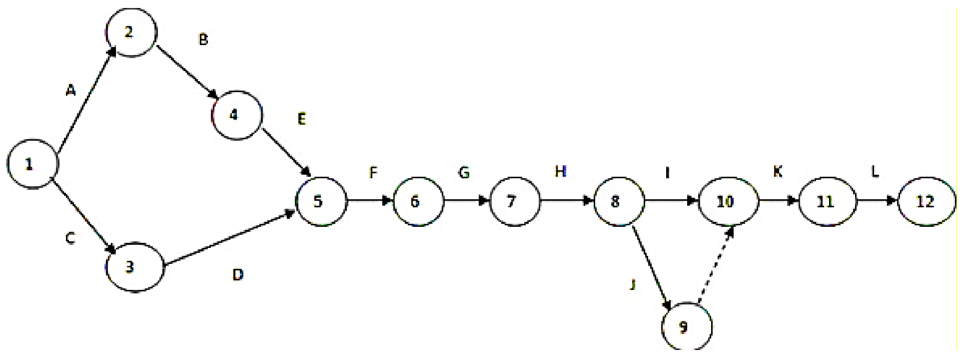
**مثال (7−2).** يوضـح المثال التالي الخطوات الأسـاسـية المطلوبة في رسـم الشـبكة، حيث تمثل القائمة التالية الأنشطة الرئيسية لإعداد (الجبن):

1. الحصول على حليب بقري،
2. توحيد الحليب للحصول على المستوى المطلوب من نسبة الدهون،
3. أخذ حامض الستريك وحضر محلول 1٪،
4. تسخين حامض الستريك إلى 70 درجة مئوية،
5. غلي الحليب على نار متوسطة،
6. تبريد الحليب إلى 70 درجة مئوية وإضـافة محلول حامض السـتريك ببطء حتى ينفصـل مصـل اللبن المصفر،
7. تصفية المزيج بقطعة قماش أو شاش نظيفة،
8. وضع المزيج تحت الماء المتدفق لمدة دقيقة ثم الضغط للتخلص من الماء الزائد،
9. تعليق القماش لمدة 15−20 دقيقة حتى يتم تصريف مصل اللبن بالكامل،
10. تحضير القالب لتشكيل كتلة الجبن،
11. ملء القالب بكتلة القماش وربطه،
12. وضع الكتلة تحت شيء ثقيل لمدة تصل إلى ساعتين،
13. قطّع الجبن إلى قطع واستخدمه حسب الحاجة.

بناءً على القائمة أعلاه للأنشطة المختلفة، يتم تشكيل جدول الأسبقية الوارد في الجدول (7−2).

| الجدول (7−2) الأنشطة الرئيسية لإعداد (الجبن) | | |
|---|---|---|
| **النشاط** | **الوصف** | **النشاط السابق** |
| **A** | الحصول على حليب بقري | **-** |
| **B** | توحيد الحليب للحصول على المستوى المطلوب من نسبة الدهون | **A** |
| **C** | أخذ حامض الستريك وحضر محلول 1٪ | **-** |
| **D** | تسخين حامض الستريك إلى 70 درجة مئوية | **C** |
| **E** | غلي الحليب على نار متوسطة | **B** |
| **F** | تبريد الحليب إلى 70 درجة مئوية وإضافة محلول حامض الستريك ببطء حتى | **D, E** |
| **G** | تصفية المزيج بقطعة قماش أو شاش نظيفة. | **F** |
| **H** | وضع المزيج تحت الماء المتدفق لمدة دقيقة ثم الضغط للتخلص من الماء الزائد. | **G** |
| **I** | تعليق القماش لمدة 15-20 دقيقة حتى يتم تصريف مصل اللبن بالكامل. | **H** |
| **J** | تحضير القالب لتشكيل كتلة الجبن | **F** |
| **K** | ملء القالب بكتلة القماش وربطه | **I** |
| **L** | وضع الكتلة تحت شيء ثقيل لمدة تصل إلى ساعتين | **K** |
| **M** | قطّع الجبن إلى قطع واستخدمه حسب الحاجة. | **L** |

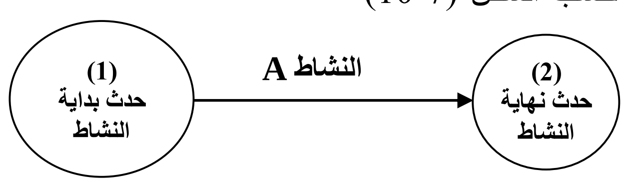
في الجدول أعلاه، تم إيلاء الاعتبار الواجب لسوابق النشاط، أثناء رسم الشبكة، سيتم النظر في عوامل أخرى، النشاط A ليس له نشاط سابق ويتم تمثيله بخط سهم (انظر الشكل). بالمثل، لا يحتوي النشاط C على نشاط سابق ويمكن تنفيذ كلا النشاطين A و C في وقت واحد بحيث يتم عرضهما على أنهما أنشطة متزامنة، النشاطان "B" و "D" مسبوقان بالنشاطين "A" و "C" على التوالي. تظهر الشبكة الكاملة في الشكل (7−9).




**الشكل (7-9) تمثيل الأنشطة الرئيسية لإعداد (الجبن)**

**أشكال وصيغ تصميم شبكات الأعمال.** هناك أشكال وصيغ مختلفة لتصميم شبكات العمل، ويعود السبب إلى نوع وطبيعة المشروع، وكذلك طبيعة الأنشطة ذاتها المؤلفة للمشروع. هناك ثلاثة صيغ أساسية لتصميم شبكات الأعمال وهي:

**أ -تصميم شبكات الأعمال على أساس أن الأنشطة يُعبر عنها من خلال الأسهم Activity on Arrow (AOA)** وتطبق هذه الصيغة في أسلوب PERT ويقصد بذلك أن تصميم شبكات العمل قائم على أساس أن التعبير عن الأنشطة أو الفعاليات في المشروع من خلال أسهم أما بالنسبة للأحداث فإن التعبير عنها يكون من خلال العقد أو نقاط التقاطع حسب الشكل (7-10)




**الشكل (7-10) تصميم شبكات العمل على أساس أن الأنشطة يُعبر عنها من خلال الأسهم**

**ب -تصميم شبكات العمل على أساس العقد Activity on Nods (AON)** في هذا النوع من الصيغ لشبكات العمل تكون العقد (Nods) تعبر عن نشاط في حين السهم (ARROW) يُعبر عن الحدث وهذه الصيغة تُطبق في ظل(CPM) .


**الشكل (7-11) تصميم شبكات العمل على أساس العقد**

**ج -تصميم شبكات العمل وفق صيغ وأشكال هندسية مختلفة.**

**مثال (7−3).** قررت مصفاة بانياس القيام بمشروع صيانة المصفاة، وقد تم إعداد دراسة حول الأنشطة المطلوب تتابعها كما يظهر في الجدول (7-3) أنشطة مشروع صيانة المصفاة:

| النشاط السابق | وصف النشاط | النشاط |
|---|---|---|
| - | تفكيك خط الأنابيب وتفكيك التجهيزات الأخرى | A |
| - | إزالة الصمامات وفحصها | B |
| A | فحص وتنظيف الصمامات | C |
| A,B | تنظيف خط الأنابيب | D |
| C | استبدال العناصر المعيبة | E |
| C | تخطيط خطوط التجميع وتجميع الصمامات | F |
| D,E | عمل التوصيلات النهائية | G |
| F.G | اختبار التركيبات | H |

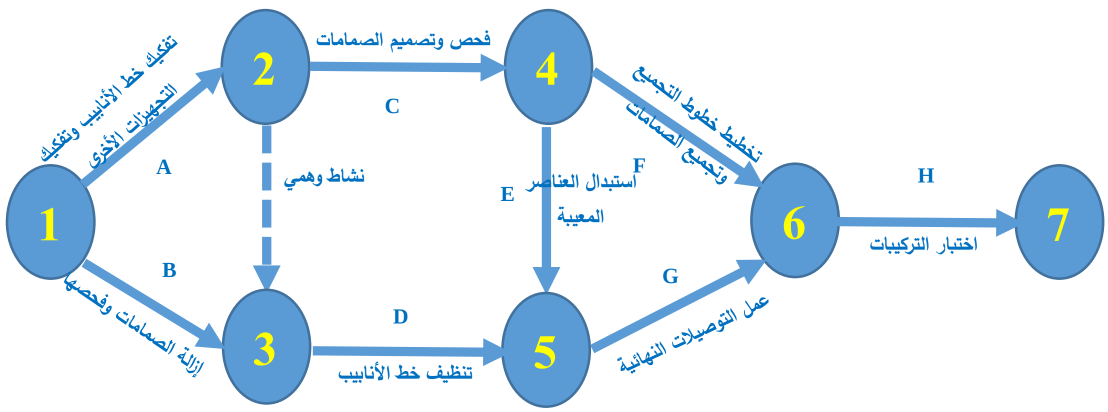
**الجدول (7−3) صيانة مصفاة بترول بانياس**

المطلوب: أ) رسم شبكة المشروع باستخدام طريقة النشاط على السهم.

ب) رسم شبكة المشروع باستخدام طريقة النشاط على القطب.

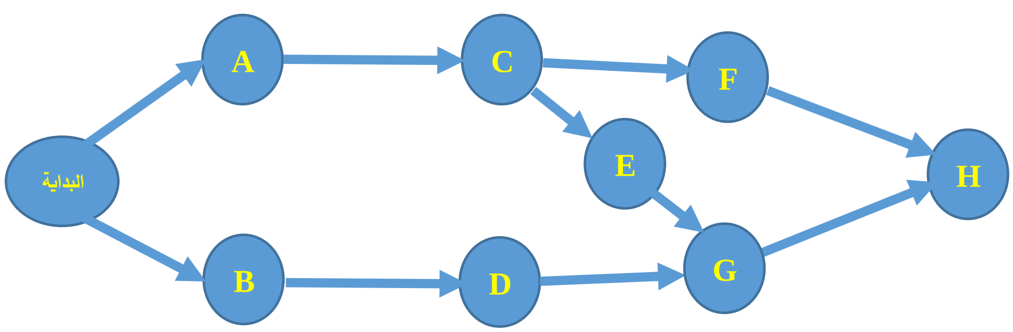
الحل:

➢ رسم شبكة مشروع صيانة المصفاة باستخدام طريقة النشاط على السهم **كما في الشكل (12-7):**




**الشكل (7–12) شبكة مشروع صيانة المصفاة باستخدام طريقة النشاط على السهم**

➢ رسم شبكة مشروع صيانة المصفاة باستخدام طريقة النشاط على القطب **كما في الشكل (13-7):**




**الشكل (7–13) شبكة مشروع صيانة المصفاة باستخدام طريقة النشاط على القطب**

**أهمية التخطيط الشـبكي:** يعتبر التخطيط الشـبكي أسـلوب من الأسـاليب المتطورة ذات الاسـتخدامات المختلفة، وهو أداة مساعدة للإدارة في عمليات التخطيط والتنسيق بين الأنشطة فهو يقوم على أساس تحليل المشروع تحليلاً هيكلياً وزمنياً وذلك وفق ترتيب منطقي للأنشطة التي يتطلب إنجازها زمنياً وموارد مختلفة، فإن الاعتماد عليه في جدولة ومراقبة المشروعات الإنشائية أو الخدمية أو الإنتاجية له دور مهم يتمثل في النقاط الآتية:

أ- **المفاضلة بين الزمن، التكلفة والجودة:** فشبكات الأعمال تسمح بالمفاضلة بين الزمن والتكلفة والجودة أي بين عناصر قوى المشروع، وهذا لتحديد الخطة المثلى لتنفيذ المشروع وتقدير التكلفة الأقل والجودة الأفضل التي تعد من أهم القوى في الوقت الحالي وبالتالي فإن الجودة تؤدي إلى نقص التكلفة.

ب- **تحديد سبب التأخير في الإنجاز:** تمكن شبكات الأعمال من تحديد حجم الموارد البشرية اللازمة لإنجاز المشروع، وذلك تبعاً للاحتياجات من اختصاصات هذه الموارد ومهاراتها الفنية والعلمية، أي تحديد دور مسؤولية كل مورد بشري، وعند حدوث أي تأخير في إنجاز نشاط ما، يتم البحث في أسبابه، وتحديد الأسباب فيما إذا كانت عائدة الى أسباب طبيعية أو بيئية خارجة عن إرادة المسؤول عن التنفيذ، أو أسباب فنية مصدرها أعطال في الآلات المستخدمة في إنجاز النشاط، أو عدم ملائمة قدرة ومؤهلات العنصر البشري ومستوى مهاراته في إنجاز المهمة الموكلة إليه وقد تكون الأسباب إدارية أو فنية أو اقتصادية.

ت- **توفر نظام معلومات:** إن مدير المشروع له مسؤولية تخطيط ورقابة المشروع وللقيام بهذه المهمة فإنه بحاجة الى معلومات دقيقة وفي الوقت المناسب تبنى هذه المعلومات حول بنية تقسيم العمل التي تعرضها المخططات الشبكية بالتفصيل أو قياس ما هو منجز مع ما هو مخطط. ومما لا شك فيه أن المشروع المنفذ جيدا وبدقة يوفر قاعدة بيانات واسعة يستفاد منها في عملية تقدير المؤشرات لخطط المشروعات المستقبلية المشابهة للمشروع المنفذ.

ث- **تحقيق مبدأ الإدارة بالأهداف:** الإدارة بالأهداف هي "طريقة للتخطيط والتقويم الإداري لها أهداف محددة لسنة معينة، توضع هذه الطريقة على أساس النتائج التي ينبغي أن تنجز كل واحدة منها إذا أدركت

الأهداف الإجمالية للمشروع الأساسية". معظم المديرين الذين لا يخططون أعمالهم يفترضون أن جميع أنشطتهم المتعلقة بالهدف متعاقبة فإنهم ينتظرون إنجاز نشاط للبدء بآخر، ولكن المخططات الشبكية توضح علاقات متبادلة بين الأنشطة المتعلقة بالهدف عبر علاقة التسلسل المنطقي، كعلاقات التزامن بين الأنشطة التي تبدأ معا، وعلاقات التداخل والتشابك بين الأنشطة التي تنتهي بعضها مع بعض، فهذا يقلص من الزمن المحدد لإنجاز الهدف لأن تقليص الفترة الزمنية هدف في حد ذاته تسعى معظم المؤسسات إلى تحقيقه.

ج- **تحقيق مبدأ الإدارة بالاستثناء:** تعد تقنية الإدارة بالاستثناء مكملة لنظام الإدارة بالأهداف حيث تركز انتباه المدير على الأنشطة الهامة والأساسية التي تحتاج إلى مراقبة فعالة، أي الأنشطة الحرجة التي بإنجازها يتحقق الهدف.

بالإضافة إلى النقاط السالفة تبرز أهمية التحليل الشبكي من خلال تقديم الفوائد الآتية:

- تحديد إجمالي الخطوات اللازمة لتنفيذ مشروع ما،
- تحديد سير العمل بشكل أساسي لتحديد نقاط الاختناق في عملية التنفيذ،
- تعرض التعاقب الزمني لخطوات العمل وتوضيح بداية ونهاية كل خطوة عمل،
- تحدد مجال المشكلات المحتملة من خلال الأنشطة الحرجة حيث يتم وضع خطط موقفيه حالما يتم اكتشافها،
- التحليل الشبكي يتسم بسهولة الفهم وهذا ما يساعد على تقديم رؤية شمولية للمشروع وبذلك تستطيع الإدارة شرح الطرق للمترفين والعاملين بطريقة تزداد معها فرص تنفيذ للمشروع،

➢ التحليل الشبكي يشكل أساساً لوضع جدول اليد العاملة والمعدات والآلات.

## 7-5 المخططات الشبكية المؤكدة *Network Certain*

تسعى المنظمات إلى تقليل التكاليف في المشاريع الكبيرة والصغيرة، بدءاً من برامج الفضاء إلى حفلات الزفاف والتحكم في التسلسل الأكثر منطقية واقتصادية للعمليات لإنجاز المشروع. يتم تحليل المشروع إلى أنشطة مختلفة تظهر علاقاتها على مخطط الشبكة. ثم يتم استخدام الشبكة لتحسين استخدام الموارد والتقدم والتحكم. للمخططات الشبكية أنواع تختلف باختلاف تقنيات وطرق بنائها ومعطياتها. وهناك أكثر من طريقة واحدة في بناء وتحليل المخططات الشبكية. وللانتقال إلى المراحل التالية في التخطيط الشبكي، لا بد من اختيار نوع المخطط الشبكي المناسب، من حيث طبيعة المشروع وعلاقات أنشطته المختلفة، ونوع المعطيات المتوفرة عنه، وإمكانيات بنائه، وحساب مؤشراته الزمنية والاقتصادية. ومن أفضل الطرق وأكثرها شيوعاً في الاستخدام: طريقة المسار الحرج ( C.P.M)في حالة التأكد التام. وهي تلك الحالة التي نعلم فيها علم اليقين كل الأنشطة المكونة للمشروع وتسابقها وتلاحقها ومدة تنفيذ كل منها.

**طريقة المسار الحرج (Critical Path Method CPM):**

طريقة المسار الحرج (**C**ritical **P**ath **M**ethod **CPM**) هي إحدى الطرق الأساسية لتحليل الشبكة. هدفها هو تحديد مدة المشروع بناءً على طول المسار الحرج، وهو عبارة عن سلسلة من الأنشطة المترابطة. تم تطوير CPM في عام 1957 بواسطة MR Walker من شركة دوبونت الأمريكية EI Du Pont de Nemours & Co

، فاستخدمت في جدولة عمليات التعطل في مصانع المواد الكيماوية، وبسبب المزايا التي تحققت من استخدامه فقد أدى الى تخفيض وقت الأعطال اللازمة لعمل برنامج الصيانة من 125 ساعة الى 78 ساعة.

طريقة المسار الحرج طريقة تعيينيه حاسمة Deterministic فهي لا تأخذ بعين الاعتبار احتمال اختلاف مدة تنفيذ كل مهمة (ليست كطريقة بيرت مثلاً والتي تعتمد توزيع زمني احتمالي).

تفترض طريقة المسار الحرج أن الوقت اللازم لإكمال أجزاء مختلفة من المشروع محدد على وجه اليقين (حالة التأكد التام). علاوة على ذلك، من المفترض أيضاً أن تكون العلاقة بين كمية الموارد المستخدمة والوقت اللازم لإكمال المشروع محددة.

تتلخص خطوات تطبيق طريقة المسار الحرج في:

1. **معرفة كل الأنشطة التي يجمعها المشروع:** في البداية يتم عمل قائمة بكل المهام (الأنشطة) التي يضمها المشروع وتقسيم المشروع إلى أنشطة مختلفة بشكل منهجي، ثم تسمية جميع الأنشطة، ثم ترتيب جميع الأنشطة في تسلسل منطقي لإنشاء مخطط السهم. غالباً بناءاً على بنية تقسيم العمل Work Breakdown Structure.
2. **معرفة العلاقات بين هذه المهام:** هناك مهام يمكن أن تنفذ على التوازي أو قد تعتمد على انتهاء المهام أخرى (على التسلسل)، في هذه الخطوة يتم عمل قائمة بكل مهمة وعلاقاتها بالمهمات الأخرى.
3. **رسم المهام علي المخطط الشبكي:** بعد معرفة المهام وما يترتب عليها من مهام أخرى، يتم رسم المخطط الشبكي الخاص بالمشروع بحيث تكون الأنشطة مرسومة عند العقد (**Activity on Node**) .

4. **تقدير الزمن اللازم لإنهاء كل مهمة:** يتم تقدير الزمن اللازم لإنهاء كل مهمه من خبرات ســـابقة بهذه المهام أو باستخدام الحدس المنطقي والذي قد لا يخلو من الخطأ في التقدير.

5. **تحديث المخطط الشـبكي بشـكل دوري أثناء تنفيذ المشـروع:** خلال تنفيذ المشـروع، يتم تسـجيل الوقت الحقيقي الذي استغرقه كل نشاط، وفي هذه الأثناء قد يظهر مسار حرج جديد أو تظهر أنشطة جديدة لم تكن في الحسبان.

6. **تحديد المســـار الحرج من على المخطط الزمني:** يتم تقدير الزمن اللازم لإنهاء كل مهمه من واقع الخبرات الســـابقة بهذه المهام أو باســـتخدام الحدس المنطقي والذي قد لا يخلو من الخطأ في التقدير. والمسار الحرج هو المسار الذي يمثل أطول مسار في الشبكة لتحديد الزمن المتوقع لإنجاز المشروع.

يتم تطوير شبكة المشروع باستخدام أسلوب المسار الحرج بإتباع الخطوات الآتية:

1. **تحديد البداية المبكرة: Earliest Start (ES):** يعني أبكر وقت يمكن أن يبدأ به كل نشـــاط، وهي اللحظة التي يمكن البدء فورا دون تأخير وبمجرد أن تسمح بذلك الظروف الفنية الخاصة بتتابع الأنشطة.

– البداية المبكرة ES لأول نشاط في المشروع = صفر (لأنه لا يوجد نشاط سابق)

– البداية المبكرة ES لأي نشاط = النهاية المكبرة للنشاط السابق (EF).

– في حال وجود أكثر من نهاية مبكرة تسـبق أي نشــاط فإننا نأخذ النهاية المبكرة الأطول زمنا، لآنه لا يمكن البدء بأي نشاط قبل الانتهاء من كافة الأنشطة السابقة المرتبطة به.

2. **تحديد البداية المتأخرة Latest Start (LS):** اقصـــى تأخير في زمن بداية النشــاط دون أن يؤدي ذلك الى تأخير المشـــروع ككل. بمعنى يمكن التأخير ضـــمن انتظار أنشـــطة أخرى يمكن أن تنجز. وتكون البداية المتأخرة LS لأي نشاط تساوي النهاية المتأخرة للنشاط مطروحا منها زمن إنجاز النشاط.

$$LS = LF - D$$

(زمن البداية المتأخرة = زمن النهاية المتأخرة – الوقت المقدر لأداء النشاط)

3. **تحديد النهاية المبكرة: Earliest Finish (EF)** : يعني أبكر وقت ممكن أن ينتهي به ذلك النشـــــاط، فهو لحظة إتمام النشـــاط إذا لم يكن هناك تأخير في لحظة البدء أو وقت إنجاز النشـــاط. تكون النهاية المبكرة EF لأي نشاط تساوي البداية المبكرة لذلك النشاط مضافا لها الزمن اللازم لإنجاز ذلك النشاط.

$$EF = ES + D$$

(زمن النهاية المبكرة = زمن البداية المبكرة + الوقت الذي يستغرقه النشاط).

4. **تحديد النهاية المتأخرة: Latest Finish (LF):** أقصى تأخير في زمن نهاية النشاط دون ان يؤدي الى تأخير زمن تنفيذ المشروع ككل، حتى يتم تسليم المشروع في الوقت المحدد.

- النهاية المتأخرة LF للنشاط هي نفسها البداية المتأخرة للنشاط اللاحق.
- في حالة وجود أكثر من نشـــاط لاحق (أي أكثر من بداية متأخرة)، فإننا نختار النشـــاط الأقصـــر زمناً (البداية المتأخرة الأقل)، من أجل حساب النهاية المتأخرة للنشاط الحالي.
- النهاية المتأخرة لآخر نشاط هي نفسها النهاية المبكرة له.

5. **تحدي الوقت الفائض Slack Time (ST):** وهو الوقت الفائض ST بين الوقت المخطط له لتنفيذ النشاط، ووقت التنفيذ الفعلي على الأرض ويمثل الحد الأقصى لتأخير النشاط دون ان يؤثر ذلك على إنجاز المشروع. ST = LS – ES أو ST = LF - EF

(الفائض في النشاط = زمن النهاية المتأخرة – زمن النهاية المبكرة).

6. الوقت الإجمالي Time Available (TD): يتم حساب كافة المسارات واختيار الأطول فيكون هو المسار الحرج.

**فوائد استخدام أسلوب المسار الحرج:**

- ✓ الحصول على تمثيل تخطيطي للمشروع.
- ✓ التنبؤ بالوقت اللازم لإنهاء المشروع.
- ✓ التمييز بين المهمات الحرجة والغير حرجة في المشـروع، وبالتالي تحديد هامش المناورة الممكن بالنسـبة لكل مهمة حيث يمكن نقل بعض الموارد من المهمات غير الحرجة وتركيزها على المهمات الحرجة مما يساهم بخفض زمن المشروع مع ثبات الكلفة.

**مثال (4-7).** مثال توضيحي لتطوير شبكة المشروع باستخدام أسلوب المسار الحرج.

في مشروع صيانة المصفاة لدينا البيانات الموضحة بالجدول الآتي:

| وقت النشاط | وصف النشاط | النشاط | النشاط السابق |
|---|---|---|---|
| **2** | تفكيك خط الأنابيب وتفكيك التجهيزات الأخرى | **A** | **-** |
| **3** | إزالة الصمامات وفحصها | **B** | **-** |

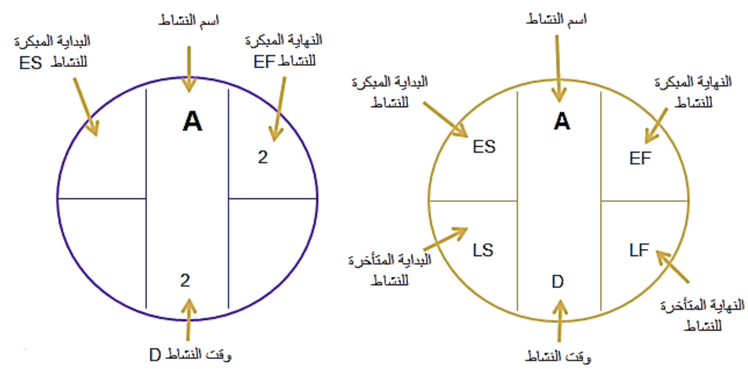
| | | | |
|---|---|---|---|
| **2** | فحص وتنظيف الصمامات | **C** | **A** |
| **4** | تنظيف خط الأنابيب | **D** | **A,D** |
| **4** | استبدال العناصر المعيبة | **E** | **C** |
| **3** | تخطيط خطوط التجميع وتجميع الصمامات | **F** | **C** |
| **5** | عمل التوصيلات النهائية | **G** | **D,E** |
| **2** | اختبار التركيبات | **H** | **F,G** |

المطلوب: أ) تحديد أوقات البداية المبكرة (ES) وأوقات النهاية المبكرة (EF) لأنشطة المشروع؟

ب) تحديد أوقات البداية المتأخرة (LS) وأوقات النهاية المتأخرة (LF) لأنشطة المشروع؟

ج) تحديد المسار الحرج وأوقات الفائض في المشروع؟

<u>الحل:</u>




تحديد أوقات البداية المبكرة وأوقات النهاية المبكرة لأنشطة المشروع:

1. تحديد أوقات البداية المبكرة (ES) وأوقات النهاية المبكرة (EF) للنشاط A.

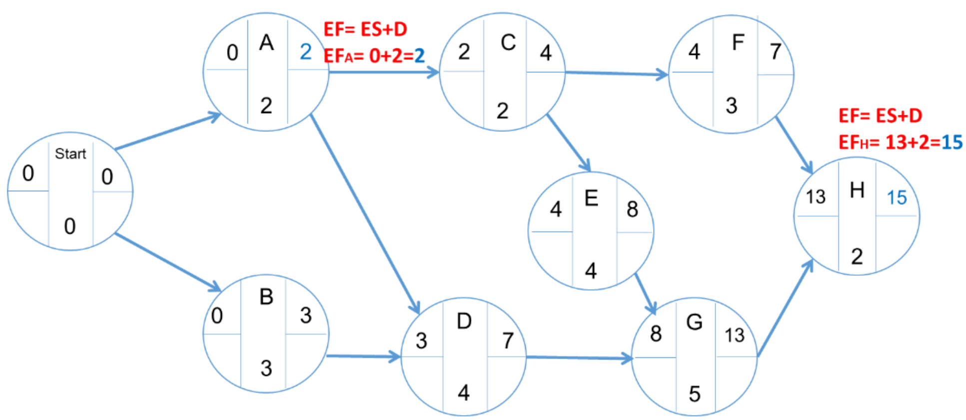
$$EF = ES + D$$

$$LS = LF - D$$

$$ST = LS - ES$$

$$ST = LF - EF$$

- البداية المبكرة لأول نشاط في المشروع = صفر (لأنه لا يوجد نشاط سابق له)
- البداية المبكرة ES للنشاط A، هي النهاية المبكرة للنشاط الذي يسبقه وهو نشاط Start وتساوي صفر.
- البداية المبكرة لأي نشاط = النهاية المبكرة للنشاط السابق (EF).
- النهاية المبكرة Earliest Finish (EF): تعني أبكر وقت ممكن أن ينتهي به ذلك النشـــاط، فهو لحظة إتمام النشاط إذا لم يكن هناك تأخير في لحظة البدء أو وقت إنجاز النشاط.
- تكون النهاية المبكرة EF لأي نشـــاط تســـاوي البداية المبكرة ES لذلك النشـــاط مضـــافاً لها الزمن اللازم لإنجاز ذلك النشاط D. النهاية المبكرة EF للنشاط A، تساوي EF=0+2=2 Week
- في حال وجود أكثر من نهاية مبكرة تسبق أي نشاط فإننا نأخذ النهاية المبكرة الأطول زمناً، لأنه لا يمكن البدء بأي نشاط قبل الانتهاء من كافة الأنشطة السابقة المرتبطة به.
- تكون النهاية المبكرة لأي نشاط تساوي البداية المبكرة لذلك النشاط مضافاً إليها الزمن اللازم لإنجاز ذلك النشاط.



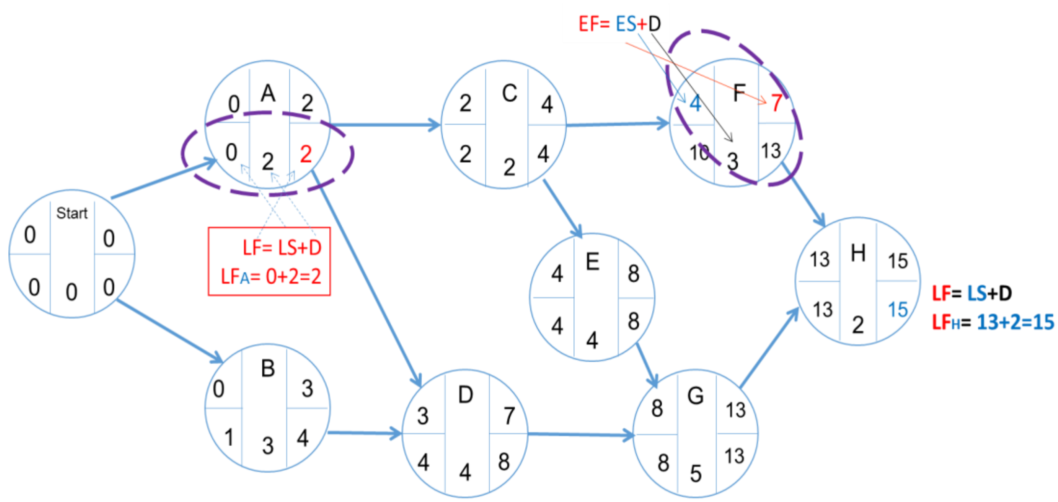

**تحديد أوقات المشروع: ES و EF**

2. تحديد أوقات البداية المتأخرة (LS) وأوقات النهاية المتأخرة (LF) لأنشطة المشروع:

- البداية المتأخرة (LS) أقصـــى تأخير في زمن بداية النشـاط دون أن يؤدي ذلك إلى تأخير المشروع ككل.

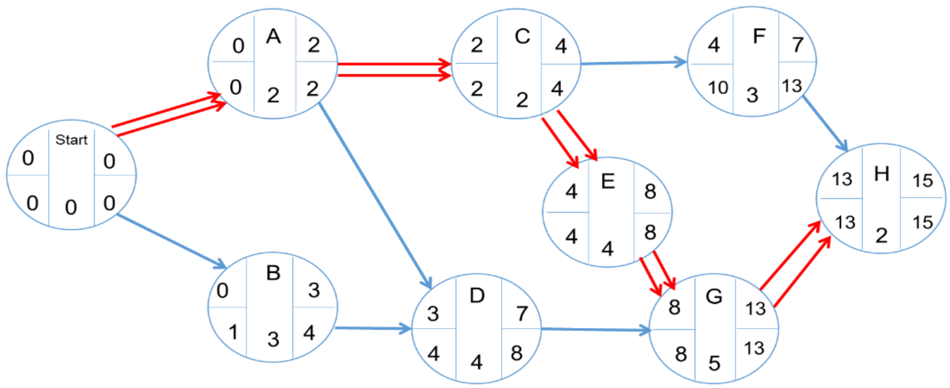
بمعنى يمكن التأخير ضـــمن انتظار أنشـــطة أخرى يمكن أن تنجز، والبداية المتأخرة (LS) لأي نشـــاط تساوي النهاية المتأخرة للنشاط مطروحا منها زمن إنجاز النشاط.

- النهاية المتأخرة Latest Finish (LF): عبارة عن أقصى تأخير في زمن نهاية النشاط دون أن يؤدي إلى تأخير زمن تنفيذ المشروع ككل، حتى يتم تسليم المشروع في الوقت المحدد.
- النهاية المتأخرة للنشاط هي نفسها البداية المتأخرة للنشاط اللاحق.
- النهاية المتأخرة لأخر نشاط هي نفسها النهاية المبكرة له.
- في حال وجود أكثر من نشـــاط لاحق (أكثر من بداية متأخرة)، نختار النشـــاط الأقصـــر زمنا (البداية المتأخرة الأقل).
- لحســاب البداية المتأخرة والنهاية المتأخرة LF فإننا نتحرك من النشــاط الأخير ثم نسـير باتجاه عكســي وصولا إلى النشاط الأول الأبكر.




**تحديد أوقات المشروع: LS و LF**

3. تحديد المسار الحرج CPM. المسار الحرج هو أطول مسار ممكن، وعليه يتم تحديد المسارات الممكنة في المشروع لاختيار المسار الحرج على النحو الآتي:




**المسار الحرج CPM بالخطوط المزدوجة.**

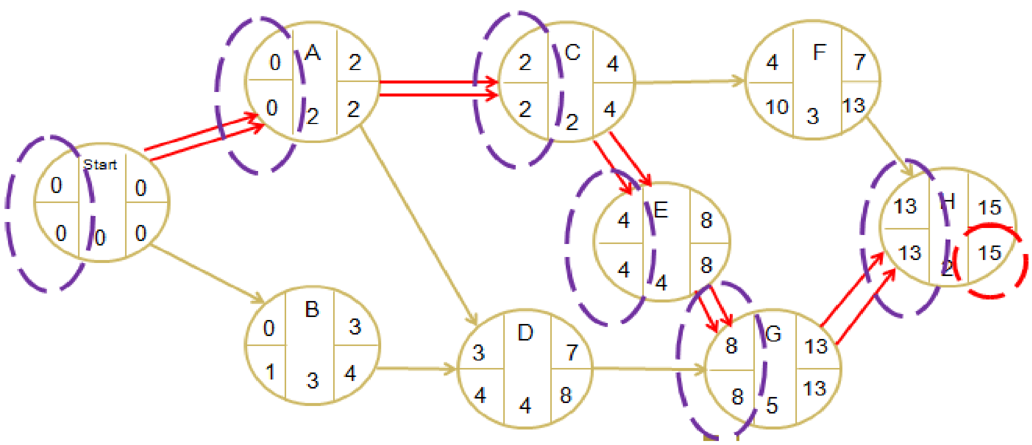
المسار الأول: Start → A → C → F → H: 0+2+2+3+2=9

المسار الثاني: Start→ A→ C→ E →G→ H: 0 +2+2+4+5+2=15

المسار الثالث: Start → A → D → G → H: 0 +2+4+5+2=13

المسار الرابع: Start → B → D → G →H: 0 +3+4+5+2=14

وعليه يتم اختيار المسار الثاني لأنه أطول مسار. وكل الأنشطة التي تقع عليه هي حرجه وليست راكده (أي ليست بها أوقات فائضه)، يتضح ذلك من الشكل السابق والموضحة بالأسهم الثنائية.




**المسار الحرج CPM**

4. **تحديد الأوقات الفائضة ST:** لتحديد الأوقات الفائضة تحدد الأنشطة الراكدة، وهي الأنشطة التي إذا حصل بها تأخير فإنها لن تؤدي إلى تأخير المشروع ككل كما يوضح الجدول وهي تساوي 8 أسابيع.

| النشاط | وقت النشاط | النشاط السابق | *ES* البداية المبكرة | *EF* النهاية المبكرة | *LS* البداية المتأخرة | *LF* النهاية المتأخرة | طبيعة النشاط | *ST* الفائض الإجمالي |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **A** | **2** | **-** | **0** | **2** | **0** | **2** | حرج | - |
| **B** | **3** | **-** | **0** | **3** | **1** | **4** | راكد | 1 |
| **C** | **2** | **A** | **2** | **4** | **2** | **4** | حرج | - |
| **D** | **4** | **A,D** | **3** | **7** | **4** | **8** | راكد | 1 |
| **E** | **4** | **C** | **4** | **8** | **4** | **8** | حرج | - |
| **F** | **3** | **C** | **4** | **7** | **10** | **13** | راكد | 6 |
| **G** | **5** | **D,E** | **8** | **13** | **8** | **13** | حرج | - |
| **H** | **2** | **F,G** | **13** | **15** | **13** | **15** | حرج | - |
| **مجموع أو إجمالي الوقت الفائض (أسابيع)** | | | | | | | | **8** |

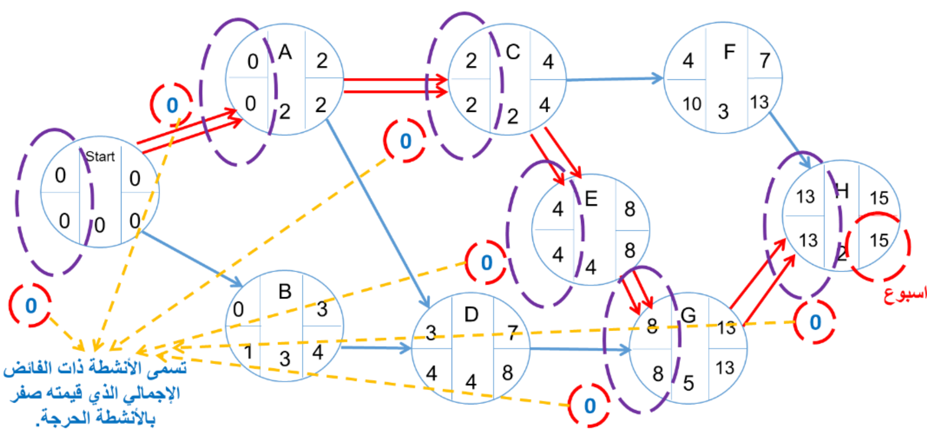
الفائض الإجمالي = أخر وقت بدء مسوح به – أول وقت بدء ممكن

Total slack = LS - ES

أو بصيغة أخرى: الفائض الإجمالي = أخر وقت إتمام مسموح – أول وقت إتمام ممكن

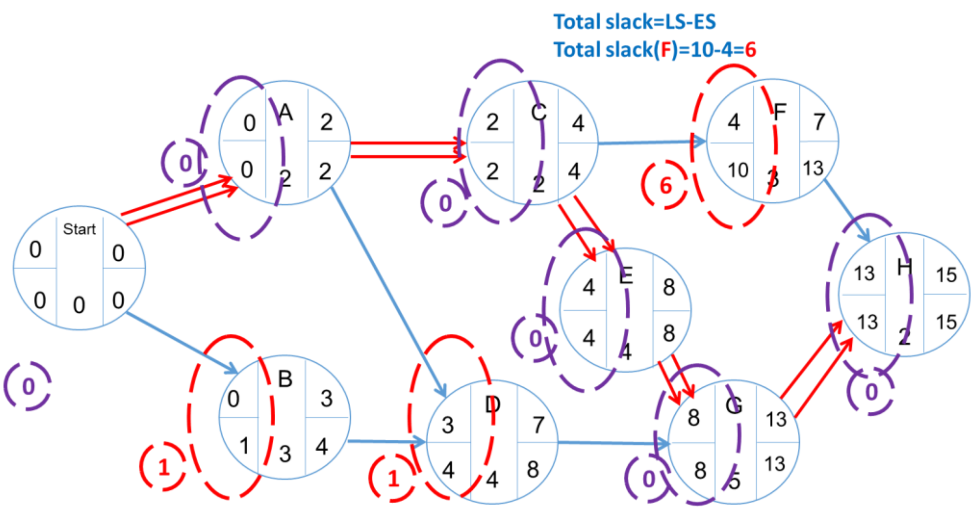
EF = ES + D　　　　Total slack = LF – EF

ST = LS – ES　　　　LS = LF – D




**تحديد الأوقات الفائضة ST**

- الوقت الفائض الإجمالي يكون رقم موجب أو صفر. فلا يمكن أن يكون سالب إلا إذا كان هناك خطأ في الحساب أو في حالة أن يبدأ المشروع كله متأخراً عن موعده.
- الأنشطة الحرجة (ليس بها أي أوقات فائضة)
- أما القيم الموجبة فتعنى أنه يمكن تأخر المشروع في حدود تلك القيمة دون أن يسبب ذلك تأخير للمشروع ككل.
- القيم الصـفرية للفائض الإجمالي تعنى أنه ليس هناك مجال لتأخير هذا النشـاط فأي تأخير سـوف يؤثر على المشروع ككل ولذلك تسمى الأنشطة ذات الفائض الإجمالي الذي قيمته صفر بالأنشطة الحرجة.




**تحديد الأوقات الفائضة للمشروع ST**

## 7-6 المخططات الشبكية الاحتمالية

تستخدم هذه الطريقة عندما تكون أنشطة المشروع وعلاقاتها السببية محددة ومعروفـة بـشكل دقيق، كما في الحالة السـابقة. إلا أن مدد تنفيذ الأنشـطة غير معروفة بشـكل أكيد، ويمكن تقديرها على شـكل قيمة احتمالية متوقعة

(حالة المخاطرة).

يســتخدم أســلوب بيرت PERT في جدولة المشــاريع حينما تكون أوقات النشــاط غير مؤكدة (أي يفترض عدم وجود وقت واحد لإنجاز النشاط نظراً لعدم التأكد). إذا وجدت الإدارة نفسها أمام مشروع يتكون من أنشطة لم تمر بها من قبل، ومن ثم يتعذر عليها تحديد الوقت اللازم لإنجاز هذه الأنشــطة، فإن الإدارة ســتلجأ إلى الاحتمالات وستحدد الوقت بعدة قيم محتملة بدلا من تحديد قيمة واحدة. ويتم تقدير الوقت اللازم لإتمام أي نشاط يمكن تقديره بواسطة التوزيع الاحتمالي، على سبيل المثال توزيع بيتا الاحتمالي، وتحدد مدة الإنجاز بثلاثة تقديرات.

**تقنية تقييم ومراجعة البرامج PERT (Program Evaluation and Review Technique)**

طريقة بيرت **PERT** (إحدى الطرق لتحليل الشبكة. طريقة بيرت هي تعميم لطريقة المسار الحرج CPM) .

تم تطوير طريقة PERT من قبل البحرية الأمريكية للتخطيط والتحكم في برنامج صـــــواريخ Polaris في عام 1958. وقد عملت بشكل جيد في تسريع إنجاز المشروع من 7 سنوات إلى 5 سنوات .منذ ذلك الحين، أصبح PERTأسلوباً شائعاً جداً يستخدم لتخطيط المشروع والتحكم فيه.

تقوم التقنية بدراســـــة وتمثيل المهام التي تم القيام بها لإكمال المشـــــروع، لتحديد أقل وقت لإكمال المهمة والحد الأدنى من الوقت المطلوب لإكمال المشروع بأكمله .يهدف إلى تقليل وقت وتكلفة المشروع.

في هذه التقنية، أولاً وقبل كل شــيء، ينقســم المشــروع إلى أنشــطة وفعاليات .بعد أن يتم التأكد من التســلســل الصـحيح، يتم إنشـاء شـبكة .بعد ذلك يتم حسـاب الوقت اللازم في كل نشـاط وتحديد المسـار الحرج (أطول مسـار يربط جميع الأحداث).

الهدف الرئيسـي من التحليل من خلال PERT هو معرفة اكتمال حدث معين خلال تاريخ محدد .ما هي فرص اتمام الوظيفة؟ هذا النهج يأخذ في الاعتبار عدم اليقين .في هذا النهج يتم تقدير ثلاث قيم زمنية مع كل نشـاط: الوقت المتفائل، والوقت المحتمل والوقت المتشـائم، توفر القيم الزمنية الثلاث مقياسـاً لعدم اليقين المرتبط بهذا النشاط.

أ- **الوقت المتفائل Optimistic Estimate:** هو أقل قيمة ممكنة للوقت المقدر لإنجاز النشـاط. وهي التي تقوم على فرض أن كل الظروف الخاصـة بالأداء والموارد اللازمة على ما يرام. ولذلك فإن احتمال أن يتم إنجاز النشـاط في وقت أقل من هذه القيمة هو احتمال ضـئيل جداً، لا يزيد عن 1%. بمعنى أخر، هو أقصر وقت ممكن يمكن فيه إنهاء النشاط ويفترض أن كل شيء يسير على ما يرام، يتم الإشارة إليها عموماً بـ " $t_0$" أو "a" .

ب- **الوقت الأكثر احتمالا Most likely Estimate:** هذه هي القيمة التي يتكرر حدوثها كثيراً كوقت مستغرق لإتمام النشـاط –أي أنه بمثابة المنوال Modal للتوزيع الإحصـائي الخاص بالوقت اللازم لإتمام النشـاط. بمعنى آخر، هذا تقدير للوقت العادي الذي سـيسـتغرقه النشـاط. هذا يفترض التأخيرات العادية .يشـار إليه بالحرف " $t_m$" أو "m" .

ت- **الوقت المتشـائم Pessimistic Astimate:** هو أكبر قيمة ممكنة للوقت المقدر لإنجاز النشـاط وهي التي تقوم على فرض أن أسـوأ ظروف التنفيذ سـوف تواجه تنفيذ هذه النشـاط. وبالمثل فإن احتمال أن يتم إنجاز النشـاط في فترة أكبر من هذه القيمة هو احتمال ضـئيل جداً لا يزيد عن 1%. بمعنى آخر، أطول وقت

يمكن أن يســـتغرقه النشـــاط إذا ســـارت الأمور على ما يرام، وهذا هو أطول وقت يمكن أن يســـتغرقه النشاط .يشار إليه بشكل عام بواسطة '$t_p$' ؛ أو "b".

يتم عمل التقديرات عن طريق الإدارة والمتخصـصـين الفنيين الذين مارسـوا من قبل أنشـطة مشـابهة ومماثلة في ذات المجال.

ثم يتم تحديد الوقت المتوقع أو المتوسط ( Estimate Time): لكل نشاط من أنشطة المشروع. هذا هو متوسط الوقت الذي يستغرقه النشاط إذا كان سيتم تكراره عدداً كبيراً من المرات ويستند إلى افتراض أن وقت النشاط يتبع توزيع بيتا، وتجدر الإشــارة إلى أنه على الرغم من عدم وجود تبرير نظري لاســتخدام توزيع بيتا، إلا أنه عملي اً يمتاز بعدة خصـائص تجعله شـائع الاسـتخدام، فتوزيع بيتا يمكن أن يأخذ الشـكل المعتدل. يشـار إلى هذا بشـكل عام $t_e$ .

وذلك باستخدام المعادلة الرياضية التالية: $t_e = \frac{t_0+4t_m+t_p}{6}$ أو $t_e = \frac{a+4m+b}{6}$

حيث: (a) $t_o$ الوقت المتفائل

(b) $t_p$ الوقت المتشائم

(m) $t_m$ الوقت الأكثر ترجيحا.

يتم تلخيص الخطوات المختلفة المتضمنة في شبكة PERT لتحليل أي مشروع كما يلي:

**(1)** وضع قائمة بالأنشطة المتضمنة في المشروع بما في ذلك الأنشطة السابقة المباشرة.

**(2)** رسم مخطط الشبكة باستخدام القواعد والاتفاقيات.

**(3)** ترقيم الأحداث بترتيب تصاعدي من اليسار إلى اليمين.

**(4)** من خلال تقديرات الوقت الثلاثة، وحساب الوقت المتوقع ($t_e$) لكل نشاط باستخدام الصيغة أعلاه. باستخدام تقديرات وقت النشاط المتوقع، نحدد أقرب وقت بدء وأقرب وقت انتهاء لكل نشاط.

**(5)** حساب وقت البدء الأخير وآخر وقت الانتهاء والعائمة المرتبطة بكل نشاط. ثم نبحث عن الأنشطة التي لا تحتوي على تعويم إجمالي والتي تُعرف بالأنشطة الحرجة. من هذه الأنشطة الحاسمة، نبحث عن المسار الحرج.

**(6)** احتساب التباين $\sigma^2$ لأوقات المشروع ككل، وذلك عبر احتساب التباين لكل نشاط من أنشطة المشروع، ثم جمع هذه التباينات للأنشطة الحرجة (التي تقع على المسار الحرج) نستخدم قيمة tp (b) و(a)، ونحسب التباين باستخدام الصيغة: $\sigma^2 = \left(\frac{t_p - t_e}{6}\right)^2 = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$ أو $\sqrt{6}\sigma = b - a$

**(7)** ويكون حاصل جمع التباينات التي تقع على المسار الحرج هو تباين المشروع ككل. يتم احتساب الانحراف المعياري للمشروع σ بالجذر التربيعي للتابين.

نستخدم التباين في أوقات النشاط لتقدير التغير في تاريخ إنجاز المشروع؛ باستخدام هذا التقدير، نحسب احتمال الوفاء بتاريخ محدد بحساب القيمة المعيارية للمشروع Z حسب الصيغة: $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-c_p}{\sigma}$ حيث cp هي التاريخ المتوقع لإنجاز المشروع.

$$\text{تقدير التغير في تاريخ إنجاز المشروع} = Z = \frac{\text{تاريخ الاستحقاق} - \text{التاريخ المتوقع للانتهاء}}{\sqrt{\text{تباين المشروع}}}$$

حيث: μ: وقت إنهاء المشروع على المسار الحرج (CP).

$x$: الوقت الذي نسعى لأن ننهي المشروع فيه.

σ: الانحراف المعياري للمشروع

نذهب الى جدول الاحتمالات للقيمة المعيارية، وهو ما يسـمى في الإحصـاء بجدول Z، ونسـتخرج الاحتمال المقابل للقيمة المعيارية التي نتجت معنا في النقطة 5 فتكون هي النسـبة المئوية (احتمالية) أن ننهي المشـروع في الوقت الذي نسعى إليه (نرغب به).

**مثال (7-5).** توضيح أسلوب بيرت PERT.

بالعودة الى المثال السـابق (مشـروع صـيانة المصـفاة) – أراد المعنيون بالبرمجة الشـبكية في المشـروع القيام بتطوير شبكة المشروع باستخدام أسلوب بيرت. حيث حددوا الأوقات المتفائلة والمتشائمة والأكثر احتمالاً.

المطلوب: دراسة احتمال أن ينهي المشروع بعد أسبوع واحد من الوقت الأصلي المتوقع انتهاؤه فيه.

| النشاط | النشاط السابق | الوقت المتفائل بالأسبوع | الوقت الأكثر احتمالا بالأسبوع | الوقت المتشائم بالأسبوع |
|---|---|---|---|---|
| **A** | **-** | 1 | 2 | 3 |
| **B** | **-** | 2 | 3 | 4 |
| **C** | **A** | 1 | 2 | 3 |
| **D** | **A,D** | 2 | 4 | 6 |
| **E** | **C** | 1 | 4 | 7 |
| **F** | **C** | 1 | 2 | 9 |
| **G** | **D,E** | 3 | 4 | 11 |
| **H** | **F,G** | 1 | 2 | 3 |

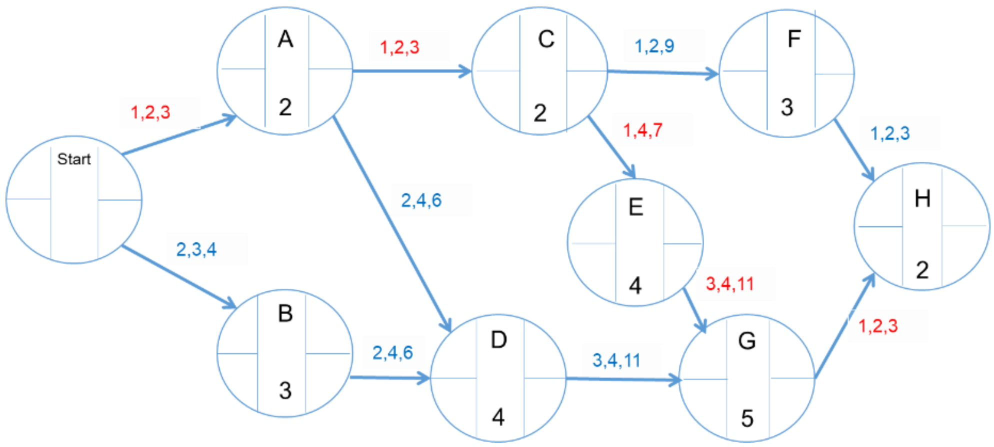
حل المثال:

1. يتم احتساب الوقت المتوقع لكل نشاط على النحو التالي:

للتوضيح حساب الوقت المتوقع للنشاط A يكون على النحو التالي:

$$ET_A = \frac{a+4m+b}{6} = \frac{1+4\times2+3}{6} = 2\text{Weeks}$$

2. يتم رسم شبكة المشروع بطريقة النشاط على القطب وحساب جميع المسارات وتحديد المسار الحرج للأوقات المتوقعة والمسار الحرج يكون 15 أسبوع.




بنفس الطريقة يتم تحديد الفترة المرجحة لكل نشاط ووضعها بدلا من المعطيات الخاصة بهذا النشاط ومن ثم يتم الحل بالطريقة السابقة (تحديد الوقت المبكر والمتأخر لكل نقطة وحساب السلاك)

3. يتم احتساب التباين لكل نشاط من أنشطة المشروع باستخدام المعادلة الرياضية، فمثلا التباين للنشاط (A) هو: $\sigma_A^2 = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2 = \left(\frac{3-1}{6}\right)^2 = 0.111$

**4.** احتساب تباين المشروع ككل وذلك بتجميع التباينات للأنشطة التي تقع على المسار الحرج وهي الأنشطة A, C, E, G, H: $\boldsymbol{\sigma^2_P} = 0.111 + 0.111 + 1.00 + 1.778 + 0.111 = \mathbf{3.111}$

5. احتساب الانحراف المعياري للمشروع كما يلي: $\sigma_P = \sqrt{3.111} = 1.764$

6. احتساب احتمال أن ينهي المشروع بعد أسبوع واحد من الوقت الأصلي المتوقع انتهاؤه فيه بحساب القيمة المعيارية Z للمشروع ككل: $Z_P = \frac{X-\mu}{\sigma_P} = \frac{16-15}{1.764} = 0.5668$

حيث: $u$: وقت انهاء المشروع على المسار الحرج.

$x$: الوقت الذي نسعى لان ننهي المشروع فيه.

σ :الانحراف المعياري للمشروع

ملاحظة: قيمة X=16 جاءت من السؤال، لأن المطلوب أن نحسب إمكانية إنهاء المشروع بعد أسبوع واحد من الوقت المتوقع (الوقت الحرج) وبما أن المسار الحرج=15 أسبوع

حيث: اذن قيمة: $X = 15+1 = 16$ أسبوع.

| النشاط | ET<br>الوقت المتوقع (أسبوع) | التباين | طبيعة النشاط | تباين المشروع<br>$\sigma_P^2$ |
|---|---|---|---|---|
| A | 2 | 0.111 | حرج | 0.111 |
| B | 3 | 0.111 | راكد | - |
| C | 2 | 0.111 | حرج | 0.111 |
| D | 4 | 0.444 | راكد | - |
| E | 4 | 1.000 | حرج | 1.000 |
| F | 3 | 1.778 | راكد | - |
| G | 5 | 1.778 | حرج | 1.778 |
| H | 2 | 0.111 | حرج | 0.111 |
| | | | **المجموع لتباين المشروع** | **3.111** |
| | | | **الانحراف المعياري** | **1.764** |

نذهب الى جدول الاحتمالات للقيمة المعيارية Z ومقابل قيمة Z=0.5668 نجد أن احتمال إنهاء المشـــروع بعد أسبوع واحد من موعده المتوقع يساوي 71.5%.

(0.75.57x100=71.5%)

| z | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | .5000 | .5040 | .5080 | .5120 | .5160 | .5199 | .5239 | .5279 | .5319 | .5359 |
| 0.1 | .5398 | .5438 | .5478 | .5517 | .5557 | .5596 | .5636 | .5675 | .5714 | .5753 |
| 0.2 | .5793 | .5832 | .5871 | .5910 | .5948 | .5987 | .6026 | .6064 | .6103 | .6141 |
| 0.3 | .6179 | .6217 | .6255 | .6293 | .6331 | .6368 | .6406 | .6443 | .6480 | .6517 |
| 0.4 | .6554 | .6591 | .6628 | .6664 | .6700 | .6736 | .6772 | .6808 | .6844 | .6879 |
| 0.5 | .6915 | .6950 | .6985 | .7019 | .7054 | .7088 | .7123 | .7157 | .7190 | .7224 |
| 0.6 | .7257 | .7291 | .7324 | .7357 | .7389 | .7422 | .7454 | .7486 | .7517 | .7549 |
| 0.7 | .7580 | .7611 | .7642 | .7673 | .7704 | .7734 | .7764 | .7794 | .7823 | .7852 |
| 0.8 | .7881 | .7910 | .7939 | .7967 | .7995 | .8023 | .8051 | .8078 | .8106 | .8133 |
| 0.9 | .8159 | .8186 | .8212 | .8238 | .8264 | .8289 | .8315 | .8340 | .8365 | .8389 |
| 1.0 | .8413 | .8438 | .8461 | .8485 | .8508 | .8531 | .8554 | .8577 | .8599 | .8621 |
| 1.1 | .8643 | .8665 | .8686 | .8708 | .8729 | .8749 | .8770 | .8790 | .8810 | .8830 |
| 1.2 | .8849 | .8869 | .8888 | .8907 | .8925 | .8944 | .8962 | .8980 | .8997 | .9015 |
| 1.3 | .9032 | .9049 | .9066 | .9082 | .9099 | .9115 | .9131 | .9147 | .9162 | .9177 |
| 1.4 | .9192 | .9207 | .9222 | .9236 | .9251 | .9265 | .9279 | .9292 | .9306 | .9319 |
| 1.5 | .9332 | .9345 | .9357 | .9370 | .9382 | .9394 | .9406 | .9418 | .9429 | .9441 |

**مزايا بيرت Advantages of PERT**. تقدم تقنية PERT المزايا الآتية:

- يحدد الوقت المتوقع المطلوب لإكمال كل نشاط.
- يساعد على إكمال المشروع خلال فترة زمنية معينة.
- يســاعد في إدارة حالات عدم اليقين التي ينطوي عليها المشــروع وبالتالي تقليل عنصــر المخاطرة في المشروع.
- تمكن الإدارة من التخصيص الأمثل للموارد المحدودة.
- تضغط من أجل الإجراء الصحيح، في النقطة المناسبة وفي الوقت المناسب في المنظمة.

**حدود Limitations of PERT: PERT**. يعاني PERT أيضاً من القيود التالية:

- تعتمد شــبكة PERT بشـكل أسـاسـي على تقديرات الوقت المطلوبة لكل نشـاط. بسـبب تقديرات الوقت الخاطئة، لا بد أن تصبح الشبكة غير واقعية إلى حد كبير.
- لا تأخذ هذه التقنية أيضاً في الاعتبار الموارد المطلوبة في مراحل مختلفة من المشروع.

**الفرق بين PERT و CPM: Difference between PERT and CPM**

كما ذكر سابقاً، تم تطوير تقنيات PERT و CPM بشكل مستقل مع مجموعة مختلفة من الأهداف. ومع ذلك، فإن الاختلافات الأساسية بين الاثنين يمكن إجمال ذلك في الجدول الآتي:

| CPM | PERT |
|---|---|
| CPMهي تقنية إحصائية لإدارة المشروع تدير أنشطة محددة جيد اً للمشروع. | PERT هي تقنية لإدارة المشروع، تستخدم لإدارة الأنشطة غير المؤكدة للمشروع |
| إنها طريقة للتحكم في التكلفة والوقت. | إنها تقنية للتخطيط والتحكم في الوقت. |
| تستخدم التكلفة لكل ألف ظهور بشكل عام لمشكلات والأعمال. | يتم تطبيق PERT لتخطيط وجدولة برنامج بحث وتطوير المشاريع. |
| مناسبة للمشاريع غير البحثية مثل البناء المدني وبناء السفن | مناسبة لمشروع البحث والتطوير |
| موجه نحو النشاط. | هو الحدث المنحى. |
| نموذج حتمي بنشاط فردي معروف يعتمد على التجربة السابقة. لا يتعامل مع عدم اليقين مع الوقت. | نموذج احتمالي مع عدم اليقين في مدة النشاط. عادة يتم حساب مدة كل نشاط من تقديرات زمنية متعددة. |
| لا تستخدم الأنشطة الوهمية لتمثيل تسلسل المشروع. | يستخدم أنشطة وهمية لتمثيل تسلسل أنشطة المشروع. |
| طبيعة متكررة | طبيعة غير متكررة |
| الأنشطة المتوقعة | الأنشطة غير المتوقعة |
| التركيز على مفاضلة الوقت والتكلفة | التركيز على الوقت فقط. |

## 7-7 تعجيل المخططات الشبكية *Crashing Network*

سخرت طريقة التحليل الشبكي للأعمال لدراسة الأنشطة الاقتصادية الصناعية بشتى أنواعها. فالأعمال المعقدة التي تضم مجموعة من الأنشطة التي تتصف بالمرحلية في التنفيذ والترتيب، بحيث أنه لا يمكن البدء في نشاط ما قبل الانتهاء من نشاط آخر، أو بشكل موازٍ له الذي يتطلب التنسيق بينها من حيث البدء والانتهاء في التوقيت، لأن وجود أي خلل في تنفيذ مرحلة ما قد ينجم عنه مجموعة من الاختناقات وإيقاف العمل وضياع وقت

الانتظار من أجل ذلك نشأت فكرة البحث عن أسلوب يعبر عن سير النشاط من خلال تدفقه الزمني وتوازيه مع المسارات المختلفة وتناسقه في جميع أجزائه وأقسامه بما يكفل استمرارية المشروع.

للتعجيل في إنجاز المشروع، لا بدّ من تسريع تنفيذ الأنشطة المكونة للمشروع. وهذا يحتاج، بداية، إلى دراسة إضافية عن إمكانية تسريع كل نشاط من أنشطة المشروع، وتحديد سقف مدة التسريع (أو أقصر مدة يمكن فيها تنفيذ هذا النشاط أو ذاك).

قد تظهر الحاجة الملحة في كثير من الأحيان إلى تقليص فترة إنجاز المشروع لأهداف استراتيجية، عندها نلجأ إلى أساليب المقايضة بين التكلفة والزمن، حيث يتم تقليص مراحل المشروع بإضافة رأسمال جديد و/أو عمالة جديدة لتسريع العملية.

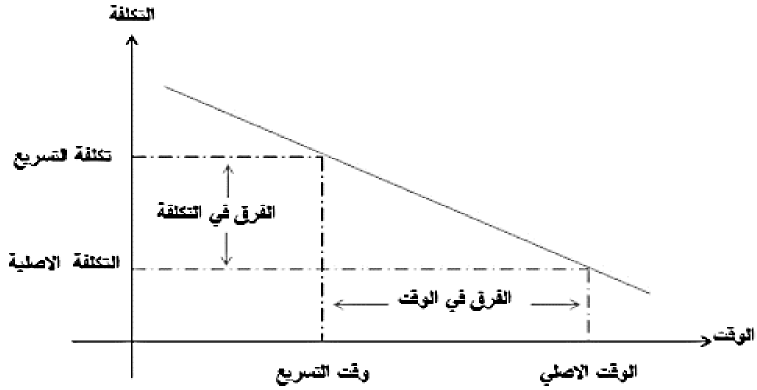
من المعروف في علم الاقتصاد أن تسريع أو إبطاء الزمن اللازم لتنفيذ الأنشطة، يترتب عليه زيادة أو نقصاناً في تكاليف تنفيذها مع الاستعداد لتحمل التكاليف الإضافية المترتبة على هذا التسريع، والتي يتوجب حسابها. وبذلك نحصل على بديل جديد للمخطط الشبكي، يسمى بالبديل الأسرع. إن اختلاف طول مدة إنجاز كل نشاط من أنشطة المشروع، نتيجة لتعجيله وحدة زمنية واحدة، واختلاف تكلفة تعجيله، يخلق عدداً كبيراً من البدائل المعجلة Crushing Alternative للمخطط الشبكي من حيث مدة تنفيذ المشروع وتكاليفه، وبالتالي يتوجب البحث عن البدائل (المخططات الشبكية) المثالية المعجلة، التي يستغرق تنفيذ كل منها مدة معينة من الزمن وبأقل التكاليف، وعليه يجب الانتباه إلى الجوانب الآتية:

- عملية التسريع: قرار يجب اخضاعه لمبدأ التكلفة والمنفعة.
- ضرورة وجود أسباب موجبة للتسريع منها:

- وجود خطأ في جدولة المشروع: مثلاً إفراط في التفاؤل لبعض لأنشطة المشروع.
- نشـــوء ظروف بيئية داخلية تؤدي الى تأخر تنفيذ بعض الأنشـــطة الحرجة مما يؤدي إلى تأخر تنفيذ المشـروع ككل، مثل غيابات العاملين، تأخر وصـول بعض الموارد الحرجة، ظهور صـعوبات فنية، عدم توفر السيولة، ...الخ.
- التسريع بناءً على طلب الزبون وعليه تحمل الكلف.
- تغييرات قانونية وتشريعات حكومية.
- نشـــوء ظروف بيئية خارجية ممكن أن تؤدي الى تأخير تنفيذ بعض الأنشـــطة الحرجة مثل: تأخر الموردين، ظروف مناخية، اضطرابات اجتماعية، ...، الخ.

إن أفضـل فترة مختصـرة لتنفيذ المشـروع هي فترة المسـار الحرج لشـبكة الأنشـطة، فتبدأ عملية التسـريع بالأسـاس على المسـار الحرج لأنه المسـار الأطول، حيث أن تسـريع وقت تنفيذ المشـروع يعني تقصـير وقت المسـار الحرج عن طريق تسـريع الأنشـطة الحرجة. بعد ذلك ينظر الى المسـارات الأخرى ونقرر إذا كانت بحاجة إلى تسـريع أم أن عملية التسريع لا تؤثر على تلك المسارات وتبقى كما هي.

حيث نلاحظ أن الأزمنة المقدرة للتنفيذ وبمستوى أداء معين يواكبها دائما تكاليف بمستوى يتناسب مع هذه السرعة في الأداء ويمكن تمثيل العلاقة بين تكاليف الأداء الزمنية للأنشـــطة والتكلفة الاقتصـــادية بعلاقة ارتباطية بين الأداء الزمني العادي والأداء الزمني الســـريع، وما يعادله من تكلفة، وتكون كمتغير اقتصـــادي من خلال تغير الأداء الزمني فنحصل على تكلفة التسريع للأداء الزمني الممثل بالمنحنى البياني كما في الشكل التالي:




يتم حساب تكلفة تسريع الوحدة الزمنية حسب المعادلة التالية:

$$\textbf{حساب تكلفة تسريع الوحدة الزمنية} = \frac{\textbf{تكلفة التسريع – التكلفة الأصلية}}{\textbf{الوقت الأصلي – وقت التسريع}}$$

يتم ضرب كلفة التسريع لوحدة زمنية واحدة في عدد الوحدات الزمنية (وقت التسريع).

لإيجاد مجموعة البدائل المثالية للمخططات الشبكية المعجلة، وضعت طريقة تسمى بطريقة (زمن/تكلفة) أو ( PERT /Cost)، تقوم على الفرضيات التالية:

- إنجاز المشروع حسب البديل العادي (الأطول) يكون بأقل التكاليف؛
- التعجيل بتنفيذ البديل العادي (الأطول)، يترتب عليه تكاليف إضافية؛
- البديل الأطول زمنياً وأكثر تكلفة، مرفوض لأنه غير معقول اقتصادياً؛
- من غير الممكن تسريع زمن تنفيذ أي نشاط من أنشطة المشروع إلى مدة أقصر من مدته في البديل الأعجل، وذلك لأسباب عديدة (مدى توفر الوسائل التقنية، عدد العمال، مكان العمل ...الخ). وهذا يعني أن تنفيذ أي نشاط سيحتاج إلى مدة زمنية تتراوح بين الزمن العادي والزمن الأسرع، مع اختلاف التكاليف؛
- العلاقة بين الزمن والتكاليف يمكن أن تكون خطية في حالات، وغير خطية في حالات أخرى.

**مثال (7–6).** إذا كان لدينا 4 مسارات لبرمجة أحد المشاريع:

المسار الأول (المسار الحرج) = 60 أسبوع.

المسار الثاني = 50 أسبوع.

المسار الثالث = 40 أسبوع.

المسار الرابع = 45 أسبوع.

وإذا أردنا تسريع المشروع لينتهي في 52 أسبوع.

فإن عملية التسريع تكون على المسار الحرج فقط ولا تطال المسارات الأخرى (لأن المسار الحرج سيبقى أطول المسارات حتى بعد التسريع). لكن إذا أردنا تسريع المشروع لينتهي في 48 أسبوع.

فإننا بحاجة إلى تسريع المسار الحرج بمعدل 12 أسبوع وكذلك تسريع المسار الثاني بمعدل 2 أسبوع وهنا ستصبح كلفة التسريع هي كلفة تسريع المسار الحرج والمسار الثاني.

مثال (7–7). البيانات في الجدول التالي تمثل الأوقات اللازمة لتنفيذ أنشطة المشروع الثمانية مع كلفة ضغط (تسريع) أسبوع واحد لكل نشاط، فإذا علمت أن المشروع له المسارات التالية:

المسار الأول: A→C→E→G→H = 34 Weeks

المسار الثاني: A→C→F→H = 20 WeekS

المسار الثالث: A→D→G→H = 24 Weeks

المسار الرابع: B→D→G→H = 21Weeks

والجدول التالي يوضح النشاط والوقت/ الأسبوع وتكلفة التسريع لكل أسبوع.

| النشاط | الوقت/الاسبوع | كلفة التسريع/الاسبوع |
|---|---|---|
| A | 6 | 1000 |
| B | 3 | 500 |
| C | 5 | 1500 |
| D | 4 | 1250 |
| E | 8 | 500 |
| F | 3 | 1000 |
| G | 8 | 1500 |
| H | 6 | 750 |

المطلوب: حساب كلفة تسريع المشروع ليصبح المسار الجديد =28 أسبوعا، بشرط أن لا يزيد تسريع أي نشاط عن مدة أسبوعين فقط.

الحل:

المسار الحرج هو المسار الأول: $A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow H = 34$ Weeks

- بما أن وقت المسار الحرج الجديد سيكون 28 أسبوعا، فإن هذا يعني أن وقت المسار الحرج الأصلي والبالغ 34 أسبوعاً. بمعنى أنه سيبقى المسار الحرج حتى بعد تسريعه. لذا التسريع سوف يكون فقط على المسار الحرج الأصلي فقط.
- وبما أن الوقت المطلوب للتسريع هو 6 أسابيع، وبحيث لا يزيد تسريع أي نشاط عن أسبوعين فقط، فإننا نذهب إلى النشاط الحرج (الذي يقع على المسار الحرج) وننظر إلى أقل كلفة تسريع هو للنشاط E ونقوم بتسريعه أسبوعين، وبكلفة 1000 دولار.

- ثم ننظر إلى النشـاط الذي يليه من حيث الكلفة وهو النشـاط H ونقوم بتسـريعه أسـبوعين وبكلفة 1500 دولار للأسبوعين.
- والذي يليه في الكلفة النشاط A يسرع أسبوعين وبكلفة 2000 دولار للأسبوعين.
- وبهذا يكون إجمالي كلفة التسريع هي: 1000+1500+2000=4500 دولار.

## 8-7 مخطط غانت (المخطط الشريطي) Chart Bar

تتطلب المشـاريع المؤقتة وجود خطة واضـحة المعالم تكشـف السـتار عن موعد بداية ونهاية المشـروع ورصـد النطاق والموارد المسـتخدمة في ذلك، وانطلاقاً من اعتبار المشـروع ليس مجرد عمليةٍ روتينيةٍ؛ فقد أصـبحت الحاجة ملحةً لوجود حزمةٍ من أدوات إدارة المشـاريع لتحقيق الأهداف المختلفة، ومن الأدوات المستخدمة في ذلك أداة مخطط غانت Gantt Chart.

يعتبر مخطط غانت أو مخطط القضـبان أحد أدوات تخطيط المشـاريع، وهي الطريقة الأقدم والشـائعة لجدولة المشـاريع حيث يقوم بإظهار المهام بشكل بياني، كالتقويم مثلاً. فقد استخدم المخطط الشريطي كأداة للجدولة منذ أواخر القرن التاسع عشر وتسمى أيضا بمخطط غانت Chart Gantt نسبة الى مبتكرهاHenry Gantt، يتصف المخطط الشريطي بالوضوح في القراءة والتحليل والبساطة في الإعداد والسهولة في الاستخدام من قبل المستويات الإدارة المختلفة في المشاريع. جاء مخطط غانت لينظم المشاريع تبعاً لجداول في بداية القرن العشرين، وقد أشار له بأنه مخطط أفقي يوضـح الوقت المناسب لإنهاء المشروع والبداية به، وقد قدمه هنري غانت على هيئة شريط أفقي مؤلف من جزءٍ أيسر يتضمن المهام الواجب تنفيذها، وفي الجزءِ الآخر الوقت المحدد لذلك، وباختصار فإنه

مخططٌ ينظم ســـير العمل بدءاً من المهام وتواريخ البدء والانتهاء والتعليمات والمســـافات بين المهام وغيرها، ويستخدم غالب اً من قِبل مديري المشاريع ومديري الإنتاج.

مخطط غانت هو عبارة عن أداة هامة جداً وشائعة الاستخدام في إدارة المشاريع واستعراض الأنشطة مقرونة مع الزمن، يستكشف الجزء الأيسر من المخطط عادةً الأنشطة الواجب تنفيذها، أما الجزء العلوي فيوضح مقياساً زمنياً ملائماً، وتأتي الأشرطة مقترنة بأنشطة معينة لتوضح تاريخ البدء والنهاية وتحديد المدة الزمنية لذلك. ويمكن تعريف مخطط غانت هو أداة لتخطيط المشاريع، والتي يمكن استخدامها من أجل عرض الوقت الذي تستغرقه المهام لكي تنجز من أجل إنهاء المشروع. تحتل كل مهمة في مخطط Gantt سطراً واحداً، وتظهر التواريخ في الأعلى كأيام، وأسابيع، أو أشهر، وذلك حسب المدة الكلية للمشروع. ويتم تمثيل الوقت المتوقع لكل مهمة بشريط أفقي تعلم نهايته اليسرى البداية المتوقعة للمهمة، في حين تعلم نهايته اليمنى تاريخ اتمام المهمة المتوقع. يضم مخطط جانت أو القضبان مجموعة من الأعمدة، يوضح العمود الاول فيها رموز الفعاليات (مثل ،2، 1، B, A) ويوضح العمود الثاني المدة الزمنية اللازمة لإنجاز كل فعالية (مثل يوم، أسبوع، شهر، ...) بينما توضح بقية الاعمدة تفاصيل المدة الزمنية اللازمة لإنجاز الفعالية من خلال توضيح زمن (أو تاريخ) بدايات ونهايات كل الفعاليات على شكل قضبان أفقية مستطيلة الشكل أو خطية متوازية بمقياس رسم معين على أن تحفظ العلاقة المنطقية بين الفعاليات المتعاقبة.

في مخطط غانت كل مهمة تأخذ صفاً واحداً، ويمتد التأريخ حسب زيادة عدد الأيام أو الأسابيع أو الأشهر، اعتماداً على الطول الكلي للمشروع. الزمن المتوقع لكل مهمة يتم تمثيله بسطر أفقي طرفه الأيسر يمثل بدء المهمة المتوقع، والطرف الأيمن نهاية المهمة المتوقعة (إنجاز المهمة بنسبة 100 %)، وتمتد المهام بشكل

سلسلة متعاقبة، بشكل متوازي أو متراكب. ويمكن رسم خطوط طولية للدلالة على التواريخ، وكل المهام المتوضعة على يســـار خط التأريخ الحالي يفترض بها أن تكون منجزة (منتهية). والتي على يمينه غير مبتدئة، والتي يمر بها التأريخ الحالي هي التي يتم العمل عليها.

كلما تقدم المشــروع، يتم تحديث المخطط بملء الخانات إلى طول نســبي إلى الكســر يمثل نســبة إنجاز العمل (إنجاز المهمّة). هذه الطريقة، تؤمن أولاً إمكانية الحصــول على قراءة ســريعة لتقدّم المشــروع برســم خطّ عمودي خلال المخطط في التأريخ الحالي.

في بناء مخطط غانت، نقلص المهام إلى عدد ســـهل التعامل (ليس أكثر من 15 أو 20) لكي يلائم المخطط على صــفحة واحدة. المشــاريع الأكثر تعقيدا قد تتطلّب مخطّطات ملحقة التي تفصّــل التوقيت لكلّ مهمة فرعية والتي تكوّن جزءً من المهام الرئيسية. لمشاريع الفريق، يساعد في أغلب الأحيان أن يكون لديه العمود الإضــافي الذي يحتوي الأعداد أو حروف الاســم الأولى التي تميّز الفريق المســؤول عن المهمّة. ويتم تجميّع المهام تحت العناوين الرئيسية التي تقابل الخطوات في عملية التصميم، مثل: تعريف مشكلة، تخطيط مشروع، جمع معلومات، تصــميم تصــوري، اختيار مفهوم، تفصــيل التصــميم، تطبيق، اختبار، وثائق، ...، الخ. في أغلب الأحيان المشــروع له أحداث مهمة والتي قد تودّ أن تظهر على تسلسل المشروع الزمني، لكنها ليست مهام. على سبيل المثال إبراز متى يكون النموذج المصــغر تامّاً أو تأريخ تصــميم المراجعة. تدخل هذه على مخطط غانت كأحداث "علامات" وتؤشّر برمز خاصّ، في أغلب الأحيان يكون مثلث مقلوب.

تعتبر مخططات Gantt بمثابة وسيلة فعالة في الرقابة على المشاريع، والمساعدة في التخطيط والجدولة للمشاريع بغض النظر عن حجمها، ويؤدي المخطط دوراً مميزاً في تبسيط المشاريع المعقدة والتعامل معها ببساطة.

تســـهل مخططات Gantt معرفة كيفية تداخل الفعاليات أو حدوثها على التوازي ومعرفة حالة كل فعالية في أية لحظة. وتظهر معالم المشـروع بشـكل مثلثات مقلوبة أو معينات، ويجب أن يكون لكل مرحلة من المشـروع معلم واحد على الأقل. توفر المعالم نقاطاً يمكن مراجعة تقدم المشروع عندها.

تتمتع مخططات Gantt بالوضوح وسهولة الفهم. كما أنها أيضاً سهلة البناء وتعد أكثر الأدوات شيوعاً بين مدراء المشـــاريع في كافة المشـــاريع، باســـتثناء تلك المعقدة منها. تولد الحزم البرمجية مثل Microsoft Project مخططات Gantt معقدة للغاية تظهر بوضـــوح العلاقات الاتكالية بين الأنشـــطة، ويمكن أن تكون العلاقات الاتكالية:

- البداية إلى النهاية: لا يمكن البدء بالفعالية لغاية انتهاء الفعاليات المرتبطة بها.
- البداية إلى البداية: لا يمكن البدء بالفعالية لغاية بدء الفعالية المرتبطة بها.

كما يمكن أن تتداخل الأنشـطة أيضـاً؛ ويدعى هذا بزمن التقديم. وفي بعض الأحيان لا يمكن للنشـاط أن يبدأ بعد انتهاء النشــاط المتعلق به مباشـرة؛ فغالباً ما يحدث هذا بسـبب الأنشـطة والموارد الخارجية بالنسـبة للمشـروع، كالتأخر في تسليم البضائع أو المواد.

من خلال المخطط يمكن أن نتعرف على ما يلي:

أ- الأوقات الاحتياطية للأنشطة والتي من خلالها يمكن معرفة التغير المسموح به.

ب- يمكن إظهار المسار الحرج (أطول مسار للمشروع) وإبرازه بلون مختلف.

ت- معرفة مراحل تقدم العمل الحقيقي للمشروع عند التنفيذ من خلال رسمه أسفل مخطط المستقيمات لمراحل العمل المخطط إنجازها ومن ثم تحديد نسب التأخير والتقدم لكل نشاط وبالتالي دراسة الأسباب المؤدية لذلك.

ث- الحصول على المعلومات الواجب ذكرها في التقارير الأسبوعية والشهرية لتقدم العمل.

ج- يمكن جمع الموارد اليومية (مواد وعمال ومعدات) المطلوبة لتنفيذ جميع الأنشطة الداخلة في تنفيذ المشروع.

يمكن تعقب التقدم بسهولة باستخدام مخططات Gantt ومع تقدم المشروع، يتم تحديث مخططات Gantt وذلك بتظليل الأشرطة لتبلغ الطول المتناسب مع كمية العمل المنجز ضمن الفعالية. ويمكّن هذا من مقارنة التقدم الفعلي مع الجدول الزمني المخطط له، يعطي الخط العمودي على امتداد المخطط والذي يشير إلى التاريخ الحالي، صورة عن حالة المشروع. توضع الأنشطة المنجزة إلى يسار الخط ملونة بالكامل. أما الأنشطة التي لم تبدأ بعد، فتوضع إلى يمين الخط.

لتحديد المسار الحرج، نحدد كل مسارات الأنشطة المتعاقبة من بداية المشروع إلى آخره، والمسار الحرج هو أطول مسار بين هذه المسارات والفعاليات الواقعة على المسار الحرج فهي فعاليات حرجة. تعتمد طريقة المتابعة بطريقة المخطط الشريطي على تأشير العمل المنجز الفعلي (Actual) بمستطيل بلون مختلف اسفل مستطيل العمل المخطط (Planned).

**كيفية استخدام المخطط:** لإدارة مشروع باستخدام مخطط غانت؛ لا بدّ من اتباع الخطوات أدناه:

أ- **البدء بتحديد جدول المهام والأنشـطة الخاصــة بالمشـروع:** تُقسّـم المهام في المشـاريع إلى عدة أجزاء لتسهل إدارتها والتحكم بها، حيث تتفرع المهام الفرعية عن الرئيسـة، كما يتم في هذه الخطوة تحديد تاريخ البداية والنهاية.

ب- **توزيع الأدوار والمهام والمســؤوليات على الأفراد:** في هذه الخطوة يأتي دور منح المهام والأدوار للأفراد القائمين على المشروع، بالإضافة إلى توزيع الموارد المتوفرة والملائمة للعمل.

ت- **فرض الرقابة على المشـــروع:** تكمن الأهمية في هذه الخطوة بالتعرف على مدى التزام الأفراد بإتمام المهام الموكولة إليهم في الوقت المناسب من عدمه، ومعرفة فيما إذا كان هناك تأخير عن الوقت المحدد أو السير تبعاً للمخطط.

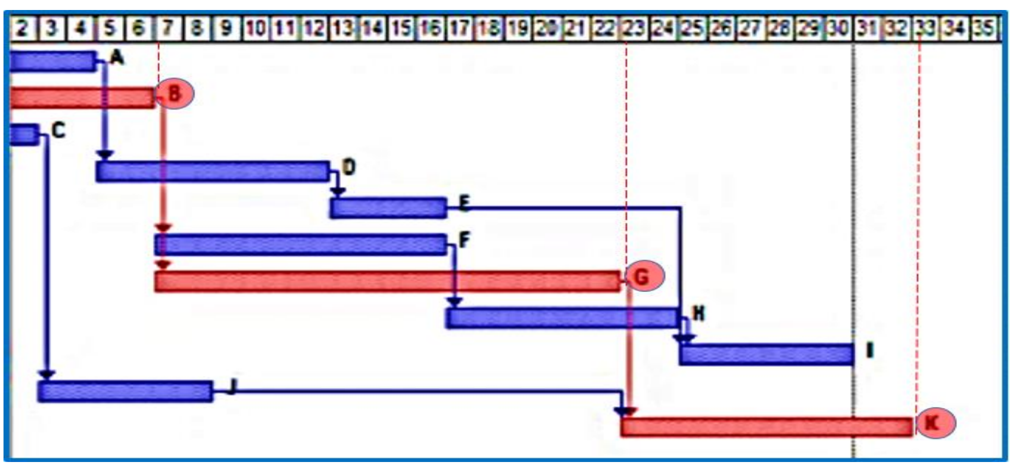
ث- **تحديد وإبراز الأحداث الهامة:** تعد الأحداث الهامة في المشروع بمثابة لحظاتٍ حاسمة في سير المشروع، وتكون غالباً إنجازات لا بدّ من تحقيقها في الوقت المحدد لها دون تأجيل.

ج- **اسـتكشـاف المشـكلات والإبلاغ عنها:** يتطلب الأمر بالضـرورة اسـتكشـاف الأخطاء والمشـكلات وإعلام الجهات المسـؤولة عن ذلك لغاياتِ إيجاد حلولٍ جذرية لها للحيلولة دون تأخير إتمام المشـروع في الوقت المحدد له، ويتيح مخطط غانت في هذه الحالة فرصــة اسـتخدام المسـار الحرج للكشـف عن المهام التي يمكن أن تؤخر عمل المشروع.

**مثال (7−8).** يمثل الجدول التالي البيانات الخاصـة بمشـروع معين. المطلوب رسم المخطط الشريطي مع تحديد المسار الحرج للمشروع ومدته.

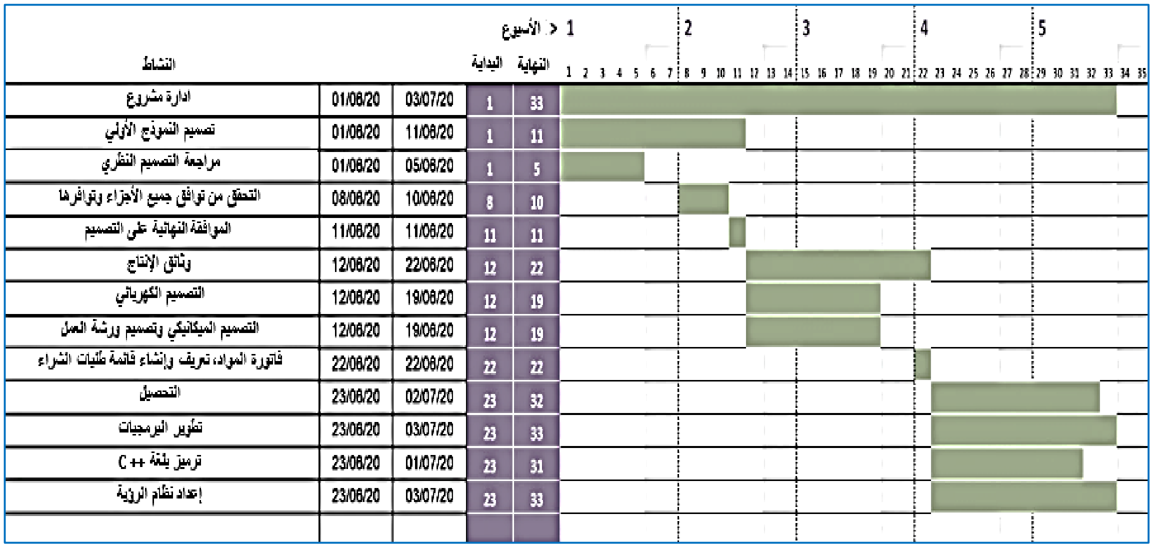
| اسم النشاط | المدة (أيام) | الأنشطة السابقة |
|---|---|---|
| **A** | **4** | **–** |
| **B** | **6** | **–** |
| **C** | **2** | **–** |
| **D** | **8** | **A** |
| **E** | **4** | **D** |
| **F** | **10** | **B** |
| **G** | **16** | **B** |
| **H** | **8** | **F** |
| **I** | **8** | **H&E** |
| **J** | **6** | **C** |
| **K** | **10** | **J&G** |

الحل:




من الشكل أعلاه نجد أن: المسار الحرج هو: B-G-K ومدة المشروع الكلية هي 32 يوم.

**مثال (7–9)**، في الشكل التالي الأنشطة المختلفة لإنجاز مشروع، ومدة تنفيذ كل منها، وزمن البدء والنهاية لكل نشاط منها.




**أهمية مخطط Gantt:**

أ- تقديم استعراضٍ متكامل للمشروع.

ب- ترتيب وتنظيم الجداول الزمنية مع تحديد تاريخ البداية والنهاية لكل مهمةٍ من المهام.

ت- توضيح طبيعة العلاقة بين مختلف الأنشطة والمهام.

ث- توفير الدقة والكفاءة في جدولة المشروع، وبالتالي التخفيف من صعوبة الأداء.

ج- رسم أبعاد الخطة الأولية للمشروع، ويتضمن بذلك الإجابة على أسئلةٍ من شاكلة متى، ومن، وكيف، وماذا؟

ح- توزيع الموارد وتخصيصها، بحيث يعرف كل شخصٍ المسؤوليات الموكولة إليه.

خ- السماح بإجراء تعديلاتٍ ملموسةٍ على المشروع عند ظهور الحاجة لذلك.

د- استعراض الأحداث الرئيسية ومراقبتها عن كثب.

ذ- استكشاف المشكلات وإدخال التعديلات عليها عند الحاجة لذلك.

ر- الاطلاع فيما إذا كانت هناك إمكانية لإنهاء الأنشطة والمهام في الموعد المحدد من عدمه.

**مزايا مخطط Gantt:**

أ- تمتاز هذه الطريقة بالبساطة والسهولة والوضوح وسهولة الإفهام للأخرين وخاصة الفنيين ذوي الخبرة الضعيفة بالبرمجة الزمنية.

ب- عملية الرسم سهلة ولا تستغرق الكثير من الوقت.

ت- إظهار أيام العطل والتوقف التي تحدث خلال التنفيذ وإمكانية إزاحة الفعاليات على المخطط بنفس مدة التوقف.

ث- استعمال هذه الطريقة للمساعدة في رسم مخططات تعيين الموارد ومنحني تدفق Flow Cash وغيرها.

ج- إمكانية اجراء أي تعديل أو ترتيب للفعاليات للحصول على أفضل توزيع للموارد.

ح- وضوح البداية والنهاية في المشاريع ذات الفعاليات القليلة مع وضوح عملية متابعة الفعاليات إذا كانت قليلة.

خ- إمكانية اضافة معلومات إضافية الى المخطط مثل الكمية، معدل الأداء، سعر الوحدة، ...

**مساوئ مخطط Gantt:**

أ- أنها لا تصور العلاقات بين الفعاليات واعتمادية بعضها على بعض.

ب- ازدياد التعقيد في متابعة الخطة مع ازدياد عدد الفعاليات (أكثر من 50 فعالية).

ت- تحتاج عملية التحديث والرسم إلى إعادة الخطة إلى وقت طويل بالرغم من سهولة التحديث.

ث- عدم ظهور التداخل في بداية ونهاية الفعاليات بشكل واضح إذا كان عدد الفعاليات كبيرة.

ج- لا يمكن اعتمادها إذا لم تتوفر جميع أزمنة الفعاليات.

# اختبارات وأسئلة الفصل السابع Tests

## 1) أسئلة صح / خطأ True/False

| | السؤال | صح | خطأ |
|---|---|---|---|
| 1 | يحتوي اسلوب خرائط جانت على طريقة المسار الحرج وطريقة بيرت. | | ✓ |
| 2 | يحتوي اسلوب الشبكات على طريقة المسار الحرج وطريقة بيرت. | ✓ | |
| 3 | لا نستطيع عمل جدولة للمشروع الا بوجود خطة سابقه له. | ✓ | |
| 4 | المسار الحرج هو أطول المسارات على الشبكة المكونة لنشاط المشروع ككل. | ✓ | |
| 5 | لتسهيل تحقيق الأهداف يلجأ المدير إلى تجزئة المشروع إلى مهام جزئية. | ✓ | |
| 6 | كفاءة المشروع تعني الاستغلال الأمثل للموارد | ✓ | |
| 7 | شبكة الأعمال هي تمثيل رياضي لمجموعة من الأنشطة المرتبطة ببعض والمتتابعة والتي يتكون منها المشروع. | | ✓ |
| 8 | لإنجاز أي مشروع لابد من القيام بعمل معين أو مجموعة من الأعمال تسمى بالشبكة | | ✓ |
| 9 | الحدث جزء من المشروع ويمثل العمل اللازم إنجازه لأنهاء مهمة (وظيفة) معينة | | ✓ |
| 10 | النشاط اللاحق هو كل نشاط يتوقف على تنفيذه إمكانية البدء بتنفيذ نشاط آخر | | ✓ |
| 11 | النشاط السابق هو كل نشاط يمكن البدء بتنفيذه، بعد إتمام إنجاز نشاط آخر. | | ✓ |

## 2) أسئلة خيارات متعددة Multiple Choices

1. **تسمى الأنشطة التي إذا تأخرت ستؤخر وقت اتمام المشروع الأنشطة:**
   أ) المهمة ب) المكلفة
   ج) الحرجة د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

2. **تسمى الأنشطة التي يمكن أن تتأخر لوقت معلوم دون أن تؤثر سلبا على وقت إنجاز المشروع بـ:**
   أ) الانشطة الحرجة ب) الانشطة الراكدة
   ج) الانشطة المهمة د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

3. **من أنواع الجدولة:**

أ) خرائط جانت | ب) الشبكات
ج) A + B | د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

4. **من تعاريف إدارة المشروع:**
أ) مشكله معروفة الحل والتي يجب تنفيذها في تتابع محدد
ب) سعي مؤقت لإيجاد منتج منفرد في تتابع محدد
ج) مجموعة من الأنشطة المتداخلة والتي يجب تنفيذها في تتابع محدد
د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

5. **يشير ربط الأنشطة أو الطرق المؤدية لتحقيق الأهداف بالزمن إلى:**
أ) اختيار المشروع | ب) خطة المشروع
ج) جدولة المشروع | د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

6. **تتكون من محورين أحدهما افقي والاخر عمودي، حيث تظهر على المحور العمودي أنواع أو أسماء الأنشطة، بينما يظهر المحور الافقي الزمن اللازم لتنفيذ النشاط، مع تحديد بداية ونهاية النشاط ويرسم على شكل مستطيل:**
أ) خرائط جانت | ب) شبكة بيرت
ج) المسار الحرج | د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

7. **إذا علمت زمن إنجاز الأنشطة، أوجد المسار الحرج مما يلي:**
أ) (4 -2 - 4 -5) | ب) (4- 7 - 3 - 5)
ج) (3 - 4 - 2 - 5) | د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

8. **النشاط الذي يترتب على تأخيره تأخير المشروع ككل:**
أ) الحدث | ب) المسار الحرج
ج) النشاط الحرج | د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

9. **تستعمل خريطة Gantt من أجل:**
أ) اختيار الموقع | ب) متابعة مدى تقدم المشروع
ج) حل مسألة النقل | د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

10. **لا يدخل ضمن مراحل استعمال خريطة جانت Gantt**
أ) رسم مخطط (جدول زمني) | ب) إبراز تكاليف المشروع
ج) إظهار تقدم الإنجاز | د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

11. **عند رسم شبكة المشروع ترسم النشاط في شكل:**
أ) سهم | ب) شبكة
ج) دائرة | د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

12. **عند رسم شبكة المشروع يمثل الحدث في شبكة الاعمال في شكل:**
أ) سهم | ب) شبكة

ج) دائرة　　　　　　　　　　د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

**13. تنطلق شبكة المشروع:**

أ) بعملية واحدة　　　　　　　　　　ب) بحدث واحد

ج) بأكثر من عملية　　　　　　　　　　د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

**14. إن طول السهم في شبكة المشروع:**

أ) يكون حسب مدة المرحلة　　　　　　　　　　ب) يكون حسب تكلفة المرحلة

ج) لا علاقة له بمدة العملية　　　　　　　　　　د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

**15. عند رسم شبكة المشروع نلجأ في بعض الحالات إلى إدراج:**

أ) الحدث الخيالي　　　　　　　　　　ب) النشاط الثانوي

ج) النشاط الوهمي　　　　　　　　　　د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

**16. تعد طريقة PERT واحدة من طرق:**

أ) البرمجة الخطية　　　　　　　　　　ب) اختيار الموقع

ج) إدارة المشاريع　　　　　　　　　　د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

**17. تخص طريقة CPM:**

أ) تطوير المنتجات　　　　　　　　　　ب) إدارة المشاريع

ج) مسائل النقل　　　　　　　　　　د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

**18. من بين الأدوات التي تستعمل أكثر في إدارة المشاريع:**

أ) طريقة النقل　　　　　　　　　　ب) طريقة CPM

ج) طريقة Simplex　　　　　　　　　　د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

**19. ليس من مراحل طريقة Gantt:**

أ) رقابة الجودة　　　　　　　　　　ب) رسم مخطط

ج) إظهار جدولة عمليات المشروع حسب الخطة　　　　　　　　　　د) اظهار تقدم الإنجاز

**20. يعني التسريع في إنجاز المشروع:**

أ) التسريع في إنجاز العمليات الحرجة　　　　　　　　　　ب) التسريع في إنجاز العمليات الغير حرجة

ج) التسريع في إنجاز المراحل الحرجة　　　　　　　　　　د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

**21. تحديد المسار الحرج يمكن من تحديد:**

أ) الربح الأمثل للمشروع　　　　　　　　　　ب) الوقت الأمثل لإنجاز المشروع

ج) المكان الأفضل للمشروع　　　　　　　　　　د) جميع الإجابات السابقة خاطئة

## 3) أسئلة \ قضايا للمناقشة

**<u>السؤال (1):</u>** أوجد المسار الحرج_لبينات الجدول الآتي:

| اسم النشاط | النشاط أو الأنشطة السابقة | المدة (أيام) |
|---|---|---|
| A | – | 5 |
| B | – | 4 |
| C | A | 3 |
| D | A | 4 |
| E | A | 6 |
| F | A, C | 4 |
| G | D | *5* |
| H | D, E | 6 |
| I | F | 6 |
| J | H, G | 4 |

**{مدة الإجابة: 15 دقيقة. الدرجات من 100: 15} توجيه للإجابة: المسار الحرج (A, E, H, J= 21)**

**<u>السؤال (2) أسلوب *PERT*</u>**

لنفترض أنك مدير مشــروع لمشــروع محطة طاقة وأنك تدرج في القائمة؛ الأنشـطة والأنشـطة الســابقة وفترات النشــاط المتفائلة والمتشــائمة والأكثر ترجيحاً. المطلوب بتطبيق أســلوب *Pert* حســاب الحد الأدنى لمدة المشـــروع باســتخدام المدخلات في الجدول الآتي:

| النشاط | النشاط السابق | الوقت المتفائل بالأسبوع | الوقت الأكثر احتمالا بالأسبوع | الوقت المتشائم بالأسبوع | الوقت المتوقع |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | - | 0 | 0 | 0 | 0 |
| A | - | 12 | 18 | 15 | 15 |
| B | - | 6 | 12 | 9 | 9 |
| C | A | 9 | 15 | 12 | 12 |
| D | B | 6 | 18 | 9 | 10 |
| E | B | 18 | 36 | 30 | 29 |
| F | A | 9 | 15 | 12 | 12 |
| G | C | 36 | 42 | 36 | 37 |
| H | D | 42 | 54 | 48 | 48 |
| I | A | 6 | 18 | 12 | 12 |
| J | H, G, E | 3 | 9 | 6 | 6 |
| K | F, J, I | 3 | 9 | 6 | 6 |

مدة الإجابة: 15 دقيقة. الدرجات من 100: 15. توجيه للإجابة: المسار الحرج (B, D, H, J, K= 79)

# المراجع والمصادر References

## المراجع العربية


1. أبو القاسم مسعود الشيخ. (2014). بحوث العمليات، المجموعة العربية للتدريب والنشر، القاهرة، مصر، الطبعة الثانية.
2. أحمد عبد إسماعيل الصفار، ماجدة عبد اللطيف التميمي (2007). بحوث العمليات: تطبيقات على الحاسوب، الطبعة الأولى، دار المناهج للنشر والتوزيع، عمان، الأردن.
3. العبيدي، محمود. الفضل، مؤيد عبد الحسين. (2004). بحوث العمليات وتطبيقاتها في إدارة الأعمال. الوراق للنشر والتوزيع. بغداد، العراق.
4. اليامور، علي حازم. (2009). استخدام نموذج البرمجة الخطية في تحديد المزيج الإنتاجي الأمثل الذي يعظم الأرباح في ظل نظرية القيود. المؤتمر العلمي الثاني للرياضيات-الإحصاء والمعلوماتية، 6-7 كانون الأول 2009، الموصل، العراق.
5. اليامين فالتة (2006). بحوث العمليات، ايتراك للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، القاهرة، مصر.
6. الزوبعي، عبيد & حسين، عمر & يونس، عادل. (2012). تطبيقات البرمجة الخطية في نماذج النقل. Journal of Sciences and Technology، vol. 13، December/2012، pp.54-65.
7. النعيمي، محمد عبد العال، الحمداني، رفاه شهاب والحمداني، أحمد شهاب (1999). مقدمة في بحوث العمليات. الطبعة الأولى، عمان، دار وائل للطباعة والنشر.
8. برونسون، ريتشارد. (2004). بحوث العمليات. الطبعة العربية الثانية. سلسلة ملخصات شوم. الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر. ترجمة: حسن حسني الغباري، محمد إبراهيم يونس.

9. دلال صادق الجواد وآخرون (2008). بحوث العمليات، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن.

10. فتحي خليل حمدان (2010). بحوث العمليات مع تطبيقات باستخدام الحاسوب، الطبعة الأولى، دار وائل للنشر والتوزيع، عمان، الأردن.

11. حامد سعد النور الشمرتي (2007). مدخل الى بحوث العمليات. دار المجدلاوي للنشر، عمان، الأردن.

12. حسن، ضوية سلمان، جابر، عدنان شمخي والشمري، نذير عباس (2013). بحوث العمليات. الطبعة الأولى، العراق – بغداد، مكتب الجزيرة للطباعة والنشر.

13. حسين محمود الجنابي (2010). الأحدث في بحوث العمليات. ط.1، دار حامد للنشر والتوزيع، الاردن.

14. حمد أحمد الطراونة، سليمان خالد عبيدات (2010). مقدمة في بحوث العمليات. الطبعة الثانية، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة، الأردن.

15. جلال إبراهيم العبد، استخدام الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية، دار الجامعة الجديدة، الإسكندرية، مصر، 2014.

16. عبود، طلال (2017). نظرية القرارات. منشورات المعهد العالي لإدارة الأعمال HIBA. دمشق، سورية.

17. علي العلاونة، محمد عبيدات وعبد الكريم عواد (2005). بحوث العمليات في العلوم التجارية، الطبعة الأولى، دار يزيد للنشر والتوزيع، عمان، الأردن.

18. صالح مهدي محسن العامري، عواطف إبراهيم الحداد (2009). تطبيقات بحوث العمليات في الإدارة، الطبعة الأولى، إثراء للنشر والتوزيع، عمان، الأردن.

19. سهيلة عبد الله سعيد (2012). الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات، دار الحامد للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، الطبعة الأولى.

20. لحسن عبد الله باشيوة (2011). بحوث العمليات، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن.

21. مبارك قرقب (2017). دور أساليب بحوث العمليات في أمثلية تسيير الإنتاج بالمؤسسة الصناعية الجزائرية دراسة حالة مطاحن الحضنة بالمسيلة. أطروحة دكتوراه. كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسير –قسم العلوم الاقتصادية. جامعة محمد خيضر – بسكرة – الجزائر. 280 ص.

22. منعم زمزير الموسوي (2009). بحوث العمليات–مدخل علمي لاتخاذ القرارات–، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، الطبعة الأولى.

23. منعم زمزير الموسوي (1996). الأساليب الكمية في الإدارة، دار زهران للنشر والتوزيع، عمان، الأردن.

24. محمود الفياض، عيسى قدادة (2007). بحوث العمليات، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن.

25. محمد صالح حناوي، محمد توفيق ماضي (2006). بحوث العمليات في تخطيط ومراقبة الإنتاج، الدار الجامعية، الإسكندرية/مصر.

26. منصور كاسر (2001). تعجيل زمن إنهاء المشروع باستخدام المرونة في زمن إنهاء النشاط في ظل أسلوب COST/PERT. مجلة العلوم الاقتصادية والإدارية، جامعة بغداد، كلية الاقتصاد والتجارة، العدد الثامن.

27. نجم عبود نجم (2013). مدخل إلى الأساليب الكمية النماذج المؤكدة مع التطبيقات باستخدام Microsoft Excel، الطبعة الأولى، مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع، عمان، الأردن.

## المراجع الأجنبية

1. Churchman, C., Ackoff, R. and Arnoff, E. (1957). Introduction to Operations Research. John Wiley and Sons Inc., New York.
2. Cook T. M. & Russell R. A. (1980) Contemporary Operations Management: Text and Cases. Prentice Hall College Division: Engelwood Cliffs, NJ.
3. Daellenbach, Hans G. and George, John A.(1978). Introduction to Operations Research Techniques. Allyn and Bacon Inc., U.S.

4. David W. Miller, Martin K. Starr. (1973). Exexutive Decisions and Operations Research. Prentice-Hall International Series in Management. 2d Ed.
5. Dominique de Werra, Thomas M. Liebling et Jean-François Hêche. (2003) Recherche Opérationnelle pour Ingénieurs. [archive] - Presses polytechniques et universitaires romandes.
6. Eiselt H.A. & Sandblom C.-L. (2010). Operations Research: A Model-Based Approach, Springer, USA.
7. Hillier and Lieberman, (2005); Introduction to Operations Research, 8th edition: McGraw - hill.
8. Hiller, F.S.& Lieberman, G. j. Bodhibrata Nag, Preetam Basu. (2017). Introduction to Operations Research. 10th. Edtiotion. Mc Graw Hill Higher Education. N.Y. ISBN 9339221850 · 9789339221850.
9. Kapoor, V.K. and Kapoor, S. (2001). Operations Research Techniques for Management. Sultan Chand and Sons, New Delhi.
10. Kerzner, Harold. (1989). Project Management: A systems Approach to Planning, Scheduling and Controlling, 3rd Ed., Van No strand Reinhold, NY.
11. Jacques Teghem. (2012). Recherche opérationnelle, Tom 1, Ellipses Edition Marketing, paris, France.
12. Ivan P. Beckman. (1999). Delivering High-Quality Products with the CPM. Engineer, v.29 .issue 3. pp. 48-49. http://search.epnet.com/direct.asp?an=2425685
13. Kimball G. E. & Morse P. M. (1951) Methods of Operations Research. John Wiley & Sons: New York.
14. Meredith, Jack R. and Samuel J. Mantel. (1989). JR. Project Management; A Managerial Approach, 2nd E., John Wiley and Sons, New York, U.S.A., 1989.
15. Moder, J.,: Philips, C.; and Davis, E. (1983). Project Management with CPM, PERT and Precedence Diagramming, 3rd Ed., Van No strand Reinhold Company, New York, U.S.A. 1983.
16. Pocock, J. W. (1953). Operations Research and the Management Consultant. Journal of the Operations Research Society of America 1, no. 3 (May 1953), p. 137. Gantt's principal published works include Organizing for Work (New York: Harcourt.

17. Ravi Ravindran. (2009). Operations Research applications, Taylor & Francis Group, USA.

18. Robinson R. S. (2006). The Operations Research Profession: Westward, Look, the Land is Bright. in Perspectives in Operations Research, 135-149. Springer US: New York.

19. Srinath, L. S. (1975). PERT and CPM: Principles and Applications, 2nd Ed., Affiliated East West Press Private ltd., New Delhi, 1975.

20. Thomas, William. (2004). Selling OR: An Historical Perspective. OR/MS Today, Vol. 31, No. 5, pp. 30-36.

21. Taha, Hamady A. (2019). Operations Research: An Introduction. $10^{th}$. Edition. Pearson Prentice Hall. New Jersy. ISBN 10: 1292165545; ISBN 13: 9781292165547.

22. Taha, Hamdy A. (2011). Operations Research: An Introduction, Prentice Hall; 9th. Edition.

23. Wagner, H.M. (1982). Principles of Operations Research, with Applications to Management Decisions. Prentice Hall of India, New Delhi.

24. Yves NOBERT, Roch OUELLET et Régis PARENT (1995). La Recherche Opérationnelle. Montréal, Gaëtan Morin.