الجامعــة الافتراضيّة السوريّة
SYRIAN VIRTUAL UNIVERSITY

رياضيات

الدكتورة ريتا سعيد   الدكتور عبد الرزاق فاضل   الدكتور ياسر نصر

ISSN: 2617-989X

Books & Refrences

رياضيات

الدكتورة ريتا سعيد – الدكتور عبد الرزاق فاضل – الدكتور ياسر نصر

من منشورات الجامعة الافتراضية السورية

الجمهورية العربية السورية ٢٠٢٠

Mathematics

Rita Saeed - Abdul Razzak Alfadel - Yaser Nasr

Publications of the Syrian Virtual University (SVU)

Syrian Arab Republic, 2020

الفهرس

الفصل الأول: مبادئ أساسية في الرياضيات

سوف نتعرض في هذا الفصل إلى بعض المفاهيم والمبادئ والأسس الرياضية الأساسية والقوانين والتعاريف الهامة في علوم الجبر والتحليل، والتي يجب على كل طالب أن يلم بها إلماماً شاملاً وكاملاً وذلك لتسهيل تعامله وفهمه لهذا المقرر وبقية المقررات التي تتدخل فيها العلوم الرياضية.

١-١ الأحرف والرموز والمصطلحات الرياضية المتداولة في علم الرياضيات:

يمكن وضع الأحرف والرموز والمصطلحات المتداولة في مختلف مجالات العلوم وأسمائها والمأخوذة من الأحرف الأبجدية الإغريقية ضمن الجدولين الآتيين:

كتابة العدد باللاتينية	كتابة العدد بالعربية
I	1
II	2
III	3
IV	4
V	5
VI	6
VII	7
$VIII$	8
IX	9
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

اللفظ باللغة العربية	اللفظ باليونانية	الحرف الصغير	الحرف الكبير
ألفا	Alpha	α	A
بيتا	Beta	β	B
غاما	Gamma	γ	Γ
دلتا	Delta	δ	Δ

E	$\varepsilon, \quad \epsilon$	Epsilon	إبسيلون
Z	ζ	Zeta	زيتا
H	η	Eta	إيتا
Θ	θ	Theta	ثيتا
I	ι	Iota	يوتا
K	κ	Kappa	كابا
Λ	λ	Lambda	لامدا
M	μ	Mu	ميو
N	ν	Nu	نيو
Ξ	ξ	Xi	إكسي
O	o	Omicron	أوميكرون
Π	π	Pi	باي
P	ρ	Rho	روه
Σ	σ	Sigma	سيغما
T	τ	Tau	تاو
Υ	υ	Upsilon	يوبسيلون
Φ	$\phi, \quad \varphi$	Phi	فاي
X	χ	Chi	خاي
Ψ	ψ	Psi	بساي
Ω	ω	Omega	أوميغا

حيث إن الرموز: β, α, θ تستخدم في أكثر الأحيان للدلالة على الزاوية، و π ويستخدم Π كطريقة لكتابة جداء عدد منته أو غير منته من العوامل بشكل مختصر، مثال:

$$\prod_{i=١}^{n} x_i = x_{١} \cdot x_{٢} \cdot x_{٣} \cdot x_{٤} \cdot \cdots \cdot x_n$$

ويستخدم Σ كطريقة لكتابة مجموع عدد منته أو غير منته من العوامل بشكل مختصر، مثال:

$$\sum_{i=١}^{n} x_i = x_{١} + x_{٢} + x_{٣} + x_{٤} + \cdots + x_n$$

غالباً ما يستخدم Φ في جبر المجموعات للدلالة على المجموعة الفارغة.

ويستخدم Ω أيضاً في جبر المجموعات للدلالة على المجموعة الكلية أو فضاء العينة.

$\log_e$, (ln) اللوغاريتم الطبيعي (النيبري) الذي أساسه $e \approx ٢.٧١٨٢٨$.

$\log_a$ اللوغاريتم العادي الذي أساسه a، $(٠ < a \neq ١)$.

lim نهاية مقدار ما.

١-٢ مجموعات الأعداد:

١-٢-١ مجموعة الأعداد الطبيعية:

وتضم الأعداد ابتداءً من الصفر أو الواحد(*) مع جميع الأعداد التي تليها ورمزها $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{٠, ١, ٢, ٣, ٤, \cdots\}$$

وهي مجموعة غير منتهية (غير محدودة من الأعلى) مرتبة تصاعدياً أو تنازلياً.

١-٢-٢ مجموعة الأعداد الصحيحة:

وتضم هذه المجموعة الأعداد الطبيعية ذات الإشارة الموجبة مع الأعداد الطبيعية مضروبة بـ (-١)، (أي الأعداد $\mathbb{N}$ مع نظائرها) ورمزها $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -٣, -٢, -١, ٠, ١, ٢, ٣, ٤, \cdots\}$$

وهي مجموعة غير منتهية (غير محدودة من الأعلى ولا من الأسفل) ومرتبة تصاعدياً أو تنازلياً.

١-٢-٣ مجموعة الأعداد العادية (الكسرية)(**):

مجموعة الأعداد العادية هي مجموعة الأعداد التي يمكن كتابتها على شكل كسر بسط p ومقامه q، حيث p, q عددين صحيحين و q غير معدوم، (أي الأعداد التي يمكن التعبير عنها بكسر مقامه غير معدوم) ورمزها $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad q \neq ٠\right\}$$

حيث p/q: هو كسر أو عدد صحيح موجب أو عدد صحيح سالب وقد يسميها البعض مجموعة الأعداد النسبية أو الناطقة، وهي أيضاً مجموعة غير منتهية (غير محدودة من الأعلى ولا من الأسفل) ومرتبة تصاعدياً أو تنازلياً.

١-٢-٤ مجموعة الأعداد غير العادية:

وتشمل مجموعة أعداد الكسور العشرية غير المنتهية وغير الدورية في الوقت نفسه والتي لا يمكن كتابتها بشكل كسور عادية ونظائرها ويرمز لها بـ $\mathbb{S}$ مثل:

$$\pi = ٣.١٤١٥٩٢٦٥٣٥٨٩٧٩٣٢٣٨٤٦٢٦٤٣٣٨٣٢٧٩٥\cdots$$
$$e = ٢.٧١٨٢٨١٨٢٨٤٥٩٠٤٥٢٣٥٣٦٠٢٨٧٤٧١٣٥٢٧\cdots$$
$$\sqrt{٢} = ١.٤١٤٢١٣٥٦٢٣٧٣٠٩٥٠٤٨٨٠١٦٨٨٧٢٤٢٠٩٧\cdots$$

(*) بعض المراجع تعد بداية مجموعة الأعداد الطبيعية من الواحد ولا تعد الصفر عدداً طبيعياً.

(**) يُسمي البعض الصفر وجميع الأعداد الصحيحة والكسرية الموجبة والسالبة بالأعداد الناطقة.

$$\sqrt{٣} = ١.٧٣٢٠٥٠٨٠٧٥٦٨٨٧٧٢٩٣٥٢٧٤٤٦٣٤١٥٠٥٩\ldots$$
$$\sqrt[٣]{٥} = ١.٧٠٩٩٧٥٩٤٦٦٧٦٦٩٦٩٨٩٣٥٣١٠٨٨٧٢٥٤٣٩\ldots$$

وهنا نلاحظ أنه لا يمكن كتابة أي من الأعداد السابقة على صورة عدد عادي p/q.

١-٢-٥ مجموعة الأعداد الحقيقية:

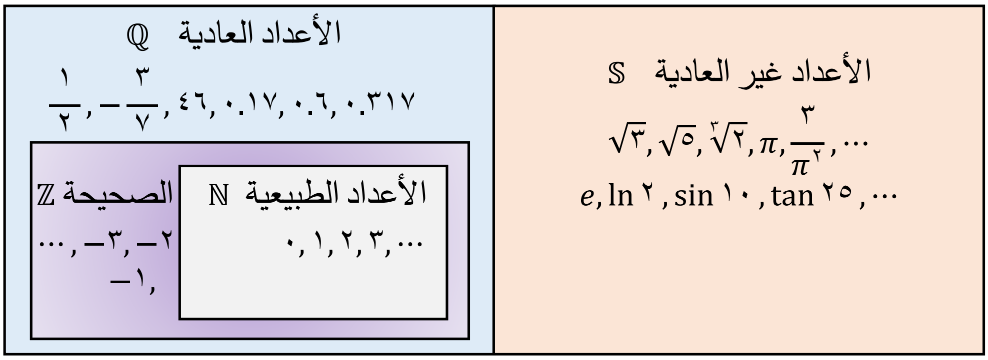
وتضم هذه المجموعة، مجموعة الأعداد العادية $\mathbb{Q}$ وغير العادية $\mathbb{S}$ (والصحيحة والطبيعية أيضاً) ورمزها هو $\mathbb{R}$، أي:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{S}$$

أي عدد حقيقي هو عدد عادي أو غير عادي، ولا يمكن أن يكون الاثنين معاً، أي:

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{S} = \emptyset$$

يمكن تمثيل مجموعة الأعداد السابقة من خلال المخطط التالي:

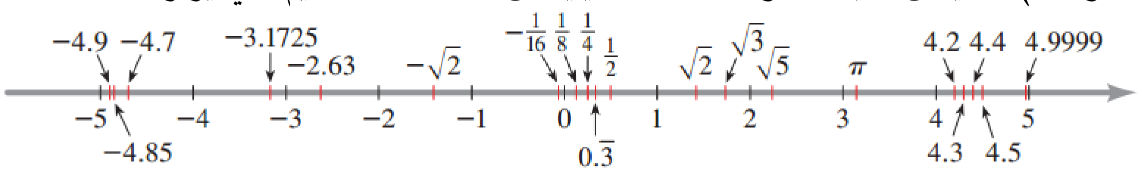


الشكل (١-١): مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{S}$.

وتقسم مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعة أعداد حقيقية موجبة $\mathbb{R}^+$ ومجموعة أعداد حقيقية سالبة $\mathbb{R}^-$ والمجموعة الأحادية $\{٠\}$، أي إن:

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{٠\} \cup \mathbb{R}^-$$

وباعتبار أن هناك تقابلاً بين مجموعة الأعداد $\mathbb{R}$ ونقاط أي خط مستقيم (إذا ما أخذنا عليه نقطة الصفر وجهتين موجبة وسالبة) لذا فيمكن تمثيل مجموعة الأعداد الحقيقية من خلال خط المستقيم الذي يرمز له بـ $\mathbb{R}$.



الشكل (١-٢): مستقيم الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

١-٣ المجالات (الفترات العددية):

تعريف (١-١):

لنفرض أن $a, b \in \mathbb{R}$ (حيث $a \leq b$) نسمي مجموعة الأعداد الحقيقية المحصورة تماماً بين a, b بالمجال المفتوح ونرمز له بالرمز $]a, b[$ أي أن:

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \;:\;]a, b[= \{a < x < b \;:\; x \in \mathbb{R}\}$$

نسمي العددين a,b بطرفي المجال (حدي المجال) والفرق بين هذين الحدين $(b-a)$ بسعة المجال، وإذا أضيف إلى المجال المفتوح $]a,b[$ طرفيه a,b فعندها نسميه بالمجال المغلق ونرمز له بالرمز $[a,b]$:

$$\forall\, a,b\in\mathbb{R}\ :\ \ [a,b]=\{a\le x\le b\ :\ \ x\in\mathbb{R}\}$$

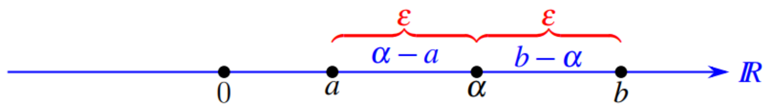
وإذا أضيف إلى المجال المفتوح $]a,b[$ طرفه a، فعندئذ نسميه بالمجال نصف المفتوح من اليمين ونرمز له بالرمز $[a,b[$:

$$\forall\, a,b\in\mathbb{R}\ :\ \ [a,b[=\{a\le x<b\ :\ \ x\in\mathbb{R}\}$$

أما إذا أضيف إلى المجال المفتوح $]a,b[$ طرفه b، فعندئذ نسميه بالمجال نصف المفتوح من اليسار ونرمز له بالرمز $]a,b]$:

$$\forall\, a,b\in\mathbb{R}\ :\ ]a,b]=\{a<x\le b\ :\ \ x\in\mathbb{R}\}$$

وإذا مثلنا مجموعة الأعداد الحقيقية من خلال محور الأعداد الحقيقية فإن:



الشكل (١-٣): المجالات في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

فنسمي α مركز أي مجال I طرفاه a,b (حيث $a<b$) وتحسب قيمته من العلاقة:

$$\alpha=\frac{b+a}{٢}$$

كما ونسمي العدد ε الذي يحقق العلاقة التالية:

$$\varepsilon=\alpha-a=b-\alpha$$

بنصف قطر المجال I، يأخذ I أحد الأشكال التالية:

$$]a,b[,\qquad [a,b],\qquad]a,b],\qquad [a,b[$$

حيث نجد:

$$]a,b[=]\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon[$$

ومن هذا نستطيع أن نبرهن أنه إذا كان α مركز المجال المفتوح $]a,b[$، و ε نصف قطره فإن:

$$x\in\,]a,b[\Leftrightarrow|\alpha-x|<\varepsilon\Leftrightarrow\begin{cases}\ \ \alpha-x<\varepsilon\\-(\alpha-x)<\varepsilon\end{cases}$$

وقد يصادفنا أحياناً مجالات مختلفة غير محدودة، نعرض هذه المجالات جميع في الجدول التالي:

$$\begin{gathered}
]a,b[=\{x:\ a<x<b\ :\ \ x\in\mathbb{R}\}\\
[a,b]=\{x:\ a\le x\le b\ :\ \ x\in\mathbb{R}\}\\
[a,b[=\{x:\ a\le x<b\ :\ \ x\in\mathbb{R}\}\\
]a,b]=\{x:\ a<x\le b\ :\ \ x\in\mathbb{R}\}\\
]-\infty,b[=\{x:\ -\infty<x<b\ :\ \ x\in\mathbb{R}\}\\
]-\infty,b]=\{x:\ -\infty<x\le b\ :\ \ x\in\mathbb{R}\}\\
]a,\infty[=\{x:\ a<x<\infty\ :\ \ x\in\mathbb{R}\}\\
[a,\infty[=\{x:\ a\le x<\infty\ :\ \ x\in\mathbb{R}\}\\
]-\infty,\infty[=\{x:\ -\infty<x<\infty\ :\ \ x\in\mathbb{R}\}
\end{gathered}$$

١-٣-١ الجوار:

بفرض أن $x_٠$ عدد مفروض، إن أي مجال مفتوح مركزه $x_٠$ يدعى جوار العدد $x_٠$ ونرمز له بالرمز $N_{x_٠}$، وإذا فرضنا أن ε عدد موجب فإن المجال: $]x_٠ - \varepsilon, x_٠ + \varepsilon[$ يدعى جوار العدد $x_٠$. بالحقيقة إذا كان $\varepsilon > ٠$ وكان $x_٠$ مركزاً للمجال المفتوح $]a, b[$ فإن:

$$N_{x_٠} =]a, b[=]x_٠ - \varepsilon, x_٠ + \varepsilon[$$

إذا حذفنا النقطة $x_٠$ من جوار هذه النقطة فإن المجموعة المتبقية تدعى جواراً محذوفاً للنقطة $x_٠$، بمعنى آخر إن أي جوار محذوف للنقطة $x_٠$ هو من الشكل: $]x_٠ - \varepsilon, x_٠ + \varepsilon[\setminus \{x_٠\}$.

مثال (١-١):

بفرض أن نصف قطر المجال هو $\varepsilon = ٣$ فإن جوار العدد الحقيقي a هو:

$$N_a(٣) =]a - ٣, a + ٣[$$

وإذا فرضنا أن نصف قطر المجال هو r فإن جوار العدد الحقيقي a هو:

$$N_a(r) =]a - r, a + r[$$

١-٤ القيمة المطلقة:

تعريف (١-٢):

لنأخذ على محور الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ النقطتين $x_١, x_٢$ فإذا كان $x_١ < x_٢$ فإن المسافة d بين هاتين النقطتين $d = x_٢ - x_١$ هي قيمة موجبة، وإذا كان $x_٢ < x_١$ فإن المسافة بين هاتين النقطتين $d = x_١ - x_٢$ وهي قيمة موجبة أيضاً.

إذاً مهما كان وضع النقطتين $x_١, x_٢$ على محور الأعداد الحقيقية فإن المسافة بينها هي القيمة الموجبة لفرق العددين $x_١, x_٢$ حيث تسمى هذا القيمة بالقيمة المطلقة للفرق بين العددين $x_١, x_٢$.

وبالشكل المجرد يمكن تعريف القيمة المطلقة لعدد ما وليكن a ونرمز لها بالرمز $|a|$ على أنها القيمة العددية لذلك العدد بغض النظر عن إشارته.

مثال (١-٢):

$$|٩| = ٩, \qquad |-٩| = -(-٩) = ٩$$

وبشكل عام: إن القيمة المطلقة لعدد حقيقي x هي:

$$|x| = \begin{cases} x & ; \ x > 0 \\ ٠ & ; \ x = 0 \\ -x & ; \ x < 0 \end{cases}$$

من خلال التعريف نجد أن:

١) $|x| = \max(-x, x)$; $(x \leq |x|, \quad x \leq |-x|)$

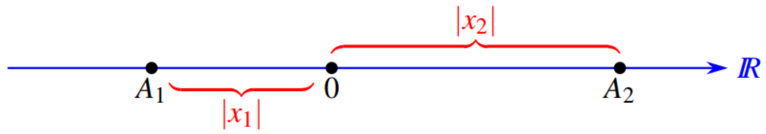
٢) $|x| = \sqrt{x^٢}$; $\sqrt{x^٢}$ هي كمية موجبة دوماً

أمثلة:

$$\sqrt{٩^٢} = ٩, \qquad \sqrt{(-٩)^٢} = ٩$$

$$|٢x - ٣| = ٢x - ٣ \quad \left(\text{if } x > \frac{٣}{٢}\right)$$
$$|٢x - ٣| = ٣ - ٢x \quad \left(\text{if } x < \frac{٣}{٢}\right)$$
$$|٢x - ٣| = ٠ \quad \left(\text{if } x = \frac{٣}{٢}\right)$$

مما سبق نستنتج أن القيمة المطلقة للعدد الحقيقي x ليست إلا المسافة من نقطة الأصل، وحتى النقطة A التي تمثل العدد الحقيقي x.



الشكل (١-٤): القيمة المطلقة في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

إذاً يدخل تعريف القيمة المطلقة في حساب المسافة بين نقطتين واقعتين على محور الأعداد الحقيقية. وفي الشكل (١-٤) نلاحظ أن $x_١$ سالبة لأن النقطة $A_١$ التي تمثلها تقع على يسار نقطة الأصل O وبالتالي فالمسافة $A_١$، تساوي $|x_١|$. أيضاً إن $x_٢$ موجبة لأن النقطة $A_٢$ التي تمثلها تقع على يمين نقطة الأصل O وبالتالي فإن المسافة $A_٢$، تساوي $|x_٢|$.

١-٤-١ خواص القيمة المطلقة [*]:

مبرهنة (١-١):

بفرض أن x عدد حقيقي ما وأن $a \in \mathbb{R}^+$ فإن:

١) $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$.

٢) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$.

٣) $|x| \ge a \Leftrightarrow x \ge a$ أو $x \le -a$.

٤) $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ أو $x < -a$.

٥) $|x| = ٠ \Leftrightarrow x = ٠$.

٦) $|x| > ٠$ (إذا وفقط إذا $x \ne ٠$).

مبرهنة (١-٢):

بفرض أن x, y عددان حقيقيان لا على التعيين (موجبان أو سالبان)، فإن:

$$|x + y| \le |x| + |y|$$

وللتحقق من صحتها سوف نأخذ الحالات الممكنة:

- إذا كان $x \ge ٠$ و $y \ge ٠$ عندئذ $x + y \ge ٠$ وبالتالي المتراجحة تصبح مساواة:

$$|x + y| = x + y = |x| + |y|$$

- إذا كان $x \le ٠$ و $y \le ٠$ عندئذ $x + y \le ٠$ وبالتالي المتراجحة تصبح أيضاً محققة للمساواة:

---

[*] يطلق بعض الاخصائيين على النظريتين (١-٢) و(١-٣) اسم قاعدتي المثلث وذلك لتشابههما مع بعض قواعد المثلث في الهندسة المستوية.

$$|x+y| = -(x+y) = -x + (-y) = |x| + |y|$$

- إذا كان $x \geq ٠$ و $٠ \leq y$ عندئذٍ $x = |x|$ و $-y = |y|$ فإذا كان $x + y \geq ٠$ عندئذٍ:

$$|x+y| = x + y \leq x = |x| \leq |x| + |y|$$

أما إذا كان $x + y \leq ٠$ عندئذٍ:

$$|x+y| = -(x+y) = -x - y = -|x| + |y| \leq |y| \leq |x| + |y|$$

- إذا كان $x \leq ٠$ و $٠ \geq y$ فلا اختلاف عما سبق.

مثال (١-٣):

$|-٨ + ٣| \leq |-٨| + |٣|$ لأن: $|-٥| = |-٨ + ٣| = ٥$ أما $١١ = ٨ + ٣ = |٣| + |-٨|$.

مبرهنة (١-٣):

بفرض أن x, y عددان حقيقيان لا على التعيين (موجبان أم سالبان) فإن:

$$|x-y| \geq |x| - |y|, \qquad |x-y| \geq |y| - |x|$$
$$|x-y| \leq |x| + |y|$$

بالحقيقة إن:

$$|x-y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$$

مثال (١-٤):

$$|١٢ - ٧| \leq |١٢| + |-٧| \Rightarrow |٥| \leq ١٢ + ٧ \Rightarrow ٥ \leq ١٩$$
$$|١٢ - ٧| \geq |١٢| - |٧| \Rightarrow |٥| \geq ١٢ - ٧ \Rightarrow ٥ \geq ٥$$
$$|١٢ - ٧| \geq |٧| - |١٢| \Rightarrow |٥| \geq ٧ - ١٢ \Rightarrow ٥ \geq -٥$$

مبرهنة (١-٤):

بفرض أن x, y عددان حقيقيان لا على التعيين (موجبان أم سالبان) فإن:

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \qquad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \qquad |x| - |y| \geq |x-y|, \qquad |x^n| = |x|^n$$

حيث n عدد صحيح موجب أو سالب.

للتحقق من ذلك سوف نستخدم المتراجحة المثلثية على الأعداد $x - y$، y ثم على الأعداد $y - x$ و x:

$$|x| = |x - y + y| \leq |x-y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x-y|$$

وبشكل مشابه:

$$|y| - |x| \leq |x-y| = |y-x| \Rightarrow |x-y| \geq \big||x| - |y|\big|$$

وباعتبار أن $\big||x| - |y|\big|$ هو مساوٍ لأحد الأعداد $|x| - |y|$ أو $|y| - |x|$ لذا ينتج:

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$$

مثال (١-٥):

$$\big||-٣| - |-٥|\big| \leq |-٣ - (-٥)|$$

لأن:

$$\big||-٣| - |-٥|\big| = |٣ - ٥| = |-٢| = ٢$$
$$|-٣ - (-٥)| = |-٣ + ٥| = |٢| = ٢$$

مبرهنة (١-٥):

بفرض أن x,y عددان حقيقيان لا على التعيين (موجبان أم سالبان) فإن:

$$|x| - |y| \leq |x + y|$$

للتحقق من صحة ذلك نسلك الأسلوب السابق نفسه، مطبقين المتراجحة المثلثية أولاً على الأعداد $x + y$ و$-y$ ثم على الأعداد $y + x$ و $-x$.

مثال (١-٦):

$$|-٣| < ٧ \Leftrightarrow -٧ < -٣ < ٧ \quad و \quad -٧ < ٣ < ٧$$

ملاحظة:

في المتراجحة:

$$|x| < c \Leftrightarrow -c < x < c$$

ويمكن استخدام الرمز $\leq$ ويكون:

$$|x| \leq c \Leftrightarrow -c \leq x \leq c$$

١-٥ القوى (الأسس):

نعلم أنه بالإمكان كتابة الجداء بالشكل المساوي له:

$$a \times a \times a \times a = a^{٤}$$

حيث نقول إن a مرفوعة للقوة ٤ (أي أن a لها الأس ٤).

إذاً فالمقصود بالقوة n للعدد a والتي نرمز لها بالرمز a^n هو جداء a بنفسه n مرة.

نسمي n الأس (القوة) والعدد a الأساس وعملية الضرب بعملية الرفع.

وتتمتع القوى بالخواص التالية:

$$(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$$
$$a^n \cdot a^m \cdot a^k = a^{n+m+k}$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{١}{a^{n-m}} \;\; ; \;\; n \neq m$$

وفي حال $m = n$ نجد أن:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^{٠} = ١ \;\; ; \;\; (a \neq ٠)$$
$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}, \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}, \qquad ١/a^m = a^{-m}$$

أمثلة:

$$(٣/٧)^{٥} = ٣^{٥}/٧^{٥} \qquad \& \qquad ٥^{٣}/٥^{٢} = ٥^{٣-٢} = ٥$$

لاحظ أن:

$$٥^{٢}/٥^{٣} = ٥^{٢-٣} = ٥^{-١} = ١/٥$$
$$(٥^{٣})^{٤} = ٥^{٣ \cdot ٤} = ٥^{١٢}, \qquad \sqrt[٤]{٥^{٣}} = ٥^{٣/٤}$$

١-٦ الجذور:

١-٦-١ الجذور الحسابية:

الجذر الحسابي من المرتبة n للعدد الموجب x ونرمز له بالرمز $\sqrt[n]{x}$ هو عدد موجب آخر y بحيث إن:

$$y^n = x \;\; ; \;\; n \geq ٢$$

نسمي العدد n دليل الجذر ونستغني عن كتابته إذا كان مساوياً للعدد ٢.

هناك نوعان من الجذور:

a) الجذور الناطقة: وهي الجذور التي يمكن الحصول على قيمتها بشكل دقيق.

مثال (١-٧):

$$\sqrt{٩} = ٣, \qquad \sqrt[٥]{٣٢} = ٢$$

b) الجذور الصماء : وهي التي لا يمكن الحصول على قيمتها بشكل دقيق.

مثال (١-٨):

$$\sqrt[٣]{٥}, \qquad \sqrt[٧]{٥}, \qquad \sqrt[٥]{٧}, \qquad \sqrt[٢]{٣} = \sqrt{٣}$$

للجذور خواص عديدة منها:

$$١)\;\; \sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} \;\; ; \;\; (x \geq ٠,\; y \geq ٠)$$
$$٢)\;\; \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$$
$$٣)\;\; \sqrt[n]{x}/\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x/y} \;\; ; \;\; (x \geq ٠,\; y > ٠)$$
$$٤)\;\; \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n \cdot m]{x}$$
$$٥)\;\; \sqrt[m]{x^n} = \sqrt[m \cdot q]{x^{n \cdot q}}$$
$$٦)\;\; \sqrt[m]{x^n} = \sqrt[m/m]{x^{n/m}} = \sqrt[١]{x^{n/m}} = x^{n/m}$$

الخاصة السابقة تنقل الجذور إلى قوى وبالعكس.

١-٦-٢ الجذور الجبرية:

وهي الجذور الحسابية نفسها مع وجود الملاحظات الآتية:

- إذا كان دليل الجذر عدداً زوجياً فللعدد الموجب جذران متناظران وليس للعدد السالب جذر حقيقي.
- إذا كان دليل الجذر عدداً فردياً فللعدد الموجب جذر وحيد موجب وللعدد السالب جذر وحيد سالب.

١-٦-٣ العمليات الأربع على الجذور الصماء :

a) جمع وطرح الجذور الصماء المتشابهة: تكون الجذور متشابهة إذا كان لها جميعاً الدليل نفسه والعدد المجذور نفسه ونطبق عليها عمليتي الجمع أو الطرح بالشكل المتعارف عليه وذلك بعد كتابتها بأبسط الصور.

مثال (١-٩):

$$x \cdot \sqrt[٣]{y^٣ \cdot z^٤} + y \cdot \sqrt[٣]{x^٣ \cdot z^٤} - z \cdot \sqrt[٣]{x^٣ \cdot y^٣ \cdot z} = xyz\,\sqrt[٣]{z} + xyz\,\sqrt[٣]{z} - xyz\,\sqrt[٣]{z} = xyz\,\sqrt[٣]{z}$$

b) ضرب الجذور الصماء: تتم عملية ضرب الجذور الصماء بعد توحيد أدلتها (إذا كانت غير موحدة) وذلك من خلال ضرب الكميات الموجودة تحت الجذور الموحدة ووضع الناتج تحت إشارة الجذر الموحد.
وتتم عملية ضرب الكميتين المترافقتين $(a-b)$، $(a+b)$ من خلال المطابقة المعروفة.

مثال (١-١٠):

$$\left(\sqrt{١٣}+\sqrt{٧}\right)\left(\sqrt{١٣}-\sqrt{٧}\right)=١٣-٧=٦$$

c) قسمة الجذور الصماء: تتم عملية قسمة الجذور الصماء بعد توحيد دليلي الجذرين (إذا كانا غير موحدين) من خلال تطبيق خاصة قسمة الجذور التي مرت سابقاً.
أما التخلص من الجذور الموجودة في المقامات فيكون بضرب المقام والبسط بالجذور الموجودة في المقام (أو بمرافق المقام حين يكون المقام عبارة عن تركيباً جذرياً).

١-٧ اللوغاريتمات:

بفرض أن a,b أعداد حقيقية موجبة وإذا كانت لدينا العلاقة: $b=a^x$ (حيث $b>٠$ حتى تكون العمليات محققة في $\mathbb{R}$) فإن لوغاريتم العدد الحقيقي الموجب b بالنسبة للأساس a هو العدد x أي أن:

$$b=a^x \Leftrightarrow \log_a b=x\ ;\ \ (a>٠\ \ \&\ \ a\neq ١)$$

ملاحظة:

بما أن $a^x>٠$ أياً كان العدد الحقيقي x فلا يوجد لوغاريتم لأي عدد غير موجب، أي أن $\log_a b$ معرف فقط من أجل $b>٠$.

$$\forall\, x\neq ٠\ :\ \ x^{٠}=١ \Leftrightarrow \log_x ١=٠,\qquad x^{١}=x \Leftrightarrow \log_x x=١$$
$$\forall\, b>١\ :\ \ b^{\infty}=\infty \Leftrightarrow \log_b \infty=\infty,\qquad b^{-\infty}=٠ \Leftrightarrow \log_b ٠=-\infty$$

إذا كان الأساس ١٠ يرمز لوغاريتم بالرمز log (من دون دليل).

١-٧-١ خواص اللوغاريتم:

ليكن $a\neq ١, x,y,z$ أعداداً موجبة تماماً، و m,n عددين حقيقيين، عندئذٍ يتمتع اللوغاريتم بخواص عديدة منها:

١) لكل عدد موجب لوغاريتم وحيد.
٢) $\log_a(x\cdot y\cdot z)=\log_a x+\log_a y+\log_a z$
٣) $\log_a x^n=n\log_a x$
٤) $\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y$
٥) $\log_a \sqrt[n]{x}=(١/n)\log_a x$
٦) $\log_b x\cdot\log_a b=\log_a x\ \ ;\ \ a,b,x>٠\ \ \&\ \ a\neq ١, b\neq ١$
٧) $\log_a b=١/\log_b a\ \ ;\ \ a,b>٠\ \ \&\ \ a\neq ١, b\neq ١$
٨) $\log_{a^m} x^n=(n/m)\log_a x$

هناك علاقة تكافؤ بين التابعين الأسي واللوغاريتمي إذ نتوصل من خلالها إلى النتيجة التالية:

$$y=e^x \Leftrightarrow x=\log_e y=\ln y$$

يمكن الانتقال إلى هذا الشكل باستخدام الخاصية:

$$a = e^{\ln(a)}$$

(راجع خواص اللوغاريتم)

$$a^x = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{x\cdot\ln(a)}, \qquad a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x\cdot\ln(a)}$$

مثال (١-١١):

$y = ٦^x$ ولكن $٦ = e^{\ln(٦)}$ وبالتالي: $y = ٦^x = \left[e^{\ln(٦)}\right]^x = e^{x\cdot\ln(٦)}$

ملاحظة:

هناك تطبيقات عديدة ومتنوعة لاستخدام اللوغاريتمات من أهمها:

- أثناء العمليات الحسابية المعقدة والتي يدخل فيها أحياناً حساب قيم الجذور.
- أثناء حساب المساحات والحجوم.
- أثناء حساب الفائدة المركبة.

مثال (١-١٢):

حل المعادلة التالية: $١٥x^٢ - ٣٢□ - ٤٧ = ٠$.

الحل: إن:

$$x_١, x_٢ = \frac{٣٢ \mp \sqrt{٣٨٤٤}}{٣٠}$$

لنلاحظ أن: $\Delta = ٣٨٤٤$ لحساب $\sqrt{\Delta}$ نجد أن: $\log\sqrt{٣٨٤٤} = ١.٧٩٢٤$ ومنه $\sqrt{٣٨٤٤} = ٦٢$.

مثال (١-١٣):

إذا علمت أن مساحة مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه L يعطى بالعلاقة: $S = \sqrt{٣}/٤ \cdot L^٢$ فاحسب مساحة مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٣٧.٢٥ سم.

الحل:

لنأخذ لوغاريتم الطرفين في حساب S: $S = \sqrt{٣}/٤ \cdot (٣٧.٢٥)^٢$، حيث نجد أن: $S = ٦٠٠.٦\ cm^٢$.

مثال (١-١٤):

وضع مبلغ ٥١٢ ل.س في مصرف بفائدة ٣٪ سنوياً، فبعد كم سنة تصبح جملة هذا المبلغ ٦٥٠ ل.س.

الحل:

لنأخذ لوغاريتم الطرفين في قانون جملة المبلغ S_n حيث $S_n = S(١ + i)^n$ وذلك لحساب n فنجد أن:

$$(١.٠٣)^n = \frac{٣٢٥}{٢٥٦} \Rightarrow n = ٨\ \text{years}$$

١-٨ تمارين ومسائل:

١- أوجد المجموعات التالية إذا كانت:

$$A = \{x \mid x \geq -٢\}, \qquad B = \{x \mid x < ٤\}, \qquad C = \{x \mid -١ < x \leq ٥\}$$

$(a)\quad B \cup C \qquad (c)\quad B \cap C$

(b) $A \cap C$ (d) $A \cap B$

٢- عبّر عن المجال الآتي بدلالة المتراجحات، ووارسمه:

(a)	$]-٣,٠[$	(b)	$]٢,٨]$
(c)	$[٢,٨[$	(d)	$[-٦,-١/٢]$
(e)	$[٢,\infty[$	(f)	$]-\infty,١[$

٣- عبّر عن المتراجحات الآتية بدلالة المجالات وارسم هذه المجالات:

(a)	$x \leq ١$	(b)	$١ \leq x \leq ٢$
(c)	$-٢ < x \leq ١$	(d)	$x \geq -٥$
(e)	$x > -١$	(f)	$-٥ < x < ٢$

٤- ارسم المجالات الآتية:

(a)	$]-٢,٠[\cup]-١,١[$	(b)	$]-٢,٠[\cap]-١,١[$
(c)	$[-٤,٦] \cap [٠,٨[$	(d)	$[-٤,٦[\cup [٠,٨[$
(e)	$]-\infty,-٤[\cup]٤,\infty[$	(f)	$]-\infty,٦] \cap]٢,١٠[$

٥- احسب القيم المطلقة الآتية:

(a)	$\lvert ١٠٠ \rvert$	(b)	$\lvert -٧٣ \rvert$	(c)	$\lvert ١-\sqrt{٢} \rvert$
(d)	$\lvert \sqrt{٥}-٥ \rvert$	(e)	$\lvert ١٠-\pi \rvert$	(f)	$\lvert \pi-٣ \rvert$
(g)	$\lvert \lvert -٦ \rvert - \lvert -٤ \rvert \rvert$	(h)	$\dfrac{-١}{\lvert -١ \rvert}$	(i)	$\lvert ٢-\lvert -١٢ \rvert \rvert$
(j)	$-١-\lvert ١-\lvert -١ \rvert \rvert$	(k)	$\lvert (-٢)\cdot ٦ \rvert$	(l)	$\lvert -٢\cdot \lvert -٣ \rvert \rvert$
(m)	$\left\lvert -\dfrac{١}{٣}(-١٥) \right\rvert$	(n)	$\left\lvert \dfrac{-٦}{٢٤} \right\rvert$	(p)	$\left\lvert \dfrac{٧-١٢}{١٢-٧} \right\rvert$

٦- أوجد قيمة العبارات الآتية:

(a)	$-٢^{٦}$	(b)	$(-٢)^{٦}$	(c)	$(١/٥)^{٢}\cdot(-٣)^{٣}$
(d)	$(-٥)^{٣}$	(e)	$-٥^{٣}$	(f)	$(٢/٥)^{٢}\cdot(-٥)^{٢}$
(g)	$\left(\dfrac{٥}{٣}\right)^{٠}\cdot ٢^{-١}$	(h)	$\dfrac{٢^{-٣}}{٣^{٠}}$	(i)	$\left(\dfrac{٢}{٣}\right)^{-٢}$
(j)	$٣\sqrt[٣]{١٦}$	(k)	$\dfrac{\sqrt{١٨}}{\sqrt{٨١}}$	(l)	$\sqrt{٢٧/٤}$
(m)	$\sqrt{٣}\sqrt{١٥}$	(n)	$\sqrt[٣]{٢}\sqrt[٣]{٣٢}$	(p)	$\sqrt[٤]{١/٤}\sqrt[٤]{١/٦٤}$

٧- بسط العبارات الآتية وأزل أية قوة ذات أس سالب:

(a)	$x^{٣}\cdot x^{٤}$	(b)	$(٢y^{٢})^{٣}$	(c)	$y^{-٢}\cdot y^{٧}$
(d)	$(٨\square)^{٢}$	(e)	$x^{٤}x^{-٣}$	(f)	$w^{-٢}w^{-٤}w^{٥}$
(g)	$\dfrac{x^{١٦}}{x^{١٠}}$	(h)	$\dfrac{y^{٧}y^{٠}}{y^{١٠}}$	(i)	$z^{٥}z^{-٣}z^{-٤}$

$(j)\quad (٣x^{٣}y^{٢})(٢y^{٣})\qquad (k)\quad (٥w^{٢}z^{-٢})^{٢}\,(z^{٣})\qquad (l)\quad (٨\,m^{-٢}\,n^{٤})(n^{-٢})$

$(m)\quad \left(\frac{x^{٤}z^{٢}}{٤y^{٥}}\right)\left(\frac{٢x^{٣}y^{٢}}{z^{٣}}\right)^{٢}\qquad (n)\quad \left(\frac{a^{٢}}{b}\right)^{٥}\left(\frac{a^{٣}b^{٢}}{c^{٣}}\right)^{٣}\qquad (p)\quad \frac{(u^{-١}\,v^{٢})^{٢}}{(u^{٣}\,v^{-٢})^{٣}}$

الفصل الثاني: المعادلات الرياضية وطرائق حلها

٢-١ التعابير الرياضية وتصنيفاتها:

تمهيد:

غالباً وحين حل بعض المسائل نلجأ إلى قوانين ودساتير توصلنا إلى هذا الحل (مسألة حساب مساحات أشكال، حجوم أشكال فراغية، معادلات، ...)

إلا أن هناك بعض المسائل والتمارين يتطلب حلها إيجاد الصيغة (العبارة) الرياضية التي بموجبها نستطيع التوصل إلى حلها، ولنأخذ أمثلة عديدة على ذلك:

- حساب التكلفة الكلية.
- حساب الاستثمار.
- حساب الاستهلاك اليومي.
- حساب مسألة التوازن النقدي.
- حساب الإنتاج الكلي.

مما سبق نستنتج أنه لا يمكن التوصل لحل هذا النوع من المسائل ما لم نلجأ إلى صياغة المسألة من خلال تركيب (عبارة) جبري يحوي مجهولاً أو عدة مجاهيل وإشارات جبرية ومساواة. يقسم هذا التركيب الجبري إلى قسمين:

١- تركيب جبري محقق دائماً مهما تكن قيمة المجهول الذي يدخل بتركيبه، مثال:

$$\frac{x + ١ + x^{٢}}{x^{٢}(١ + x)} \equiv \frac{١}{x^{٢}} + \frac{١}{x + ١} \quad ; \quad x \neq ٠, \qquad x \neq -١$$

مثل هذا التركيب يسمى بالمطابقة.

٢- تركيب جبري محقق من أجل قيم (قيمة) معينة للمجهول، مثال:

$$x^{٢} - ٥\square + ٤ = ٠$$

وهذا التركيب محقق من أجل $x = ١$ و $x = ٤$.

مثل هذا التركيب يسمى المعادلة وحلول هذا التركيب الجبري يسمى جذور المعادلة، ويمكن أن نجد للمعادلات أنواعاً عديدة منها:

٢-٢ تصنيف المعادلات وفق درجاتها:

٢-٢-١ المعادلات ذات المجهول الواحد:

وهي معادلات تحوي مجهولاً واحداً فقط ولهذه المعادلات درجات مختلفة بحسب أعلى أس للمجهول في هذه المعادلة، ويمكن التوصل إلى درجة المعادلة من خلال إجراء العمليات الحسابية والاختصارات عليها، ولقد كنا قد تعرفنا سابقاً على المعادلة من الدرجة الأولى والمعادلة من الدرجة الثانية وكيفية إيجاد حلول كلٍ منها، إلا أننا لم نتعرف وبالشكل المنطقي والعلمي الصحيح على حلول المعادلات اعتباراً من الدرجة الثالثة فما فوق، لهذا سوف نشرح طريقة إيجاد حلول هذا النوع من المعادلات بالشكل العام.

٢-٢-٢ المعادلة من الدرجة الأولى:

وهي معادلة يمكن كتابتها بالشكل: $(a \neq ٠)\quad ; \quad ax + b = ٠$ حيث a, b ثابتان حقيقيان، لها جذر وحيد هو $x = -b/a$، إن إشارة ثنائي الحد $ax + b$ قبل الجذر مخالفة لإشارة أمثال المتحول x أي لإشارة a وبعده موافقة لإشارة أمثال المتحول x.

٣-٢-٢ المعادلة من الدرجة الثانية:

شكلها العام: $ax^{٢} + bx + c = ٠$ لنفرض أن مميزها: $\Delta = b^{٢} - ٤ac$، لحلها وإيجاد جذورها نميز الحالات التالية:

آ) $\Delta > ٠$ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان $x_{١}, x_{٢}$ يتم حسابها من خلال الدستور التالي:

$$x_{١}, x_{٢} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{٢a} \Longrightarrow x_{١} + x_{٢} = -\frac{b}{a} \quad \& \quad x_{١} \cdot x_{٢} = \frac{c}{a}$$

من الواضح أن مجموع الجذرين هو: $x_{١} + x_{٢} = -b/a$، وجداء الجذرين هو $x_{١} \cdot x_{٢} = c/a$.

ب) $\Delta = ٠$ للمعادلة جذر مضاعف يحسب من خلال الدستور التالي:

$$x_{١} = x_{٢} = -b/٢a$$

ج) $\Delta < ٠$ للمعادلة جذران تخيليان (عقديان).

للتعرف على إشارة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية $ax^{٢} + bx + c$ نميز الحالات التالية وذلك حسب إشارة مميزه.

a) $\Delta > ٠$ وقد وجدنا أنه يكون لثلاثي الحدود جذران حقيقيان مختلفان $x_{١}, x_{٢}$ فإذا فرضنا أن x قيمة ما محصورة بين الجذرين فإن إشارة ثلاثي الحدود مخالفة لإشارة a، أما إذا أخذت x قيم خارج منطقة الجذرين فإن إشارة ثلاثي الحدود موافقة لإشارة a وذلك مهما تكن x.

b) $\Delta = ٠$ وقد وجدنا أن لثلاثي الحدود جذراً مضاعفاً x لهذا فإن إشارته قبل وبعد هذا الجذر موافقة لإشارة a وذلك مهما تكن x.

c) $\Delta < ٠$ وهنا تكون إشارة ثلاثي الحدود من إشارة a وذلك مهما تكن x.

ولدينا بعض المتطابقات الشهيرة:

$$(a \pm b)^{٢} \equiv a^{٢} \pm ٢ab + b^{٢}$$
$$a^{٢} - b^{٢} \equiv (a - b)(a + b)$$
$$a^{٣} \pm b^{٣} \equiv (a \pm b)(a^{٢} \mp ab + b^{٢})$$
$$(a \pm b)^{٣} \equiv a^{٣} \pm ٣a^{٢}b + ٣ab^{٢} \pm b^{٣}$$
$$a^{n} - b^{n} \equiv (a - b)(a^{n-١} + a^{n-٢}b + a^{n-٣}b^{٢} + a^{n-٤}b^{٣} + \cdots + ab^{n-٢} + b^{n-١})$$

٤-٢-٢ المعادلة من الدرجة n:

الشكل العام لها هو:

$$a_{n}x^{n} + a_{n-١}x^{n-١} + a_{n-٢}x^{n-٢} + a_{n-٣}x^{n-٣} + \cdots + a_{١}x_{١} + a_{٠} = ٠ \qquad (١)$$

(وكما نلاحظ أن الطرف الأيسر ليس إلا كثير حدود بشكله العام) حيث $a_n \neq ٠$، وإلا أصبحت درجته أصغر أو تساوي $(n-١)$.

تنص مبرهنة بيزو Bezout على أنه إذا انعدم كثير الحدود $f(x)$ من أجل $x = A$ فهو يقبل القسمة على $(x-A)$.

بالحقيقة إذا رمزنا للطرف الأيسر للمعادلة من الدرجة n (١) بـ $f(x)$ فنكون بذلك قد حصلنا على كثير حدود، فإذا فرضنا أن حاصل قسمته على $(x-A)$ هو $h(x)$ وأن الباقي هو R مقدار ثابت درجته أقل من درجة $(x-A)$ فإن بالإمكان كتابة ذلك على النحو التالي:

$$f(x) \equiv h(x) \cdot (x-A) + R$$

فإذا جعلنا $x = A$ نجد أن:

$$f(A) = ٠ + R$$

هذا يعني أن باقي قسمة $f(x)$ على $(x-A)$ هو $f(A)$، وفي حال كان $f(A) = ٠$ فإن $R = ٠$ وبالتالي فإن $f(x)$ يقبل القسمة على $(x-A)$ دون باقٍ.

ويبرهن في التحليل الرياضي من خلال مبرهنة دالامبير Dalamber T. أن لكل معادلة مهما تكن درجتها n عدداً من الحلول يساوي درجتها n (يمكن أن تكون هذه الحلول حقيقية أو عقدية أو الاثنين معاً أو مكررة).

بالحقيقة إذا رمزنا بـ $f(x)$ للطرف الأيسر للمعادلة (١) وجعلنا $f(x) = ٠$ فإن له n جذراً مختلفاً $A, B, C, \cdots, W$، (قد يكون بعضها مكرراً) وبما أنه ينعدم من أجل أحدها وليكن A لذا فهو يقبل القسمة على $(x-A)$، أي أن:

$$f(x) \equiv (x-A)\, h_١(x)$$

$h_١(x)$ كثير حدود من الدرجة $(n-١)$ فإذا جعلنا $x = B$ نجد أن:

$$f(B) \equiv (B-A)\, h_١(B)$$

أي أن $(B-A)\, h_١(B) = ٠$ هذا يعني أن $h_١(B) = ٠$، أي أن $h_١(x)$ يقبل القسمة على $(x-B)$ والذي يكتب كما يلي:

$$h_١(x) = (x-B)\, h_٢(x)$$

حيث $h_٢(x)$ من الدرجة $(n-١)$ ⋯ وهكذا وبالأسلوب المناقشة السابقة نفسه نصل إلى:

$$h_{n-١}(x) = (x-W)\, h_n(x)$$

حيث $h_n(x)$ من الدرجة صفر، أي ثابت عددي نفرضه L، فبالتعويض عما سبق نجد أن:

$$f(x) \equiv (x-A)(x-B)(x-C)\cdots(x-W) \cdot L$$

وتعني هذه الأخيرة أن كل كثير حدود من الدرجة n يمكن كتابته بشكل n من المضاريب (الجداءات) كل منها من الدرجة الأولى.

والجدير بالذكر أنه لا يمكن القول إن هناك قاعدة ثابتة لحساب هذه الجذور وغالبية الطرق المتبعة لإيجاد جذور مثل هذه المعادلات تعتمد على الطريقة التجريبية في إيجاد أحد الجذور. ثم تخفيض درجة المعادلة

وإعادة الأسلوب من جديد. وهناك مبرهنتان (نوردهما دون برهان) يمكن الاعتماد عليهما في إيجاد أحد الجذور إن وجد، وهما:

مبرهنة (٢-١) (اختيار الجذور الكسرية):

بفرض أن جميع الأمثال (المعاملات) $a_٠, a_١, a_٢, \cdots, a_n$ (حيث $a_n \neq ٠$) في المعادلة $P_n(x) = ٠$ أعداداً صحيحة، فإن كل جذر كسري من الشكل $\frac{p}{q}$ لهذه المعادلة (في حال وجوده) يحقق أن p قاسم لـ $a_٠$ و q قاسم لـ a_n.

حالة خاصة:

إذا كان $a_n = ١$، فإذا كان للمعادلة جذر صحيح فسيكون قاسماً لـ $a_٠$.

ملاحظة (١):

إذا كانت الأمثال غير صحيحة فإننا نجري عليها العمليات الحسابية والاختصارات المتعارف عليها، حيث نعتبر الحد المطلق هو الحد الناتج بنهاية العمليات.

ملاحظة (٢):

قد لا يوجد للمعادلة حلولاً كسرية، في هذه الحالة إما أن تكون جذور المعادلة حقيقية غير كسرية (غير عادية) أو تكون عقدية. ولن نتطرق في هذا المؤلف إلى طريقة البحث عن حلول تقريبية.

مبرهنة (٢-٢):

إذا فرضنا أن A هو أحد حلول المعادلة النونية (١) (صحيحاً أو غير صحيح) فإن كثير الحدود الموجود في الطرف الأيسر للمعادلة يقبل القسمة على $(x - A)$. (والعكس صحيح: أي إذا قبل كثير الحدود القسمة على $(x - A)$ فإن A هو أحد حلول المعادلة).

وباعتبار أننا لم نتطرق إلى براهين هاتين المبرهنتين ولا إلى الأسلوب الذي تم من خلاله التحقق من صحتها، لهذا سوف نورد وبشكل عملي الخطوات التي يمكن اتباعها في إيجاد الحلول الصحيحة لمعادلات الدرجة النونية على النحو التالي:

١- نكتب المعادلة النونية بشكل نجعل أحد الأطراف معدوماً.

٢- نتحقق من كون أن جميع الأمثال في المعادلة صحيحة وإلا فنحاول إيجاد معادلة مكافئة أمثالها صحيحة إذا أمكن وذلك بإجراء العمليات الحسابية فإن وجدت مثل هذه المعادلة ننتقل إلى الخطوة الثالثة، وإلا فلا يمكننا إيجاد الجذور بهذه الطريقة.

٣- نوجد قواسم كل من $a_٠$ و a_n. ونبحث عن حل للمعادلة من الشكل $\frac{p}{q}$ حيث p قاسم لـ $a_٠$ و q قاسم لـ a_n. فإن وجد مثل هذا الجذر ننتقل إلى الخطوة الرابعة، وإلا فلا يمكننا إيجاد الجذور بهذه الطريقة.

٤- إذا كان $x_١$ هو ذلك الجذر نقسم $f(x)$ على $(x - x_١)$، وإذا كان $h(x)$ هو ناتج القسمة فإن $h(x)$ من الدرجة $(n - ١)$ وبالنتيجة يكون $f(x) = (x - x_١)\, h(x)$.

٥- نكرر الخطوات السابقة على المعادلة $h(x) = ٠$ ونوجد جذرا أخر للمعادلة السابقة وبالتالي للمعادلة الأصلية.

٦- لإيجاد بقية الجذور العادية، نكرر هذه العملية حتى يبقى لدينا معادلة ليس لها جذوراً عادية أو ليس لها جذوراً حقيقية.

مثال (٢-١):

أوجد جذور المعادلة التالية: $-٤x^{٣} + ٥x^{٢} + ٣x + ٦ = ٠$.

الحل:

لنطبق الخطوات السابقة، إن الحد المطلق هو ٦ وقواسمه هي:

$$-٣, \quad -٢, \quad -١, \quad ١, \quad ٢, \quad ٣$$

نفتش عن أحد القواسم الذي يحقق المعادلة فنجد أنه ٢، لنقسم الطرف الأيسر على $(x - ٢)$ فنجد أن ناتج القسمة هو:

$$-٤x^{٢} - ٣x - ٣ \Rightarrow ٤x^{٢} + ٣x + ٣ = ٠$$

باعتبار أنها معادلة من الدرجة الثانية لا داعي لتكرار الخطوات السابقة، بل نلجأ لحلها بالطرق المعروفة لدينا سابقاً، حيث نجد أن مميزها سالب وبالتالي فلا حلول حقيقية لها.

مثال (٢-٢):

أوجد جذور المعادلة التالية: $x^{٤} - ٨x^{٣} + ١٧x^{٢} + ٢x - ٢٤ = ٠$.

الحل:

لنطبق الخطوات التالية، إن الحد المطلق هو ٢٤ وقواسمه هي:

$$\pm ١٢, \quad \pm ٨, \quad \pm ٦, \quad \pm ٣, \quad \pm ٢, \quad \pm ١$$

لنفتش عن أحد القواسم الذي يحقق المعادلة فنجد أن:

$$x = ٢ \Rightarrow ١٦ - ٦٤ + ٦٨ + ٤ - ٢٤ = ٠$$

أي أن القسم الأيسر للمعادلة يقبل القسمة على $(x - ٢)$، لأن $x_{١} = ٢$ حل لها، لنجري عليه القسمة فنحصل على ناتج القسمة:

$$h(x) = x^{٣} - ٦x^{٢} + ٥x + ١٢$$

لنعيد الخطوات السابقة من جديد، إن قواسم الحد المطلق هي:

$$\pm ٦, \quad \pm ٣, \quad \pm ٢, \quad \pm ١$$

لنفتش عن أحد القواسم الذي يحقق المعادلة فنجد أن:

$$x = -١ \Rightarrow -١ - ٦ - ٥ + ١٢ = ٠$$

أي أن $x_{٢} = -١$ جذر آخر للمعادلة وأن $(x + ١)$ قاسم لـ $h(x) = x^{٣} - ٦x^{٢} + ٥x + ١٢$ باجراء عملية القسمة نجد أن ناتج القسمة هو $x^{٢} - ٧x + ١٢$ وبحل المعادلة $x^{٢} - ٧x + ١٢ = ٠$ نجد الجذرين المتبقيين وهما $x_{٣} = ٤$، $x_{٤} = ٣$. بالنتيجة فإن جذور المعادلة الأصلية هي:

$$٢, \quad ٣, \quad ٤, -١$$

ويمكننا كتابة المعادلة بالشكل:

$$x^{٤} - ٨x^{٣} + ١٧x^{٢} + ٢x - ٢٤ = (x - ٢)(x + ١)(x - ٤)(x - ٣)$$

٢-٣ المعادلات الكسرية:

هي معادلات حدودها على شكل كسر بسطه ومقامه كثيرا حدود ومقامه من الدرجة الأولى على الأقل.

مثال (٢-٣):

المعادلة الكسرية:

$$\frac{x^{٢} + ٣x + ٤}{x - ٢} - \frac{٤}{٧} = \frac{x^{٣} + ٤x - ١}{x^{٢} - ٤}$$

لحل هذا النوع من المعادلات نعمل على تحويلها إلى إحدى المعادلات السابقة وذلك من خلال إجراء العمليات الحسابية والاختصارات على طرفيها.

مثال (٢-٤):

أوجد حل المعادلة السابقة:

$$\frac{x^{٢} + ٣x + ٤}{x - ٢} - \frac{٤}{٧} = \frac{x^{٣} + ٤x - ١}{x^{٢} - ٤} \quad ; \quad x \neq \pm ٢$$

الحل:

لنوحد المقامات ونساوي بين الطرفين فنحصل على المعادلة:

$$٧(x + ٢)(x^{٢} + ٣x + ٤) - ٤(x^{٢} - ٤) = ٧(x^{٣} + ٤x - ١)$$

وهي معادلة من الدرجة الثالثة، نعمل على حلها كما وجدنا سابقاً.

٢-٤ المعادلات المتعددة المجهول:

وهي معادلات تحوي أكثر من مجهول وندرس نوعين من هذه المعادلات:

٢-٤-١ المعادلات الخطية:

نعرف المعادلة الخطية بأنها المعادلة التي تحوي مجهولاً واحداً أو عدة مجاهيل بحيث إن قوة أي مجهول فيها يساوي الواحد الموجب الصحيح.

وكما نعلم أن المعادلة الخطية بأكثر من مجهول تملك عدداً غير منته من الحلول (الجذور) حيث إن حلول مثل هذه المعادلة تكون مرتَّبة عدد مساقطها مساوٍ لعدد المجاهيل فيها.

أمثلة:

$$٣\square + ١٠ = ٠, \quad ٢\square + y + z = ٥, \quad ٧\square - ٣\square + ٥\square + u + v = -١$$

وكما نلاحظ أن $ax + by = c$ هي معادلة خطية بمجهولين والمعادلة: $ax - by + cz = d$ هي معادلة خطية بثلاثة مجاهيل، وكما نعلم أن المعادلة الواحدة بأكثر من مجهولين ليس لها حل وحيد ولا حتى عدد محدد من الحلول، لهذا فكي نوجد حلاً وحيداً لمعادلة بعدة مجاهيل يجب أن يقابلهم عدد من المعادلات يساوي عدد المجاهيل ويجب أن تكون هذه المعادلات مستقلة.

وسوف نتطرق إلى حل هذه المعادلات الخطية في فصل المصفوفات بشكل مفصل.

٢-٤-٢ المعادلات غير الخطية:

وهي المعادلات التي تشذ عن صيغة المعادلات الخطية.

مثلاً: المعادلة $ax^{٢} + by^{٢} + cxy + dx + ey + f = ٠$ هي معادلة غير خطية بمجهولين من الدرجة الثانية، حيث $a, b, c, \cdots$ ثوابت.

يتطلب حل هذا النوع من المعادلات، وإيجاد حل وحيد لها أن تكون هذه المجاهيل مرتبطة من خلال معادلات مستقلة فيما بينها.

فمثلاً لإيجاد حل جملة المعادلتين التاليتين:

$$\begin{cases} ٢x^{٢} + ٣y^{٢} - ٣x + y + ٥ = ٠ \\ x - y = ١ \end{cases}$$

باعتبار أن هناك معادلة خطية تربط بين المجهولين x, y ولذا نوجد أحد هذين المجهولين ونعوضه في الأخرى لنتمكن من الحل.

٢-٥ تمارين ومسائل:

١- أوجد جذور المعادلة التالية: $x^{٣} + ٣x^{٢} - ١٠x - ٢٤ = ٠$.

٢- أوجد جذور المعادلة التالية: $x^{٣} - ٤x^{٢} - ١٧x + ٦٠ = ٠$.

٣- أوجد جذور المعادلة التالية: $x^{٣} - ٥x^{٢} - ٢x + ٢٤ = ٠$.

٤- أوجد جذور المعادلة التالية: $x^{٣} - ٣x^{٢} - ١٦x + ٤٨ = ٠$.

٥- إذا علمت أن $x = ٤$ هو أحد جذور المعادلة التالية: $x^{٣} + ٤x^{٢} - ١٧x - ٦٠ = ٠$. فأوجد الجذرين الآخرين.

٦- أوجد جذور المعادلة التالية: $x^{٣} + ٤x^{٢} - ١٧x - ٦٠ = ٠$.

٧- أوجد جذور المعادلة التالية: $x^{٣} - ٢x^{٢} - ١٦x + ٣٢ = ٠$.

الفصل الثالث: المترجحات الرياضية وطرائق حلها

٣-١ المتراجحات وأشكالها:

بفرض أن $a, b \in \mathbb{R}$، اعتماداً على خواص مجموعة الأعداد الحقيقية نجد أن:

- أن يكون a أصغر من b حيث نرمز لها بـ $a < b$ (أو أن يكون b أكبر من a ونرمز لهذا بـ $b > a$)، هذا يعني أن:

$$a < b \Leftrightarrow b > a$$

- أن يكون a أكبر من b حيث نرمز لها بـ $a > b$ (أو أن يكون b أصغر من a ونرمز لهذا بـ $b < a$)، هذا يعني أن:

$$a > b \Leftrightarrow b < a$$

وبشكل عام نستطيع أن نكتب:

$$a \leq b \Leftrightarrow \left(a < b \text{ أو } a = b\right)$$
$$a \geq b \Leftrightarrow \left(a > b \text{ أو } a = b\right)$$

نسمي التعابير التالية: $a < b$، $a > b$، $a \leq b$، $a \geq b$ بالمتراجحات.

٣-١-١ خواص المتراجحات:

تتمتع المتراجحات بخواص عديدة، يمكن الحصول عليها وذلك بالعودة إلى الخواص التي تتمتع بها مجموعة الأعداد الحقيقية، حيث نجد أن:

١) a حقيقي موجب $\Leftrightarrow a > ٠$ هذا يعني أن: $a > ٠ \Leftrightarrow -a < ٠$.

٢) a حقيقي سالب $\Leftrightarrow a < ٠$ هذا يعني أن: $a < ٠ \Leftrightarrow -a > ٠$.

٣) بفرض أن $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ فإن:

a) إحدى هذه المتراجحات: $a > b$، $a = b$، أو $a < b$ لا بد أن تتحقق.

b) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$.

c) $a < b \ \& \ b < c \Rightarrow a < c$.

d) $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$.

e) $a < b,\ c < d \Rightarrow a + c < b + d$.

f) $٠ < a < b, ٠ < c < d \Rightarrow a \cdot c < b \cdot d$.

g) $\forall\, c > ٠ :\ a\,c < b\,c \Leftrightarrow a < b$.

h) $\forall\, c < ٠ :\ a\,c < b\,c \Leftrightarrow a > b$.

i) $a \neq ٠ \Rightarrow a^{٢} > ٠$.

j) $١/a > ٠ \Rightarrow a > ٠$.

k) $١/a < ٠ \Rightarrow a < ٠$.

l) إذا كان $a < b$، $a > ٠, b > ٠$ فإن: $١/b < ١/a$.

m) إذا كان $a < ٠, b < ٠$ وكان $a > b$ فإن: $١/b > ١/a$.

n) $\forall\, b > a > ٠ \Rightarrow a^{٢} < b^{٢}$.

٥) $\forall\, a < b < ٠ \Rightarrow a^{٢} > b^{٢}$.

٣-١-٢ حل المتراجحات:

لا يختلف حل المتراجحات عن حل المعادلات، سوى أن لبعض المعادلات حلولاً محددة ومعينة وذلك حسب طبيعة نوعها، أما للمتراجحة فإن لها جملة حلول غير محدودة وغير معينة. ويمكن القول إن حل المتراجحة يدخل ضمن إيجاد مجموعة من الأعداد الحقيقية التي تحقق هذه المتراجحة.

٣-٢ أشكال المتراجحات:

كما في حالة المعادلات، تصنف المتراجحات وفقاً لعدد المجاهيل فيها، متراجحة بمجهول واحد مثل $f(x) < ٠$ حيث $f(x)$ تركيب جبري بمجهول واحد x، متراجحة بمجهولين مثل $g(x,y) \geq ٠$ حيث $g(x,y)$ تركيب جبري بمجهولين x و y، كما تصنف أيضا بخطية وغير خطية وفقاً للتركيب الجبري الذي تحويه المتراجحة فإن كان كثير حدود من الدرجة الأولى لمجهول أو أكثر سميت المتراجحة خطية وإلا سميت غير خطية وإذا كان التركيب كثير حدود من الدرجة n سميت متراجحة من الدرجة n.

أمثلة:

$$x^{٣} - ٣x^{٢} + ٥ \geq ٠, \qquad ٣\square + ٢\square < ٠, \qquad ٥x^{٢} - ٢\square + ٧ > ٠$$

إن لكل شكل من أشكال هذه المتراجحات طرقاً معينة للتوصل لحلولها. سوف نتعرف على طرق الحل هذه من أشكال المتراجحات وفق الأمثلة التالية:

٣-٢-١ المتراجحات ذات المجهول الواحد:

وهي المتراجحات التي يحوي تركيبها الجبري مجهولاً واحداً وأحد رموز المتراجحات، ولها أحد الأشكال التالية:

$$f(x) \geq ٠, \qquad f(x) > ٠, \qquad f(x) \leq ٠, \qquad f(x) < ٠$$

$f(x) \geq b$ أو $f(x) > b$ ($f(x)$ تعبير جبري يحوي x)

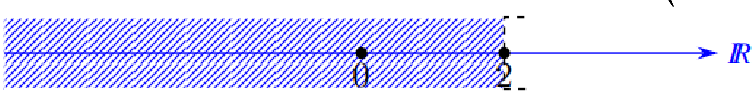
مثال (٣-١):

يطلب حل المتراجحة التالية: $x - ٩ < ٣ + ٢\square$.

الحل:

$$٢\square + x < ٩ - ٣ \Leftrightarrow ٣\square < ٦ \Leftrightarrow x < ٢$$

إذاً إن $x < ٢$ يعني أن: $x \in]-\infty, +٢[$ فالمتراجحة تقبل أي قيمة لـ x أصغر من القيمة ٢ ولا تساويها حلاً لها (انظر الشكل أدناه).



الشكل (٣-١): المحل الهندسي للمتراجحة $x < ٢$ في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

مثال (٣-٢):

بفرض أن x عدد حقيقي لا على التعيين، أوجد حل المتراجحة التالية: $x^{٢} > ٢\square + ٣$.

الحل:

إنّ:

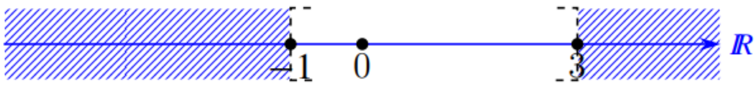
$$x^{٢} > ٢\square + ٣ \Leftrightarrow x^{٢} - ٢\square - ٣ > ٠ \Leftrightarrow (x+١)(x-٣) > ٠ \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x > 3 \text{ و } x > -1 \\ \text{أو} \\ x < 3 \text{ و } x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 > 0 \text{ و } x + 1 > 0 \\ \text{أو} \\ x - 3 < 0 \text{ و } x + 1 < 0 \end{cases}$$

أو من خلال الجدول التالي حيث يتطلب منا في هذا الجدول معرفة إشارة ثنائي الحد:

x	$-\infty$		-١		$+٣$		$+\infty$
$x+١$		$-$	٠	$+$		$+$	
$x-٣$		$-$	$-$	$-$	٠	$+$	
$(x+١)(x-٣)$		$+$	٠	$-$	٠	$+$	

إذاً إن جملة حلول المتراجحة السابقة يمكن تمثيلها من خلال المستقيم الموجه عبر المنطقة (أو القسم) المظللة.



الشكل (٣-٢): المحل الهندسي للمتراجحة $x^{٢} > ٢\square + ٣$ في $\mathbb{R}$.

وتعني أن مجموعة الحلول هي:

$$\left\{x : x \in \mathbb{R}, \quad x < -١ \quad \text{أو} \quad x > ٣\right\}$$

أي المجموعة:

$$\{x : x \in \mathbb{R}, \quad x > ٣\} \cup \{x : x \in \mathbb{R}, \quad x < -١\}$$

مثال (٣-٣):

حل المتراجحة التالية:

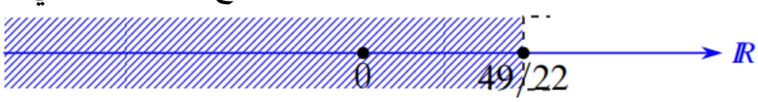
$$\frac{x+٣}{٥} + ١ > \frac{٢\square - ٥}{٣} + x$$

الحل:

بعد توحيد المقامات نجد أن:

$$٣\square + ٩ + ١٥ > ١٠\square - ٢٥ + ١٥\square \Leftrightarrow x < \frac{٤٩}{٢٢}$$

إذاً يتمثل الحل في المجموعة $]-\infty, ٤٩/٢٢[$ والشكل أدناه يوضح المحل الهندسي:



الشكل (٣-٣): المحل الهندسي للمتراجحة السابقة في $\mathbb{R}$.

٣-٢-٢ المتراجحات المضاعفة (المثلثية–المزدوجة):

وهي المتراجحة التي يدخل في تركيبها رمزان للمتراجحات ولها أشكال عديدة أهمها:

$$\left(a < f(x) \text{ و } f(x) < b\right) \Leftrightarrow a < f(x) < b$$

فإذا رمزنا لمجال حلول المتراجحة الأولى بـ $I_١$ ولمجال حلول الأخرى بـ $I_٢$ فإن حل المتراجحة الأصلية يجب أن يحقق العلاقة:

$$I = I_١ \cap I_٢ \neq \emptyset$$

(إذا كان $I = I_١ \cap I_٢ = \emptyset$ فليس للمتراجحة حلول وبالتالي فهي مستحيلة الحل).

مثال (٣-٤):

حل المتراجحة التالية: $٥\square + ١ < ٢\square - ٣ < ٧\square + ٢$.

الحل:

لنكتب هذه المتراجحة من خلال المتراجحتين التاليتين:

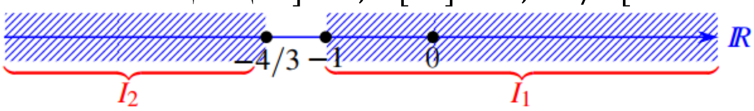
$$٢\square - ٣ < ٧\square + ٢ \quad \text{و} \quad ٥\square + ١ < ٢\square - ٣$$

$$٢\square - ٣ < ٧\square + ٢ \Leftrightarrow ٥\square > -٥ \Leftrightarrow x > -١ \Leftrightarrow x \in I_١ =]-١, \infty[$$

$$٥\square + ١ < ٢\square - ٣ \Leftrightarrow ٣\square < -٤ \Leftrightarrow x < -\frac{٤}{٣} \Leftrightarrow x \in I_٢ =]-\infty, -\frac{٤}{٣}[$$

وبالتالي فجملة حلول المتراجحة هذه هي:

$$x \in I_١ \cap I_٢ =]-١, \infty[\cap]-\infty, -٤/٣[$$



الشكل (٣-٤): المتراجحة مستحيلة الحل في $\mathbb{R}$، $I_١ \cap I_٢ = \emptyset$.

أي أن المتراجحة مستحيلة الحل.

مثال (٣-٥):

حل المتراجحة التالية: $-٢ + ٣\square < ٧\square < x + ٢$.

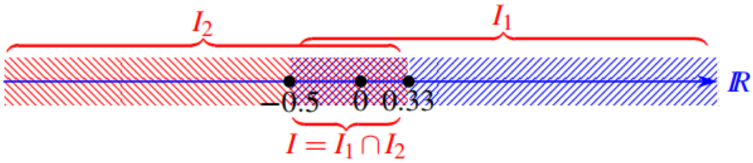
الحل:

$$-٢ + ٣\square < ٧\square \Longrightarrow ٤\square > -٢ \Longrightarrow x > -١/٢ \Longrightarrow x \in]-١/٢, \infty[= I_١$$

$$٧\square < x + ٢ \Longrightarrow ٦\square < ٢ \Longrightarrow x < ١/٣ \Longrightarrow x \in]-\infty, ١/٣[= I_٢$$

إذاً فالحل هو:

$$x \in I_١ \cap I_٢ =]-١/٢, ١/٣[$$



الشكل (٣-٥): حل المتراجحة في $\mathbb{R}$ **يساوي** $I_١ \cap I_٢$.

ملاحظة:

كان بالإمكان حل المتراجحة هذه محتفظين برمزيها أثناء الحل.

مثال (٣-٦):

أثناء دراسة مردود إحدى الشركات بنهاية العام من مبيعات الإنتاج حدث خلاف بين مدير الإنتاج ومدير المبيعات حول الكمية المنتجة والكمية التي تم بيعها طوال عام (دون ادخار أي كمية في المخازن).

فقد ادعى مدير المبيعات أنه قد استلم الكمية المبيعة طوال العام على ست أو سبع مراحل من خلال سيارات نقل تسع لـ ١٥ وحدة مصنعة ليتم توزيعها على مراكز البيع بمعدل ٢٥ وحدة مصنعة لكل مركز وفي حين أشار أحد مراكز البيع أنه لم يستلم سوى ٢٠ وحدة مصنعة. فكيف يمكن التعرف على صحة هذه المشكلة وهل كان مدير الإنتاج على حق أم كان مدير المبيعات على حق؟ وما هي عدد القطع المبيعة؟

الحل:

إذا فرضنا أن عدد مراحل استلام الكمية هو ٦ فإن عدد الوحدات المصنعة والمسلمة إلى مدير المبيعات هي: $٩٠ = ٦ \times ١٥$ وحدة مصنعة. وإذا فرضنا أن عدد مراحل استلام الكمية هو ٧ فإن عدد الوحدات المصنعة والمسلمة إلى مدير المبيعات هي:

$$١٥ \times ٧ = ١٠٥$$

إذاً فعدد الوحدات المصنعة والمسلمة إلى مدير المبيعات يتراوح بين ٩٠ و١٠٥ وحدة مصنعة، وللتعرف على صحة القول، نفرض أن عدد مراكز البيع والذي استلم كل منها ٢٥ وحدة هو x، فهذا يعني أن:

$$٩٠ < ٢٥x + ٢٠ < ١٠٥ \Longrightarrow$$

أي أن:

$$٢\frac{٢٠}{٢٥} < x < ٣\frac{١٠}{٢٥}$$

وباعتبار أن x هوعدد مراكز البيع والذي يجب أن يكون عدداً صحيحاً موجباً إذاً فإن $x = ٣$ وبالتالي فعدد القطع المبيعة والمسلمة إلى المركز هو:

$$٢٥(٣) + ٢٠ = ٩٥$$

٣-٢-٣ المتراجحات ذات الجداء:

عبارة عن متراجحة أحد طرفيها يحوي عدداً من المضاريب (جداءات حدود في x) والطرف الآخر هو الصفر وشكلها العام هو:

$$(a_١x \pm b_١)(a_٢x \pm b_٢)(a_٣x \pm b_٣)\cdot \cdots \cdot (a_nx \pm b_n) \gtrless ٠$$

تؤدي إشارة المتراجحة $>$ أو $<$ دوراً هاماً وبارزاً في حل مثل هذه الأنواع من المتراجحات، كون أن هذا الحل يجب أن يكون محققاً من خلال إشارة المتراجحة بالذات وسوف نتعرف على مثل هذا الدور من خلال الأمثلة التالية:

مثال (٣-٧):

أوجد مجال حلول المتراجحة التالية: $(x + ٣)(٢x^٢ - ٥x - ٣) > ٠$.

الحل:

نحاول تحليل ثلاثي الحدود إلى مضاريبه:

$$(x+٣)(٢x+١)(x-٣)>٠$$

وهنا نكون أمام ثلاثة مضاريب (ثلاثة حدود) يجب أن يكون جداؤها موجباً تماماً، أي هنا يجب الأخذ بعين الاعتبار إشارة كل مضروب (حد) من هذه المضاريب وبالتالي إشارة الجداء ككل. أي يجب أن نتعرف على المجال الذي تحقق فيه هذه المضاريب إشارة المتراجحة، وهذا يتم من خلال تشكيل جدول نتعرف فيه على كل حد من هذه الحدود وبالتالي إشارة الجداء (أي قيم x المحققة للمتراجحة):

x	$-\infty$ ... -٣	-٣ ... $-١/٢$	$-١/٢$ ... ٣	٣ ... $+\infty$
$x+٣$	$-$	$+$	$+$	$+$
$٢x+١$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-٣$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(x+٣)(٢x^٢-٥x-٣)$	$-$	$+$	$-$	$+$

محققة في المجالين:

$$I_١=]-٣,-١/٢\,[\,,\qquad I_٢=]\,٣,+\infty\,[$$

٣-٢-٤ المتراجحات الكسرية[*]:

تأخذ هذه المتراجحات شكل عبارة كسرية بسطها $f(x)$ ومقامها $g(x)\neq ٠$ كثيرا حدود. طريقة حل هذا النوع من المتراجحات لا تختلف مطلقاً عن طريقة حل المتراجحات ذات المضاريب حيث نستعين هنا أيضاً بالجدول السالف الذكر للتوصل إلى الحل.

مثال (٣-٨):

أوجد مجالات حلول المتراجحة التالية:

$$\frac{٣x^٢+x-٢}{x^٢+٣x-٤}>٠\quad;\quad x\neq ١,\qquad x\neq -٤$$

الحل:

لنكتب المتراجحة بشكل آخر:

$$\frac{(٣x-٢)(x+١)}{(x+٤)(x-١)}>٠$$

لنشكل الآن الجدول ولنتعرف على قيم x المحققة للمتراجحة:

x	$-\infty$ ... -٤	-٤ ... -١	-١ ... $٢/٣$	$٢/٣$ ... ١	١ ... $+\infty$
$٣x-٢$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+١$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$٣x^٢+x-٢$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$
$x+٤$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-١$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x^٢-٣x-٤$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$

[*] يمكن حل هذا النوع من المتراجحات أيضاً في بعض الحالات من خلال التخلص من المقام وذلك بضرب طرفي المتراجحة بمربع المقام (وليس بالمقام) الذي هو موجب وبالتالي فلا تتغير إشارة المتراجحة وبعد عملية الضرب يتم التخلص من المقام وتحول هذه المتراجحة إلى متراجحة ذات مضاريب.

$\frac{٣x^{٢}+x-٢}{x^{٢}+٣x-٤}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

إذاً تتحقق المتراجحة في المجالات التالية:

$$I_{١}=]-\infty,-٤[\,,\qquad I_{٢}=]-١,٢/٣[\,,\qquad I_{٣}=]١,+\infty[$$

مثال (٣-٩):

حل المتراجحة التالية:

$$\frac{x^{٢}(٢x^{٢}-x-٦)(x^{٢}+١٥x+١٠)}{(٢x^{٢}+٣)(٣x-٥)}>٠ \quad ; \quad x\neq\frac{٥}{٣}$$

الحل:

لنلاحظ أن كلاً من المقدارين $(x^{٢}+١٥x+١٠)$ (إشارته من إشارة أمثال $x^{٢}$ كون أن مميزه سالب) و$(٢x^{٢}+٣)$ موجب ولا يتدخل في حلول المتراجحة.

لنضرب طرفي المتراجحة بـ $(٢x^{٢}+٣)(٣x-٥)$ فنحصل على المتراجحة (إذا إشارة الطرف الأيسر للمتراجحة الأخير من إشارة الجداء):

$$x^{٢}(٢x^{٢}+٣)(٣x-٥)(٢x^{٢}-x-٦)(x^{٢}+١٥x+١٠)>٠$$

إذاً إشارة المتراجحة من إشارة المقدار.

$$x^{٢}(٣x-٥)(٢x^{٢}-x-٦)$$

أي علينا حل المتراجحة:

$$x^{٢}(٣x-٥)(٢x^{٢}-x-٦)>٠$$

أو:

$$x^{٢}(٣x-٥)(x-٢)(٢x+٣)>٠$$

لنشكل الجدول:

x	$-\infty$ $-٣/٢$	٠	$٥/٣$	٢	$+\infty$
$x^{٢}$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$٣x-٥$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-٢$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$٢x+٣$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
الطرف الأيسر من المتراجحة	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

إذاً قيم x المحققة للمتراجحة متمثلة باجتماع المجالات التالية:

$$I_{١}=]-\infty,-٣/٢[\,,\qquad I_{٢}=]٠,٥/٣[\,,\qquad I_{٣}=]٢,+\infty[$$

٣-٢-٥ المتراجحات ذات المجهولين:

ويمكن التطرق إليها من خلال المتراجحات الخطية بمجهولين والمتراجحات غير الخطية بمجهولين.

المتراجحات الخطية بمجهولين:

وهي المتراجحات التي ترد إلى متراجحة أحد طرفيها كثير حدود من الدرجة الأولى لمتحولين (شكله خطي) والطرف الأخر صفر، ويأخذ شكلها العام أحد الأشكال التالية:

$$ax + by + c > ٠, \qquad ax + by + c \leq ٠; \qquad a \neq ٠, \qquad b \neq ٠$$

ولحلها علينا التفتيش عن النقاط (x, y) التي تحقق المتراجحة أي التي تجعل المقدار $ax + by + c$ موجباً تماماً).

لنكتب المقدار $ax + by + c$ بالشكل التالي:

$$b\left(\frac{a}{b}x + y + \frac{c}{b}\right)$$

ولنجعله مساوياً الصفر:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

وهنا نكون قد حصلنا على معادلة مستقيم في المستوي ميله $-a/b$ ويمر بالنقطة $(٠, -c/b)$ فالنقاط (x, y) التي تقع على المستقيم $ax + by + c = ٠$ تحقق معادلته دون أي شك أمّا ما يهمنا فهو البحث عن النقاط (x, y) التي تجعل المتراجحة: $ax + by + c > ٠$ محققة.

تتم عملية البحث عن النقاط هذه من خلال إحدى الطريقتين التاليتين:

أولاً: طريقة القوة التحليلية لنقطة بالنسبة لمستقيم.

ثانياً: طريقة الشعاع العمودي على مستقيم.

أولاً: طريقة القوة التحليلية لنقطة بالنسبة لمستقيم:

إن المعادلة $ax + by + c = ٠$ هي معادلة مستقيم D، وهذا المستقيم يقسم المستوي XOY إلى نصفين $P_١$، و $P_٢$. لتكن $M(x_٠, y_٠)$ نقطة من المستوي. نسمي العدد (أو القيمة) $A_٠$ المعطاة بالمساواة:

$$A_٠ = ax_٠ + by_٠ + c$$

بالقوة التحليلية للنقطة M بالنسبة للمستقيم D. فإما أن تكون $A_٠$ معدومة وهذا يعني أن النقطة واقعة على المستقيم أو تكون غير معدومة وإشارتها هي إشارة $ax + by + c$ عند جميع نقاط نصف المستوي المنتمية له النقطة M ومخالفة لإشارة $ax + by + c$ في النصف الآخر. فعلى سبيل المثال إذا كانت واقعة في نصف المستوي $P_١$ وكانت $A_٠ > ٠$ فإن منطقة حلول المتراجحة $ax + by + c < ٠$ هي نصف المستوي $P_٢$.

خلاصة:

للتعرف على المنطقة في المستوي التي تكون فيها متراجحة خطية، طرفها غير المعدوم، محققة، نقوم بحساب القوة التحليلية لنقطة غير واقعة على المستقيم بالنسبة للمستقيم $ax + by + c = ٠$، وإشارة هذه القوة هي إشارة $ax + by + c$ عند جميع نقاط نصف المستوي المنتمية له النقطة M، وبذلك نستطيع معرفة منطقة الحلول للمتراجحة.

ثانياً: طريقة الشعاع العمودي على مستقيم:

إن الشكل العام لمعادلة أي مستقيم يمر من مبدأ الإحداثيات هو $ax + by = ٠$ أو $y = -(a/b)x$ حيث $m = -a/b$ ميل هذا المستقيم، وكما نعلم من الهندسة التحليلية أن العلاقة التي تربط ميل مستقيم ما بميل مستقيم معامد له تعطى من خلال المعادلة التالية:

$$m \cdot m' = -١$$

(حيث m' هو ميل أي مستقيم يعامد المستقيم $y = -(a/b)x$) أي أن:

$$m' = b/a$$

إذاً فمعادلة المستقيم المعامد للمستقيم المفروض هي: $y = (b/a)x$ أو $bx - ay = ٠$ أي أن النقطة (a,b) تقع على المستقيم المتعامد كون أنها تحقق معادلته.

فإذا أردنا حساب القوة التحليلية لنقطة ما $M_{٠}(a,b)$ بالنسبة للمستقيم $ax = by$ لوجدنا أن:

$$A_{٠} = a \cdot a + b \cdot b = a^{٢} + b^{٢} > ٠$$

هذا يعني أن القوة التحليلية للنقطة $M_{٠}(a,b)$ موجبة، تساعدنا على معرفة المنطقة التي تكون فيها إشارة القوة التحليلية لنقاطها موجبة بالنسبة للمستقيم $ax + by = ٠$ المار من مبدأ الإحداثيات.

إذا كانت $M_{٠}(a,b)$ نقطة غير واقعة على المستقيم $ax + by + c = ٠$، فإن إشارة $ax + by + c$ عند جميع نقاط نصف المستوي الذي يتجه نحوه الشعاع $\overrightarrow{OM_{٠}}$ تكون موجبة. فإذا كانت النقطة $M_{٠}(a,b)$ واقعة في $P_{١}$ فإن منطقة حلول المتراجحة $ax + by + c < ٠$ هي نصف المستوي $P_{٢}$.

لهذا نرسم الشعاع $\overrightarrow{OM}$ الذي مبدؤه مبدأ الإحداثيات $O(٠,٠)$ ونهايته النقطة $M_{٠}(a,b)$ فاتجاه هذا الشعاع هو الاتجاه الذي يحدد لنا منطقة الحلول المقبولة للمتراجحة (المنطقة التي تكون فيها إشارة القوة التحليلية لنقاطها موجبة بالنسبة للمستقيم $ax + by = ٠$).

وإن عملية استبدال المستقيم المار بمبدأ الإحداثيات $ax + by = ٠$ بمستقيم آخر معادلته $ax + by + c = ٠$ لا يؤثر في معرفة تحديد المنطقة لأننا نحصل على المستقيم $ax + by + c = ٠$ من معادلة المستقيم $ax + by = ٠$ بعملية انسحاب للمستقيم المفروض ناتجة عن إضافة المقدار c.

ملاحظة:

الطريقة الثانية لا تطبق إلا على المتراجحات الخطية فقط.

مثال (٣-١٠):

حل المتراجحة التالية: $x - ٩ < ٣ + ٢□$.

الحل:

إن: $٣ - ٩ < x + ٢□$ ومنه: $٦ > ٣□$ إذن إن $٢ > x$ أي أن: $x \in]-\infty, +٢[$، فالمتراجحة محققة لأجل أي قيمة لـ x أصغر من القيمة ٢.

مثال (٣-١١):

بفرض أن x عدد حقيقي لا على التعيين، حل المتراجحة التالية: $x^{٢} > ٣□ + ٤$.

الحل:

إن:

$$x^{٢} > ٣\square + ٤ \Leftrightarrow x^{٢} - ٣\square - ٤ > ٠$$

نكتب المعادلة على شكل مساواة ونحلها بطريقة المميز كونها معادلة من الدرجة الثانية:

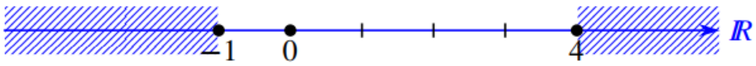
$$\Delta = (-٣)^{٢} - ٤ \times ١ \times (-٤) = ٩ + ١٦ = ٢٥$$

$$x_{١} = \frac{-(-٣) - \sqrt{٢٥}}{٢ \times ١} = \frac{٣ - ٥}{٢} = -١, \qquad x_{٢} = \frac{-(-٣) + \sqrt{٢٥}}{٢ \times ١} = \frac{٣ + ٥}{٢} = ٤$$

وبالتالي نكتب:

$$x^{٢} - ٣\square - ٤ > ٠ \Leftrightarrow (x - ٤)(x + ١) > ٠ \Leftrightarrow \begin{cases} x - ٤ > ٠ \text{ و } x + ١ > ٠ \\ \text{أو} \\ x - ٤ < ٠ \text{ و } x + ١ < ٠ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > ٤ \text{ و } x > -١ \\ \text{أو} \\ x < ٤ \text{ و } x < -١ \end{cases}$$

هذا يعني أن جملة حلول المتراجحة السابقة يمكن تمثيلها من خلال المستقيم الموجه (الشكل: ٣-٦):



الشكل (٣-٦): حل المتراجحة من خلال المستقيم الموجه.

أي أن جملة حلول المتراجحة السابقة هي:

$$\{x : x \in \mathbb{R}, \quad x > ٤ \quad \text{أو} \quad x < -١\}$$

أي أن:

$$\{x : x \in \mathbb{R}, \quad x > ٤\} \cup \{x : x \in \mathbb{R}, \quad x < -١\}$$

مثال (٣-١٢):

حل المتراجحة التالية:

$$\frac{٢\square + ٣}{x - ١} < ٢$$

الحل: إن:

$$\frac{٢\square + ٣}{x - ١} - ٢ < ٠$$

نكتبها بالشكل التالي:

$$\frac{٢\square + ٣}{x - ١} - ٢\frac{x - ١}{x - ١} < ٠ \Rightarrow \frac{٢\square + ٣}{x - ١} - \frac{٢\square - ٢}{x - ١} < ٠ \Rightarrow \frac{٢\square + ٣ - ٢\square + ٢}{x - ١} < ٠ \Rightarrow \frac{٥}{x - ١} < ٠$$

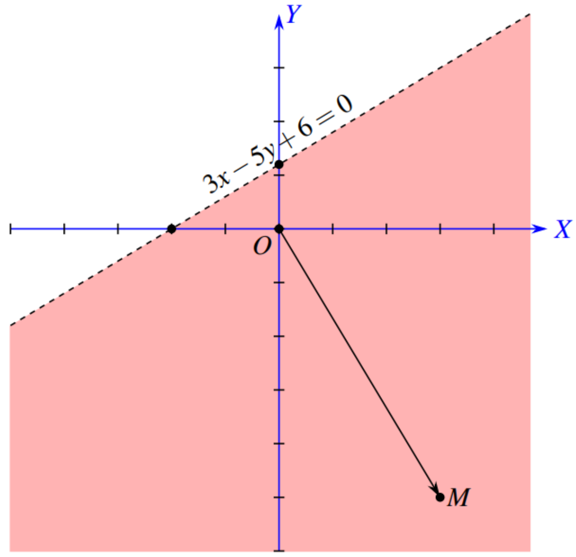
وحيث إن صورة الكسر موجبة دوماً إذن يجب أن يكون مقامه سالباً، أي أن يكون $x - ١ < ٠$، إذن إن أية قيمة لـ x تنتمي إلى المجال $]-\infty, ١[$ هو حل للمتراجحة المطلوبة.

مثال (٣-١٣):

أوجد في $\mathbb{R}^{٢}$ منطقة حلول المتراجحة التالية: $٣\square - ٥\square + ٦ > ٠$.

الحل:

لنرسم المستقيم الذي معادلته: $٣x - ٥y + ٦ = ٠$، ولنرسم الشعاع $\overrightarrow{OM}$ الذي مبدؤه مبدأ الإحداثيات: $O(٠,٠)$ ونهايته النقطة $M(٣,-٥)$، فيكون اتجاه الشعاع $\overrightarrow{OM}$ هو المؤشر على مكان المنطقة الموجبة التي تحقق المتراجحة المفروضة حيث نقوم بتظليل هذه المنطقة ونرسم المستقيم منقطا للدلالة على أنه ليس من منطقة الحل.



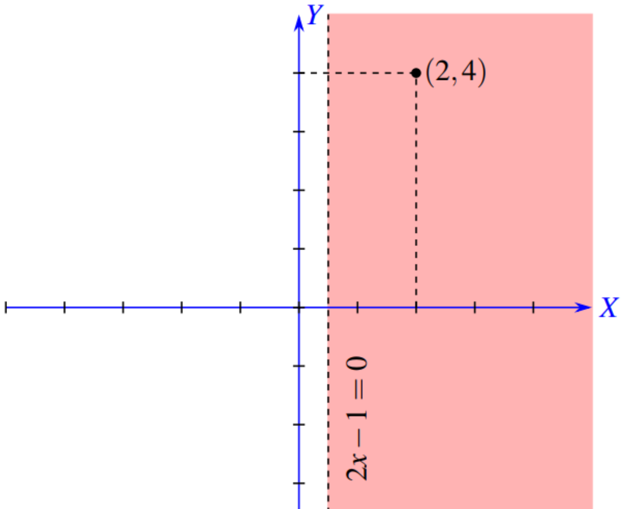
الشكل (٣-٧): حل المتراجحة $3x - 5y + 6 > 0$.

مثال (٣-١٤):

أوجد في $\mathbb{R}^٢$ منطقة حلول المتراجحة $٢x - ١ > ٠$.

الحل:

إن المستقيم الذي معادلته $٢x - ١ = ٠$ هو كما في الشكل (٣-٨)، فإذا أخذنا على أحد جانبي هذا المستقيم النقطة $(٢,٤)$ لوجدنا أن المتراجحة محققة إذاً فالجانب الذي يحوي هذه النقطة هو منطقة حلول هذه المتراجحة (إن الجانب المظلل هو الجانب الذي يحوي أي حل لهذه المتراجحة).



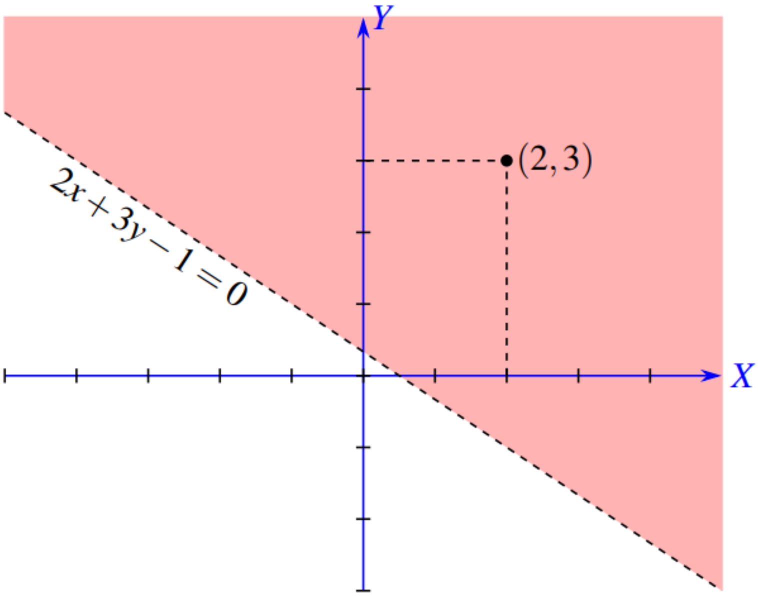
الشكل (٣-٨): حل المتراجحة $2x - 1 > 0$.

مثال (٣-١٥):

يطلب إيجاد منطقة حلول المتراجحة التالية: ٢□ + ٣□ − ١ > ٠.

الحل:

لنرسم المستقيم الذي معادلته ٢□ + ٣□ − ١ = ٠، كما في الشكل التالي:



الشكل (٣-٩): حل المتراجحة $2x + 3y - 1 > 0$.

لنلاحظ أنه وبعد رسم هذا المستقيم، تم تقسيم المستوي إلى قسمين.

لنأخذ نقطة ما ولتكن (٢,٣) وذلك للتعرف على القسم الذي يحقق المتراجحة بالتبديل في المتراجحة نجد أن:

٢ × ٢ + ٣ × ٣ − ١ > ٠ ⟹ ١٢ > ٠

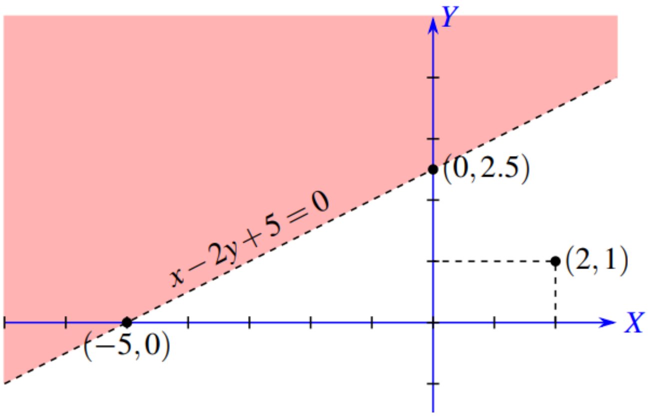
إذاً فالمتراجحة محققة، وبالتالي فإن الجزء الذي يحقق هذه المتراجحة هو الجزء المظلل.

مثال (٣-١٦):

يطلب إيجاد منطقة حلول المتراجحة التالية: x − ٢□ + ٥ < ٠.

الحل:

بأسلوب المثال السابق نفسه نجد أن المستقيم الذي معادلته x − ٢□ + ٥ = ٠ هو الوارد في الشكل أدناه وإذا ما أخذنا نقطة ولتكن النقطة (٢,١) لوجدنا أن الجزء الذي يحوي هذه النقطة لا يحقق هذه المتراجحة، أي أن: ٢ − ٢ × ١ + ٥ < ٠ غير محققة، إذاً فمجموعة النقاط المحققة للمتراجحة هي الواقعة في الجزء المظلل.



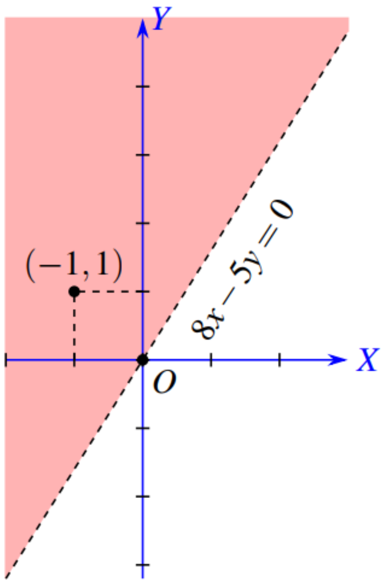
الشكل (٣-١٠): حل المتراجحة $x - 2y + 5 < 0$.

مثال (٣-١٧):

أوجد منطقة حلول المتراجحة التالية: ٠ > ٥□ − ٨□.

الحل:

لنرسم المستقيم الذي معادلته ٠ = ٥□ − ٨□ وميله ٨/٥ كما في الشكل أدناه والذي هو مستقيم مار بمبدأ الإحداثيات (٠,٠)، لنأخذ نقطة ما في أحد جانبي المستقيم ولتكن النقطة (−١,١) ونتحقق من صحة المتراجحة: ٠ > ٥ − ٨−، إذاً إن هذه النقطة تحقق المتراجحة، وبالتالي فجميع نقاط المستوي الواقعة في الجزء الذي يحوي هذه النقطة يحقق المتراجحة (أي الجزء المظلل يحقق هذه المتراجحة).



الشكل (٣-١١): حل المتراجحة $8x - 5y < 0$.

مثال (٣-١٨):

لنفرض أن لدينا معادلة المستقيم التالي: ٠ = ٣ + ٤□ − ٥□، إن القوة التحليلية للنقطة M_1(٧,٣) بالنسبة للمستقيم هي:

٥ × ٧ − ٤ × ٣ + ٣ = ٢٦ = A_1.

أما القوة التحليلية للنقطة M_2(−٣,−٣) بالنسبة للمستقيم المفروض فهي:

$$٥ \times (-٣) - ٤ \times (-٣) + ٣ = ٠ = A_{٠}$$

كما وأن النقطة $M_{٢}(٢,٥)$ بالنسبة للمستقيم المفروض هي:

$$٥ \times ٢ - ٤ \times ٥ + ٣ = -٧ = A_{٠}$$

مما سبق نلاحظ أنه يمكن أن تكون القوة التحليلية إما موجبة أو معدومة أوسالبة وذلك حسب إحداثيات النقطة المتعلقة بها وحسب إشارة القيمة العددية فقط بالنسبة لهذه القوة والذي يكون عائداً لوضع النقطة في أحد نصفي المستوي المقسوم من خلال المستقيم المعطى لدينا.

ويمكن القول إن إشارات القوة التحليلية في أحد نصفي المستوي تكون واحدة وذلك مهما تكن إحداثيات النقطة الواقعة في نصف المستوي المذكور.

وبالعودة إلى المتراجحة $ax + by + c > ٠$ فنجد أنه تحققها تماماً يكون بالنسبة لجميع النقاط التي تكون فيها القوة التحليلية بالنسبة للمستقيم $ax + by + c = ٠$ موجبة.

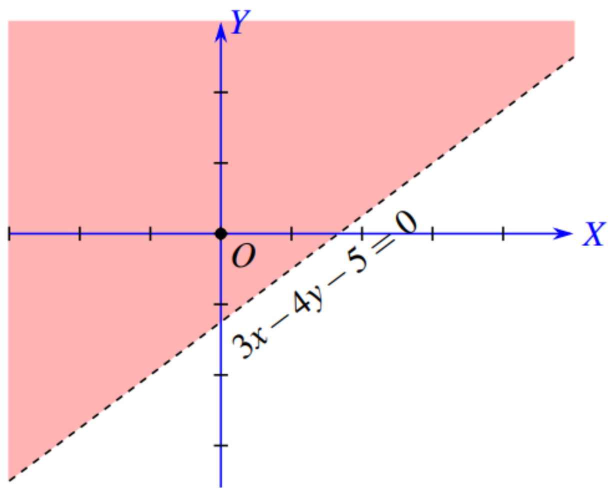
والخلاصة:

للتعرف على المنطقة التي تكون فيها المتراجحة الخطية ذات المجهولين محققة، ما علينا إلا تطبيق النقطة $M_{٠}(x_{٠}, y_{٠})$ في معادلة المستقيم الممثل للطرف الأيسر لهذه المتراجحة والتعرف على القوة التحليلية لهذه النقطة بالنسبة للمستقيم.

مثال (٣-١٩):

أوجد حلول المتراجحة التالية: $٣□ - ٤□ - ٥ < ٠$.

الحل:



الشكل (٣-١٢): حل المتراجحة $3x - 4y - 5 < 0$.

لنكتبها بالشكل التالي: $٠ > ٥ + ٣□ - ٤□$، لنرسم المستقيم الذي معادلته: $٠ = ٥ + ٣□ - ٤□$، ولنأخذ النقطة $M_{٠}(x_{٠}, y_{٠}) = (٠,٠)$ في المستوي والتي لا تقع على المستقيم المعطى فنجد أن:

$$A_{٠} = ٠ - ٠ + ٥ = ٥ > ٠$$

وهي تحقق المتراجحة، إذاً فالمنطقة المظللة هي المنطقة التي تحقق المتراجحة المطلوبة.

٣-٢-٦ حل جملة متراجحات خطية بمجهولين:

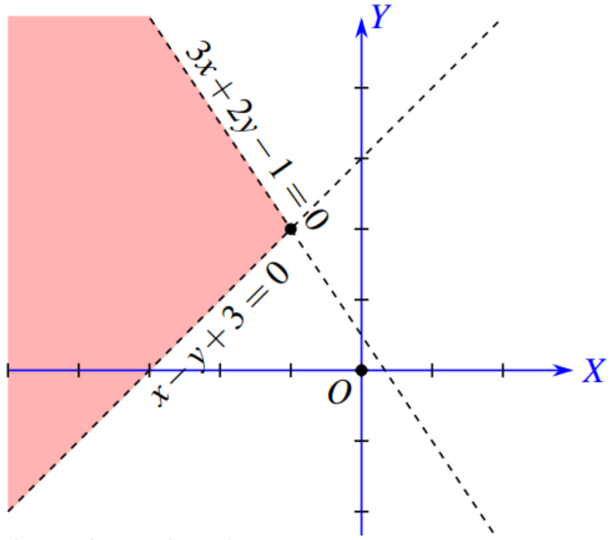
لا تختلف عملية إيجاد منطقة حل عدة متراجحات خطية بعدة مجاهيل عن حل المتراجحة الخطية بمجهولين وأن التوصل للحل يكون بالتعرف على منطقة حل كل متراجحة وحدها، ثم إيجاد المنطقة المشتركة لجملة المتراجحات.

مثال (٣-٢٠):

يطلب إيجاد منطقة حلول المتراجحتين التاليتين: $\begin{cases} ٣x + ٢y - ١ < ٠ \\ x - y + ٣ < ٠ \end{cases}$.

الحل:

لنرسم المستقيمين في مستوي الإحداثيات XOY: $\begin{cases} ٣x + ٢y - ١ = ٠ \\ x - y + ٣ = ٠ \end{cases}$.



الشكل (٣-١٣): حل المتراجحتين $\begin{cases} \mathbf{3x + 2y - 1 < 0} \\ \mathbf{x - y + 3 < 0} \end{cases}$.

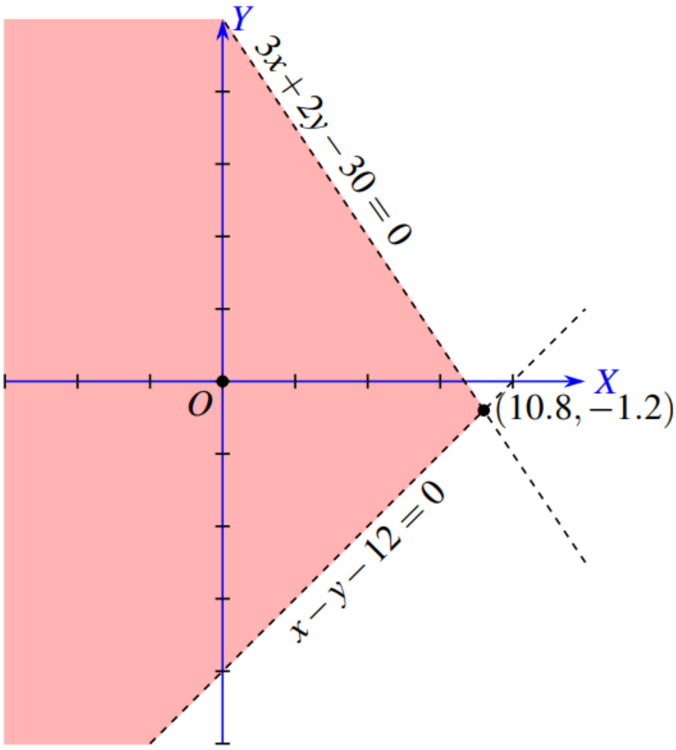
ولنحدد مناطق حلول كل من المتراجحتين، ونقوم بتظليل الأجزاء التي تحقق كلاً من المتراجحتين فنحصل على المنطقة المشتركة لجملة المتراجحتين.

مثال (٣-٢١):

أوجد منطقة حلول المتراجحتين التاليتين معاً: $\begin{cases} ٣x + ٢y - ٣٠ < ٠ \\ x - y - ١٢ < ٠ \end{cases}$.

الحل:

لنرسم في مستوى الإحداثيات XOY المستقيمين: $\begin{cases} ٣x + ٢y - ٣٠ = ٠ \\ x - y - ١٢ = ٠ \end{cases}$.



الشكل (٣-١٤): حل المتراجحتين $\begin{cases} 3x + 2y - 30 < 0 \\ x - y - 12 < 0 \end{cases}$.

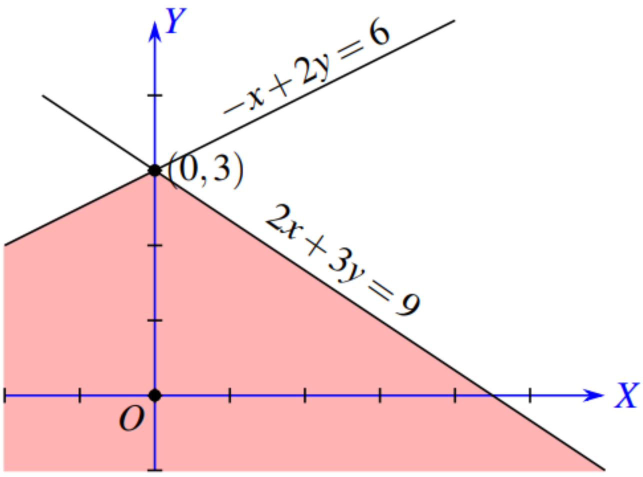
لنحدد منطقة الحل المشترك لكلتا المتراجحتين، حيث نظلل الأجزاء التي تحقق كلاً من المتراجحتين فنحصل على المنطقة المشتركة لجملة المتراجحتين.

مثال (٣-٢٢):

أوجد منطقة الحل المشترك لجملة المتراجحتين التاليتين: $\begin{cases} 2x + 3y \leq 9 \\ -x + 2y \leq 6 \end{cases}$.

الحل:

إن المستقيمين الموافقين للمعادلتين: $\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ -x + 2y = 6 \end{cases}$، هما كما في الشكل أدناه، أما المناطق التي تحقق هاتين المتراجحتين فهي كما في الشكل المذكور، حيث نجد أن منطقة الحل المشرك هي القسم المظلل مع المستقيمين.



الشكل (٣-١٥): حل المتراجحتين $\begin{cases} 2x + 3y \leq 9 \\ -x + 2y \leq 6 \end{cases}$.

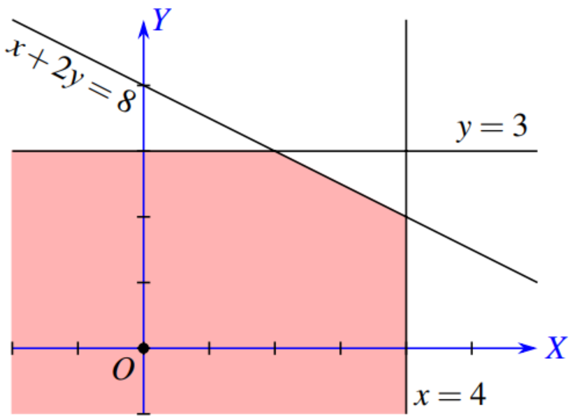
مثال (٣-٢٣):

أوجد منطقة الحل المشترك لجملة المتراجحات التالية: $\begin{cases} x \le ٤ \\ y \le ٣ \\ x + ٢y \le ٨ \end{cases}$.

الحل:

لنرسم في مستوي الإحداثيات XOY المستقيمات التالية: $\begin{cases} x = ٤ \\ y = ٣ \\ x + ٢y = ٨ \end{cases}$.

لنحدد المناطق التي تحقق المتراجحات السابقة. بعدها نوجد منطقة الحل المشترك حيث نستبعد الجزء غير المظلل الذي لا يحقق هذه المتراجحات.



الشكل (٣-١٦): حل المتراجحات: $\begin{cases} \boldsymbol{x \le 4} \\ \boldsymbol{y \le 3} \\ \boldsymbol{x + 2y \le 8} \end{cases}$.

مثال (٣-٢٤):

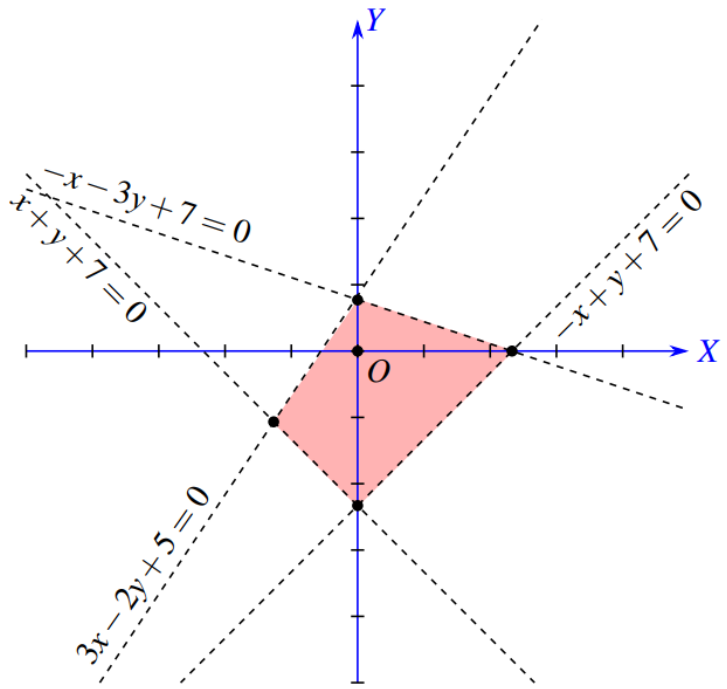
أوجد حل جملة المتراجحات الخطية التالية: $\begin{cases} ٣x - ٢y + ٥ > ٠ \\ x + y + ٧ > ٠ \\ -x + y + ٧ > ٠ \\ -x - ٣y + ٧ > ٠ \end{cases}$.

الحل:

لنرسم في مستوي الإحداثيات XOY المستقيم الموافق لكل معادلة من المعادلات التي تمثلها المتراجحات السابقة: $\begin{cases} ٣x - ٢y + ٥ = ٠ \\ x + y + ٧ = ٠ \\ -x + y + ٧ = ٠ \\ -x - ٣y + ٧ = ٠ \end{cases}$، ثم لنحدد بالنسبة لكل متراجحة منطقة القبول (الموافقة) لتلك المتراجحة.

فنجد أن المنطقة المظللة المشتركة بالنسبة لجميع المتراجحات هي المنطقة المقبولة والتي تمثل حل جملة المتراجحات السابقة.

نلاحظ أن جميع المتراجحات تحقق نقطة المبدأ $O(٠,٠)$، فاتجاه التراجح نحوها.



الشكل (٣-١٧): حل المتراجحات: $\begin{cases} 3x - 2y + 5 > 0 \\ x + y + 7 > 0 \\ -x + y + 7 > 0 \\ -x - 3y + 7 > 0 \end{cases}$.

٣-٣ المعادلات الجذرية (الصماء):

هي معادلات بعض حدودها (أو كل حدودها) موضوعة تحت إشارة الجذر.

مثال على ذلك: المعادلة الصماء التالية: $\sqrt{x} - \sqrt{x + ٣} + \sqrt{٥x - ٢} = \sqrt{x + ١}$.

ولإيجاد حلولها نحاول التخلص من الجذور وذلك لإعادتها إلى أحد الأشكال السابقة من المعادلات.

مثال (٣-٢٥):

أوجد جذور المعادلة الصماء التالية: $\sqrt{x} - \sqrt{x + ٣} = \sqrt{x - ٥}$.

الحل: نربع الطرفين فنجد أن:

$$x - ٢\sqrt{x(x + ٣)} + (x + ٣) = x - ٥ \Leftrightarrow ٢\sqrt{x(x + ٣)} = x + ٨ \Rightarrow$$
$$٤x(x + ٣) = x^٢ + ١٦x + ٦٤ \Leftrightarrow ٣x^٢ - ٤x - ٦٤ = ٠$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية يمكن إيجاد جذورها وهي: $x = -٤$ و $x = ١٦/٣$.

وهذه الجذور هي جذور للمعادلة الناتجة عن المعادلة الصماء فيمكن لهذه الجذور أن تحقق المعادلة الصماء ويمكن لا، نختار من هذه الجذور الجذور المنتمية إلى مجموعة تعريف المعادلة وهنا ٤− مرفوض (المعادلة الأصلية غير معرفة عنده) والجذر الوحيد للمعادلة هو ١٦/٣.

ملاحظة هامة:

ليست جميع القيم الناتجة عن حل المعادلة الصماء هي حلول للمعادلة الصماء، (وهذا ناتج عن تربيع الطرفين الذي بموجبه يتم تغيير الإشارات السالبة إن وجدت) ولتحديد حلول المعادلة الصماء يجب التحقق

من حلول المعادلة الناتجة عن المعادلة الصماء فإذا عدنا إلى المثال السابق وأردنا معرفة حلول المعادلة الصماء لوجدنا أنه من أجل $x = ١٦/٣$ نجد وبالتبديل في المعادلة الصماء:

$$\sqrt{١٦/٣} - \sqrt{١٦/٣ + ٣} = \sqrt{١٦/٣ - ٥}$$

وهذه القيمة غير محققة للمعادلة الصماء فهي ليست حلاً.

من أجل $x = -٤$ نجد وبالتبديل في المعادلة الصماء:

$$\sqrt{-٤} - \sqrt{-٤ + ٣} = \sqrt{-٤ - ٥}$$

إذاً $x = -٤$ غير محقق للمعادلة فهو ليس حلاً.

ملاحظة:

ويمكن أولاً الحديث عن مجموعة تعريف كل الجذور الواردة في المعادلة قبل البدء بالحل وهي:

$$x \geq ٠, \qquad x \geq -٣, \qquad x \geq ٥ \Longrightarrow x \in [٥, \infty[$$ هي مجموعة التعريف

وبالتالي الحل $x = -٤$ فوراً مرفوض وكذلك $x = ١٦/٣$ مرفوض لأنهما أصغر من ٥.

مثال (٣-٢٦):

حل المعادلة التالية: $\sqrt{٣x} - \sqrt{٣x - ٥} = ١$.

الحل:

$$٣x + ٣x - ٥ - ٢\sqrt{٣x(٣x - ٥)} = ١ \Leftrightarrow ٢\sqrt{٣x(٣x - ٥)} = ٦(x - ١) \Leftrightarrow$$
$$٣٦x^{٢} + ٣٦ - ٧٢x = ٣٦x^{٢} - ٦٠x \Leftrightarrow ١٢x = ٣٦ \Leftrightarrow x = ٣$$
$$\sqrt{٩} - \sqrt{٩ - ٥} = ١ \Leftrightarrow ٣ - ٢ = ١$$

وهي محققة.

٣-٤ معادلات القيمة المطلقة وحلها:

هي معادلات بعض حدودها الحاوية لـ x (أو كل حدودها) موضوعة داخل رمز القيمة المطلقة. عادة نلجأ لحل هذا النوع من المعادلات إلى تعريف القيمة المطلقة وأحيانا إلى خواصها، الأمر الذي ينتج عنه معادلات من الأشكال السابقة (ليس من الضروري، في الحالة العامة، أن تكون المعادلة الناتجة من الدرجة الأولى).

مثال (٣-٢٧):

أوجد حل المعادلة التالية: $|٥ - ٢x| = |٧ - ٩x|$.

الحل:

حسب التعريف: إما $٥ - ٢x = ٧ - ٩x$ ومنه $x = ٢/٧$، وإما $٢x - ٥ = ٧ - ٩x$ ومنه $x = ١٢/١١$.

مثال (٣-٢٨):

أوجد حل المعادلة التالية: $|٥ + ٣x| = |٧ + ٤x|$.

الحل:

إما: $٤x + ٧ = ٣x + ٥ \Rightarrow ٤x - ٣x = ٥ - ٧ \Rightarrow x = -٢$

أو $٤x + ٧ = -٣x - ٥ \Rightarrow ٤x + ٣x = -٥ - ٧ \Rightarrow ٧x = -١٢ \Rightarrow x = -\frac{١٢}{٧}$

مثال (٣-٢٩):

أوجد حل المعادلة التالية: $|٤x + ٧| = |٥x - ٥|$.

الحل:

إما : $٤x + ٧ = ٥x - ٥ \Rightarrow ٧ + ٥ = ٥x - ٤x \Rightarrow x = ١٢$

أو $٤x + ٧ = -٥x + ٥ \Rightarrow ٤x + ٥x = ٥ - ٧ \Rightarrow ٩x = -٢ \Rightarrow x = -\frac{٢}{٩}$

٣-٥ المعادلات الأسية وحلها:

هي معادلات يكون فيها المجهول فيها ضمن قوة أو أكثر وأما الأساس فيكون ثابتاً. كما في معادلات الدرجة الأولى أو الثانية ... الخ. عادة نلجأ لحل هذا النوع من المعادلات لتعريف القوى ولخواصها، الأمر الذي ينتج عنه معادلات من الأشكال السابقة.

مثال (٣-٣٠):

أوجد حل المعادلة التالية: $\frac{e^{٥x-٣}}{e^{٢x+١}} = ١$.

الحل: طريقة أولى:

جداء الطرفين يساوي جداء الوسطين فنجد أن: $e^{٥x-٣} = e^{٢x+١}$، وكون أن الأساسات متساوية نستنتج أن القوى متساوية $٥x - ٣ = ٢x + ١$ وهي معادلة درجة أولى وحلها هو $x = ٤/٣$.

طريقة ثانية:

نطبق خواص القوى فنجد أن: $e^{٥x-٣-٢x-١} = e^{٠}$، أي أن $٣x - ٤ = ٠$ ومنه $x = ٤/٣$.

مثال (٣-٣١):

أوجد حل المعادلة التالية: $\frac{٢^{٤x+٢}}{٨^{٣x+٤}} = ١$.

الحل:

$$\frac{٢^{٤x+٢}}{٨^{٣x+٤}} = ١ \Rightarrow ٢^{٤x+٢} \times ٢^{٣(-٣x-٤)} = ٢^{٠} \Rightarrow ٢^{٤x+٢} \times ٢^{-٩x-١٢} = ٢^{٠} \Rightarrow ٢^{-٥x-١٠} = ٢^{٠}$$
$$\Rightarrow -٥x - ١٠ = ٠ \Rightarrow ٥x = -١٠ \Rightarrow x = -١٠/٥ = -٢$$

مثال (٣-٣٢):

أوجد حل المعادلة التالية: $\frac{٤^{٤x+٦}}{٢^{٦x+٤}} = ١$.

الحل:

$$\frac{(٢^{٢})^{٤x+٦}}{٢^{٦x+٤}} = ١ \Rightarrow \frac{٢^{٨x+١٢}}{٢^{٦x+٤}} = ١ \Rightarrow ٢^{٨x+١٢} = ٢^{٦x+٤} \Rightarrow ٨x + ١٢ = ٦x + ٤ \Rightarrow$$

$$٨x - ٦x = ٤ - ١٢ \Rightarrow ٢x = -٨ \Rightarrow x = -٤$$

٣-٦ المعادلات اللوغاريتمية وحلها:

هي معادلات يكون المجهول داخل اللوغاريتم (أي كمضمون للوغاريتم) الأمر الذي ينتج عنه معادلة درجة أولى أو درجة أخرى.

مثال (٣-٣٣):

أوجد حل المعادلة التالية: $\log x - \log ٣ = \log ٥$

الحل:

مجموعة الحل هي $x > ٠$، نطبق خواص اللوغاريتم فينتج أن:

$$\log x = \log ٣ + \log ٥$$

أي أن:

$$\log x = \log(٣ \times ٥) = \log ١٥$$

وبالانتقال إلى المضامين نستنتج أن: $x = ١٥$.

مثال (٣-٣٤):

أوجد حل المعادلة التالية: $٢ \log x = \log(٧x + ٨)$.

الحل:

مجموعة الحل هي: $x > ٠$ و $٧x + ٨ > ٠ \Leftrightarrow x > -٨/٧ \Leftarrow x \in]٠, \infty[$.

$$٢ \log x = \log(٧x + ٨) \Rightarrow \log x^{٢} = \log(٧x + ٨) \Rightarrow x^{٢} = ٧x + ٨ \Rightarrow x^{٢} - ٧x - ٨ = ٠$$

$\Rightarrow (x - ٨)(x + ١) = ٠ \Rightarrow x = ٨$ مقبول أو $x = -١$ مرفوض

مثال (٣-٣٥):

أوجد حل المعادلة التالية: $٤ \log \sqrt{x} = \log(٥x + ٦)$.

الحل:

مجموعة الحل هي: $x > ٠$ و $٥x + ٦ > ٠ \Leftrightarrow x > -٦/٥ \Leftarrow x \in]٠, \infty[$.

$$٤ \log \sqrt{x} = \log(٥x + ٦) \Rightarrow \log\left(\sqrt{x}\right)^{٤} = \log(٥x + ٦) \Rightarrow \log x^{٤/٢} = \log(٥x + ٦) \Rightarrow$$
$$\log x^{٢} = \log(٥x + ٦) \Rightarrow x^{٢} = ٥x + ٦ \Rightarrow x^{٢} - ٥x - ٦ = ٠$$

نحلها باستخدام المميز Δ:

$$\Delta = b^{٢} - ٤ac \Rightarrow \Delta = (-٥)^{٢} - ٤(١)(-٦) = ٢٥ + ٢٤ = ٤٩ \Rightarrow \sqrt{\Delta} = ٧$$

إما:

$$x_{١} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{٢a} = \frac{-(-٥) - ٧}{٢} = \frac{٥ - ٧}{٢} = -\frac{٢}{٢} = -١$$

مرفوض لأنه لا يوجد لوغاريتم للعدد السالب.

أو:

$$x_{٢} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{٢a} = \frac{-(-٥) + ٧}{٢} = \frac{٥ + ٧}{٢} = \frac{١٢}{٢} = ٦$$

مقبول.

٣-٧ تمارين عامة محلولة:

❁ $\log x - ١ = \log ٢ \Longrightarrow \log x = \log ١٠ + \log ٢ = \log ٢٠ \Longrightarrow x = ٢٠$

❁ $٢\log x = \log(٢x + ٣) \Longrightarrow \log x^{٢} = \log(٢x + ٣) \Longrightarrow x^{٢} = ٢x + ٣ \Longrightarrow$

$x^{٢} - ٢x - ٣ = ٠ \Leftrightarrow x = -١$ مرفوض & $x = ٣$ مقبول

❁ $٢\log x = \log(x + ٢) \Longrightarrow \log x^{٢} = \log(x + ٢) \Longrightarrow x^{٢} = x + ٢ \Longrightarrow$

$x^{٢} - x - ٢ = ٠ \Longrightarrow x = -١$ مرفوض & $x = ٢$ مقبول

❁ $\frac{e^{٣x-٢}}{e^{x+٥}} = ١ \Longrightarrow \text{Method } ١ \Longrightarrow e^{٣x-٢} = e^{x+٥} \Longrightarrow ٣x - ٢ = x + ٥ \Longrightarrow x = \frac{٧}{٢}$

$\text{Method } ٢ \Longrightarrow e^{٣x-٢} \cdot e^{-x-٥} = ١ \Longrightarrow e^{٢x-٧} = e^{٠} \Longrightarrow ٢x - ٧ = ٠ \Longrightarrow x = \frac{٧}{٢}$

❁ $\frac{٣^{٣x-٢}}{٩^{٢x+٥}} = ٣^{٥x-٢} \Longrightarrow ٣^{٣x-٢} \cdot ٣^{-٤x-١٠} = ٣^{٥x-٢} \Longrightarrow ٣^{-x-١٢} = ٣^{٥x-٢} \Longrightarrow$

$-x - ١٢ = ٥x - ٢ \Longrightarrow ٦x = -١٠ \Longrightarrow x = -٥/٣$

❁ $|٣x - ٢| = ٥ \Longrightarrow \begin{cases} ٣x - ٢ = ٥ \Longrightarrow x = ٧/٣ \\ ٣x - ٢ = -٥ \Longrightarrow x = -١ \end{cases}$

❁ $|٥x + ٤| = ١٠ \Longrightarrow \begin{cases} ٥x + ٤ = ١٠ \Longrightarrow x = ٦/٥ \\ ٥x + ٤ = -١٠ \Longrightarrow x = -١٤/٥ \end{cases}$

❁ $|٣x + ٢| = |٢x - ١| \Longrightarrow \begin{cases} ٣x + ٢ = ٢x - ١ \Longrightarrow x = -٣ \\ ٣x + ٢ = -٢x + ١ \Longrightarrow x = -١/٥ \end{cases}$

❁ $|٤x - ٣| = |٢x + ٥| \Longrightarrow \begin{cases} ٤x - ٣ = ٢x + ٥ \Longrightarrow x = ٤ \\ ٤x - ٣ = -٢x - ٥ \Longrightarrow x = -١/٣ \end{cases}$

٣-٨ تمارين ومسائل:

١- أوجد مجال حلول المتراجحات التالية:

$(i) \quad \frac{(٣x + ١)(٢x^{٢} - ٢x + ١)}{(x - ٢)(x^{٢} + ٣x + ٢)} \geq ٠, \qquad (ii) \quad \frac{٢x + ١}{٣x - ٥} - \frac{x - ٣}{٢x - ١} \geq \frac{٧x}{٣x + ١}$

$(iii) \quad \frac{٢x - ٥}{٢x + ١} + \frac{x}{٣x - ٧} < \frac{١٠x}{٢x - ٣}, \qquad (iv) \quad \frac{x - ١}{٣x - ٥} - \frac{٣x + ١}{٢x - ٥} \geq \frac{٥x - ٢}{x + ١}$

٢- أوجد منطقة حلول كل من المتراجحات التالية:

$(i) \quad ٣x - ٤y > ٧, \qquad (ii) \quad x + y \leq ١, \qquad (iii) \quad ٣x - ٢y > -٣$

$(iv) \quad x - ٥y \leq ١, \qquad (v) \quad x + ٣y > -٢$

٣- أوجد منطقة حلول كلٍ من جملة المتراجحات التالية:

$\begin{cases} y + ٢x < ٥ \\ x - y \geq ١ \\ y = ٣ \end{cases}, \quad \begin{cases} ٣x + y \leq ١ \\ x + ٢y > ١ \\ y > ١ \end{cases}, \quad \begin{cases} ٧x - ٣y > ١ \\ ٢x + ٥y \leq ١ \\ y = ٢ \end{cases}, \quad \begin{cases} x - ٢y > ٧ \\ ٢x + ٢y \leq ١٠ \\ x > ١ \end{cases}$

٤- أوجد منطقة حلول كلٍ من جملة المتراجحات التالية:

$$\begin{cases} ٣x^٢ - y + ٥ > ٠ \\ x^٢ + ٢y^٢ - ١ < ٠ \\ x^٢ + y^٢ - ١ < ٠ \end{cases}, \quad \begin{cases} ٥x^٢ + y - ١ < ٠ \\ x^٢ + ٢\square - y + ٥ > ٠ \\ -x^٢ - y^٢ + ٤ > ٠ \end{cases}, \quad \begin{cases} y - x^٢ + ٣\square + ٢ < ٠ \\ ٢\square + x^٢ + ٥ > ٠ \\ x^٢ + y^٢ - ٩ < ٠ \end{cases}$$

٥- حل كلاً من المتراجحات التالية:

$$(i) \quad ٥x^٢ - ٦\square - ٧ < ٠, \qquad (ii) \quad ٥x^٢ - ٣\square + ٤ < ٠, \qquad (iii) \quad ٣x^٢ - ٥\square + ٢ > ٠$$
$$(iv) \quad x^٢ - ٤\square + ٤ > ٠, \qquad (v) \quad (x-١)(x-٢)(x-٣)(x-٤) > ٣(x-٣)(x-٤)$$
$$(vi) \quad \frac{x^٢ - ٣\square + ٢}{x^٢ + ٣\square + ٢} > ٠$$

٦- يطلب حل كل من المتراجحات التالية:

$$(a) \quad \frac{x+١}{٢-x} > ٠, \qquad (b) \quad (٣\square + ٢) - (x - ٢) > ٠, \qquad (c) \quad (x-٢)^٢ - (٢\square - ٣)^٢ > ٠,$$
$$(d) \quad x^٢ + x + ١ > ٠, \qquad (e) \quad \frac{x^٢ - ٣\square + ٢}{٣x^٢ + ٤\square + ١} \geq ٠, \qquad (f) \quad \frac{٣x^٢ - ٣\square + ٢}{٤x^٢ + ٥\square + ١} \geq ٠,$$
$$(g) \quad \frac{x^٢ - x + ١}{-x^٢ + ٢\square - ٢} < ٠, \qquad (h) \quad -\frac{x^٢}{٢} - \frac{x}{٣} \geq \frac{x}{٢} - \frac{٢}{٣}$$

٧- أوجد منطقة الحل المشترك لكل من جمل المتراجحات التالية:

$$\begin{cases} ٢\square - ٢\square < ٨ \\ ٣\square < ٣ \\ ٦\square + ٤\square < ١٢ \\ x + y \leq -3 \end{cases}, \qquad \begin{cases} -x + y > ١ \\ x + y > ١ \\ x - y \leq -٤ \end{cases}$$

٨- حل كلاً من المعادلات التالية:

$$(i) \quad |٥\square - ٧| = |٢\square - ٥|, \qquad (ii) \quad |٥\square + ٧| = |٣\square - ٥|, \qquad (iii) \quad |٤\square + ٧| = |٥\square - ٥|,$$
$$(iv) \quad |٤\square - ٣| = |٣\square + ٤|, \qquad (v) \quad |٢\square + ٧| = |٥\square - ١|, \qquad (vi) \quad |٥\square + ٣| = |٦\square - ٥|,$$
$$(vii) \quad |٤\square + ٥| = |x - ٥|, \qquad (viii) \quad |٤\square + ٧| = |٣\square + ٥|, \qquad (ix) \quad |٣\square + ٤| = |٢\square - ٦|$$

٩- حل كلاً من المعادلات التالية:

$$(i) \quad \frac{٩^{٤\square+٦}}{٣^{٦\square+٤}} = ١, \qquad (ii) \quad \frac{٢^{٤\square+٢}}{٨^{٣\square+٤}} = ١, \qquad (iii) \quad \frac{٣^{٤\square+٢}}{٩^{x+٤}} = ١, \qquad (iv) \quad \frac{٣^{٤\square+٣}}{٩^{x+٤}} = ١,$$
$$(v) \quad \frac{٤^{٤\square+٦}}{٢^{٦\square+٤}} = ١, \qquad (vi) \quad \frac{e^{٢\square-٣}}{e^{x+١}} = ١, \qquad (vii) \quad \frac{٣^{٣\square+٢}}{٩^{x+٤}} = ١, \qquad (viii) \quad \frac{٢^{٣\square+٢}}{٤^{٢\square+٤}} = ١,$$
$$(ix) \quad \frac{٩^{٤\square+٢}}{٣^{٥\square-٤}} = ١$$

١٠- حل كلاً من المعادلات التالية:

$$(i) \quad ٢\log x = \log(٧\square + ٨), \qquad (ii) \quad ٤\log\sqrt{x} = \log(٦\square - ٥),$$

$(iii)\quad ٤\log\sqrt{x} = \log(٧\square - ٦)$, $(iv)\quad ٢\log x = \log(٥\square - ٦)$,

$(v)\quad ٢\log x = \log(٧\square + ٨)$, $(vi)\quad ٢\log ١٢٥ - ٣\log x = ٣$,

$(vii)\quad ٢\log x = \log(٩\square + ١٠)$, $(viii)\quad ٢\log x = \log(٥\square + ٦)$,

$(ix)\quad ٤\log\sqrt{x} = \log(٥\square + ٦)$

الفصل الرابع: المتتاليات (المتواليات) العددية

تعريف:

نسمي أي تسلسل (ترتيب) لمجموعة من الأعداد الحقيقية منتهية $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots, a_m$ متتالية حقيقية منتهية عدد حدودها m حدها الأول a_1 وحدها الأخير a_m ونسمي المجموعة $\{1, 2, \cdots, m\}$ منطلق هذه المتتالية. أما إذا كان التسلسل لمجموعة غير منتهية:

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

فنسميه متتالية حقيقية غير منتهية أو اختصاراً متتالية ومنطلقها في هذه الحالة هي المجموعة:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$$

في كلا الحالتين، نسمي الصيغة العامة لـ a_n (التي من خلالها نستطيع تعيين أي حد للمتتالية) الحد العام أو الحد النوني للمتتالية ونسمي n رتبة الحد a_n.

فعلى سبيل المثال فإن التسلسل: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ متتالية حدها الأول ١ وحدها العام $a_n = 1/n$ ومنطلقها $\mathbb{N}^*$.

في هذا الفصل سنتعرف على متتاليين هامتين جداً هما المتتالية الحسابية والمتتالية الهندسية.

٤-١ المتتالية الحسابية:

وهي متتالية ينتج كل حد فيها عن سابقه بإضافة عدد ثابت، يرمز له عادة r ونسميه أساس هذه المتتالية الحسابية، فإذا كان الحد العام لهذا المتتالية a_n فإن $a_n = a_{n-1} + r$ وذلك لأجل كل n من منطلق هذه المتتالية. بالنتيجة فإن حدها العام يعطى بالمساواة:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

من الواضح أن الحد العام يتبع لثلاثة مجاهيل هي الحد الأول a_1 وأساسها r والرتبة n لهذا الحد.

لنلاحظ أن:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_n - a_{n-1} = r$$

٤-١-١ أنواع المتتاليات الحسابية:

نميز نوعين من المتتاليات الحسابية:

١- **متتالية حسابية متزايدة:** إذا كان أساس المتتالية أكبر من الصفر (موجباً).

٢- **متتالية حسابية متناقصة:** إذا كان أساس المتتالية أصغر من الصفر (سالباً).

أمثلة:

$$(\text{متزايدة}) \qquad 2, 4, 6, 8, 10, 12, \cdots$$

$$(\text{متناقصة}) \qquad -3, -5, -7, -9, -11, -13, \cdots$$

٤-١-٢ الحد العام:

يعطى الحد العام (النوني) الذي رتبته n بالدستور:

$$a_n = a + (n - ١)r$$

لأنه اعتماداً على تعريف المتتالية وجدنا أن الحد الأول a أما الحد الثاني فهو $a + r$ والحد الثالث هو $a + ٢\square$ ... وهكذا الحد ما قبل الأخير $a + (n - ٢)r$، فالحد الذي ترتيبه n هو $a_n = a + (n - ١)r$.

نلاحظ ومن العلاقة الأخيرة أن عدداً ما يدخل فيها من متغيرات هو أربعة متغيرات فيكفي لحساب هذه المجاهيل أن يكون لدينا معلوم باقي المجاهيل (أي ٣ مجاهيل)

مثال (٤-١):

أوجد المتتالية الحسابية التي حدها الأول ٣ وأساسها ٢ وعدد حدودها ١٠.

الحل:

٣, ٥, ٧, ٩, ١١, ١٥, ١٧, ١٩, ٢١, ٢٣

مثال (٤-٢):

أوجد الحد الأخير لمتتالية حسابية حدها الأول ٢ وأساسها ٣ وعدد حدودها ١٠.

الحل:

لدينا:

$$a_n = a_١ + (n - ١)r \Rightarrow a_{١٠} = ٢ + (١٠ - ١) \times ٣ = ٢٩$$

مثال (٤-٣):

أوجد الحد الأول في المتتالية الحسابية التي حدها العاشر ٢٧ وأساسها ٣.

الحل:

لدينا:

$$a_n = a_١ + (n - ١)r \Rightarrow a_{١٠} = ٢٧ = a_١ + (١٠ - ١) \times ٣ \Rightarrow ٢٧ = a_١ + ٩ \times ٣ \Rightarrow a_١ = ٠$$

٤-١-٣ خواص المتتالية الحسابية:

للمتتاليات الحسابية خواص هامة نستخدمها في حل كثير من المسائل، هذه الخواص هي:

١- مجموع أي حدين متساويي البعد عن الطرفين ثابت ويساوي مجموع الطرفين:

لنفرض أن لدينا المتتالية العددية:

$$a, a + b, a + ٢\square, a + ٣\square, \cdots, a + (n - ٣)b, a + (n - ٢)b, a + (n - ١)b$$

نلاحظ أن:

$$a + a + (n - ١)b = a + b + a + (n - ٢)b = a + ٢\square + a + (n - ٣)b =$$
$$= a + ٣\square + a + (n - ٤)b = ٢\square + nb - b$$

فإذا فرضنا أن لدينا المتتالية الحسابية التالية:

٣, ٥, ٧, ٩, ١١, ١٣, ١٥, ١٧, ١٩, ٢١, ٢٣, ٢٥

نلاحظ أن:

$$٣ + ٢٥ = ٥ + ٢٣ = ٧ + ٢١ = ٩ + ١٩ = \cdots$$

٢- إن أي حد في المتتالية الحسابية هو وسط حسابي بين حدين مجاورين له:

لنفرض أن لدينا المتتالية الحسابية:

$$a, \quad a+b, \quad a+٢b, \quad a+٣b, \cdots, a+(n-٣)b, \quad a+(n-٢)b, \quad a+(n-١)b$$

نلاحظ أن:

$$a+(n-٢)b = \frac{a+(n-٣)b+a+(n-١)b}{٢},$$

$$a+٢b = \frac{a+b+a+٣b}{٢}$$

وهكذا...

مثال (٤-٤):

إذا عدنا إلى المتتالية الواردة في الخاصة الأولى نجد تحقق الخاصة الثانية:

$$٧ = \frac{٥+٩}{٢}, \quad ٢١ = \frac{١٩+٢٣}{٢}, \quad ١٣ = \frac{١١+١٥}{٢}, \cdots$$

٣- إضافة (أو طرح) أي ثابت عددي إلى حدود المتتالية الحسابية يعطينا متتالية حسابية جديدة أساسها هو أساس المتتالية الأولى نفسه.

مثال (٤-٥):

بفرض أن لدينا المتتالية التالية:

$$١, \quad ٣, \quad ٥, \quad ٩, \quad ١١, \quad ١٣, \quad ١٥, \quad ١٧, \cdots$$

لنضف لكل حد من الحدود السابقة الثابت العددي الواحد، فنحصل على المتتالية الحسابية التالية:

$$٢, \quad ٤, \quad ٦, \quad ٨, \quad ١٠, \quad ١٢, \quad ١٤, \quad ١٦, \quad ١٨, \cdots$$

٤- ضرب (أو قسمة) كل حد من حدود متتالية حسابية بثابت غير معدوم يعطينا متتالية جديدة أساسها مضروب (أو مقسوم) بذلك الثابت.

مثال (٤-٦):

لنفرض أن لدينا المتتالية الحسابية التالية:

$$٣, \quad ٥, \quad ٧, \quad ٩, \quad ١١, \quad ١٣, \quad ١٥, \quad ١٧, \quad ١٩, \quad ٢١, \quad ٢٣, \quad ٢٥$$

لنضرب كافة حدود المتتالية بالعدد ٢ فنحصل على المتتالية التالية:

$$٦, \quad ١٠, \quad ١٤, \quad ١٨, \quad ٢٢, \quad ٢٦, \quad ٣٠, \quad ٣٤, \quad ٣٨, \quad ٤٢, \quad ٤٦, \quad ٥٠$$

وهي متتالية جديدة أساسها $٤ = ٢ \times ٢$.

٤-١-٤ مجموع حدود المتتالية الحسابية:

لنفرض أن لدينا المتتالية الحسابية التالية:

$$a_١, \quad a_٢, \quad a_٣, \quad a_٤, \quad \cdots, \quad a_n$$

لنجمع هذه الحدود ولنرمز للمجموع بـ S فنجد أن:

$$S = a_١ + a_٢ + a_٣ + a_٤ + \cdots + a_n$$

لنأخذ حاصل جمع الحدود بشكل آخر فنجد أن:

$$S = a_n + a_{n-١} + a_{n-٢} + a_{n-٣} + \cdots + a_١$$

لنجمع العلاقتين السابقتين طرفاً لطرف:

$$٢\square = (a_١ + a_n) + (a_٢ + a_{n-١}) + (a_٣ + a_{n-٢}) + \cdots + (a_n + a_١)$$

وحسب الخاصة الأولى نجد أن:

$$٢\square = n(a_١ + a_n) \Rightarrow S = \frac{n}{٢}(a_١ + a_n)$$

وبالتالي فإن القانون الذي يعطينا مجموع حدود المتتالية الحسابية S_n والتي عدد حدودها n وحدها الأول a وأساسها r هو:

$$S_n = \frac{n}{٢}[٢\square + (n-١)r]$$

أو بشكل آخر:

$$S_n = \frac{n}{٢}[a_١ + a_n]$$

ملاحظة:

يكون للمتتالية الحسابية حد وسط إذا كان عدد حدودها فردياً، ويكون مجموع الحدين المتساويي البعد عن الطرفين مساوياً لضعف هذا الحد الأوسط.

مثال (٤-٧):

لتكن لدينا المتتالية الحسابية التالية:

$$\div \qquad -٣, \quad ٢, \quad ٧, \quad ١٢, \quad ١٧, \quad ٢٢, \quad ٢٧$$

إن مجموع حدودها:

$$S_n = S_٧ = \frac{٧}{٢}[-٣ + ٢٧] = ٨٤$$

وإن:

$$-٣ + ٢٧ = ٢ + ٢٢ = ٧ + ١٧ = ٢ \times ١٢$$

ملاحظة:

يتم تشكيل أية متتالية حسابية من حدها الأول $a_١$ وحدها الأخير a_n وعدد حدودها n من خلال معرفة r بتطبيق العلاقة:

$$r = \frac{a_n - a_١}{n - ١}$$

ملاحظة:

إن من أهم تطبيقات المتتالية الحسابية ما يمكن ملاحظته في الأعمال المصرفية حيث إن التعرف على الفائدة (أو نمو رأس المال) يتم بالاستفادة من المتتالية العددية. نبين ذلك من خلال المثال الآتي.

مثال (٤-٨):

ادخر أحد الأشخاص في نهاية الشهر مبلغاً قدره ٥٠٠٠٠ ل.س، وقرر أن يضيف لهذا الادخار شهرياً مبلغاً قدره ٢٠٠٠ ل.س، فبعد كم شهراً سيصبح المبلغ المدخر الشهري معادلاً لـ ٨٨٠٠٠؟

الحل:

لدينا:

$$a_n = a_١ + (n - ١)b \Longrightarrow ٨٨٠٠٠٠ = ٥٠٠٠٠٠ + (n - ١)(٢٠٠٠٠) \Longrightarrow ٤٠٠٠٠٠ = ٢٠٠٠٠□ \Longrightarrow n = ٢٠$$

مثال (٤-٩):

لتكن متتالية حسابية حدها الأول ٥ وحدها الأخير ١٢٢ وعدد حدودها ٤٠ حداً فما هو مجموع حدودها؟

الحل:

لدينا:

$$S_n = \frac{n}{٢}[a_١ + a_n] = \frac{٤٠}{٢}[٥ + ١٢٢] = ٢٠ \times ١٢٧ = ٢٥٤٠$$

مثال (٤-١٠):

لتكن متتالية حسابية مؤلفة من ٣٠ حداً مجموعها ٢٣٢٥ وحدها الأخير ١٥٠ فما هو أساس هذه المتتالية؟

الحل:

لدينا:

$$S_n = \frac{n}{٢}[a_١ + a_n] \Longrightarrow ٢٣٢٥ = \frac{٣٠}{٢}[a_١ + ١٥٠] \Longrightarrow ٢٣٢٥ = ١٥a_١ + ١٥ \times ١٥٠ \Longrightarrow a_١ = ٥$$

ولدينا أيضاً:

$$a_n = a_١ + (n - ١)b \Longrightarrow ١٥٠ = ٥ + (٣٠ - ١)b \Longrightarrow ١٤٥ = ٢٩ \times b \Longrightarrow b = \frac{١٤٥}{٢٩} = ٥$$

مثال (٤-١١):

لتكن متتالية حسابية متزايدة مؤلفة من أربعة حدود حدها الأول ٥ وحاصل جداء طرفيها يقل ٧٢ عن حاصل جداء الحد الثاني في الحد الثالث، فما هو أساسها ومجموعها ؟

الحل:

لنفرض أن أساسها المتتالية الحسابية هو b، فتكون حدود المتتالية الحسابية هي:

$$٥, \quad ٥ + b, \quad ٥ + ٢□, \quad ٥ + ٣□, \quad ٥ + ٤□$$

لدينا فرضاً أن:

$$٥ \times (٥ + ٣□) + ٧٢ = (٥ + b)(٥ + ٢□) \Longrightarrow$$
$$٢٥ + ١٥□ + ٧٢ = ٢٥ + ٢b^٢ + ١٥□ \Longrightarrow b^٢ = ٣٦ \Longrightarrow b = ٦$$

إذاً فالمجموع هو:

$$S = \frac{n}{٢}[٢□ + (n - ١)b] \Longrightarrow S = \frac{٤}{٢}[٢ \times ٥ + (٤ - ١) \times ٦] = ٥٦$$

مثال (٤-١٢):

مجموع ٣ أعداد متوالية في متتالية حسابية متزايدة هو ٢١ ومربع الأول ينقص عن ثالثها بمقدار ٢ فما هي هذه الأعداد؟

الحل:

لنفرض أن أساس المتتالية الحسابية هو b، فتكون حدود المتتالية الحسابية هي:

$$a, \quad a + b, \quad a + ٢□$$

لدينا من الفرض:

$$٣□ + ٣□ = ٢١$$

أي أن:

$$a + b = ٧$$

ولدينا أيضاً: $a^{٢} + ٢ = a + ٢□$

أي أن:

$$a^{٢} + ٢ = a + ٢(٧ - a) \Longrightarrow a^{٢} + a - ١٢ = ٠ \Longrightarrow (a - ٣)(a + ٤) = ٠$$

إما $a = -٤$ مقبول ومنه $b = ١١$ وإما $a = ٣$ مقبول ومنه $b = ٤$ إذاً لدينا متتاليتان:

$$-٤, \quad ٧, \quad ١٨$$
$$٣, \quad ٧, \quad ١١$$

مثال (٤-١٣):

مجموع ٣ أعداد متوالية في متتالية حسابية ٣٦ ومجموع مربعاتها ٤٥٠ فما هي هذه الأعداد؟

الحل:

نفرض أن الأعداد الثلاثة هي:

$$a - b, \quad a, \quad a + b$$

من الفرض نجد أن:

$$a - b + a + a + b = ٣٦$$

أي أن:

$$a = ١٢$$

ومن الفرض لدينا أيضاً:

$$(a - b)^{٢} + a^{٢} + (a + b)^{٢} = ٤٥٠$$

أي أن:

$$٣ + ١٤٤ + ٢b^{٢} = ٤٥٠$$

ومنه:

$$٢b^{٢} = ١٨ \Longrightarrow b = \pm ٣$$

وبالتالي فالأعداد هي:

$$٩, \quad ١٢, \quad ١٥$$
$$١٥, \quad ١٢, \quad ٩$$

هي حدود المتتالية الحسابية.

مثال (٤-١٤):

متتالية حسابية متزايدة مجموع حديها الرابع والسابع يزيد عن حدها العاشر بمقدار ٧ وحدها السادس ينقص عن حدها الثامن بمقدار ٢٦ فما هو حدها الخامس عشر؟

الحل:

من الفرض لدينا:

$$(a + ٣□) + (a + ٦□) = (a + ٩□) + ٧ \qquad (١)$$

$$a + ٥r = a + ٧r - ٢٦ \qquad (٢)$$

من (١) نجد:

$$a + ٣r + a + ٦r = a + ٩r + ٧ \Longrightarrow ٢r + ٩r - a - ٩r = ٧ \Longrightarrow a = ٧$$

وهو الحد الأول.

ومن (٢) نجد:

$$a + ٥r = a + ٧r - ٢٦ \Longrightarrow ٢٦ = a + ٧r - a - ٥r \Longrightarrow ٢٦ = ٢r \Longrightarrow r = ١٣$$

وهو أساس المتتالية.

ومنه الحد الخامس عشر للمتتالية الحسابية هو:

$$a_{١٥} = a + ١٤r \Longrightarrow a_{١٥} = ٧ + ١٤(١٣) \Longrightarrow a_{١٥} = ٧ + ١٨٢ \Longrightarrow a_{١٥} = ١٨٩$$

وهو المطلوب.

مثال (٤-١٥):

متتالية حسابية مجموع حديها الثالث والسادس يزيد على حدها الأول بمقدار (١) ومجموع حديها الثالث والخامس يزيد على حدها السابع بمقدار ٤٣ فما هو حدها الثامن؟

الحل:

حدود المتتالية الحسابية:

$$a, \quad a + r, \quad a + ٢r, \quad a + ٣r, \quad a + ٤r, \quad a + ٥r, \quad a + ٦r, \quad a + ٧r$$

ومن الفرض:

$$a + ١ = a + ٢r + a + ٥r \Longrightarrow a + ١ = ٢r + ٧r \Longrightarrow a + ٧r = ١$$

ومن الفرض:

$$a + ٦r + ٤٣ = a + ٢r + a + ٤r \Longrightarrow a + ٦r + ٤٣ = ٢r + ٦r \Longrightarrow a + ٤٣ = ٢r \Longrightarrow a = ٤٣$$

$$a + ٧r = ١ \Longrightarrow ٤٣ + ٧r = ١ \Longrightarrow ٧r = -٤٢ \Longrightarrow r = -\frac{٤٢}{٧} = -٦ \Longrightarrow r = -٦$$

نعوض لايجاد الحد الثامن:

$$a + ٧r = ٤٣ + (٧ \times -٦) = ٤٣ - ٤٢ = ١$$

فيكون الحد الثامن = ١.

مثال (٤-١٦):

متوالية حسابية فيها الحد الثامن يزيد على حدها الأول بمقدار ٨٤ وحدها السادس يزيد على ضعف حدها الثاني بمقدار ٤٩ فما هو حدها الخامس عشر؟

الحل:

$$a, \quad a + r, \quad a + ٢r, \quad a + ٣r, \quad a + ٤r, \quad a + ٥r, \quad a + ٦r, \quad a + ٧r$$

$$a + ٧r = a + ٨٤ \Longrightarrow ٧r = ٨٤$$

وذلك بنقل المعاليم لطرف والمجاهيل لطرف.

$$r = \frac{٨٤}{٧} = ١٢$$

$$a + ٥r = ٢(a + r) + ٤٩ \Longrightarrow a + ٦٠ = ٢r + ٢٤ + ٤٩ \Longrightarrow a + ٦٠ = ٢r + ٧٣ \Longrightarrow a = -١٣$$

$$a_n = a + (n - ١)r \Longrightarrow a_{١٥} = a + (١٥ - ١)r = -١٣ + (١٤)١٢ \Longrightarrow a_{١٥} = -١٣ + ١٦٨$$

$$\Rightarrow a_{١٠} = ١٥٥$$

٤-٢ المتتالية الهندسية:

وهي متتالية ينتج كل حد فيها عن سابقه بضربه بعدد ثابت غير معدوم، يرمز له عادة r ونسميه أساس هذه المتتالية الهندسية، فإذا كان الحد العام لهذا المتتالية a_n فإن:

$$a_n = a_{n-١} \times r$$

وذلك لأجل كل n من منطلق هذه المتتالية. بالنتيجة فإن حدها العام يعطى بالمساواة:

$$a_n = a_١ \times r^{n-١}$$

من الواضح أن الحد العام يتبع لثلاثة مجاهيل هي الحد الأول $a_١$ وأساسها r والرتبة n لهذا الحد.

من التعريف ينتج أن حدود هذه المتتالية تحقق:

$$\frac{a_٢}{a_١} = \frac{a_٣}{a_٢} = \frac{a_٤}{a_٣} = \cdots = \frac{a_n}{a_{n-١}} = r$$

وإذا رمزنا للحد الأول لمتتالية هندسية منتهية عدد حدودها n بـ a ولأساسها بـ r فإن حدود هذه المتتالية هي:

$$a, \quad ar, \quad \cdots, \quad ar^{n-١}, \quad \cdots$$

٤-٢-١ أنواع المتتالية الهندسية:

ونجد ثلاثة أنواع للمتتالية الهندسية: متتالية هندسية متزايدة حينما يكون $r > ١$، ومتتالية هندسية متناقصة حينما يكون أساسها $٠ < r < ١$، ومتتالية هندسية متناوبة الإشارة الجبرية حينما يكون أساسها $r < ٠$.

أمثلة:

١) تشكل الأعداد التالية:

$$٣, \quad ٦, \quad ١٢, \quad ٢٤, \quad ٤٨, \cdots$$

متتالية هندسية متزايدة حدها الأول ٣ وأساسها ٢ حيث نلاحظ أن: $r = ٢ > ١$.

أما الأعداد التالية:

$$١, \quad \frac{١}{٢}, \quad \frac{١}{٤}, \quad \frac{١}{٨}, \quad \frac{١}{١٦}, \quad \frac{١}{٣٢}, \cdots$$

فتشكل متتالية هندسية متناقصة حدها الأول ١ وأساسها ١/٢ حيث نلاحظ أن: $٠ < r = ١/٢ < ١$.

كما وتشكل الأعداد التالية:

$$١, \quad -٢, \quad +٤, \quad -٨, \quad +١٦, \quad -٣٢, \quad +٦٤, \cdots$$

متتالية هندسية متناوبة حدها الأول ١ وأساسها ٢- حيث نلاحظ أن: $r = -٢ < ٠$.

نلاحظ مما سبق أن:

a) إذا كان الحد الأول معدوماً فإن جميع حدود المتتالية مهما كان أساسها معدومة وعندها تسمى بالمتتالية الصفرية.

b) إذا كان أساس المتتالية الهندسية مساوياً الواحد فإن جميع حدود المتتالية متساوية ومساوية للحد الأول.

c) إذا كان الحد الأول في المتتالية الهندسية سالباً وأساسها موجباً فإن جميع حدود المتتالية الهندسية سالبة.

فإذا فرضنا أن الحد الأول ٣– والأساس هو ٣ فالحدود هي:

$$-٣,\quad -٩,\quad -٢٧,\quad -٨١,\cdots$$

٤-٢-٢ الحد النوني:

يعطى الحد العام (النوني) الذي رتبته n بالدستور التالي:

$$a_n = a_١ \cdot r^{n-١}$$

لأنه لو فرضنا أن الحد الأول هو a والأساس r نجد أن:

$$a,\quad ar,\quad ar^٢,\quad ar^٣,\quad ar^٤,\cdots,ar^{n-١}$$

مثال (٤-١٧):

أوجد الحد النوني لمتتالية هندسية حدها الأول ٢ وأساسها ٣.

الحل:

$$a_n = ٢ \cdot ٣^{n-١}$$

فإذا كانت $n = ١٥$ لوجدنا أن:

$$a_{١٥} = ٢ \cdot ٣^{١٤}$$

مثال (٤-١٨):

أوجد الحد السابع والعشرين في المتتالية:

$$١,\quad ٣,\quad ٩$$

الحل:

$$a_{٢٧} = ١ \cdot ٣^{٢٦} = ٣^{٢٦} = ٢\ ٥٤١\ ٨٦٥\ ٨٢٨\ ٣٢٩$$

مثال (٤-١٩):

ما هو ترتيب الحد ٣٤٨٦٧٨٤٤٠١ في متتالية حدها الأول هو ١ وأساسها ٣.

الحل:

$$a_n = a_١ \cdot r^{n-١} \Rightarrow ٣٤٨٦٧٨٤٤٠١ = ١ \cdot ٣^{n-١} \Rightarrow n-١ = \log_٣ ٣٤٨٦٧٨٤٤٠١ = ٢٠$$
$$\Rightarrow n = ٢١$$

وهو الحد الحادي والعشرون.

٤-٢-٣ خواص المتتالية الهندسية:

١– إن كل حد من حدودها يساوي الحد الأول مضروباً بالأساس مرفوعاً إلى القوة التي تساوي عدد الحدود الذي يسبق هذا الحد المعين.

نستطيع التحقق من هذه الخاصة بالعودة مباشرة إلى صيغة الحد النوني.

٢– إن لوغاريتمات حدود متتالية هندسية حدها الأول وأساسها موجبين تماماً تشكل حدود متتالية حسابية.

لنفرض أن لدينا المتتالية الهندسية التالية:

$$a,\quad ar,\quad ar^٢,\quad ar^٣,\cdots,ar^{n-١}$$

لنأخذ لوغاريتم كل حد من هذه الحدود:

$$\ln a\,,\quad \ln(ar)\,,\quad \ln(ar^{٢})\,,\quad \ln(ar^{٣})\,,\quad \ln(ar^{n-١})$$

بتطبيق خواص اللوغاريتمات نجد أن الحدود أصبحت بالشكل التالي:

$$\ln a\,,\quad \ln a+\ln r\,,\quad \ln a+٢\ln r\,,\quad \ln a+٣\ln r\,,\quad \ln a+(n-١)\ln r$$

وهي حدود متتالية حسابية حدها الأول هو $\ln a$ وأساسها $\ln r$.

٣- أي حد في المتتالية الهندسية هو وسط هندسي بين حدين مجاورين له.

لنفرض أن حدود المتتالية هي:

$$a,\quad ar,\quad ar^{٢},\quad ar^{٣},\quad ar^{٤},\quad ar^{n-١}$$

نجد أن:

$$ar=\sqrt{a\times ar^{٢}}$$
$$ar^{٢}=\sqrt{ar\times ar^{٣}}$$
$$ar^{٣}=\sqrt{ar^{٢}\times ar^{٤}}$$

مثال (٤-٢٠):

إذا فرضنا أن لدينا المتتالية الهندسية التالية:

$$١,\quad ٢,\quad ٤,\quad ٨,\quad ١٦,\quad ٣٢,\quad ٦٤,\quad ١٢٨,\cdots$$

فنجد أن:

$$٤=\sqrt{٢\times ٨}\,,\quad ٨=\sqrt{٤\times ١٦}\,,\quad ٣٢=\sqrt{١٦\times ٦٤}\,,\quad ٦٤=\sqrt{٣٢\times ١٢٨}$$

٤- جداء أي حدين متساويي البعد عن الطرفين ثابت ويساوي جداء الطرفين، فإذا فرضنا أن لدينا المتتالية التالية:

$$\underbrace{a\,,\quad \underbrace{ar,\quad \underbrace{ar^{٢},\quad \underbrace{ar^{٣},\quad \underbrace{ar^{٤},\cdots,ar^{n-٥}},\quad ar^{n-٤}},\quad ar^{n-٣}},\quad ar^{n-٢}},\quad ar^{n-١}}$$

فنجد أن:

$$ar^{٤}\cdot ar^{n-٥}=ar^{٣}\cdot ar^{n-٤}=ar^{٢}\cdot ar^{n-٣}=ar\cdot ar^{n-٢}=\cdots=a^{٢}\cdot r^{n-١}$$

مثال (٤-٢١):

إذا فرضنا أن لدينا المتتالية الهندسية التالية:

$$١,\quad ٢,\quad ٤,\quad ٨,\quad ١٦,\quad ٣٢,\quad ٦٤,\quad ١٢٨,\quad ٢٥٦$$

فنجد أن:

$$١\times ٢٥٦=٢\times ١٢٨=٤\times ٦٤=٨\times ٣٢=\cdots$$

٤-٢-٤ مجموع حدود المتتالية الهندسية:

يعطى القانون الذي يحسب لنا المجموع S_n لمتتالية هندسية منتهية عدد حدودها n أو المجموع لأول n حد من متتالية هندسية غير منتهية بالمساواة التالية:

$$S_n=a\frac{r^n-١}{r-١}=\frac{ar^n-a}{r-١}\quad;\quad(r>١)$$
$$S_n=a\frac{١-r^n}{١-r}\quad;\quad(٠<r<١)$$

بالحقيقة لنفرض أن لدينا المتتالية الهندسية التالية:

$$a_١, \quad a_٢, \quad a_٣, \quad a_٤, \cdots, a_n$$

لنجمع هذه الحدود، فنجد أن:

$$S = a_١ + a_٢ + a_٣ + \cdots + a_n$$

لنضرب طرفي العلاقة السابقة بالأساس r فنجد أن:

$$S \cdot r = a_١ \cdot r + a_٢ \cdot r + a_٣ \cdot r + \cdots + a_n \cdot r$$

وباعتبار أن: $a_٢ = a_١ \cdot r$ و $a_٣ = a_٢ \cdot r$ و $a_٤ = a_٣ \cdot r$ و...

فبطرح العلاقتين السابقتين من بعضهما البعض طرفاً لطرف نجد أن:

$$S - S \cdot r = a_١ - a_n \cdot r = a_١ - a_١ \cdot r^{n-١} \cdot r = a_١ - a_١ \cdot r^n = a_١(١ - r^n) \Rightarrow$$
$$S(١ - r) = a_١(١ - r^n) \Rightarrow S = a_١ \frac{١ - r^n}{١ - r} \quad ; \quad (٠ < r < ١)$$

أما إذا قمنا بالطرح نجد التالي:

$$S \cdot r - S = a_n \cdot r - a_١ = a_١ \cdot r^n - a_١ \Rightarrow S = a_١ \frac{r^n - ١}{r - ١} \quad ; \quad (r > ١)$$

وحينما تكون المتتالية الهندسية متناقصة وعدد حدودها لا نهائي فنجد أن مجموع حدودها والذي نرمز له بـ $S_{-\infty}$ يحسب من خلال العلاقة التالية:

$$S_{-\infty} = \frac{a_١}{١ - r}$$

أما إذا كان $r = ١$ فإن المجموع $S_n = n\,a$.

مثال (٤-٢٢):

متتالية هندسية مجموع حدودها الثلاثة الأولى يساوي ٦٢ ومجموع حدودها الثاني والثالث والرابع يساوي ٣١٠، فما هو حدها الأول وأساسها؟

الحل:

لدينا فرضاً:

$$a + a \cdot r + a \cdot r^٢ = ٦٢ \Rightarrow a(١ + r + r^٢) = ٦٢$$
$$a \cdot r + a \cdot r^٢ + a \cdot r^٣ = ٣١٠ \Rightarrow a \cdot r(١ + r + r^٢) = ٣١٠$$

ومنه نجد أن:

$$r \cdot ٦٢ = ٣١٠ \Rightarrow r = \frac{٣١٠}{٦٢} = ٥$$

وبالتالي فالحد الأول هو:

$$a = \frac{٦٢}{١ + ٥ + ٢٥} = \frac{٦٢}{٣١} = ٢$$

مثال (٤-٢٣):

ما عدد حدود المتتالية: ...,٣,١٢ التي مجموعها ٢٥٥.

الحل:

$$r = \frac{١٢}{٣} = ٤ \Rightarrow ٢٥٥ = ٣\frac{١ - ٤^n}{١ - ٤} \Rightarrow ٢٥٥ = -١ + ٤^n \Rightarrow ٤^n = ٢٥٦ \Rightarrow n = ٤$$

مثال(٤-٢٤):

ثلاثة أعداد تشكل فيما بينها متتالية هندسية فإذا علمت أن العدد الثاني يزيد على الأول بمقدار ١٥ ويزيد الثالث على الأول بمقدار ٧٥، فما هي هذه الأعداد؟

الحل:

نفرض أن الأعداد الثلاثة هي:

$$a, \quad ar, \quad ar^{٢}$$

فحسب الفرض لدينا:

$$a + ١٥ = ar \Rightarrow a(r - ١) = ١٥ \Rightarrow a = \frac{١٥}{r - ١}$$

$$a + ٧٥ = ar^{٢} \Rightarrow \frac{١٥}{r - ١} + ٧٥ = \frac{١٥}{r - ١} r^{٢} \Rightarrow ١٥ + ٧٥(r - ١) = ١٥r^{٢} \Rightarrow$$

$$١٥r^{٢} - ٧٥r + ٦٠ = ٠ \Rightarrow r^{٢} - ٥r + ٤ = ٠ \Rightarrow (r - ١)(r - ٤) = ٠$$

إما $r = ١$ مرفوض، وإما $r = ٤$ فإن $a = ٥$. إذاً حدود المتتالية هي:

$$٥, \quad ٢٠, \quad ٨٠$$

مثال (٤-٢٥):

متتالية هندسية حدودها موجبة، فإذا كان مجموع الحد الخامس وضعفا الحد السادس يساوي عشرة أمثال الحد الرابع، وإذا كان الحد التاسع يساوي ١٥٣٦ فالمطلوب أوجد الحد السابع.

الحل:

نفرض أن الحدود هي:

$$a, \quad ar, \quad ar^{٢}, \quad ar^{٣}, \quad ar^{٤}, \quad ar^{٥}, \quad ar^{٦}, \quad ar^{٧}, \quad ar^{٨}$$

لدينا فرضاً:

$$ar^{٤} + ٢ar^{٥} = ١٠\, ar^{٣}$$

$$ar^{٤}\,(١ + ٢r) = ١٠\, ar^{٣} \Rightarrow r(١ + ٢r) = ١٠ = ٢(١ + ٢ \times ٢)$$

ومنه: $r = ٢$.

ولدينا فرضاً: $ar^{٨} = ١٥٣٦$.

$$ar^{٨} = ١٥٣٦ \Rightarrow a = ١٥٣٦/٢^{٨} = ١٥٣٦/٢٥٦ = ٦$$

إذاً فالحد السابع هو:

$$ar^{٦} = ٦ \times ٢^{٦} = ٣٨٤$$

مثال (٤-٢٦):

متتالية هندسية حدودها موجبة، مجموع حديها الأول والثالث ٢٠ ومجموع الحدين الثالث والخامس يساوي خمسة أمثال مربع الحد الثاني، أوجد الحد الأول والأساس.

الحل:

لنفرض أن حدود المتتالية هي:

$$a, \quad ar, \quad ar^{٢}, \quad ar^{٣}, \quad ar^{٤}, \quad ar^{٥}, \quad ar^{٦}, \quad ar^{٧}, \quad ar^{٨}$$

لدينا فرضاً:

$$a + ar^{٢} = ٢٠ \Rightarrow a(١ + r^{٢}) = ٢٠$$
$$ar^{٢} + ar^{٤} = ٥a^{٢}r^{٢} \Rightarrow ar^{٢}(١ + r^{٢}) = ٥a^{٢}r^{٢} \Rightarrow ١ + r^{٢} = ٥a \Rightarrow a(٥a) = ٢٠$$
$$\Rightarrow\ a^{٢} = ٤ \Rightarrow a = \pm ٢$$

ومنه:

$$\Rightarrow a^{٢} = ٤ \Rightarrow a = \pm ٢$$

بما أن الحدود موجبة إذاً الحد الأول هو $a = ٢$ والأساس هو $r = ٣$.

ملاحظة:

نستطيع أيضاً حساب جداء حدود المتتالية الهندسية الذي عدد حدودها n وأساسها r وحدها الأول a وحدها الأخير a_n من خلال الدستور:

$$\Pi = \sqrt{(a_{١} \cdot a_n)^n}$$

أو:

$$\Pi = a_{١}^n \cdot r^{n(n-١)/٢}$$

مثال (٤-٢٧)[*]:

احسب مجموع مربعات الـ n عدداً الأولى من الأعداد الصحيحة من خلال التحقق التالي:

$$S = ١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + \cdots + n^{٢} = \frac{n(n+١)(٢n+١)}{٦}$$

لإيجاد هذا المجموع ننطلق من المطابقة التالية:

$$(k+١)^{٣} = k^{٣} + ٣k^{٢} + ٣k + ١$$

حيث نعطي لـ k القيم $١, ٢, ٣, \cdots, n$ ونحصل على n معادلة:

$$٢^{٣} = (١+١)^{٣} = ١^{٣} + ٣ \cdot ١^{٢} + ٣ \cdot ١ + ١$$
$$٣^{٣} = (٢+١)^{٣} = ٢^{٣} + ٣ \cdot ٢^{٢} + ٣ \cdot ٢ + ١$$
$$\vdots$$
$$n^{٣} = (n-١+١)^{٣} = (n-١)^{٣} + ٣ \cdot (n-١)^{٢} + ٣ \cdot (n-١) + ١$$
$$(n+١)^{٣} = n^{٣} + ٣ \cdot n^{٢} + ٣ \cdot n + ١$$

بجمع هذه المعادلات طرفاً لطرف ثم بإجراء الاختصارات نجد أن:

$$(n+١)^{٣} = ١ + ٣(١^{٢} + ٢^{٢} + \cdots + n^{٢}) + ٣(١ + ٢ + \cdots + n) + n$$
$$١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + \cdots + n^{٢} = \frac{(n+١)^{٣} - (n+١) - ٣(١ + ٢ + ٣ + \cdots + n)}{٣}$$
$$= \frac{n+١}{٣}\left(n^{٢} + ٢n - \frac{٣n}{٢}\right) = \frac{n(n+١)(٢n+١)}{٦}$$

ملاحظة:

إن من أهم تطبيقات المتتالية الهندسية هو كيفية حساب الكسر العادي المولد لكسر عشري دوري.

مثال (٤-٢٨):

احسب الكسر العادي المولد للكسر العشري الدوري البسيط $٠.٣٧٣٧٣٧\cdots = ٠.\overline{٣٧}$.

[*] يمكن حساب ذلك عن طريق المطابقة $(k-١)^{٣}$ بإعطاء k القيم $١, ٢, ٣, \cdots, n$ ثم إجراء الخطوات نفسها.

يمكن كتابة الكسر هذا من خلال مجموع متتالية هندسية:

$$٠.٣٧٣٧٣٧\cdots = \frac{٣٧}{١٠٠} + \frac{٣٧}{١٠٠٠٠} + \frac{٣٧}{١٠٠ \times ١٠٠^{٢}} + \frac{٣٧}{١٠٠ \times ١٠٠^{٣}} + \cdots$$

وهي متتالية هندسية متناقصة أساسها $r = ١/١٠٠$ و $|r| < ١$ وغير متناهية ومجموع حدودها يساوي الكسر العشري الدوري المعطى $٠.٣٧٣٧٣٧\cdots$.

$$S_{-\infty} = \frac{a}{١ - r} \Rightarrow ٠.\overline{٣٧} = \frac{٣٧/١٠٠}{١ - ١/١٠٠} = \frac{٠.٣٧}{١ - ٠.٠١} = \frac{٠.٣٧}{٠.٩٩} = \frac{٣٧}{٩٩}$$

مثال (٤-٢٩):

ثلاثة أعداد تشكل متتالية حسابية مجموعها (٣٦-). إذا أضفنا للحد الأول ٢٢ وللحد الثاني ٢٢ وللحد الثالث ٢٧ فنحصل على متتالية هندسية متناقصة. ما هي هذه المتتالية الهندسية؟

الحل:

نفرض حدود المتتالية الحسابية هي:

$$a - b, \qquad a, \qquad a + b$$

ولدينا فرضاً:

$$(a - b) + a + (a + b) = -٣٦ \Rightarrow ٣\square = -٣٦ \Rightarrow a = -١٢$$

ومنه تكون حدود المتتالية الهندسية:

$$a_{١} = (a - b) + ٢٢ \Rightarrow a_{١} = -١٢ - b + ٢٢ \Rightarrow a_{١} = ١٠ - b$$
$$a_{٢} = a + ٢٢ \Rightarrow a_{٢} = -١٢ + ٢٢ \Rightarrow a_{٢} = ١٠$$
$$a_{٣} = (a + b) + ٢٧ \Rightarrow a_{٣} = -١٢ + b + ٢٧ \Rightarrow a_{٣} = ١٥ + b$$

من خواص المتتاليات الهندسية أن كل حد من حدود المتتالية الهندسية هو وسط هندسي لمجاوريه:

$$a_{٢} = \sqrt{a_{١} \cdot a_{٣}} \Rightarrow ١٠ = \sqrt{(١٠ - b) \cdot (١٥ + b)}$$

نربع الطرفين:

$$١٠٠ = (١٠ - b)(١٥ + b) \Rightarrow ١٠٠ = ١٥٠ + ١٠\square - ١٥\square - b^{٢}$$
$$\Rightarrow b^{٢} + ٥\square - ٥٠ = ٠$$

معدلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد نحلها باستخدام المميز Δ:

$$\Delta = b^{٢} - ٤\square\square = (٥)^{٢} - ٤(١)(-٥٠) = ٢٥ + ٢٠٠ = ٢٢٥ \Rightarrow \sqrt{\Delta} = ١٥$$
$$b_{١} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{٢\square} = \frac{-٥ + ١٥}{٢} = \frac{١٠}{٢} = ٥$$
$$b_{٢} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{٢\square} = \frac{-٥ - ١٥}{٢} = \frac{-٢٠}{٢} = -١٠$$

بتعويض $b_{١}$ في حدود المتتالية الهندسية:

$$a_{١} = ١٠ - b = ١٠ - ٥ = ٥$$
$$a_{٢} = ١٠$$
$$a_{٣} = ١٥ + b = ١٥ + ٥ = ٢٠$$

مرفوض لأن المتتالية الهندسية متناقصة (من الفرض) وهنا بهذه الحالة تكون متزايدة.

بتعويض $b_{٢}$ في حدود المتتالية الهندسية:

$$a_{١} = ١٠ - b = ١٠ - (-١٠) = ١٠ + ١٠ = ٢٠$$
$$a_{٢} = ١٠$$

$$a_{٣} = ١٥ + b = ١٥ + (-١٠) = ١٥ - ١٠ = ٥$$

ومنه أن $b_{٢}$ هو الجواب المقبول.

وبما أن حدود المتتالية الهندسية:

$$a_{١}, \qquad a_{١}r, \qquad a_{١}r^{٢} = ٢٠, \qquad ١٠, \qquad ٥$$

نستنتج أن:

$$a_{١}r = ١٠ \Rightarrow ٢٠\square = ١٠ \Rightarrow r = \frac{١٠}{٢٠} = \frac{١}{٢}$$

مثال(٤-٣٠):

ثلاثة أعداد تشكل متتالية حسابية متزايدة مجموعها (٤٢-). إذا أضفنا للحد الأول ٢٢ وللحد الثاني ٢٣ وللحد الثالث ٣٦ فنحصل على متتالية هندسية. ما هي هذه المتتالية الهندسية؟

الحل:

نفرض حدود المتتالية الحسابية:

$$a - r, \qquad a, \qquad a + r$$

ومن الفرض:

$$a - r + a + a + r = -٤٢ \Rightarrow ٣\square = -٤٢ \Rightarrow a = -\frac{٤٢}{٣} = -١٤ \Rightarrow a = -١٤$$

حدود المتتالية الهندسية:

$$a_{١} = a - r + ٢٢ \Rightarrow a_{١} = -١٤ - r + ٢٢ \Rightarrow a_{١} = ٨ - r$$
$$a_{٢} = a + ٢٣ \Rightarrow a_{٢} = -١٤ + ٢٣ = ٩$$
$$a_{٣} = a + r + ٣٦ \Rightarrow a_{٣} = -١٤ + r + ٣٦ = ٢٢ + r$$

الأن نطبق خواص المتتالية الهندسية وهي أن أي حد هو وسط هندسي بين مجاوريه:

$$٩ = \sqrt{(٨ - r)(٢٢ + r)}$$

نربع الطرفين:

$$٨١ = (٨ - r)(٢٢ + r) \Rightarrow ٨١ = ١٧٦ + ٨\square - ٢٢\square - r^{٢} \Rightarrow ٨١ = ١٧٦ - ١٤\square - r^{٢}$$
$$r^{٢} + ١٤r - ١٧٦ + ٨١ = ٠ \Rightarrow r^{٢} + ١٤\square - ٩٥ = ٠ \Rightarrow (r + ١٩)(r - ٥) = ٠$$

أما: $r = -١٩$، أو: $r = ٥$، ولأنها متتالية حسابية متزايدة فإن: $r = ٥$.

$$a_{١} = ٨ - ٥ = ٣$$
$$a_{٢} = ٩$$
$$a_{٣} = ٢٢ + ٥ = ٢٧$$

فيكون لدينا متتالية هندسية متزايدة حدودها:

$$٣, \qquad ٩, \qquad ٢٧$$

وأساسها: $r = ٣$.

مثال (٤-٣١):

ثلاثة أعداد تشكل متتالية حسابية متزايدة مجموعها (٣٣-). إذا أضفنا للحد الأول ٢١ وللحد الثاني ٢١ وللحد الثالث ٢٦ فنحصل على متتالية هندسية متناقصة. ما هي هذه المتتالية الهندسية؟

الحل:

نفرض حدود المتتالية الحسابية:

$$a - r, \qquad a, \qquad a + r$$

ومن الفرض:

$$a - r + a + a + r = -٣٣ \Rightarrow ٣a = -٣٣ \Rightarrow a = -\frac{٣٣}{٣} \Rightarrow a = -١١$$

$$a_١ = a - r + ٢١ \Rightarrow a_١ = -١١ - r + ٢١ \Rightarrow a_١ = -r + ١٠$$

$$a_٢ = a + ٢١ \Rightarrow a_٢ = -١١ + ٢١ \Rightarrow a_٢ = ١٠$$

$$a_٣ = a + r + ٢٦ \Rightarrow a_٣ = -١١ + r + ٢٦ \Rightarrow a_٣ = ١٥ + r$$

الآن نطبق واحدة من خواص المتتالية الهندسية هي أن أي حد في المتتالية الهندسية هو وسط هندسي بين مجاوريه:

$$١٠ = \sqrt{(١٠ - r)(١٥ + r)} \Rightarrow ١٠^٢ = (١٠ - r)(١٥ + r) \Rightarrow ١٠٠ = r^٢ - ١٠r + ١٥r + ١٥٠$$

$$\Rightarrow -r^٢ - ٥r + ٥٠ = ٠$$

$$\Delta = b^٢ - ٤ac = (-٥^٢) - ٤(-١)(٥٠) = ٢٥ + ٢٠٠ = ٢٢٥ \Rightarrow \sqrt{\Delta} = ١٥$$

$$r_١ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{٢a} = \frac{٥ + ١٥}{-٢} = -١٠$$

$$r_٢ = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{٢a} = \frac{٥ - ١٥}{-٢} = ٥$$

نأخذ $(r_١)$ لأنها متتالية هندسية متناقصة ثم نعوض:

$$a_١ = a - r + ٢١ \Rightarrow a_١ = -١١ - (-١٠) + ٢١ \Rightarrow a_١ = ٢٠$$

$$a_٢ = a + ٢١ \Rightarrow a_٢ = -١١ + ٢١ \Rightarrow a_٢ = ١٠$$

$$a_٣ = a + r + ٢٦ \Rightarrow a_٣ = -١١ - ١٠ + ٢٦ \Rightarrow a_٣ = ٥$$

فيكون لدينا المتتالية الهندسية المتناقصة التالية:

$$٢٠, \qquad ١٠, \qquad ٥$$

أساسها:

$$r = \frac{١٠}{٢٠} = \frac{١}{٢} = ٠.٥$$

مثال (٤-٣٢):

أوجد الحد الأول في متتالية هندسية متزايدة، فيها حاصل قسمة حدها السابع على ٨ يساوي حدها الرابع، وحدها السادس يساوي ١٩٢.

الحل:

$$a, \qquad ar, \qquad ar^٢, \qquad ar^٣, \qquad ar^٤, \qquad ar^٥, \qquad ar^٦$$

$$ar^٣ = \frac{ar^٦}{٨}, \qquad ar^٥ = ١٩٢$$

$$ar^٣ = \frac{ar^٦}{٨} \Rightarrow ar^٣(٨) = ar^٦ \Rightarrow ٨ = \frac{ar^٦}{ar^٣} \Rightarrow r^٣ = ٨ \Rightarrow r = ٢$$

$$a_٦ = ar^٥ \Rightarrow ١٩٢ = a(٢^٥) \Rightarrow ١٩٢ = ٣٢\, a \Rightarrow a = \frac{١٩٢}{٣٢} = ٦$$

فيكون لدينا المتتالية الهندسية المتزايدة التالية:

$$٦, \qquad ١٢, \qquad ٢٤, \qquad ٤٨, \qquad ٩٦, \qquad ١٩٢, \qquad ٣٨٤, \qquad \ldots$$

مثال (٤-٣٣):

أوجد الحد الأول في متتالية هندسية متناقصة، فيها جداء الحدين الأول بالعاشر يعادل الحد الثالث والحد السابع يعادل ثلث الحد السادس.

الحل:

من الفرض لدينا المعادلتين:

$$a \times ar^{٩} = ar^{٢} \qquad (١)$$

$$ar^{٦} = \frac{١}{٣} ar^{٥} \qquad (٢)$$

من (١) نجد أنّ:

$$a^{٢}r^{٩} = ar^{٢} \Rightarrow \frac{a^{٢}r^{٩}}{ar^{٢}} = ١ \Rightarrow ar^{٧} = ١ \qquad (٣)$$

من (٢) نجد أن:

$$ar^{٦} = \frac{١}{٣} ar^{٥} \Rightarrow \frac{ar^{٦}}{ar^{٥}} = \frac{١}{٣} \Rightarrow r = \frac{١}{٣} \qquad (٤)$$

نعوض (٤) في (٣):

$$a\left(\frac{١}{٣}\right)^{٧} = ١ \Rightarrow a\left(\frac{١}{٢١٨٧}\right) = ١ \Rightarrow a = ٢١٨٧$$

وهو المطلوب.

٤-٣ تمارين ومسائل

أولاً: عن المتتاليات الحسابية

١- أدخل ٥ أعداد بين العددين ٢- و٢٨ بحيث تشكل هذه الأعداد متوالية عددية.

٢- أوجد مجموع الأعداد الصحيحة من ١ وحتى ١٠٠.

٣- احسب مجموع المائة عدداً صحيحاً فردياً (أو زوجياً) ابتداءً من ١٠٠.

٤- أوجد الحد التاسع والتسعين من المتتالية الحسابية التالية:

$$\div \quad ١٣, \quad ١٥, \quad ١٧$$

٥- احسب مجموع العشرين حداً الأولى من المتتالية:

$$\div \quad ٣, \quad ٧, \quad ١١$$

٦- احسب مجموع الأعداد الزوجية المحصورة بين (١٠٨٥) و(٥٣٥١).

٧- ثلاثة أعداد تؤلف متتالية حسابية مجموعها ٣٢ ومجموع مربعاتها ٣٩٥ فما هي هذه الأعداد؟

٨- ما قيمة الدين الذي يؤدى خلال ١٠ سنوات على أن يدفع في السنة الأولى ١٠٠٠ ل.س وفي السنة الثانية ١٥٠٠ ل.س وفي السنة الثالثة ٢٠٠٠ وهكذا في كل سنة يزيد المبلغ المدفوع ٥٠٠ ل.س عن السنة السابقة؟

٩- اتفق موظف يعمل لدى مؤسسة مع مديرها على أن يكون دخله في أول كل سنة من أداء عمله ١٠٠٠٠ ل.س ثم يضاف إليها إضافة ثانية في كل سنة عن السنة التي تسبقها.
ما هي الإضافة السنوية إذا كان دخله الموظف خلال ٢٠ سنة ٣٩٠٠٠ ل.س؟

١٠- احسب أساس وحدود متتالية حسابية ذات ثلاثة حدود مجموعها ٦- وجداؤها ٦٤.

١١- ما رتبة الحد الذي قيمته ٩٩ في المتتالية الحسابية التالية:
١, ٣, ٥, ...

١٢- متوالية حسابية مجموع حديها الأول والثالث ١٦ ومجموع حديها الثاني والرابع ٢٢ ما هو حدها الأول؟

١٣- متوالية حسابية مجموع حديها الأول والثالث ١٦ ومجموع حديها الثاني والرابع ٢٢ ما هو أساسها؟

١٤- ما هو الحد الأول في المتتالية الحسابية التي حدها الرابع عشر ١٣٢ وأساسها ١٨؟

١٥- ما هو أساس المتتالية الحسابية التي حدها الأول ٤٤- وحدها الحادي والعشرون ٨٢؟

١٦- متتالية حسابية مجموع حدودها الثلاثة الأُوَل منها ينقص بمقدار ٢٠ عن قيمة حدها الحادي والعشرون، فإذا علمت أن حدها الأول هو ٧ أوجد حدودها الأُوَل؟

١٧- متتالية حسابية مجموع حدودها الثلاثة الأول منها ينقص بمقدار ٢٠ عن قيمة حدها الحادي والعشرون، فإذا علمت أن حدها الأول هو ٧ ما هو أساسها؟

١٨- الحد العاشر في متتالية حسابية ٤٣ والنسبة بين حديها الثالث والخامس هو ٤/٩ ماهو الحد الأول؟

١٩- الحد العاشر في متتالية حسابية ٤٣ والنسبة بين حديها الثالث والخامس هو ٤/٩ ماهو أساسها؟

٢٠- متتالية حسابية عدد حدودها ٣٦ حداً ومجموع الحدين الثاني والحادي عشر يساوي ٣٠ ومجموع الحدين السادس والسادس عشر يساوي ٣٣ ما هو الحد الأول؟

٢١- متتالية حسابية عدد حدودها ٣٦ حداً ومجموع الحدين الثاني والحادي عشر يساوي ٣٠ ومجموع الحدين السادس والسادس عشر يساوي ٣٣ ما هو أساسها؟

٢٢- ما هو الحد الأول في المتتالية الحسابية التي حدها الرابع ٣٥ ومجموع الاثني عشر حداً الأولى منها ٥٧٠؟

٢٣- ما هو الأساس في المتتالية الحسابية التي حدها الرابع ٣٥ ومجموع الأثني عشر حداً الأولى منها ٥٧٠؟

٢٤- متتالية حسابية مجموع حديها الأول والثالث ٢٢ ومجموع الخمسة عشر حداً الأولى منها ٦١٥ فما هو حدها الأول؟

٢٥- متتالية حسابية مجموع حديها الأول والثالث ٢٢ ومجموع الخمسة عشر حداً الأولى منها ٦١٥ فما هو أساسها؟

٢٦- متتالية حسابية حدها الثامن ٢٤ والنسبة بين الحدين الرابع والعاشر منها هي ٤/٧ فإذا علمت أن قيمة حدها الأخير ١٢٨ فما هو حدها الأول؟

٢٧- متتالية حسابية حدها الثامن ٢٤ والنسبة بين الحدين الرابع والعاشر منها هي ٤/٧ فإذا علمت أن قيمة حدها الأخير ١٢٨ فما هو أساسها؟

٢٨- متتالية حسابية حدها الثامن ٢٤ والنسبة بين الحدين الرابع والعاشر منها هي ٤/٧ فإذا علمت أن قيمة حدها الأخير ١٢٨ فما هو عدد حدودها؟

٢٩- متتالية حسابية حدها الخامس ينقص عن حدها العاشر بمقدار ضعف حدها الأول، إذا علمت أن حدها الثاني ٧ ما هو حدها الأول؟.

٣٠- متتالية حسابية حدها الخامس ينقص عن حدها العاشر بمقدار ضعف حدها الأول، إذا علمت أن حدها الثاني ٧ ما هو أساسها؟.

٣١- متتالية حسابية حدها الرابع ١٠ ومجموع حديها الثاني والتاسع ١٤ ما هو حدها الأول؟

٣٢- متتالية حسابية حدها الرابع ١٠ ومجموع حديها الثاني والتاسع ١٤ ما هو أساسها؟

٣٣- متتالية حسابية متناقصة حدها الأول ينقص بواحد عن مجموع حديها الثالث والسادس. وحدها السابع ينقص عن مجموع حديها الثالث والخامس بمقدار ٤٣. فما هو حدها الثامن؟

٣٤- متتالية حسابية متناقصة مجموع حديها الرابع والسادس يزيد على حدها الخامس بمقدار ١٠. وحدها الخامس ينقص عن حدها الثاني بمقدار ٩ فما هو حدها العشرون؟

٣٥- متتالية حسابية متناقصة مجموع حديها الأول والسابع ينقص عن حدها الثالث بمقدار واحد وحدها الخامس يزيد عن حدها التاسع بمقدار ٢٠ فما هي هذه المتتالية؟

٣٦- متتالية حسابية متناقصة مجموع حديها الأول والسادس يزيد عن حدها الرابع بـ ٣ وجداء حديها الثاني بالثالث يساوي ناقص حدها التاسع فما هو حدها الثاني عشر؟

٣٧- متتالية حسابية متزايدة حدها السادس يزيد على ضعف حدها الثالث بمقدار ٤٩ وحدها الثامن يزيد على حدها الأول بمقدار ٨٤ فما هو حدها الخامس عشر؟

٣٨- متتالية حسابية مجموع حديها الأول والثالث ١٦ ومجموع حديها الثاني والرابع ٢٢ فما هو أساس هذه المتتالية؟.

٣٩- متتالية حسابية متناقصة مجموع الثاني والسادس ٤٤ ومجموع حديها الخامس والسادس (١-) فما هو حدها العاشر؟

٤٠- متتالية حسابية متزايدة مجموع حديها الرابع والسابع يزيد عن حدها العاشر بمقدار ٧ وحدها السادس ينقص عن حدها الثامن بمقدار ٢٦ فما هو حدها الخامس عشر؟.

٤١- متتالية حسابية متزايدة حدها السابع يزيد على حدها الأول بمقدار ٢٤ وحدها الرابع يعادل ١/٥ حدها الأول فما هو حدها الخامس عشر؟

ثانياً: عن المتتاليات الهندسية

١- ما العدد الذي يجب إضافته لكل من الأعداد ١,٢,١٤- لتؤلف متتالية هندسية؟

٢- أوجد الكسور العادية المولدة لكسور العشرية الدورية:

(i) ٠.٢٥٢١٢١٢١, (ii) ٠.١٢٢٥٢٥٢٥, (iii) ٠.١١٢١٢١٢, (iv) ٠.٠٩٩٩٩

٣- مجموع حدود متتالية هندسية متناقصة غير متناهية ٢٠ والفرق بين حديها الأول والثاني ١١.٢٥ فما هي هذه المتتالية؟

٤- احسب الحد الأول والأخير من متتالية هندسية أساسها ٠.٢٥ وعدد حدودها ٦ ومجموعها ٢٧٣٠.

٥- احسب الحد الأول ومجموع حدود متتالية هندسية التي حدها الأخير ٣٨٤ وأساسها ٢ وعدد حدودها ٨.

٦- ما هي حدود المتتالية الهندسية المؤلفة من ٦ حدود مجموعها ٧٨١٢ وأساسها ٥.

٧- برهن أن:

$$١ + r + r^{٢} + \cdots + r^{n-١} = \frac{r^n - ١}{r - ١}$$

٨- متتالية هندسية حدودها موجبة فإذا كان $a_٥ + ٢a_٦ = ١٠a_٨$ وكان $a_٩ = ١٥٣٦$ فأوجد $a_٧$.

٩- أوجد مجموع المتتالية اللانهائية: ٨,٢,١/٢,⋯.

١٠- أوجد الكسر العادي المولد للكسر العشري الدوري ١.٣.

١١- أوجد أساس متتالية هندسية لا نهائية مجموعها ٣ وحدها الأول ٢.

١٢- أوجد أساس متتالية هندسية لا نهائية حدها الأول يساوي مجموع جميع الحدود التي تليه.

١٣- احسب a, r إذا كان:

$$a + ar + ar^{٢} + \cdots \infty = ١٤$$
$$a^{٣} + a^{٣}r^{٣} + a^{٣}r^{٦} + \cdots \infty = ٣٩٢$$

١٤- بفرض أن $x < ١$ برهن أن:

$$S = x + ٣x^{٢} + ٥x^{٣} + ٧x^{٤} + \cdots \infty = \frac{x(١ + x)}{(١ - x)^{٢}}$$

١٥- كم حداً يجب أخذه من المتتالية الهندسية $١, ٢^{-١}, ٢^{-٢}, \ldots$ حتى يكون الفرق بين مجموع هذه الحدود وبين ٢ أقل $١٠^{-٦}$.

١٦- إذا كونت الأعداد: a, b, c متتالية هندسية، فأثبت أن:

$$\frac{ab - cd}{b^{٢} - c^{٢}} = \frac{a + c}{b}$$

١٧- ثلاثة أعداد تكون متتالية هندسية مجموعها يساوي ٧٠ وإذا ضرب العدد الأول في ٤، والعدد الثاني في ٥، والعدد الثالث في ٤ كونت نواتج الضرب متتالية حسابية.

١٨- إذا كانت $٢□, ٣□, ٤□$ متتالية حسابية وكانت $٢□ - ٣□, ٢□ - ٤□$ متتالية هندسية فأوجد نسبة c إلى b.

١٩- متتالية هندسية لا نهائية كل حد من حدودها يساوي ضعف مجموع الحدود التالية له فإذا كان الحد الرابع منها ٣، فما المتتالية؟

٢٠- متتالية هندسية لا نهائية كل حد من حدودها يساوي ٧ أمثال مجموع الحدود التالية له فإذا كان مجموع المتتالية إلى ∞ ابتداءً من الحد الأول يساوي ٤ فما هي المتتالية.

٢١- متتالية هندسية حدودها موجبة، فإذا كان مجموع الحدين الأول والثالث يساوي ٢٠ وكان مجموع الحدين الثالث والخامس يساوي خمسة أمثال مربع الحد الثاني فأوجد الحد الأول والسادس.

٢٢- ثلاثة أعداد موجبة تكون متتالية هندسية مجموعها ١٤، ومجموع مقلوب هذه الأعداد يساوي ٧/٨ أوجد هذه الأعداد.

٢٣- ثلاثة حدود تشكل متتالية هندسية مجموعها ٢٢٤ وحاصل طرح مقلوب هذه الأعداد يساوي ٩٦، ما هي هذه الحدود؟

٢٤- متتالية هندسية متناقصة، مجموع حديها الثاني والثالث هو ١٠/٢١ وجداء الحد الرابع بمقلوب الحد الأول هو ٨/٢٧ فما هو الحد الخامس؟

٢٥- أوجد الحد الثامن في متتالية هندسية متزايدة، فيها الحد السادس يعادل ٨١، ضعف حدها الثاني وجداء حديها الرابع والسادس يعادل مجموع حديها الخامس والسادس.

٢٦- أوجد الحد الأول في متتالية هندسية متزايدة، فيها الحد الخامس يعادل ربع حدها السادس وجداء حديها الثاني بالرابع يعادل مقلوب حدها التاسع.

٢٧- أوجد الحد العاشر في متتالية هندسية متناقصة، فيها حاصل قسمة حدها السادس على حدها العاشر هو ١٦ ومجموع الحدين الرابع والأول يزيد على حدها السادس بـ ٣٥/٩٦.

٢٨- أوجد الحد الأول في متتالية هندسية متزايدة، فيها حاصل قسمة حدها السابع على ٨ يساوي حدها الرابع وحدها السادس يساوي ١٩٢.

٢٩- أوجد الحد الأول في متتالية هندسية متزايدة، فيها مجموع الحدين الأول والثاني ٢١ وتفاضل هذين الحدين هو ٧.

٣٠- متتالية هندسية متناقصة، فيها مجموع الحدين الخامس والسادس ٤/٩، ومجموع حديها الخامس والسابع ١٠/٢٧ فما هو حدها الحادي عشر؟.

٣١- أوجد الحد الأول في متتالية هندسية متناقصة، فيها جداء الحدين الرابع والثاني يعادل الحد الثالث ومقلوب الحد السابع يعادل ٢٧ أمثال الحد الثاني.

٣٢- أوجد الحد الأول في متتالية هندسية متناقصة، فيها جداء الحدين الأول بالعاشر يعادل الحد الثالث والحد السابع يعادل ثلث الحد السادس.

٣٣- ثلاثة أعداد تشكل متتالية حسابية متزايدة مجموعها (-٤٢). إذا أضفنا للحد الأول ٢٢ وللحد الثاني ٢٣ وللحد الثالث ٣٦ فنحصل على متتالية هندسية. ما هي هذه المتتالية الهندسية؟

٣٤- ثلاثة أعداد تشكل متتالية حسابية متزايدة مجموعها (٢١). إذا أضفنا للحد الأول ١ وللحد الثاني ١ وللحد الثالث ٥ فنحصل على متتالية هندسية متزايدة. ما هي هذه المتتالية الحسابية؟

٣٥- ثلاثة أعداد تشكل متتالية حسابية متزايدة مجموعها (١٢). إذا أضفنا للحد الأول ١١ وللحد الثاني ١٢ وللحد الثالث ٤٩ فنحصل على متتالية هندسية متزايدة. ما هي هذه المتتالية الحسابية؟

٣٦- ثلاثة أعداد تشكل متتالية حسابية مجموعها (-٢٧). إذا أضفنا للحد الأول ١٢ وللحد الثاني ٢٥ وللحد الثالث ٤٦ فنحصل على متتالية هندسية. ما هي هذه المتتالية الهندسية؟

٣٧- ثلاثة أعداد تشكل متتالية حسابية مجموعها (-١٨). إذا أضفنا للحد الأول ٤ وللحد الثاني ١٨ وللحد الثالث ٥٩ فنحصل على متتالية هندسية. ما هي هذه المتتالية الهندسية؟

٣٨- ثلاثة أعداد تشكل متتالية حسابية مجموعها (-٣٣). إذا أضفنا للحد الأول ٢١ وللحد الثاني ٢١ وللحد الثالث ٢٦ فنحصل على متتالية هندسية متناقصة. ما هي هذه المتتالية الهندسية المتناقصة؟

٣٩- ثلاثة أعداد تشكل متتالية حسابية مجموعها (-٣٦). إذا أضفنا للحد الأول ٢٢ وللحد الثاني ٢٢ وللحد الثالث ٢٧ فنحصل على متتالية هندسية متناقصة. ما هي هذه المتتالية الهندسية؟

٤٠- ثلاثة أعداد تشكل متتالية حسابية مجموعها (-٢٤). إذا أضفنا للحد الأول ٢٠ وللحد الثاني ١٧ وللحد الثالث ٢٦ فنحصل على متتالية هندسية. ما هو الحد الخامس عشر في المتتالية الحسابية؟

٤١- ثلاثة أعداد تشكل متتالية حسابية مجموعها (-٣٣). إذا أضفنا للحد الأول ١٩ وللحد الثاني ١٩ وللحد الثالث ٢٣ فنحصل على متتالية هندسية. ما هي هذه المتتالية الهندسية؟

الفصل الخامس: المصفوفات والعمليات عليها

٥-١ تعريف المصفوفة:

هي مجموعة منتهية من الأعداد الحقيقية متوضعة ضمن جدول مستطيل أو مربع على شكل أسطر وأعمدة.

فالشكل العام للمصفوفة هو:

$$A_{(m,n)}=\begin{bmatrix} a_{١١} & a_{١٢} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ونقول عن المصفوفة السابقة $A_{(m,n)}$ بأنها من المرتبة $m\times n$.

٥-٢ أشكال المصفوفات:

يمكن التمييز بين عدة أشكال للمصفوفات بحسب عدد الأسطر وعدد الأعمدة وبحسب عناصر المصفوفة. وهذه الأشكال هي:

٥-٢-١ المصفوفة المربعة:

هي المصفوفة من المرتبة $n\times n$ والشكل العام للمصفوفة المربعة هو:

$$S_{(n,n)}=\begin{bmatrix} s_{١١} & s_{١٢} & \cdots & s_{1j} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2j} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ s_{i1} & s_{i2} & \cdots & s_{ij} & \cdots & s_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nj} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix}$$

تسمى العناصر $s_{١١},s_{٢٢},\cdots,s_{nn}$ عناصر القطر الرئيسي.

٥-٢-٢ المصفوفة الصفرية (المعدومة):

هي مصفوفة كافة عناصرها أصفاراً. إذن فالشكل العام لها هو:

$$O_{(m,n)}=\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ٠ & ٠ & ٠ & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

٥-٢-٣ المصفوفة العمود والمصفوفة السطر:

مصفوفة السطر: إذا كان $m=١$ في المصفوفة $A_{(m,n)}$ فيمكن اعتبار المصفوفة $A_{(١,n)}$ شعاع سطر (مصفوفة السطر)، على الشكل التالي:

$$A_{(١,n)}=[a_{١} \quad a_{٢} \quad \cdots \quad a_{j} \quad \cdots \quad a_{n}]$$

مصفوفة العمود: إذا كان $n = ١$ في المصفوفة $A_{(m,n)}$ فيمكن اعتبار المصفوفة $A_{(m,١)}$ شعاع عمود (مصفوفة العمود) على النحو التالي:

$$A_{(m,١)} = \begin{bmatrix} a_١ \\ a_٢ \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

٥-٢-٤ المصفوفة الأحادية (الواحدة):

شكلها العام كما يلي ولا تكون إلا مربعة:

$$I_{(n,n)} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ٠ & ٠ & ٠ & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

هناك لكل مصفوفة مربعة مهما كانت مرتبتها مصفوفة أحادية مقابلة لها.

٥-٢-٥ المصفوفة القطرية:

الشكل العام للمصفوفة القطرية من المرتبة n، وإحدى الحالات الخاصة للمصفوفة القطرية المصفوفة العددية والشكل العام لها هو:

$$D_{(n,n)} = \begin{bmatrix} d_{١١} & ٠ & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ٠ & ٠ & ٠ & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

والشكل العام للمصفوفة العددية هو: $B_{(n,n)} = \begin{bmatrix} b & ٠ & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ٠ & ٠ & ٠ & \cdots & b \end{bmatrix}$.

٥-٢-٦ المصفوفة المثلثية العليا:

الشكل العام لهذه المصفوفة هو:

$$T_{(n,n)} = \begin{bmatrix} t_{١١} & t_{١٢} & t_{١٣} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ٠ & ٠ & ٠ & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

٥-٢-٧ المصفوفة المثلثية الدنيا:

الشكل العام لهذه المصفوفة هو:

$$T_{(n,n)} = \begin{bmatrix} t_{١١} & \cdot & \cdot & \cdots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & t_{n3} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

٥-٢-٨ المصفوفة الماركوفية:

هي مصفوفة مربعة كل عنصر فيها موجب أو معدوم، كما أن حاصل جمع عناصر أي عمود من أعمدتها يساوي الواحد. فإذا رمزنا لهذه المصفوفة بالرمز $M = [m_{ij}]$ فإن:

$$\sum_{i=١}^{n} m_{ij} = ١, \qquad \forall\, i, j, \qquad m_{ij} \geq \cdot$$

مثال (٥-١):

$$M_{(٤,٤)} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot.١ & \cdot.٣ & 0 \\ \cdot & 0.3 & 0.6 & 1 \\ \cdot & \cdot.٥ & \cdot.١ & \cdot \\ ١ & \cdot.١ & \cdot & 0 \end{bmatrix}$$

٥-٢-٩ المصفوفة المتناظرة (المتماثلة):

هي مصفوفة مربعة كل عنصرين متقابلين بالنسبة للقطر الرئيسي فيها متساويان. أي أن $x_{ij} = x_{ji}$ مهما تكن i, j $(i, j = ١, ٢, \cdots, n)$.

مثال (٥-٢):

المصفوفتان التاليتان كل منهما مصفوفة متناظرة:

$$S_{(٤,٤)} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & \cdot & 4 & 3 \\ ٤ & -١ & 3 & 5 \end{bmatrix} , \qquad S_{(٥,٥)} = \begin{bmatrix} ١ & -١ & ٣ & 0 & 4 \\ -١ & 0 & 7 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & ٥ & -٢ & 4 & 0 \\ ٤ & ٦ & ٤ & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ملاحظة:

يمكن اعتبار كل من المصفوفة القطرية والمصفوفة الواحدية مصفوفة متناظرة.

٥-٢-١٠ المصفوفة متعاكسة التناظر (المتقابلة):

هي مصفوفة مربعة تحقق $x_{ij} = -x_{ji}$ مهما i و j أي أن كل عنصرين متقابلين بالنسبة للقطر الرئيسي فيها متساويان بالقيمة المطلقة ومختلفان بالإشارة. أي أن $x_{ij} = -\, x_{ji}$ مهما تكن i, j $(i, j = ١, ٢, \cdots, n)$.

مثال (٥-٣):

المصفوفتان التاليتان كل منهما مصفوفة متعاكسة التناظر:

$$A_{(٤,٤)} = \begin{bmatrix} \cdot & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -٢ & 3 & 0 \end{bmatrix} , \qquad A_{(٤,٤)} = \begin{bmatrix} \cdot & -٢ & 1 & -5 \\ 2 & 0 & -4 & 9 \\ -1 & ٤ & 0 & -7 \\ ٥ & -٩ & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

٥-٢-١١ المصفوفتان المتساويتان:

نقول عن المصفوفتين $Y_{(m,n)}, X_{(m,n)}$ إنهما متساويتان إذا كان لهما المرتبة نفسها (أي عدد الأسطر نفسها وعدد الأعمدة نفسها) وكان كل عنصر في المصفوفة الأولى مساوياً للعنصر المقابل له في المصفوفة الثانية. إذن:

$$X_{(m,n)} = Y_{(m,n)} \Leftrightarrow \forall\, x_{ij} \in X_{(m,n)}, \qquad \forall\, y_{ij} \in Y_{(m,n)} \;:\; x_{ij} = y_{ij}$$

حيث: $i = ١,٢,\cdots,m$ و $j = ١,٢,\cdots,n$.

٥-٣ العمليات على المصفوفات:

نقصد بالعمليات على المصفوفات عمليات الجمع، الطرح، الضرب، التدوير.

٥-٣-١ جمع المصفوفات:

يشترط في عملية جمع مصفوفتين أن يكون لهما المرتبة نفسها. ونحصل على مجموع مصفوفتين بجمع كل عنصر من المصفوفة الأولى مع العنصر الذي يقابله في المصفوفة الثانية. فإذا كان لدينا المصفوفتان: $X_{(m,n)}, Y_{(m,n)}$:

$$X_{(m,n)} = \begin{bmatrix} x_{١١} & x_{١٢} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mj} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}, \quad Y_{(m,n)} = \begin{bmatrix} y_{١١} & y_{١٢} & \cdots & y_{1j} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2j} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ y_{i1} & y_{i2} & \cdots & y_{ij} & \cdots & y_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{mj} & \cdots & y_{mn} \end{bmatrix}$$

اللتان لهما المرتبة نفسها فإن حاصل جمع المصفوفتين $X_{(m,n)} + Y_{(m,n)}$، ولنرمز له بـ $Z_{(m,n)}$، نحصل عليه بأن نجمع كل عنصر من المصفوفة $X_{(m,n)}$ مع العنصر الذي يقابله في المصفوفة $Y_{(m,n)}$ فنجد أن:

$$Z_{(m,n)} = X_{(m,n)} + Y_{(m,n)} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_{١١} + y_{١١} & x_{١٢} + y_{١٢} & \cdots & x_{١j} + y_{1j} & \cdots & x_{١n} + y_{1n} \\ x_{٢١} + y_{21} & x_{٢٢} + y_{22} & \cdots & x_{٢j} + y_{2j} & \cdots & x_{٢n} + y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ x_{i1} + y_{i1} & x_{i2} + y_{i2} & \cdots & x_{ij} + y_{ij} & \cdots & x_{in} + y_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} + y_{m1} & x_{m2} + y_{m2} & \cdots & x_{mj} + y_{mj} & \cdots & x_{mn} + y_{mn} \end{bmatrix}$$

وتتمتع عملية جمع المصفوفات بالخواص التالية:

١- عملية الجمع تبديلية.

٢- عملية الجمع تجميعية.

٣- عملية جمع المصفوفات لها عنصر حيادي هو المصفوفة الصفرية $O_{(m,n)}$.

٤- في جمع المصفوفات لكل مصفوفة نظير.

٥-٣-٢ ضرب مصفوفة بعدد حقيقي:

لتكن لدينا المصفوفة $X_{(m,n)}$ والعدد الحقيقي $\alpha \in \mathbb{R}$. إن حاصل ضرب هذه المصفوفة بالعدد الحقيقي $\alpha \in \mathbb{R}$ ولنرمز له بـ $\alpha\, X_{(m,n)}$ هو مصفوفة عناصرها هي عناصر المصفوفة $X_{(m,n)}$ نفسها بعد ضرب كل منها بالعدد الحقيقي α. أي أن:

$$\alpha\, X_{(m,n)} = \alpha \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mj} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha \cdot x_{11} & \alpha \cdot x_{12} & \cdots & \alpha \cdot x_{1j} & \cdots & \alpha \cdot x_{1n} \\ \alpha \cdot x_{21} & \alpha \cdot x_{22} & \cdots & \alpha \cdot x_{2j} & \cdots & \alpha \cdot x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \cdot x_{i1} & \alpha \cdot x_{i2} & \cdots & \alpha \cdot x_{ij} & \cdots & \alpha \cdot x_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \cdot x_{m1} & \alpha \cdot x_{m2} & \cdots & \alpha \cdot x_{mj} & \cdots & \alpha \cdot x_{mn} \end{bmatrix}$$

حالة خاصة:

إن ناتج جداء المصفوفة $X_{(m,n)}$ بالعدد $\alpha = -١$ هو مصفوفة النظير $\overline{X}_{(m,n)}$ بالنسبة إلى عملية الجمع (نظير المصفوفة $X_{(m,n)}$). لهذا يمكن أن نكتب:

$$\overline{X}_{(m,n)} = -X_{(m,n)}$$

أو:

$$X_{(m,n)} - X_{(m,n)} = O_{(m,n)}$$

وتتمتع عملية ضرب مصفوفة بعدد بالخواص الآتية:

إذا كانت $X_{(m,n)}, Y_{(m,n)}$ مصفوفتين كل منهما من المرتبة $m \times n$ وكان α, β عددين حقيقيين فإن:

١- $\alpha \cdot \left(\beta \cdot X_{(m,n)}\right) = (\alpha \cdot \beta) X_{(m,n)}$.

٢- $(\alpha + \beta) X_{(m,n)} = \alpha\, X_{(m,n)} + \beta\, X_{(m,n)}$.

٣- $\alpha\left(X_{(m,n)} + Y_{(m,n)}\right) = \alpha\, X_{(m,n)} + \alpha\, Y_{(m,n)}$.

٤- $١ \cdot X_{(m,n)} = X_{(m,n)}$.

٥- $٠ \cdot X_{(m,n)} = O_{(m,n)}$.

حيث $O_{(m,n)}$ مصفوفة صفرية، و ٠ الصفر العددي.

٥-٣-٣ ضرب مصفوفة بمصفوفة:

إن الشرط الضروري لإمكانية ضرب مصفوفتين هو أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى (اليسرى في عملية الضرب) مساويًا لعدد أسطر الثانية (اليمنى في عملية الضرب)، أي أن يكون الدليلان المتجاوران

في مرتبتيهما متساويين. وتكون مرتبة ناتج عملية الضرب هما الدليلين المتباعدين. فإذا فرضنا أن المصفوفتين $X_{(m,n)}$ و $Y_{(n,p)}$ كانتا على النحو التالي:

$$X_{(m,n)}=\begin{bmatrix} x_{١١} & x_{١٢} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mj} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}, \qquad Y_{(n,p)}=\begin{bmatrix} y_{١١} & y_{١٢} & \cdots & y_{1k} & \cdots & y_{1p} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2k} & \cdots & y_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ y_{j1} & y_{j2} & \cdots & y_{jk} & \cdots & y_{jp} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nk} & \cdots & y_{np} \end{bmatrix}$$

فإن عملية ضرب هاتين المصفوفتين $X_{(m,n)} \cdot Y_{(n,p)}$ ممكنة لأن الدليلين المتجاورين متساويان. وإذا رمزنا لناتج عملية ضرب هاتين المصفوفتين بالرمز $Z_{(m,p)}$:

$$Z_{(m,p)} = X_{(m,n)} \cdot Y_{(n,p)}$$

فستكون $Z_{(m,p)}$ مصفوفة فيها m سطراً و p عموداً.

ونستطيع كتابة ما سبق رياضياً على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} x_{١١} & x_{١٢} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mj} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_{١١} & y_{١٢} & \cdots & y_{1k} & \cdots & y_{1p} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2k} & \cdots & y_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ y_{j1} & y_{j2} & \cdots & y_{jk} & \cdots & y_{jp} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nk} & \cdots & y_{np} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} z_{١١} & z_{١٢} & \cdots & z_{1k} & \cdots & z_{1p} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2k} & \cdots & z_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ z_{i1} & z_{i2} & \cdots & z_{ik} & \cdots & z_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{m1} & z_{m2} & \cdots & z_{mk} & \cdots & z_{mp} \end{bmatrix}$$

$$z_{١١} = x_{١١} \cdot y_{١١} + x_{١٢} \cdot y_{٢١} + \cdots + x_{١j} \cdot y_{j1} + \cdots + x_{١n} \cdot y_{n1} = \sum_{j=١}^{n} x_{١j} \cdot y_{j1}$$

$$z_{١٢} = x_{١١} \cdot y_{١٢} + x_{١٢} \cdot y_{٢٢} + \cdots + x_{١j} \cdot y_{j2} + \cdots + x_{١n} \cdot y_{n2} = \sum_{j=١}^{n} x_{١j} \cdot y_{j2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_{٢١} = x_{٢١} \cdot y_{١١} + x_{٢٢} \cdot y_{٢١} + \cdots + x_{٢j} \cdot y_{j1} + \cdots + x_{٢n} \cdot y_{n1} = \sum_{j=١}^{n} x_{٢j} \cdot y_{j1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_{ik} = x_{i1} \cdot y_{١k} + x_{i2} \cdot y_{٢k} + \cdots + x_{ij} \cdot y_{jk} + \cdots + x_{in} \cdot y_{nk} = \sum_{j=١}^{n} x_{ij} \cdot y_{jk}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_{mp} = x_{m1} \cdot y_{١p} + x_{m2} \cdot y_{٢p} + \cdots + x_{mj} \cdot y_{jp} + \cdots + x_{mn} \cdot y_{np} = \sum_{j=١}^{n} x_{mj} \cdot y_{jp}$$

ملاحظة:

لا يتغير شرط الضرب ولا كيفية إجراء عملية الضرب في الحالة الخاصة التي تكون فيها إحدى المصفوفتين أو كلاهما شعاعًا سطرًا أو شعاعًا عمودًا.

مثال (٥-٤):

أوجد ناتج ضرب الشعاع $X_{(٤,١)}$ بالشعاع $Y_{(١,٤)}$ إذا كان:

$$X_{(٤,١)} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٠ \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad Y_{(١,٤)} = [-١ \quad ٠ \quad -٢ \quad 1]$$

نلاحظ أن عملية الضرب ممكنة وناتجها مصفوفة مربعة مؤلفة من ٤ أسطر و ٤ أعمدة:

$$X_{(٤,١)} \cdot Y_{(١,٤)} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٠ \\ 3 \end{bmatrix} \cdot [-١ \quad ٠ \quad -٢ \quad 1] = \begin{bmatrix} ١ \times (-١) & ١ \times ٠ & ١ \times (-٢) & ١ \times ١ \\ ٢ \times (-١) & ٢ \times ٠ & ٢ \times (-٢) & ٢ \times ١ \\ ٠ \times (-١) & ٠ \times ٠ & ٠ \times (-٢) & ٠ \times ١ \\ ٣ \times (-١) & ٣ \times ٠ & ٣ \times (-٢) & ٣ \times ١ \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -١ & ٠ & -٢ & ١ \\ -٢ & ٠ & -٤ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \\ -٣ & ٠ & -٦ & ٣ \end{bmatrix}$$

إذا أردنا أن نضرب الشعاع $Y_{(١,٤)}$ بالشعاع $X_{(٤,١)}$ فسيكون ناتج الضرب عددًا واحداً:

$$Y_{(١,٤)} \cdot X_{(٤,١)} = [-١ \quad ٠ \quad -٢ \quad 1] \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٠ \\ 3 \end{bmatrix} = [(-١) \times ١ + ٠ \times ٢ + (-٢) \times ٠ + ١ \times ٣] = [٢] = ٢$$

مثال (٥-٥):

أوجد ناتج ضرب الشعاع $X_{(٣,١)}$ بالشعاع $Y_{(١,٧)}$:

$$X_{(٣,١)} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٣ \\ -١ \end{bmatrix}, \qquad Y_{(١,٧)} = [١ \quad ٠ \quad ٢ \quad -3 \quad 4 \quad -1 \quad 5]$$

نلاحظ أولاً أن عملية الضرب ممكنة وناتج هذه العملية هو مصفوفة مستطيلة مؤلفة من ثلاثة أسطر وسبعة أعمدة، أي أن:

$$X_{(٣,١)} \cdot Y_{(١,٧)} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٣ \\ -١ \end{bmatrix} \cdot [١ \quad ٠ \quad ٢ \quad -3 \quad 4 \quad -1 \quad 5] = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ & ٤ & -6 & 8 & -2 & 10 \\ 3 & 0 & 6 & -9 & 12 & -3 & 15 \\ -1 & 0 & -2 & 3 & -4 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

٥-٣-٤ خواص ضرب المصفوفات ببعضها:

تتمتع عملية ضرب المصفوفات بالخواص التالية:

١ – عملية ضرب المصفوفات ليست تبديلية بصورة عامة.

ملاحظة:

بالرغم من أن عملية ضرب المصفوفتين غير تبديلية بصورة عامة إلا أننا قد نصادف مصفوفتين جداؤهما تبديلي، كما في المصفوفتين القطريتين مثلاً. فإذا فرضنا أن:

$$A_{(n,n)} = \begin{bmatrix} a_{١١} & ٠ & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ٠ & ٠ & ٠ & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B_{(n,n)} = \begin{bmatrix} b_{١١} & ٠ & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ٠ & ٠ & ٠ & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

فسيكون:

$$A_{(n,n)} \cdot B_{(n,n)} = B_{(n,n)} \cdot A_{(n,n)}$$

كذلك إذا كانت إحدى المصفوفتين مربعة والأخرى مصفوفة واحدية فإن عملية الضرب تكون تبديلية. لنأخذ المصفوفتين المربعتين التاليتين:

$$I_{(٢,٢)} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}, \qquad X_{(٢,٢)} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -٤ & ٥ \end{bmatrix}$$

اللتين إحداهما مصفوفة واحدية. إن عملية ضرب هاتين المصفوفتين تبديلية لأن:

$$\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -٤ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -٤ & ٥ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -٤ & ٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -٤ & ٥ \end{bmatrix}$$

٢ – عملية ضرب المصفوفات تجميعية:

أي إذا فرضنا أنه لدينا المصفوفات: $X_{(m,n)}, Y_{(n,p)}, Z_{(p,q)}$ فيكون:

$$\left[X_{(m,n)} \cdot Y_{(n,p)}\right] \cdot Z_{(p,q)} = X_{(m,n)} \cdot \left[Y_{(n,p)} \cdot Z_{(p,q)}\right] = X_{(m,n)} \cdot Y_{(n,p)} \cdot Z_{(p,q)}$$

٣ – عملية ضرب المصفوفات توزيعية على الجمع:

لنفرض أن $X_{(m,n)}, Y_{(m,n)}, Z_{(l,m)}, V_{(n,p)}$، أربع مصفوفات عندئذ يمكن كتابة هذه الخاصة بالطريقتين الآتيتين:

$$Z_{(l,m)} \cdot \left[X_{(m,n)} + Y_{(m,n)}\right] = Z_{(l,m)} \cdot X_{(m,n)} + Z_{(l,m)} \cdot Y_{(m,n)}$$
$$\left[X_{(m,n)} + Y_{(m,n)}\right] \cdot V_{(n,p)} = X_{(m,n)} \cdot V_{(n,p)} + Y_{(m,n)} \cdot V_{(n,p)}$$

٤ – جداء أية مصفوفة بالمصفوفة الصفرية (سواء من اليمين أم من اليسار) هو المصفوفة الصفرية، أي أن:

$$O_{(m,n)} \cdot A_{(n,p)} = O_{(m,p)},$$
$$A_{(m,n)} \cdot O_{(n,p)} = O_{(m,p)}$$

ملاحظة:

قد يكون ناتج عملية ضرب مصفوفتين ببعضهما مساويًا للمصفوفة الصفرية دون أن يكون أي من المصفوفتين المفروضتين مصفوفة صفرية. أي أن المصفوفة الصفرية لا تلعب في المصفوفات، الدور نفسه الذي يلعبه الصفر في الأعداد الحسابية.

مثال (٥-٦):

لتكن لدينا المصفوفتان التاليتان:

$$X_{(٢,٣)} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٣ \\ ٠ & ١ & ١ \end{bmatrix}, \qquad Y_{(٣,٢)} = \begin{bmatrix} ٣ & ١٥ \\ ١ & ٥ \\ -١ & -٥ \end{bmatrix}$$

حاصل ضربهما هو:

$$X_{(٢,٣)} \cdot Y_{(٣,٢)} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٣ \\ ٠ & ١ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ & ١٥ \\ ١ & ٥ \\ -١ & -٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

٥- جداء أية مصفوفة بالمصفوفة الأحادية (سواء من اليمين أم اليسار) يساوي المصفوفة الأصلية نفسها: أي أن:

$$I_{(m,m)} \cdot A_{(m,n)} = A_{(m,n)},$$
$$A_{(m,n)} \cdot I_{(n,n)} = A_{(m,n)}$$

٦- ضرب مصفوفة بمصفوفة قطرية من اليسار يعطينا مصفوفة جديدة ناتجة عن ضرب كل سطر من أسطر المصفوفة الأصلية بالعنصر القطري المقابل في المصفوفة القطرية. كذلك فإن ضرب مصفوفة بمصفوفة قطرية من اليمين يعطينا مصفوفة جديدة ناتجة عن ضرب كل عمود من أعمدة المصفوفة الأصلية بالعنصر القطري المقابل في المصفوفة القطرية.

مثال (٥-٧):

لتكن لدينا مصفوفتان إحداهما قطرية كما يلي:

$$X_{(٣,٣)} = \begin{bmatrix} -١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٥ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{bmatrix}, \qquad Y_{(٣,٢)} = \begin{bmatrix} ٣ & ١٥ \\ ١ & ٥ \\ -١ & -٥ \end{bmatrix}$$

إن حاصل ضرب هاتين المصفوفتين هو:

$$X_{(٣,٣)} \cdot Y_{(٣,٢)} = \begin{bmatrix} -١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٥ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٣ & ١٥ \\ ١ & ٥ \\ -١ & -٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ & -١٥ \\ ٥ & ٢٥ \\ -٢ & -١٠ \end{bmatrix}$$

٧- في ضرب المصفوفات لا يمكن إجراء عملية الاختصار:

فإذا كان لدينا المصفوفات: $X_{(m,n)}, Y_{(n,p)}, Z_{(n,p)}$ وإذا فرضنا أن العلاقة الآتية محققة:

$$X_{(m\,,n)} \cdot Y_{(n,p)} = X_{(m\,,n)} \cdot Z_{(n,p)}$$

فهذا لا يعني بالضرورة أن تتحقق العلاقة الآتية: $Y_{(n,p)} = Z_{(n,p)}$.

٥-٣-٥ منقول (أو تدوير) المصفوفات:

إن منقول المصفوفة (أو مدور المصفوفة) هو مصفوفة جديدة نحصل عليها بتحويل أسطر المصفوفة إلى أعمدة وأعمدة المصفوفة إلى أسطر، مع الاحتفاظ بترتيب مواضع العناصر.

فإذا فرضنا أن لدينا المصفوفة $X_{(m\,,n)}$ التي لها m سطراً و n عموداً فإن منقولها (أو مدورها) ولنرمز له بالرمز $X^T_{(n\,,m)}$ سيكون مصفوفة لها n سطراً و m عموداً كما يلي:

$$X_{(m\,,n)} = \begin{bmatrix} x_{١١} & x_{١٢} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mj} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow X^T_{(n\,,m)} = \begin{bmatrix} x_{١١} & x_{٢١} & \cdots & x_{i1} & \cdots & x_{m1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{i2} & \cdots & x_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ x_{1j} & x_{٢\square} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{mj} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{١\square} & x_{٢\square} & \cdots & x_{in} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال (٥-٨):

لتكن لدينا المصفوفة $X_{(٤,٣)}$ على النحو التالي:

$$X_{(٤,٣)} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & 2 \\ ٠ & ٦ & 5 \\ ٣ & -1 & 10 \\ 0 & ٢ & 3 \end{bmatrix}$$

إن منقول هذه المصفوفة هو:

$$X^T_{(٣,٤)} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & 3 & ٠ \\ ٠ & 6 & -1 & 2 \\ 2 & ٥ & 10 & ٣ \end{bmatrix}$$

وتتمتع عملية تدوير المصفوفات بالخواص التالية:

١- مدور مجموع مصفوفتين يساوي مجموع مدوريهما:

$$\left[X_{(m,n)} + Y_{(m,n)}\right]^T = X^T_{(n\,,m)} + Y^T_{(n\,,m)}$$

٢- مدور جداء مصفوفة بعدد حقيقي يساوي العدد الحقيقي مضروباً بمدور المصفوفة:

$$\left[\alpha \cdot X_{(m,n)}\right]^T = \alpha \cdot X^T_{(n,m)}$$

٣- مدور جداء مصفوفتين يساوي جداء مدوريهما بعد تبديل مكاني المصفوفتين في الجداء وتبديل أدلة كل منهما:

$$\left[X_{(m,n)} \times Y_{(n,p)}\right]^T = Y^T_{(p,n)} \times X^T_{(n,m)}$$

٤- مدور مدور مصفوفة هو المصفوفة الأصلية، أي أن:

$$\left[X^T_{(n,m)}\right]^T = X_{(m,n)}$$

ملاحظة:

إذا كانت المصفوفة $S_{(n,n)}$ متناظرة فإنها تساوي مدورها **(**منقولها**)**:

$$S_{(n,n)} = S^T_{(n,n)}$$

وإذا كانت المصفوفة $A_{(n,n)}$ متعاكسة التناظر فإنها تساوي مدورها مضروبًا بـ ١-:

$$A_{(n,n)} = -A^T_{(n,n)}$$

ملاحظة:

مقابل كل مصفوفة مربعة $M_{(n,n)}$ يمكن إيجاد مصفوفتين، إحداها متناظرة $S_{(n,n)}$ والأخرى متعاكسة التناظر $A_{(n,n)}$.

للتحقق من صحة هذه القاعدة، لنفرض أننا استطعنا كتابة المصفوفة المربعة المفروضة $M_{(n,n)}$ على صورة مجموع المصفوفتين المتناظرة $S_{(n,n)}$ ومتعاكسة التناظر $A_{(n,n)}$:

$$M_{(n,n)} = S_{(n,n)} + A_{(n,n)} \qquad (١)$$

ولنحاول إيجاد كل من هاتين المصفوفتين $S_{(n,n)}$ و $A_{(n,n)}$.

لنأخذ مدور المصفوفات في كل طرف من العلاقة السابقة فنجد أن:

$$M^T_{(n,n)} = S^T_{(n,n)} + A^T_{(n,n)}$$

وبما أن $S_{(n,n)}$ مصفوفة متناظرة و $A_{(n,n)}$ مصفوفة متعاكسة التناظر فسيكون:

$$A^T_{(n,n)} = -A_{(n,n)}, \qquad S^T_{(n,n)} = S_{(n,n)}$$

لهذا سيكون:

$$M^T_{(n,n)} = S_{(n,n)} - A_{(n,n)} \qquad (٢)$$

۞ فإذا جمعنا المعادلتين (١) و(٢) طرفاً لطرف نجد أن:

$$M_{(n,n)} + M^T_{(n,n)} = ٢\, S_{(n,n)}$$

ومنه فإن المصفوفة المتناظرة $S_{(n,n)}$ التي نحصل عليها من المصفوفة $M_{(n,n)}$ ستكون:

$$S_{(n,n)} = \frac{١}{٢}\left[M_{(n,n)} + M^T_{(n,n)}\right]$$

۞ وإذا طرحنا المعادلتين (١) و(٢) طرفاً من طرف نجد أن:

$$M_{(n,n)} - M^T_{(n,n)} = ٢\, A_{(n,n)}$$

فالمصفوفة متعاكسة التناظر $A_{(n,n)}$ التي نحصل عليها من المصفوفة $M_{(n,n)}$ ستكون:

$$A_{(n,n)} = \frac{١}{٢}\left[M_{(n,n)} - M^T_{(n,n)}\right]$$

مثال (٥-٩):

لنوجد المصفوفتين، المتناظرة ومتعاكسة التناظر من المصفوفة الآتية:

$$M_{(٤,٤)} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & 2 & -١ \\ ٣ & ٤ & 0 & ١ \\ ١ & 2 & 0 & 3 \\ -1 & ٠ & 2 & ١ \end{bmatrix}$$

إن المصفوفة المتناظرة $S_{(٤,٤)}$ هي:

$$S_{(٤,٤)} = \frac{١}{٢}\left[M_{(٤,٤)} + M^T_{(٤,٤)}\right] = \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ٠ & ١ & 2 & -١ \\ ٣ & ٤ & 0 & ١ \\ ١ & 2 & 0 & 3 \\ -1 & ٠ & 2 & ١ \end{bmatrix} + \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ٠ & ٣ & 1 & -١ \\ ١ & ٤ & 2 & ٠ \\ ٢ & 0 & 0 & 2 \\ -1 & ١ & 3 & ١ \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} ٠ & ٢ & 3/2 & -١ \\ ٢ & ٤ & 1 & ١/٢ \\ ٣/٢ & 1 & 0 & 5/2 \\ -1 & ١/٢ & 5/2 & ١ \end{bmatrix}$$

والمصفوفة متعاكسة التناظر $A_{(٤,٤)}$ هي:

$$S_{(٤,٤)} = \frac{١}{٢}\left[M_{(٤,٤)} - M^T_{(٤,٤)}\right] = \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ٠ & ١ & 2 & -١ \\ ٣ & ٤ & 0 & ١ \\ ١ & 2 & 0 & 3 \\ -1 & ٠ & 2 & ١ \end{bmatrix} - \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ٠ & ٣ & 1 & -١ \\ ١ & ٤ & 2 & ٠ \\ ٢ & 0 & 0 & 2 \\ -1 & ١ & 3 & ١ \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} ٠ & -١ & 1/2 & ٠ \\ ١ & ٠ & -1 & ١/٢ \\ -١/٢ & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & -١/٢ & -1/2 & ٠ \end{bmatrix}$$

نتيجة:

من العلاقة (١) نستنتج أن كل مصفوفة مربعة $M_{(n,n)}$ يمكن كتابتها في صورة مجموع مصفوفتين الأولى متناظرة والثانية متعاكسة التناظر.

٥-٤ تمارين ومسائل:

١- بفرض أن لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{bmatrix} -٢ & ٣ & ١ \\ ٠ & ١ & -١ \\ ٢ & ٠ & ٤ \end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix} ٤ & ٥ & -٣ \\ ٠ & -٢ & ١ \\ ١ & ٣ & ٠ \end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix} ٢ & ٤ & -١ \\ ٠ & ٣ & ٠ \\ -١ & ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

والمطلوب احسب ما يلي:

أ- $A+B+C$ ثم تحقق من الخاصة التجميعية لهذه العلاقة.

ب- $A+B-C$ و $A-B+C$.

جـ- αA و βB و γC حيث $\alpha=٢,\beta=-١,\gamma=-٣$.

د- $A\cdot B$ و $A\cdot C$ و $B\cdot C$ ثم تحقق من أن: $A\cdot B\neq B\cdot A$ و $B\cdot C\neq C\cdot B$.

هـ- $(A+B)\cdot C$ و $C\cdot(A-B)$.

٢- بفرض أن:

$$A=\begin{bmatrix} ٢ \\ -٣ \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} -٢ \\ ١ \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} ٢ & -٥ \\ -١ & ١ \end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix},\quad E=\begin{bmatrix} -٢ & -٣ \\ -١ & ١ \end{bmatrix},$$

$$F=\begin{bmatrix} ٢ & -١ & ٠ \\ ١ & ٣ & -١ \end{bmatrix},\quad G=\begin{bmatrix} ٣ & -٢ & ١ \\ ١ & -١ & ٠ \end{bmatrix},\quad H=\begin{bmatrix} ٢ & -٣ & ١ \end{bmatrix},\quad J=\begin{bmatrix} ٠ & -١ & ١ \end{bmatrix},$$

$$\alpha=\begin{bmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ -١ & ١ & ٠ \\ ٢ & -١ & ١ \end{bmatrix},\quad M=\begin{bmatrix} ١ & -٢ & ١ \\ -١ & ٠ & ٢ \\ ١ & ٠ & -١ \end{bmatrix},\quad N=\begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ -١ & ٢ \\ ١ & -١ \end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ١ & ٤ \\ -٥ & -٢ \end{bmatrix}$$

بين فيما إذا كانت التعابير التالية ذات معنى أو لا؟

$$(i)\quad A+B,\quad ٥\square,\quad M-N,\quad ٢\square+٥\alpha,\quad ٢\square-٣٦$$
$$(ii)\quad CF,\quad JN,\quad MP,\quad DF,\quad PE,\quad HF$$
$$(iii)\quad GL,\quad MN+FL,\quad AHN$$

٣- بفرض أن:

$$A=\begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ ٥ & -١ \end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix} ١ & -٣ & -٥ \\ ٢ & ١ & ٠ \end{bmatrix},$$

أوجد المصفوفة X التي تحقق العلاقة $AX=B$.

٤- لتكن لدينا المصفوفتان:

$$A=\begin{bmatrix} ٣ & ٤ & ٢ \\ ٠ & ٣ & ٠ \\ ٤ & ١ & ٢ \end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix} ١ & ٦ & ٧ \\ ١ & ٤ & ٣ \\ ١ & -١ & ٢ \end{bmatrix},$$

والمطلوب:

a) أوجد المصفوفة X التي تحقق العلاقة $B = A \cdot X$، ثم استنتج قيمة محددها.

b) أوجد $C = A \cdot B$.

c) أوجد قيمة محددي كل من A و B ثم استنتج قيمة محدد $C = A \cdot B$.

٥- لتكن لدينا المصفوفتان:

$$A = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ ٣ & -١ & ٤ \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -١ & ١ & ١ \\ -٢ & ٣ & ٥ \end{bmatrix},$$

والمطلوب:

a) أوجد حاصل ضرب $A \cdot B^T$.

b) أوجد الناتج $٢□ - ٣□$.

c) أوجد المصفوفة X التي تحقق العلاقة $A + X/٢ = ٣□$.

٦- أوجد المصفوفة X التي تحقق المعادلة:

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} ٤ & -٦ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ٦ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & ٤ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$$

٧- بفرض أن:

$$A = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & -١ \\ ١ & ٠ & -٢ \\ -١ & ١ & ٣ \end{bmatrix}$$

وأن: $f(x) = ٢x^٢ - ٣□ - ١$، أوجد: $f(A)$.

٨- بفرض أن A, B, C مصفوفات تحقق العلاقتين $AC = BC = CB$.

برهن أن: $(AB + BA)C = C(AB + BA)$.

٩- بفرض أن $tr(A)$ يرمز لأثر المصفوفة المربعة (يساوي مجموع عناصر قطرها الرئيسي) برهن أن:

$$tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$$
$$tr(AB) = tr(BA)$$
$$tr(ABC) = tr(BCA) = tr(CAB) = tr(ACB) = tr(BAC) = tr(CBA)$$

١٠- عين a, b بحيث يكون:

$$\begin{bmatrix} a & ٢ \\ ٢ & ٢□ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢□ & ٥ \\ -٤ & ٣□ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٧ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix}$$

١١- بفرض أن:

$$A = \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$$

احسب: $A^{٤}, A^{٣}, A^{٢}$.

١٢- بفرض أن:

$$A = \begin{bmatrix} ١ & a \\ a & ١ \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b & ١ \\ ١ & b \end{bmatrix}$$

أثبت أن: $(A + B)^{٢} = A^{٢} + ٢\square\square + B^{٢}$.

١٣- بفرض أن:

$$X = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$$

عين قيمة كثير الحدود المصفوفي التالي:

$$f(X) = X^{٢} + ٢\square - ٣ \cdot I_{٢}$$

١٤- بين أنه مهما تكن A المصفوفة المربعة من المرتبة الثانية:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

فهي تحقق العلاقة:

$$A^{٢} - (a + d) \cdot A + (ad - bc) \cdot I_{٢} = O_{(٢,٢)}$$

الفصل السادس: المعينات (المحددات)

إن معين المصفوفة المربعة هو عبارة عن عدد يمكن حسابه من عناصر المصفوفة بطريقة معينة. ولا يجب أن يغيب عن ذهننا أن هناك فارقاً كبيراً بين المعين والمصفوفة. فالمعين هو عدد فقط كما ذكرنا، في حين أن المصفوفة مجموعة أعداد حقيقية متوضعة في أسطر وأعمدة.

٦-١ طرائق حساب المعينات:

٦-١-١ المعين من المرتبة الثانية:

لتكن لدينا المصفوفة الآتية: $\begin{bmatrix} a_١ & b_١ \\ a_٢ & b_٢ \end{bmatrix}$ من المرتبة الثانية. إن معين هذه المصفوفة:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_١ & b_١ \\ a_٢ & b_٢ \end{vmatrix} = a_١ b_٢ - b_١ a_٢$$

أمثلة: إن قيمة المعينات التالية هي:

$$\Delta_١ = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ٤ \end{vmatrix} = ١ \times ٤ - ٢ \times (-٣) = ٤ + ٦ = ١٠$$

$$\Delta_٢ = \begin{vmatrix} ٣ & -١ \\ ٧ & -٤ \end{vmatrix} = ٣ \times (-٤) - (-١) \times ٧ = -١٢ + ٧ = -٥$$

$$\Delta_٣ = \begin{vmatrix} -٢ & ٣ \\ -١ & ٤ \end{vmatrix} = -٢ \times ٤ - ٣ \times (-١) = -٨ + ٣ = -٥$$

٦-١-٢ خواص المعين من المرتبة الثانية:

١ – لا تتغير قيمة المعين إذا بدلنا سطريه بعموديه أو بدلنا عموديه بسطريه. أي أن:

$$\begin{vmatrix} a_١ & b_١ \\ a_٢ & b_٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_١ & a_٢ \\ b_١ & b_٢ \end{vmatrix}$$

٢ – تتبدل إشارة المعين إذا بدلنا موقعي سطريه (عموديه). أي أن:

$$\begin{vmatrix} a_١ & b_١ \\ a_٢ & b_٢ \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_١ & a_١ \\ b_٢ & a_٢ \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_١ & b_١ \\ a_٢ & b_٢ \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_٢ & b_٢ \\ a_١ & b_١ \end{vmatrix}$$

٣ – لضرب (قسمة) المعين بعدد ما وليكن α $(\alpha \neq ٠)$ يكفي أن نضرب عنصري سطر (عنصري عمود) في المعين بالعدد α، أي أنه إذا كان:

$$\alpha \begin{vmatrix} a_١ & b_١ \\ a_٢ & b_٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha\, a_١ & \alpha\, b_١ \\ a_٢ & b_٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_١ & \alpha\, b_١ \\ a_٢ & \alpha\, b_٢ \end{vmatrix}$$

كذلك فإن عملية إخراج عامل مشترك من عناصر سطر ما (عمود ما) تجعل بالإمكان إخراج هذا العامل المشترك من قيمة المعين بالذات.

٤ – إذا كان عنصرا أحد السطرين (أو أحد العمودين) مساويين لعنصري السطر الآخر (أو العمود الآخر) بعد ضربهما بمقدار ثابت وليكن α $(\alpha \neq ٠)$ فإن قيمة المعين تكون معدومة.

ويمكن التوصل إلى هذه الخاصة مباشرة من الخاصة الرابعة والخاصة الثالثة. فإذا كان:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha\, a & \alpha\, b \end{vmatrix}$$

فسيكون:

$$\Delta = \alpha \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = \alpha \times ٠ = ٠$$

إذا كان بالإمكان وضع عنصري أحد السطرين (أو أحد العمودين) في معين على شكل مجموع حدود عددها n حداً، فإن قيمة هذا المعين يساوي مجموع n معيناً جديداً، نحصل عليها بتفريق عناصر السطر المذكور (أو عناصر العمود المذكور) مع الاحتفاظ في كل مرة بعنصري السطر الآخر (أو العمود الآخر)، أي أن:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_{١} + a_{٢} + a_{٣} & b_{١} + b_{٢} + b_{٣} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ a_{١} & b_{١} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ a_{٢} & b_{٢} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ a_{٣} & b_{٣} \end{vmatrix}$$

ونستطيع التحقق من هذه الخاصة وذلك بإيجاد قيمة كل طرف وحده.

٥- لا تتغير قيمة المعين إذا أضفنا عنصري أحد سطريه (أو عنصري أحد عموديه) بعد ضربهما بعدد ما إلى عنصري السطر الآخر (أو إلى عنصري العمود الآخر). أي أن:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_{١} & b_{١} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + ٣b & b \\ a_{١} + ٣b_{١} & b_{١} \end{vmatrix}$$

٦-١-٣ المعين من المرتبة الثالثة:

يأخذ المعين من المرتبة الثالثة الشكل التالي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{١١} & a_{١٢} & a_{١٣} \\ a_{٢١} & a_{٢٢} & a_{٢٣} \\ a_{٣١} & a_{٣٢} & a_{٣٣} \end{vmatrix}$$

ويمكن التوصل إلى إيجاد قيمة المعين باتباع إحدى الطريقتين التاليتين:

الطريقة الأولى – طريقة النشر وفق سطر أو عمود (طريقة بيزوت $Bezout$):

وفي هذه الطريقة نتبع الخطوات الثلاث الآتية:

الخطوة الأولى:

نختار أحد الأسطر (أو أحد الأعمدة) التي فيها أصفار أكثر من غيرها.

الخطوة الثانية:

نحسب ما نسميه مصغر كل عنصر في ذلك السطر (أو ذلك العمود) الذي اخترناه. ونعرف مصغر العنصر a_{ij} ونرمز له بالرمز $M(a_{ij})$ (حيث $i,j = ١,٢,٣$) بأنه المعين المتعلق بهذا العنصر والذي نحصل عليه بحذف عناصر السطر وعناصر العمود الواقع فيهما العنصر a_{ij}.

فمثلاً إن $M(a_{١١})$ هو مصغر العنصر $a_{١١}$ ونحصل عليه بحذف السطر الأول والعمود الأول في المعين الأصلي فيكون:

$$M(a_{١١}) = \begin{vmatrix} a_{٢٢} & a_{٢٣} \\ a_{٣٢} & a_{٣٣} \end{vmatrix}$$

كما أن $M(a_{١٣})$ هو مصغر العنصر $a_{١٣}$ ونحصل عليه بحذف السطر الأول والعمود الثالث في المعين الأصلي فيكون:

$$M(a_{١٣}) = \begin{vmatrix} a_{٢١} & a_{٢٢} \\ a_{٣١} & a_{٣٢} \end{vmatrix}$$

الخطوة الثالثة:

نحسب ما نسميه مرافق كل عنصر في ذلك السطر (أو ذلك العمود) الذي اخترناه. ونعرف مرافق العنصر a_{ij} بأنه مصغر العنصر a_{ij} مضروباً بـ $(-١)^{i+j}$، أي يساوي $(-١)^{i+j} \cdot M(a_{ij})$.

فمرافق العنصر $a_{١١}$:

$$(-١)^{١+١} \cdot M(a_{١١}) = M(a_{١١})$$

ومرافق العنصر $a_{١٢}$:

$$(-١)^{١+٢} \cdot M(a_{١٢}) = -M(a_{١٢})$$

وهكذا...

نلاحظ أنه إذا كان مجموع الدليلين i,j عددًا زوجيًا فإن $(-١)^{i+j} = ١$ ويكون مرافق العنصر a_{ij} مساويًا مصغره. أما إذا كان مجموع الدليلين i,j عددًا فرديًا فإن $(-١)^{i+j} = -١$ ويكون مرافق العنصر a_{ij} مساويًا مصغره مضروبًا بـ -١.

الخطوة الرابعة:

نحسب قيمة المعين بواسطة النشر وفق السطر (أو العمود) الذي اخترناه. وهذه القيمة تساوي مجموع عناصر السطر (أو مجموع عناصر العمود) المختار بعد ضرب كل عنصر بمرافقه.

فمثلاً: إن قيمة المعين بوساطة النشر وفق عناصر السطر الأول هي:

$$\Delta = a_{١١} \cdot M(a_{١١}) - a_{١٢} \cdot M(a_{١٢}) + a_{١٣} \cdot M(a_{١٣})$$

وقيمة المعين بوساطة النشر وفق عناصر السطر الثاني هي:

$$\Delta = -a_{٢١} \cdot M(a_{٢١}) + a_{٢٢} \cdot M(a_{٢٢}) - a_{٢٣} \cdot M(a_{٢٣})$$

وقيمة المعين بوساطة النشر وفق عناصر العمود الأول هي:

$$\Delta = a_{١١} \cdot M(a_{١١}) - a_{٢١} \cdot M(a_{٢١}) + a_{٣١} \cdot M(a_{٣١})$$

ملاحظة:

من طريقة حساب قيمة المعين نستنتج مباشرة أنه إذا كان في المعين سطر (أو عمود) كل عناصره أصفار فإن قيمة المعين تكون صفرًا.

ملاحظة:

يمكن تطبيق الطريقة السابقة من أجل المعينات من مرتبة أعلى من الثالثة.

أمثلة:

لنوجد قيم المعينات التالية:

$$\Delta_١ = \begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ١ \\ -١ & ٢ & ٠ \\ ٣ & ١ & -١ \end{vmatrix}, \quad \Delta_٢ = \begin{vmatrix} ٤ & ٢ & ٠ \\ ١ & ١ & -١ \\ ٣ & ٠ & ٢ \end{vmatrix}, \quad \Delta_٣ = \begin{vmatrix} ٤ & -١ & ١ \\ ١ & ٠ & ٣ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{vmatrix}$$

إن نشر المعين $\Delta_١$ وفق عناصر السطر الأول هو:

$$\Delta_١ = a_{١١} \cdot M(a_{١١}) - a_{١٢} \cdot M(a_{١٢}) + a_{١٣} \cdot M(a_{١٣})$$
$$\Delta_١ = ٣[٢ \times (-١) - ٠ \times ١] - ٠[(-١) \times (-١) - ٠ \times ٣] + ١[(-١) \times ١ - ٢ \times ٣] = -١٣$$

أما نشر المعين $\Delta_٢$ وفق عناصر السطر الثالث فهو:

$$\Delta_٢ = a_{٣١} \cdot M(a_{٣١}) - a_{٣٢} \cdot M(a_{٣٢}) + a_{٣٣} \cdot M(a_{٣٣})$$
$$\Delta_٢ = ٣[٢ \times (-١) - ٠ \times ١] - ٠ \times M(a_{٣٢}) + ٢[٤ \times ١ - ٢ \times ١] = -٢$$

أما نشر المعين $\Delta_٣$ وفق عناصر العمود الثاني فهو:

$$\Delta_٣ = -a_{١٢} \cdot M(a_{١٢}) + a_{٢٢} \cdot M(a_{٢٢}) - a_{٣٢} \cdot M(a_{٣٢})$$
$$\Delta_٣ = -(-١)[١ \times ٢ - ٣ \times ٣] + ٠ \times M(a_{٢٢}) - ١[٤ \times ٣ - ١ \times ١] = -١٨$$

تعد طريقة بيزوت الطريقة العامة والشاملة لحساب أي معين مهما كانت مرتبته.

الطريقة الثانية– طريقة الأقطار المتوازية (طريقة سيروس):

نكتب عناصر المعين كما هي ثم نضيف على يمينها مباشرة العمود الأول ثم العمود الثاني، فينتج لدينا خمسة أعمدة وثلاثة أسطر كما يلي:

$$\begin{array}{ccccc} a_{١١} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{٣٢} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

وتكون قيمة المعين مساوية:

$$\begin{aligned} \Delta = {} & a_{١١}\cdot a_{٢٢}\cdot a_{٣٣} + a_{١٢}\cdot a_{٢٣}\cdot a_{٣١} + a_{١٣}\cdot a_{٢١}\cdot a_{٣٢} \\ & - (a_{١٢}\cdot a_{٢١}\cdot a_{٣٣} + a_{١١}\cdot a_{٢٣}\cdot a_{٣٢} + a_{١٣}\cdot a_{٢٢}\cdot a_{٣١}) \end{aligned}$$

أمثلة:

أوجد قيمة المعينات التالية:

$$\Delta_{١} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ ٣ & ٠ & -١ \\ ١ & ٢ & -٢ \end{vmatrix}, \quad \Delta_{٢} = \begin{vmatrix} ٤ & ٠ & ٢ \\ -١ & ١ & ٠ \\ ٤ & ٣ & ١ \end{vmatrix}, \quad \Delta_{٣} = \begin{vmatrix} ٧ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ١ & ٣ \\ ٢ & -١ & ٠ \end{vmatrix}$$

لحساب قيمة المعين الأول $\Delta_{١}$ نكتب:

$$\begin{array}{ccccc} ٢ & ١ & ٣ & 2 & 1 \\ ٣ & ٠ & -١ & ٣ & 0 \\ ١ & ٢ & -٢ & 1 & 2 \end{array}$$

فتكون قيمة المعين:

$$\begin{aligned} \Delta_{١} = {} & [٢\times ٠\times(-٢) + ١\times(-١)\times ١ + ٣\times ٣\times ٢] \\ & - [٣\times ٠\times ١ + ٢\times(-١)\times ٢ + ١\times ٣\times(-٣)] = ٢٧ \end{aligned}$$

ولحساب قيمة المعين الثاني $\Delta_{٢}$ نكتب:

$$\begin{array}{ccccc} ٤ & ٠ & ٢ & 4 & 0 \\ -١ & ١ & ٠ & -1 & 1 \\ ٤ & ٣ & ١ & 4 & 3 \end{array}$$

فتكون قيمة المعين:

$$\Delta_{٢} = ٤ + ٠ + (-٦) - (٨ + ٠ + ٠) = -١٠$$

لحساب قيمة المعين الثالث $\Delta_{٣}$ نكتب:

$$\begin{array}{ccccc} ٧ & ٠ & ٢ & 7 & 0 \\ ٠ & ١ & ٣ & ٠ & 1 \\ ٢ & -١ & ٠ & 2 & -1 \end{array}$$

فتكون قيمة المعين:

$$\Delta_{٣} = ٠ + ٠ + ٠ - (٤ + (-٢١) + ٠) = ١٧$$

ملاحظة:

تستخدم طريقة الأقطار المتوازية (طريقة سيروس) فقط لمعينات المرتبة الثالثة.

٦-١-٤ خواص المعين من المرتبة الثالثة:

تتمتع معينات المرتبة الثالثة بالخواص نفسها التي تتمتع بها معينات المرتبة الثانية، ولهذا لن نعيد هنا ذكر هذه الخواص.

ملاحظة:

إن معين المصفوفة القطرية هو جداء عناصرها القطرية، أي أن:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{١١} & ٠ & ٠ \\ ٠ & a_{٢٢} & ٠ \\ ٠ & ٠ & a_{٣٣} \end{vmatrix}=a_{١١}\cdot a_{٢٢}\cdot a_{٣٣}$$

كما أن معين المصفوفة العددية هو مكعب أحد عناصرها القطرية، أي أن:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{١١} & ٠ & ٠ \\ ٠ & a_{١١} & ٠ \\ ٠ & ٠ & a_{١١} \end{vmatrix}=a_{١١}\cdot a_{١١}\cdot a_{١١}=a_{١١}^{٣}$$

٦-١-٥ المعين من المرتبة n:

إن الطريقة المستخدمة لحساب المعين من المرتبة n هي فقط طريقة بيزوت.

مثال (٦-١):

أوجد قيمة المعين من المرتبة الرابعة الآتي:

$$\Delta=\begin{vmatrix} ٠ & ١ & -1 & ٢ \\ ٣ & ٤ & 0 & ١ \\ ٢ & 1 & 0 & 3 \\ 2 & ٠ & 1 & -١ \end{vmatrix}$$

لإيجاد قيمة هذا المعين نلاحظ أن العمود الثالث يحوي أصفاراً أكثر من غيره، لذا نقوم بنشره وفق عناصر هذا العمود، فنجد:

$$\Delta=(-١)\begin{vmatrix} ٣ & ٤ & ١ \\ ٢ & ١ & ٣ \\ ٢ & ٠ & -١ \end{vmatrix}-(٠)\begin{vmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ ٢ & ١ & ٣ \\ ٢ & ٠ & -١ \end{vmatrix}+(٠)\begin{vmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ & ١ \\ ٢ & ٠ & -١ \end{vmatrix}-(١)\begin{vmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ & ١ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{vmatrix}=$$
$$=-١[-٣+٢٤-٢+٨]+٠+٠-١[٢+٦-١٦-٩]=-١٠$$

٦-٢ تمارين ومسائل

بفرض أن لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{bmatrix} -٢ & ٣ & ١ \\ ٠ & ١ & -١ \\ ٢ & ٠ & ٤ \end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix} ٤ & ٥ & -٣ \\ ٠ & -٢ & ١ \\ ١ & ٣ & ٠ \end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix} ٢ & ٤ & -١ \\ ٠ & ٣ & ٠ \\ -١ & ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

والمطلوب احسب ما يلي:

المحددات الموافقة لكل من A,B,C بالطرائق الممكنة كافة.

الفصل السابع: مقلوب مصفوفة وحل جملة معادلات خطية

٧-١ مقلوب (أو معكوس) مصفوفة وشرط وجود المقلوب:

إن مقلوب المصفوفة المربعة A هو مصفوفة نرمز له بالرمز $A^{-١}$ إذا ضربت بالمصفوفة A من يمينها أو من يسارها كان الناتج مصفوفة واحدية I:

$$A \cdot A^{-١} = A^{-١} \cdot A = I$$

من هنا نلاحظ أنه لا يمكن الحديث عن مقلوب مصفوفة إلا إذا كانت المصفوفة مربعة.

سندرس إيجاد مقلوب مصفوفة من المرتبة الثانية ثم مقلوب مصفوفة من المرتبة الثالثة. أما المصفوفات من مراتب أعلى فلا تختلف طرق حساب مقلوباتها عن حالة المصفوفة من المرتبة الثالثة.

٧-١-١ مقلوب مصفوفة من المرتبة الثانية

لتكن لدينا المصفوفة من المرتبة الثانية الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} a_{١١} & a_{١٢} \\ a_{٢١} & a_{٢٢} \end{bmatrix}$$

لإيجاد مقلوب هذه المصفوفة $A^{-١}$ يمكن اتباع الخطوات التالية:

١- نحسب معين المصفوفة A. وهذا المعين هو:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{١١} & a_{١٢} \\ a_{٢١} & a_{٢٢} \end{vmatrix} = a_{١١} \cdot a_{٢٢} - a_{١٢} \cdot a_{٢١}$$

٢- نوجد المصفوفة المساعدة وذلك بتبديل عنصري القطر الرئيس في المصفوفة A ببعضهما وضرب عنصري القطر الثانوي بـ (-١). سنرمز للمصفوفة المساعدة بالرمز $Adj(A)$ فتكون كما يلي:

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} a_{٢٢} & -a_{١٢} \\ -a_{٢١} & a_{١١} \end{bmatrix}$$

٣- نحسب مقلوب (معكوس) المصفوفة A بتقسيم كل عنصر من عناصر المصفوفة المساعدة $Adj(A)$ على المعين Δ. أي أن:

$$A^{-١} = \frac{Adj(A)}{\Delta} = \begin{bmatrix} a_{٢٢}/\Delta & -a_{١٢}/\Delta \\ -a_{٢١}/\Delta & a_{١١}/\Delta \end{bmatrix}$$

مثال (٧-١):

لنوجد مقلوب المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$.

الحل:

إن معين هذه المصفوفة يساوي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٥ \end{vmatrix} = ١٠ - ١(-١) = ١١$$

أما المصفوفة المساعدة فهي:

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$$

ومقلوب المصفوفة هو:

$$A^{-١} = \frac{Adj(A)}{\Delta} = \frac{١}{١١}\begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥/١١ & ١/١١ \\ -١/١١ & ٢/١١ \end{bmatrix}$$

ويمكننا أن نتأكد من نتيجة الحساب بضرب المصفوفتين A و $A^{-١}$ ببعضهما:

$$A \cdot A^{-١} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٥/١١ & ١/١١ \\ -١/١١ & ٢/١١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = I_{(٢,٢)}$$

ملاحظة:

من الواضح أنه إذا كان معين المصفوفة مساويًا الصفر فلا يكون لها مقلوب. من هنا فإن شرط وجود مقلوب للمصفوفة أن يكون معينها غير مساوٍ للصفر.

نقول عن المصفوفة التي معينها يساوي الصفر إنها شاذة (غير نظامية). ونعلم الآن أن المصفوفة الشاذة ليس لها مقلوب.

٧-١-٢ مقلوب مصفوفة من المرتبة الثالثة:

لتكن لدينا المصفوفة من المرتبة الثالثة الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} a_{١١} & a_{١٢} & a_{١٣} \\ a_{٢١} & a_{٢٢} & a_{٢٣} \\ a_{٣١} & a_{٣٢} & a_{٣٣} \end{bmatrix}$$

لإيجاد مقلوب هذه المصفوفة $A^{-١}$ نتبع الخطوات التالية:

الخطوة الأولى:

نوجد قيمة المعين Δ للمصفوفة A. فإذا تبين أن $\Delta = ٠$ فعندها نقول إن المصفوفة A شاذة وليس لها مقلوب. أما إذا كان $\Delta \neq ٠$ فننتقل إلى الخطوة الثانية.

الخطوة الثانية:

نوجد مرافق كل عنصر من عناصر المصفوفة A ونضع هذه المرافقات بصورة مصفوفة نطلق عليها اسم مصفوفة المرافقات. وسوف نرمز لمصفوفة المرافقات بالرمز A^c ولكل عنصر مرافق بالرمز a_{ij}^c (ولقد شرحنا كيفية إيجاد مصفوفة المرافقات في إيجاد قيمة المعين من المرتبة الثالثة):

$$A^c = \begin{bmatrix} a_{١١}^c & a_{١٢}^c & a_{١٣}^c \\ a_{٢١}^c & a_{٢٢}^c & a_{٢٣}^c \\ a_{٣١}^c & a_{٣٢}^c & a_{٣٣}^c \end{bmatrix}$$

الخطوة الثالثة:

نوجد المصفوفة المساعدة (والتي نرمز لها بـ $Adj(A)$) وهي عبارة عن مدور مصفوفة المرافقات، أي أن:

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} a_{١١}^c & a_{٢١}^c & a_{٣١}^c \\ a_{١٢}^c & a_{٢٢}^c & a_{٣٢}^c \\ a_{١٣}^c & a_{٢٣}^c & a_{٣٣}^c \end{bmatrix}$$

الخطوة الرابعة:

نقسم كل عنصر من عناصر المصفوفة المساعدة $Adj(A)$ على قيمة المعين (حيث فرضنا $\Delta \neq ٠$)، فنحصل بذلك على مقلوب المصفوفة:

$$A^{-١} = \frac{Adj(A)}{\Delta} = \begin{bmatrix} a^c_{١١}/\Delta & a^c_{٢١}/\Delta & a^c_{٣١}/\Delta \\ a^c_{١٢}/\Delta & a^c_{٢٢}/\Delta & a^c_{٣٢}/\Delta \\ a^c_{١٣}/\Delta & a^c_{٢٣}/\Delta & a^c_{٣٣}/\Delta \end{bmatrix}$$

مثال (٧-٢):

لتكن لدينا المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ & ١ \\ -١ & ٢ & ٠ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{bmatrix}$.

الحل:

لإيجاد مقلوبها $A^{-١}$ نتبع المراحل السابقة:

١- نحسب المحددة Δ عن طريق نشرها وفق عناصر السطر الأول فنجد أن:

$$\Delta = ٣(٤) - ١ - ٦ = ١٢ - ٧ = ٥ \neq ٠$$

٢ – نوجد مصفوفة المرافقات فنجد:

$$A^c = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ & -٧ \\ ١ & ٣ & -٣ \\ -٢ & -١ & ٦ \end{bmatrix}$$

٣ – نوجد المصفوفة المساعدة $Adj(A)$ والتي هي مدور مصفوفة المرافقات، فنجد أن:

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} ٤ & ١ & -٢ \\ ٢ & ٣ & -١ \\ -٧ & -٣ & ٦ \end{bmatrix}$$

٤ – نقسم عناصر المصفوفة المساعدة على المعين، فنحصل على مقلوب المصفوفة:

$$A^{-١} = \begin{bmatrix} ٤/٥ & ١/٥ & -٢/٥ \\ ٢/٥ & ٣/٥ & -١/٥ \\ -٧/٥ & -٣/٥ & ٦/٥ \end{bmatrix}$$

ونستطيع أن نتأكد من صحة عملنا وذلك بالتحقق من صحة العلاقة التالية:

$$A^{-١} \cdot A = I$$

مثال (٧-٣):

أوجد مقلوب المصفوفة التالية: $A = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٠ \\ ١ & -١ & ٣ \\ ٤ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$.

الحل:

١ – نوجد قيمة المعين Δ وذلك بنشر المعين وفق عناصر السطر الأول:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٠ \\ ١ & -١ & ٣ \\ ٤ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = ٢(-١) - ٣(١ - ١٢) + ٠ = ٣١$$

إذن $\Delta = ٣١ \neq ٠$.

٢ – نوجد مصفوفة المرافقات:

$$A^c = \begin{bmatrix} -١ & ١١ & ٤ \\ -٣ & ٢ & ١٢ \\ ٩ & -٦ & -٥ \end{bmatrix}$$

٣ – نوجد الآن المصفوفة المساعدة (وهي مدور مصفوفة المرافقات):

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} -١ & -٣ & ٩ \\ ١١ & ٢ & -٦ \\ ٤ & ١٢ & -٥ \end{bmatrix}$$

٤- وأخيراً يكون مقلوب المصفوفة هو:

$$A^{-١} = \frac{Adj(A)}{\Delta} = \begin{bmatrix} -١/٣١ & -٣/٣١ & ٩/٣١ \\ ١١/٣١ & ٢/٣١ & -٦/٣١ \\ ٤/٣١ & ١٢/٣١ & -٥/٣١ \end{bmatrix}$$

ملاحظة:

لا تختلف طريقة إيجاد مقلوب مصفوفة من مرتبة رابعة أو خامسة ...، عما رأيناه في حالة المصفوفة من المرتبة الثالثة.

٧-١-٣ خواص مقلوب مصفوفة:

يتمتع مقلوب المصفوفة بالخواص التالية:

١- توجد بين المصفوفة $A_{(n,n)}$ ومقلوبها $A^{-١}_{(n,n)}$ العلاقة التالية المحققة دوماً:

$$A_{(n,n)} \cdot A^{-١}_{(n,n)} = A^{-١}_{(n,n)} \cdot A_{(n,n)} = I_{(n,n)}$$

٢- مقلوب المصفوفة القطرية هو مصفوفة قطرية عناصرها هي مقلوبات عناصر قطر المصفوفة الأصلية. أي أن:

$$\begin{bmatrix} a_{١١} & ٠ & \cdots & ٠ \\ ٠ & a_{٢٢} & \cdots & ٠ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ٠ & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-١} = \begin{bmatrix} ١/a_{١١} & ٠ & \cdots & ٠ \\ ٠ & 1/a_{٢٢} & \cdots & ٠ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ٠ & \cdots & ١/a_{nn} \end{bmatrix}$$

٣- مقلوب المصفوفة المقلوبة هو المصفوفة الأصلية، أي أن:

$$\left[A^{-١}_{(n,n)}\right]^{-١} = A$$

٤- مقلوب جداء مصفوفتين يساوي جداء المقلوبين بعد تبديل مواضعهما، أي أن:

$$\left[A_{(n,n)} \cdot B_{(n,n)}\right]^{-١} = B^{-١}_{(n,n)} \cdot A^{-١}_{(n,n)}$$

٥- مقلوب مدور المصفوفة يساوي مدور مقلوب المصفوفة، أي أن:

$$\left[A^{T}_{(n,n)}\right]^{-١} = \left[A^{-١}_{(n,n)}\right]^{T}$$

ونستطيع التأكد من صحة هذه الخواص بوساطة تطبيقات عددية.

٧-٢ حل جملة معادلات خطية

٧-٢-١ الحل المشترك لجملة معادلتين خطيتين باستخدام مقلوب مصفوفة المعاملات:

إن الشكل المصفوفي لجملة معادلتين خطيتين $\begin{cases} a_١x + b_١y = c_١ \\ a_٢x + b_٢y = c_٢ \end{cases}$ ويمكن كتابة هذه الجملة بالصورة التالية:

$$\begin{bmatrix} a_١ & b_١ \\ a_٢ & b_٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_١ \\ c_٢ \end{bmatrix}$$

نستطيع كتابة هذا الشكل من خلال المعادلة الشعاعية التالية:

$$A \cdot X = C$$

إن حل هذه المعادلة وإيجاد قيمة X يكون بضرب الطرفين من اليسار بـ $A^{-١}$، حيث نجد أن:

$$A \cdot X = C \Rightarrow A^{-١} \cdot A \cdot X = A^{-١} \cdot C \Rightarrow I \cdot X = A^{-١} \cdot C \Rightarrow X = A^{-١} \cdot C$$

ويؤول هذا الحل لإيجاد المصفوفة $A^{-١}$ والتي سميناها مقلوب المصفوفة A وضرب الناتج من اليسار بـ C.

وبالتبديل في المعادلة الشعاعية، نجد أن:

$$X = \frac{١}{\Delta}\begin{bmatrix} b_٢ & -b_١ \\ -a_٢ & a_١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_١ \\ c_٢ \end{bmatrix}$$

مثال (٧-٤):

حل جملة المعادلتين الخطيتين بطريقة مقلوب المصفوفة:

$$\begin{cases} ٢x + ٣y = -١ \\ x - ٢y = ٣ \end{cases}$$

الحل:

الشكل المصفوفي لهذه الجملة هو:

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ \\ ٣ \end{bmatrix}$$

إن معين مصفوفة الأمثال:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & -٢ \end{vmatrix} = -٤ - ٣ = -٧ \neq ٠$$

أما المصفوفة المرتبطة:

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} -٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$$

ومقلوب المصفوفة هو:

$$A^{-١} = -\frac{١}{٧}\begin{bmatrix} -٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$$

إذن حل هذه الجملة هو:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{١}{٧}\begin{bmatrix} -٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -١ \\ ٣ \end{bmatrix} \Rightarrow x = ١, \quad y = -١$$

٧-٢-٢ الحل المشترك لجملة ثلاث معادلات خطية باستخدام مقلوب مصفوفة المعاملات:

إن الشكل العام لجملة ثلاث معادلات خطية هو:

$$a_{١١}x_١ + a_{١٢}x_٢ + a_{١٣}x_٣ = b_١$$
$$a_{٢١}x_١ + a_{٢٢}x_٢ + a_{٢٣}x_٣ = b_٢$$
$$a_{٣١}x_١ + a_{٣٢}x_٢ + a_{٣٣}x_٣ = b_٣$$

ويمكن كتابة هذه الجملة بالصورة التالية:

$$\begin{bmatrix} a_{١١} & a_{١٢} & a_{١٣} \\ a_{٢١} & a_{٢٢} & a_{٢٣} \\ a_{٣١} & a_{٣٢} & a_{٣٣} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_١ \\ x_٢ \\ x_٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_١ \\ b_٢ \\ b_٣ \end{bmatrix}$$

لإيجاد الحل المشترك لجملة ثلاث معادلات خطية **باستخدام مقلوب مصفوفة المعاملات:**

لنكتب المعادلة الشعاعية السابقة كما يلي:

$$A \cdot X = B$$

حيث A مصفوفة المعاملات، X شعاع المجاهيل و B شعاع الحدود المطلقة:

$$X = \begin{bmatrix} x_١ \\ x_٢ \\ x_٣ \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_١ \\ b_٢ \\ b_٣ \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} a_{١١} & a_{١٢} & a_{١٣} \\ a_{٢١} & a_{٢٢} & a_{٢٣} \\ a_{٣١} & a_{٣٢} & a_{٣٣} \end{bmatrix}$$

نحصل على الحل المشترك بضرب طرفي العلاقة السابقة من اليسار بالمصفوفة $A^{-١}$ فنجد أن:

$$X = A^{-١} \cdot B$$

حيث $A^{-١}$ هو مقلوب المصفوفة A.

مثال (٧-٥):

يطلب حل جمل المعادلات الخطية التالية بطريقة مقلوب المصفوفة:

$$\begin{aligned} ٣x_١ - ٢x_٢ + x_٣ &= ١ \\ x_١ + x_٢ + ٢x_٣ &= -٢ \\ ٢x_١ + x_٢ - ٣x_٣ &= ٠ \end{aligned}$$

الحل:

الشكل المصفوفي لهذه الجملة هو:

$$\begin{bmatrix} ٣ & -٢ & ١ \\ ١ & ١ & ٢ \\ ٢ & ١ & -٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_١ \\ x_٢ \\ x_٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ -٢ \\ ٠ \end{bmatrix}$$

١- مصفوفة المصغرات «الصغائر»:

$$A^{\Delta} = \begin{bmatrix} -٥ & -٧ & -١ \\ ٥ & -١١ & ٧ \\ -٥ & ٥ & ٥ \end{bmatrix}$$

٢- مصفوفة العوامل المشاركة «المرافقات»:

$$A^{c} = \begin{bmatrix} -٥ & +٧ & -١ \\ -٥ & -١١ & -٧ \\ -٥ & -٥ & ٥ \end{bmatrix}$$

٣- المعين $\Delta = -٣٠$.

٤- المصفوفة المرافقة (المساعدة):

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} -٥ & -٥ & -٥ \\ ٧ & -١١ & -٥ \\ -١ & -٧ & ٥ \end{bmatrix}$$

٥- المقلوب:

$$A^{-١} = \frac{Adj(A)}{\Delta} = -\frac{١}{٣٠} \begin{bmatrix} -٥ & -٥ & -٥ \\ ٧ & -١١ & -٥ \\ -١ & -٧ & ٥ \end{bmatrix}$$

٦- الحل المصفوفي لجملة المعادلات الخطية وفق طريقة مقلوب المصفوفة هو:

$$\begin{bmatrix} x_١ \\ x_٢ \\ x_٣ \end{bmatrix} = -\frac{١}{٣٠} \begin{bmatrix} -٥ & -٥ & -٥ \\ ٧ & -١١ & -٥ \\ -١ & -٧ & ٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ \\ -٢ \\ ٠ \end{bmatrix} = -\frac{١}{٣٠} \begin{bmatrix} ٥ \\ ٢٩ \\ ١٣ \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$x_١ = -\frac{٥}{٣٠}, \qquad x_٢ = -\frac{٢٩}{٣٠}, \qquad x_٣ = -\frac{١٣}{٣٠}$$

مثال (٧-٦):

أوجد الحل المشترك لجملة المعادلات الآتية:

$$\begin{aligned} ٢□ - y + z &= ٠ \\ x - ٤□ - ٣□ &= ١ \\ ٣□ + y + ٢□ &= ٣ \end{aligned}$$

لنحسب معين مصفوفة المعاملات فنجد:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & -١ & ١ \\ ١ & -٤ & -٣ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٢(-٨+٣) + ١(٢+٩) + ١(١+١٢) = ١٤$$

إذن: $\Delta = ١٤ \neq ٠$. إذن يوجد حل مشترك لهذه الجملة وهذا الحل وحيد. لنوجد مقلوب مصفوفة المعاملات.

إن مصفوفة المرافقات هي:

$$A^c = \begin{bmatrix} -٥ & -١١ & ١٣ \\ ٣ & ١ & -٥ \\ ٧ & ٧ & -٧ \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن المصفوفة المساعدة هي:

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} -٥ & ٣ & ٧ \\ -١١ & ١ & ٧ \\ ١٣ & -٥ & -٧ \end{bmatrix}$$

ومقلوب مصفوفة المعاملات هو:

$$A^{-١} = \frac{Adj(A)}{\Delta} = \frac{١}{١٤}\begin{bmatrix} -٥ & ٣ & ٧ \\ -١١ & ١ & ٧ \\ ١٣ & -٥ & -٧ \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن:

$$X = A^{-١} \cdot B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{١}{١٤}\begin{bmatrix} -٥ & ٣ & ٧ \\ -١١ & ١ & ٧ \\ ١٣ & -٥ & -٧ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٠ \\ ١ \\ ٣ \end{bmatrix} = \frac{١}{١٤}\begin{bmatrix} ٢٤ \\ ٢٢ \\ -٢٦ \end{bmatrix}$$

إذن:

$$x = \frac{٢٤}{١٤} = \frac{١٢}{٧}, \qquad y = \frac{٢٢}{١٤} = \frac{١١}{٧}, \qquad z = -\frac{٢٦}{١٤} = -\frac{١٣}{٧}$$

مثال (٧-٧):

أوجد الحل المشترك لجملة المعادلات الآتية:

$$\begin{aligned} ٢□ - ٣□ + z &= -٢ \\ ٣□ - ٤□ - ٣□ &= ١ \\ ٣□ + y + ٢□ &= -٣ \end{aligned}$$

إن معين مصفوفة الأمثال هي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ & ١ \\ ٣ & -٤ & -٣ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٢(٥) + ٣(١٥) + ١(١٥) = ٥٠ \neq ٠$$

إن مصفوفة المرافقات هي:

$$A^c = \begin{bmatrix} -٥ & -١٥ & ١٥ \\ ٧ & ١ & -١١ \\ ١٣ & ٩ & ١ \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن المصفوفة المساعدة هي:

$$A^c = \begin{bmatrix} -٥ & ٧ & ١٣ \\ -١٥ & ١ & ٩ \\ ١٥ & -١١ & ١ \end{bmatrix}$$

ومقلوب مصفوفة المعاملات هو:

$$A^{-١} = \frac{١}{٥٠}\begin{bmatrix} -٥ & ٧ & ١٣ \\ -١٥ & ١ & ٩ \\ ١٥ & -١١ & ١ \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن:

$$X = A^{-١} \cdot B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{١}{٥٠}\begin{bmatrix} -٥ & ٧ & ١٣ \\ -١٥ & ١ & ٩ \\ ١٥ & -١١ & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -٢ \\ ١ \\ -٣ \end{bmatrix} = \frac{١}{٥٠}\begin{bmatrix} -٢٢ \\ ٤ \\ -٤٤ \end{bmatrix}$$

إذن:

$$x = -\frac{٢٢}{٥٠} = -\frac{١١}{٢٥}, \quad y = \frac{٤}{٥٠} = \frac{٢}{٢٥}, \quad z = -\frac{٤٤}{٥٠} = -\frac{٢٢}{٢٥}$$

٧-٣ الحل المشترك لجملة ثلاث معادلات خطية باستخدام طريقة التحويلات الأولية:

٧-٣-١ رتبة مصفوفة:

رتبة أية مصفوفة (وليس ضرورياً أن تكون المصفوفة مربعة)، هي مرتبة أكبر معين جزئي غير معدوم في المصفوفة، بمعنى آخر أكبر مرتبة لمصغر (لصغير) في هذه المصفوفة لا يساوي الصفر.

مثلاً: إذا كانت المصفوفة A مربعة من المرتبة n نوجد معينها، فإذا كان غير معدوم، فإننا نقول إن رتبة المصفوفة هي n ونكتب $r(A) = n$. أما إذا كان المعين صفراً فنبدأ بحذف صف وعمود، حتى نحصل على مصفوفة جزئية واحدة معينها ليس صفراً وعندها تكون رتبة المصفوفة هي $(n - ١)$ ونكتب $r(A) = n - ١$.

وإلا فإننا نعود من جديد ونحذف صفين وعمودين ....، وهكذا إذن نستطيع القول إن الرتبة r لمصفوفة ما $A(m,n)$ هي العدد الطبيعي الذي يحقق الشرطين التاليين:

١- إن هناك صغير (مصغر) واحد على الأقل، ومن الرتبة r لهذه المصفوفة لا يساوي الصفر.

٢- كل صغير من المرتبة $r + ١$ يساوي الصفر (هذا يعني أيضاً أن كل صغير في هذه المصفوفة، ومن المرتبة $r + ٢$ فأكثر يساوي الصفر أيضاً.

مثال (٧-٨):

لنأخذ المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & -١ & ٤ \\ -٢ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

نجد أن معينها $|A| \neq ٠$ إذن رتبة المصفوفة A هي الثالثة ونكتب $r(A) = ٣$، أما لو أخذنا المصفوفة التالية:

$$B = \begin{bmatrix} ١ & ١ & ٥ \\ ٢ & ١ & ٧ \\ ١ & ٣ & ١١ \end{bmatrix}$$

فنجد أن معينها يساوي الصفر ($|B| = ٠$) إذن رتبة المصفوفة هي أقل من ٣، لنحذف سطراً وعموداً منها، ثم لنحسب معيناتها الصغرى من الدرجة الثانية، فنجد أن أحدهما لا يساوي الصفر، إذن فرتبة المصفوفة B هي الثانية أي إن:

$$r(B) = ٢$$

ولو أخذنا المصفوفة التالية:

$$C = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٤ \\ ٥ & -١ \end{bmatrix}$$

إن المصفوفة C ليست مربعة، إذن إن: $r(C) \neq ٣$، لهذا نبدأ بتكوين المعينات الصغرى الثنائية وهي:

$$\begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & -١ \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ٥ & -١ \end{vmatrix}$$

بما أن أحدها لا يساوي الصفر، إذن فالمصفوفة هي من المرتبة الثانية، أي إن $r(C) = ٢$.

ملاحظة:

إن رتبة أية مصفوفة هي أصغر أو تساوي العدد الأصغر بين عدد الأسطر أو عدد الأعمدة.

$$r\left(A_{(m,n)}\right) = \min(m, n)$$

ملاحظة:

لا تتغير رتبة المصفوفة إذا:

١- ضرب صف (عمود) بعدد ثابت.

٢- إضافة صف مضروب بثابت إلى صف آخر.

٧-٣-٢ خواص رتبة المصفوفة:

تعتبر رتبة مصفوفة من القواعد الهامة التي تستند إليها المصفوفات، وبخاصة في التعرف على حلول الجمل الخطية.

إن من خواص رتبة المصفوفة ما يلي:

١- إذا كانت المصفوفة $A_{(n,n)}$ نظامية (محددها غير معدوم) فإن رتبتها هي n.

٢- رتبة المصفوفة الصفرية هي الصفر طبعاً.

٣- إن رتبة أية مصفوفة A تساوي رتبة مدورها (منقولها) أي إن:

$$r(A) = r(A^T)$$

٤- رتبة المصفوفة الأحادية ذات المرتبة n هي n، أي إن: $r(I_n) = n$.

٥- إذا كانت A و B مصفوفتين وكانت الجداء $A \cdot B$ ممكناً فإن:

$$r(A \cdot B) \leq r(B)$$
$$r(A \cdot B) \leq r(A)$$

٦- بفرض أن A, B مصفوفتان مربعتان ومن الرتبة نفسها و B نظامية فإن:

$$r(A) = r(A \cdot B) = r(B \cdot A)$$

٧- $r(A) = r(A \cdot A^T) = r(A^T \cdot A)$.

٨- بفرض أن $B_{(n,n)}$ نظامية و $C_{(m,m)}$ نظامية أيضاً فإن:

$$r(BAC) = r(A)$$

٩- إذا كانت A مصفوفة قطرية، فإن $r(A)$ هي عدد العناصر التي لا تساوي الصفر في قطر هذه المصفوفة.

١٠- إذا كانت A, B مصفوفتين متكافئتين $A \sim B$ فإن لهما الرتبة نفسها، أي إن: $r(A) = r(B)$.

٧-٣-٣ التحويلات الأولية على المصفوفات:

هناك بعض العمليات التي يمكن إجراؤها على أسطر المصفوفات وأعمدتها مهما كان نوعها، وذلك عند حساب مقلوب المصفوفة أو عند حساب رتبة المصفوفة، إذ لا تغير من رتبة المصفوفة، تدعى هذه العمليات بالتحويلات الأولية على المصفوفات وهي:

١- المبادلة بين الصفين i و j ويرمز لها بالرمز R_{ij} (أو المبادلة بين العمودين j و i ويرمز لها بالرمز C_{ij})، وهي عملية أولية من النوع الأول.

مثال (٧-٩):

$$\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & ١ \\ ٠ & -٥ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{١٢}} \begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٢ & -١ \\ ٠ & -٥ \end{bmatrix}$$

٢- ضرب كل عنصر من عناصر الصف i بالعدد $K \neq ٠$، ويرمز له بالرمز $R_i(K)$ أو K_{R_i} (أو ضرب كل عنصر من عناصر العمود j بالعدد $K \neq ٠$، ويرمز له بالرمز $C_j(K)$ أو K_{C_j}، وهي عملية أولية من النوع الثاني.

مثال (٧-١٠):

$$\begin{bmatrix} ٢ & -1 & ٣ \\ ١ & ٠ & -١ \\ -١ & -٢ & -٥ \end{bmatrix} \xrightarrow{C_٢(-٣)} \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٣ \\ ١ & ٠ & -١ \\ -١ & ٦ & -٥ \end{bmatrix}$$

٣- إضافة مضاعفات عناصر صف (عمود) ما إلى عناصر صف (عمود) آخر، بمعنى آخر، إضافة عناصر الصف i إلى العناصر المقابلة لها من الصف j بعد ضربها بـ $K \neq ٠$، ويرمز لها بالرمز $R_{ij}(K)$ أو $R_i + KR_j$ (أو إضافة عناصر العمود i إلى العناصر المقابلة لها من العمود j بعد ضربها بـ $K \neq ٠$، ويرمز لها بالرمز $C_{ij}(K)$ أو $C_i + KC_j$، وتدعى هذه العملية الأولية من النوع الثالث.

مثال (٧-١١):

$$\begin{bmatrix} ٢ & -1 & -٣ \\ -١ & -١ & ٤ \\ ٠ & -٢ & ١ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_٢+(-١)R_٣} \begin{bmatrix} ٢ & -١ & -٣ \\ -١ & ١ & ٣ \\ ٠ & -٢ & ١ \end{bmatrix}$$

٧-٣-٤ المصفوفات المتكافئة وإيجاد رتبة مصفوفة ما بطريقة التحويلات الأولية:

نقول عن مصفوفتين A, B إنهما متكافئتان، ونرمز لهما بالرمز $A \sim B$ إذا أمكن الحصول على إحديهما من الأخرى بإجراء عدد منته من التحويلات الأولية المتتابعة على صفوفها أو أعمدتها.

مثال (٧-١٢):

أوجد رتبة المصفوفة A مستخدماً طريقة التحويلات الأولية:

$$A = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & -١ & 2 \\ ١ & ١ & ٠ & -1 \\ ٢ & ١ & -١ & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{٢١}(-١)} \begin{bmatrix} ١ & ٠ & -١ & 2 \\ ٠ & ١ & ١ & -3 \\ ٢ & ١ & -١ & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{٣١}(-٢)} \begin{bmatrix} ١ & ٠ & -١ & 2 \\ ٠ & ١ & ١ & -3 \\ ٠ & ١ & ١ & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{٣٢}(-١)}$$

$$\begin{bmatrix} ١ & ٠ & -١ & 2 \\ ٠ & ١ & ١ & -3 \\ ٠ & ٠ & ٠ & 0 \end{bmatrix} = B$$

وهنا نلاحظ أن معينات المرتبة الثالثة ليست موجودة في المصفوفة B، بينما:

$$\begin{vmatrix} ٠ & -١ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = ١ \neq ٠ \Rightarrow r(B) = ٢$$

أي إن: $r(A) = ٢$.

مثال (٧-١٣):

أوجد المصفوفة المكافئة B، لكل من المصفوفتين A و C، ثم استنتج رتبة A.

$$A = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ ٣ & ١ & ١ \\ ٢ & -١ & ٠ \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ١ \\ ٣ & ١ & ١ \end{bmatrix}$$

الحل:

$$A = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ ٣ & ١ & ١ \\ ٢ & -١ & ٠ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{٢١}(-٣)} \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ ٠ & -٥ & ١ \\ ٢ & -١ & ٠ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{٣١}(-٢)} \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ ٠ & -٥ & ١ \\ ٠ & -٥ & ٠ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{٣٢}(-١)} \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ ٠ & -٥ & ١ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix} = B$$

نلاحظ أن الصف الثالث موجود إذن $r(A) = ٣$.

$$C = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ١ \\ ٣ & ١ & ١ \end{bmatrix} \xrightarrow{C_{٢١}} \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ١ & ١ \\ ١ & ٣ & ١ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{٣١}(-١)} \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ١ & ١ \\ ٠ & ١ & ١ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{٣٢}(-١)} \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ١ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} = B$$

إذن إن $r(A) = ٢$، وذلك لأن الصف الثالث غير موجود.

٧-٣-٥ الصورة القياسية (الشكل العادي – الشكل النظامي) لمصفوفة:

إذا كانت لدينا المصفوفة $A_{(m,n)} \neq ٠$ فيوجد عدد صحيح موجب r، بحيث إن A تكافئ إحدى المصفوفات الآتية، والتي كل من هذه المصفوفات تدعى بالصورة القياسية للمصفوفة A:

$$\begin{bmatrix} I_r & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} I_r \\ ٠ \end{bmatrix}, \qquad [I_r \quad ٠], \qquad [I_r]$$

أو بالشكل التالي مثلاً (حينما نفرض أن $r = ٣$).

$$\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ & 0 \\ ٠ & ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ & 0 \\ ٠ & ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حيث I_r مصفوفة الواحدة من الرتبة r (وفي الوقت نفسه r رتبة المصفوفة A).

يمكن إيجاد تلك الصورة القياسية بإجراء مجموعة من العمليات الأولية على المصفوفة A، تبدأ بإيجاد عنصر غير الصفر في الموضع x، ثم قسمة عناصر هذا السطر على العنصر نفسه، ثم إجراء العمليات اللازمة لجعل باقي عناصر السطر الأول وعناصر العمود الأول أصفاراً، نكرر العمل هذا حتى نحصل على الصورة المطلوبة.

مثال (٧-١٤):

اختزل المصفوفة التالية إلى شكلها النظامي (الصورة القياسية) ثم استنتج رتبة المصفوفة.

$$A = \begin{bmatrix} ١ & ١ & ٢ & ٣ \\ 2 & ٣ & ٠ & ١ \\ 0 & ١ & -٤ & -5 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$A = \begin{bmatrix} ١ & ١ & ٢ & ٣ \\ 2 & ٣ & ٠ & ١ \\ 0 & ١ & -٤ & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{٢١}(-٢)} \begin{bmatrix} ١ & ١ & ٢ & ٣ \\ 0 & ١ & -٤ & -٥ \\ 0 & ١ & -٤ & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[C_{٣١}(-٢),C_{٤١}(-٣)]{C_{٢١}(-١)} \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ & ٠ \\ 0 & ١ & -٤ & -٥ \\ 0 & ١ & -٤ & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{٣٢}(-١)} \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ & ٠ \\ 0 & ١ & -٤ & -٥ \\ 0 & ٠ & ٠ & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[C_{٤٢}(٥)]{C_{٣٢}(٤)} \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ & ٠ \\ 0 & ١ & ٠ & ٠ \\ 0 & ٠ & ٠ & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{٢} & ٠ \\ 0 & ٠ \end{bmatrix}$$

إذن إن $r(A) = ٢$.

مثال (٧-١٥):

أوجد الصورة القياسية للمصفوفة التالية، ثم استنتج رتبتها.

$$B = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٥ & 0 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$B = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٥ & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{٣١}(-٢)} \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٢ \\ ٠ & ١ & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_{٢١}(-٢)} \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٢ \\ ٠ & ١ & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{٣٢}(-١)} \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٢ \\ ٠ & ٠ & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_{٣٢}(-٢)} \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{٣}(-١/٢)} \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & 1 \end{bmatrix} = I_{٣}$$

إذن إن $r(A) = ٣$.

مثال (٧-١٦):

أوجد رتبة المصفوفة التالية بطريقة التحويلات الأولية:

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٠ & -1 & 3 \\ ١ & ٢ & ١ & 2 & 0 \\ ٠ & ٣ & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & -3 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٠ & -1 & 3 \\ ١ & ٢ & ١ & 2 & 0 \\ ٠ & ٣ & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & -3 & -7 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{١٢}} \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ١ & 2 & 0 \\ ٢ & ١ & ٠ & -1 & 3 \\ ٠ & ٣ & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & -3 & -7 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_{٤١}(١)]{R_{٢١}(-٢)} \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ١ & 2 & 0 \\ ٠ & -٣ & -٢ & -5 & 3 \\ ٠ & ٣ & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_{٤٢}(-١)]{R_{٣٢}(١)} \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ١ & 2 & 0 \\ ٠ & -٣ & -٢ & -5 & 3 \\ ٠ & ٠ & -3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[C_{٣١}(-١)]{C_{٢١}(-٢)} \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ & 2 & 0 \\ ٠ & -٣ & -٢ & -5 & 3 \\ ٠ & ٠ & -3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_{٣٢}(-١)}$$

$$\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ & 2 & 0 \\ ٠ & -٣ & ١ & -5 & 3 \\ ٠ & ٠ & -3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_{٣٢}} \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ & 2 & 0 \\ ٠ & ١ & -٣ & -5 & 3 \\ ٠ & ٠ & -3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{٣٢}(-١)} \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ & 2 & 0 \\ ٠ & ١ & -٣ & -5 & 3 \\ ٠ & ٠ & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_{٥٣}} \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ & 2 & 0 \\ ٠ & ١ & ٣ & -5 & -3 \\ ٠ & ٠ & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_{٣٢}(-٣)} \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ & 2 & 0 \\ ٠ & ١ & ٠ & -5 & -3 \\ ٠ & ٠ & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} I_{٣} & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

إذن إن رتبة المصفوفة هي الثالثة.

مثال (٧-١٧):

حل جملة المعادلات التالية:

$$\begin{aligned} x + ٢□ - z + ٣□ &= ٣ \\ ٢□ + ٥□ + ٤□ + ٣□ &= ٩ \\ ٣□ + ٦□ - z + ٨□ &= ١٠ \end{aligned}$$

الحل:

لنلاحظ أن:

$$A = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & -1 & ٣ \\ ٢ & ٥ & 4 & ٣ \\ ٣ & ٦ & -1 & ٨ \end{bmatrix} \xrightarrow[R_{٣١}(-٣)]{R_{٢١}(-٢)} \begin{bmatrix} ١ & ٢ & -1 & ٣ \\ ٠ & ١ & 6 & -٣ \\ ٠ & ٠ & 2 & -١ \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} ١ & ٢ & -1 & ٣ \\ ٠ & ١ & 2 & -٢ \\ ٠ & ٠ & 0 & ٠ \end{bmatrix}$$

إذن إن $r(A) = ٢$.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} ١ & ٢ & -1 & ٣ & ٣ \\ ٢ & ٥ & 4 & ٣ & ٩ \\ ٣ & ٦ & -1 & ٨ & ١٠ \end{array}\right] \xrightarrow[R_{٣١}(-٣)]{R_{٢١}(-٢)} \left[\begin{array}{cccc|c} ١ & ٢ & -1 & ٣ & ٣ \\ ٠ & ١ & 6 & -٣ & ٣ \\ ٠ & ٠ & 2 & -١ & ١ \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} ١ & ٢ & -1 & ٣ & ٣ \\ ٠ & ١ & 2 & -١ & ١ \\ ٠ & ٠ & 0 & ٠ & ٠ \end{array}\right]$$

إذن إن $r(A \vdots B) = ٢$.

أي إن $r(A) = r(A \vdots B) = ٢$ والجملة متوافقة.

وباعتبار أن $r(A) = r(A \vdots B) = ٢ < n = ٤$ فنحن أمام عدد لا نهائي من الحلول، حيث نكون أمام $n - r = ٤ - ٢ = ٢$ مجهولين اختياريين، لنفرض أنهما $w = \beta, z = \alpha$ حيث يتم حساب المجهولين الباقيين x, y بدلالة α, β.

من المصفوفة الأخيرة، نحصل على جملة معادلتين تكافئ الجملة المعطاة، أي:

$$\begin{aligned} x + ٢□ - z + ٣□ &= ٣ \\ y + ٢□ - w &= ١ \end{aligned}$$

ومنه:

$$x + ٢\square - \alpha + ٣\square = ٣$$
$$y + ٢\square - \beta = ١$$

نكتب وبايجاد x و y بدلالة α و β نجد:

$$y = \beta - ٢\square + ١$$
$$x = \beta - ٣\square + ٣ - ٢(\beta - ٢\square + ١) = \alpha - \beta + ١$$

ومجموعة حلول الجملة هي:

$$\{\alpha(١,-٢,١,٠) + \beta(-١,١,٠,١) + (١,١,٠,٠) \quad ; \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$$

٧-٤ الحل المصفوفي بطريقة رتبة مصفوفة:

تعدّ عملية إيجاد معكوس (مقلوب) المصفوفة المربعة بطريقة مصفوفة المصغرات « الصغائر » معقدة للغاية وذلك حينما تكون المصفوفة المربعة من مرتبة عالية، وتسهيلاً لهذا الحساب فلقد وجد الباحثون اللجوء عادة إلى طريقة التحويلات الأولية في إيجاد مقلوب مصفوفة ما، بل حتى في إيجاد حل جملة معادلات خطية، ونلحق بها مصفوفة الواحدة، ثم من خلال العمليات الأولية تتم المبادلة بين مكاني مصفوفة الأمثال ومصفوفة الواحدة، بمعنى آخر: إذا فرضنا أن A مصفوفة مربعة الشكل من المرتبة n فإن بالإمكان حساب مقلوبها إن وجد من خلال العمليات الأولية على النحو التالي:

$$(A \vdots I) \sim (I \vdots B)$$

حيث يكون B مقلوب المصفوفة A.

مثال (٧-١٨):

أوجد الحل المصفوفي لجملة المعادلات الخطية التالية بطريقة التحويلات الأولية:

$$٢x_١ + x_٢ + x_٣ = ٠$$
$$x_١ + ٢x_٢ + x_٣ = ٣$$
$$x_٣ = ٣$$

الحل:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|c} ٢ & ١ & ١ & ١ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٢ & ١ & ٠ & ١ & ٠ & ٣ \\ ٠ & ٠ & ١ & ٠ & ٠ & ١ & ٣ \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} ١ & ١/٢ & ١/٢ & ١/٢ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٣/٢ & ١/٢ & -١/٢ & ١ & ٠ & ٣ \\ ٠ & ٠ & ١ & ٠ & ٠ & ١ & ٣ \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|c} ١ & ٠ & ١/٣ & ٢/٣ & -١/٣ & ٠ & -١ \\ ٠ & ١ & ١/٣ & -١/٣ & ٢/٣ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ١ & ٠ & ٠ & ١ & ٣ \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} ١ & ٠ & ٠ & ٢/٣ & -١/٣ & -١/٣ & -٢ \\ ٠ & ١ & ٠ & -١/٣ & ٢/٣ & -١/٣ & ١ \\ ٠ & ٠ & ١ & ٠ & ٠ & ١ & ٣ \end{array}\right]$$

إذن إن مقلوب مصفوفة الأمثال هو:

$$A^{-١} = \begin{bmatrix} ٢/٣ & -١/٣ & -١/٣ \\ -١/٣ & ٢/٣ & -١/٣ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

كما وإن حل هذه الجملة هو:

$$x_١ = -٢, \qquad x_٢ = ١, \qquad x_٣ = ٣$$

مثال (٧-١٩):

أوجد الحل المصفوفي لجملة المعادلات الخطية بطريقة التحويلات الأولية.

$$٣x_١ - ٢x_٢ = -١$$

$$-٢x_١ + ٣x_٢ = ٤$$
$$٥x_٣ = ١٥$$

الحل:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|c} ٣ & -٢ & ٠ & ١ & ٠ & ٠ & -١ \\ -٢ & ٣ & ٠ & ٠ & ١ & ٠ & ٤ \\ ٠ & ٠ & ٥ & ٠ & ٠ & ١ & ١٥ \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} ١ & -٢/٣ & ٠ & ١/٣ & ٠ & ٠ & -١/٣ \\ ٠ & ٥/٣ & ٠ & ٢/٣ & ١ & ٠ & ١٠/٣ \\ ٠ & ٠ & ١ & ٠ & ٠ & ١ & ٣ \end{array}\right] \longrightarrow$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|c} ١ & ٠ & ٠ & ٣/٥ & ٢/٥ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ & ٢/٥ & ٣/٥ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ١ & ٠ & ٠ & ١ & ٣ \end{array}\right]$$

إذن إن مقلوب مصفوفة الأمثال هو:

$$A^{-١} = \begin{bmatrix} ٣/٥ & ٢/٥ & ٠ \\ ٢/٥ & ٣/٥ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

كما وأن حل هذه الجملة هو:

$$x_١ = ١, \qquad x_٢ = ٢, \qquad x_٣ = ٣$$

مثال (٧-٢٠):

حل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$x_١ + x_٢ - x_٣ = ١$$
$$x_١ + ٢x_٢ + ٣x_٣ = ٠$$
$$x_١ + x_٢ + ٤x_٣ = ١$$
$$٢x_١ - x_٢ - ٢x_٣ = ٥$$

الحل:

لنلاحظ أن:

$$A = \begin{bmatrix} ١ & ١ & -١ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ١ & ٤ \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad [A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & -١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٣ & ٠ \\ ١ & ١ & ٤ & ١ \\ 2 & -1 & -2 & 5 \end{array}\right]$$

لنلاحظ أن $r(A) = ٣$.

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & -١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٣ & ٠ \\ ١ & ١ & ٤ & ١ \\ 2 & -1 & -2 & 5 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & -١ & ١ \\ ٠ & ١ & ٥ & -١ \\ ٠ & ٠ & ٥ & ٠ \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & -١ & ١ \\ ٠ & ١ & ٥ & -١ \\ ٠ & ٠ & ٥ & ٠ \\ 0 & 0 & 15 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & -١ & ١ \\ ٠ & ١ & ٥ & -١ \\ ٠ & ٠ & ٥ & ٠ \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ٠ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ١ & ٠ & -١ \\ ٠ & ٠ & ١ & ٠ \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow r(A \mid B) = ٣$$

إذن:

$$r(A) = r(A \mid B) = ٣ = n$$

والمجموعة متوافقة، والحل هو:

$$x_١ = ٢, \qquad x_٢ = -١, \qquad x_٣ = ٠$$

مثال (٧-٢١):

حل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$x_١ - x_٢ + ٢x_٣ - ٤x_٤ = ١$$
$$x_١ + ٤x_٢ - x_٣ - x_٤ = -٢$$
$$x_١ - ٤x_٢ + ٣x_٣ - ٢x_٤ = -٢$$
$$x_١ - ٨x_٢ + ٥x_٣ - ٢x_٤ = -٢$$

الحل:

$$A = \begin{bmatrix} ١ & -١ & 2 & -٤ \\ ١ & ٤ & -1 & -١ \\ ١ & -4 & 3 & -2 \\ 1 & -٨ & 5 & -٢ \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} ١ & -١ & 2 & -٤ \\ ٠ & ٥ & -3 & ٢ \\ ٠ & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -٧ & 3 & ٢ \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن:

$$\begin{vmatrix} ١ & -١ & 2 & -٤ \\ ٠ & ٥ & -3 & ٢ \\ ٠ & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -٧ & 3 & ٢ \end{vmatrix} = ٥(٢ - ٦) + ٣(-٦ + ١٤) + ٢(-٩ + ٧) = ٠$$

وبالتالي فالجملة مستحيلة الحل.

مثال (٧-٢٢):

حل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$x_١ + ٣x_٢ - x_٣ = ٢$$
$$x_١ - ٣x_٢ - x_٣ = -١$$
$$٣x_١ - ٣x_٢ - ٣x_٣ = -١$$

الحل:

لنختبر فيما إذا كانت المجموعة متوافقة أم لا؟

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ٣ & -١ & ٢ \\ ١ & -٣ & -١ & -١ \\ ٣ & -٣ & -٣ & -١ \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ٣ & -١ & ٢ \\ ٢ & ٠ & -٢ & ١ \\ ٤ & ٠ & -٤ & ١ \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ٣ & -١ & ٢ \\ ٢ & ٠ & -٢ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{array}\right]$$

إذن إن: $r(A) = (A \mid B) = ٢ < n = ٣$.

فجملة المعادلات قابلة للحل، وهي تكافئ معادلتين هما:

$$x_١ + ٣x_٢ - x_٣ = ٢$$
$$٢x_١ - ٢x_٣ = ١$$

ونكون أمام عدد لا نهائي من الحلول مأخوذة بدلالة $n - r = ١$ مجهول اختياري واحد، فإذا فرضنا أن هذا المجهول هو $x_٣$ فإن مجموعة الحلول هي:

$$x_١ = \frac{١ + ٢x_٣}{٢}, \qquad x_٢ = \frac{١}{٤} - ٢x_٣$$

٧-٥ تمارين ومسائل:

١- أوجد مقلوب المصفوفات الآتية (إن وجد):

$$(i)\ \begin{bmatrix} ٤ & ٧ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix},\quad (ii)\ \begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix},\quad (iii)\ \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٦ & ٨ \end{bmatrix},\quad (iv)\ \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$(v)\ \begin{bmatrix} ٣/٤ & ٣/٥ \\ ٥/٦ & ٢/٥ \end{bmatrix},\quad (vi)\ \begin{bmatrix} ١/\sqrt{٢} & ١/\sqrt{٢} \\ -١/\sqrt{٢} & ١/\sqrt{٢} \end{bmatrix},\quad (vii)\ \begin{bmatrix} ٣.٥٥ & ٠.٢٥ \\ ٨.٥٢ & ٠.٦٠ \end{bmatrix}$$

٢- لتكن $A = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$ و $B_١ = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٥ \end{bmatrix}$ و $B_٢ = \begin{bmatrix} -١ \\ ٢ \end{bmatrix}$ و $B_٣ = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٠ \end{bmatrix}$. أوجد $A^{-١}$ واستخدمه في حل ثلاث جمل المعادلات الآتية:

$$AX = B_١,\qquad AX = B_٢,\qquad AX = B_٣$$

٣- أوجد مقلوب المصفوفات الآتية (إن وجد):

$$(i)\ \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٠ \\ ١ & -٢ & -١ \\ ٢ & ٠ & -١ \end{bmatrix},\quad (ii)\ \begin{bmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ ٣ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ & -١ \end{bmatrix},\quad (iii)\ \begin{bmatrix} ١ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ١ \end{bmatrix},\quad (iv)\ \begin{bmatrix} a & ٠ & ٠ \\ ١ & a & ٠ \\ ٠ & ١ & a \end{bmatrix}$$

$$(v)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & ٠ & ٠ \\ ٠ & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ١ & ٠ \\ a & b & c & d \end{bmatrix},\quad (vi)\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & ١ & ٠ \\ ٢ & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & ٣ & ٠ \\ ٠ & 1 & ١ & -١ \end{bmatrix},\quad (vii)\ \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & ٢\sqrt{2} & ٠ \\ -4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & 0 & ٣ & ١ \end{bmatrix}$$

٤- حل جملة كل من مجموعات المعادلتين التاليتين بالطرائق الممكنة كافة:

$$(i)\ \begin{cases} ٣\square + ٤\square = ٢ \\ x - y = -١ \end{cases}\quad (ii)\ \begin{cases} x + ٢\square = ٣ \\ x + y = -٥ \end{cases}\quad (iii)\ \begin{cases} x - ٢\square = -١ \\ ٢\square + y = ٣ \end{cases}$$

$$(iv)\ \begin{cases} ٥\square - y = ١ \\ ٣\square + ٢\square = ٠ \end{cases}\quad (v)\ \begin{cases} x + ٢\square = ١ \\ ٤\square - y = -٣ \end{cases}\quad (vi)\ \begin{cases} ٢\square + y = -٢ \\ x - ٣\square = -١ \end{cases}$$

٥- حل جملة كل من مجموعات المعادلات التالية بالطرائق الممكنة كافة:

$$(i)\ \begin{cases} x + y - z = ١ \\ x + y - ٣\square = ١ \\ ٢\square + y + z = ٠ \end{cases}\quad (ii)\ \begin{cases} x + ٢\square + z = -١ \\ x - ٢\square + ٢\square = ٣ \\ x - ٣\square - ٢\square = -٢ \end{cases}\quad (iii)\ \begin{cases} ٤\square + ٢\square + z = ٢ \\ x + ٣\square = -١ \\ x + y + z = ٠ \end{cases}$$

$$(iv)\ \begin{cases} ٢\square - ٢\square + z = -١ \\ x + ٣\square - ٢\square = ٣ \\ x + ٢\square - ٣\square = ٤ \end{cases}\quad (v)\ \begin{cases} x + ٢\square + z = ١ \\ ٤\square - ٢\square + z = ٣ \\ x + ٣\square + ٢\square = -٢ \end{cases}\quad (vi)\ \begin{cases} x - ٢\square + ٣\square = ١ \\ x + ٢\square + ٣\square = ٤ \\ x - ٢\square - z = -١ \end{cases}$$

الفصل الثامن: التوابع الحقيقية ذات المتغيرات الحقيقية

٨-١ أهمية التوابع في الاقتصاد:

تبين النظرية الاقتصادية أن هناك علاقة وطيدة بين دخل الفرد (الأسرة) والكمية التي يستهلكها (تستهلكها) هذا الفرد لنوعية معينة من سلعة ما، وأقرب مثال على ذلك مادة اللحوم التي يتعلق استهلاكها وبشكل رئيسي بدخل الفرد، فإذا رمزنا لكمية استهلاك الفرد لمادة اللحوم بـ y ولدخل الفرد بـ x نجد أن بالإمكان تمثيل ذلك رياضياً من خلال علاقة تابعية تأخذ الشكل التالي:

$$y = f(x)$$

حيث نسمى x بالمتحول المستقل والذي يمثل دخل الفرد و بـ y المتحول التابع والذي يمثل كمية استهلاك اللحوم. إن الأمثلة على التوابع عديدة جداً، حيث نجدها في: التطبيقات الاقتصادية، التطبيقات الفيزيائية، التطبيقات الكيميائية، ... ويصادفنا العديد من التوابع التي يكون لها متغيرات عديدة تتأثر بها، فمثلاً: تبين النظرية الاقتصادية أن كمية الطلب على (D_i) لسلعة معينة i تخضع لعوامل متعددة منها:

سعر السلعة ذاتها P، أسعار السلع البديلة P_j (حيث تأخذ j قيماً مختلفة باختلاف السلع) Q_K أسعار السلع المكملة (حيث تأخذ K قيماً مختلفة باختلاف السلع)، Y دخل الفرد (الأسرة)، A السن، S الجنس، L عدد السكان. D توزيع الدخل بين المستهلكين ومستواه NE المستوى التعليمي ...) فإذا ترجمنا هذا المنطق رياضاً نجد أن بالإمكان كتابة ذلك من خلال علاقة رياضية ممثلة بتابع يتبع عدة متحولات على النحو التالي:

$$D_i = D_i\left(P, P_j, Q_K, Y, A, S, L, D, NE, \cdots\right)$$

كما ويمكن النظر إلى الإنتاج Y الذي يتأثر بعدة عوامل منها: $x_{١}$ رأس المال، $x_{٢}$ العمل، $x_{٣}$ المواد التي تدخل بالتصنيع، $x_{٤}$ نوعية هذه المواد، $x_{٥}$ منشأ هذه المواد، $x_{٦}$ أسعار هذه المواد وتكلفتها، $x_{٧}$ حاجة السوق لهذا الانتاج ... إلخ، أيضاً يمكن تمثيل ذلك من خلال علاقة رياضية ممثلة بالتابع التالي:

$$y = g(x_{١}, x_{٢}, x_{٣}, \cdots, x_n)$$

٨-٢ تعريف التابع رياضياً:

لنفرض أن لدينا X و Y مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من $\mathbb{R}$، إذا استطعنا وفق قانون معين ربط كل عنصر من المجموعة X، وليكن x بعنصر وحيد y من المجموعة Y ولنرمز له بـ $y = f(x)$، فنقول إن لدينا تابعاً معرفاً على المجموعة X ويأخذ قيمة في Y ونرمز له بـ $y = f(x)$، ونسمي f تابعاً حقيقياً «تابعاً عددياً» ذا متغير حقيقي، ونسمي X مجموعة تعريف التابع أو منطلقه، ونسمي Y مجموعة قيم $f(x)$ بمستقر الفعلي للتابع f.

٨-٣ التوابع وحيدة الطور:

لنفرض أن $E \subseteq \mathbb{R}$ و$f: E \to \mathbb{R}$ تابع حقيقي «ذو متغير حقيقي»، نقول إن التابع f متزايد ضمن المجموعة $A \subset E$ إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall\, x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$$

ونقول إن التابع f متزايد تماماً ضمن المجموعة A إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall\, x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

إذا كان التابع f متزايداً أو متزايداً تماماً ضمن كامل مجموعة تعريفه عندئذٍ ندعو f بالتابع المتزايد أو التابع المتزايد تماماً.

بالحقيقة إن أي تابع متزايد تماماً هو بالوقت نفسه تابع متزايد «العكس ليس صحيحاً» لنلاحظ أن التابع المتزايد يمكن تعريفه بالوقت نفسه من خلال الشرط التالي:

$$\forall\, x_1, x_2 \in A \ \text{ if } \ x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$$

وأيضاً التابع المتزايد تماماً يمكن تعريفه من خلال الشرط التالي:

$$\forall\, x_1, x_2 \in A \ \text{ if } \ x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

نقول إن التابع f متناقص ضمن المجموعة $A \subset E$، وذلك إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall\, x_1, x_2 \in A \text{ if } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$$

نقول إن التابع f متناقص تماماً ضمن المجموعة $A \subset E$، وذلك إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall\, x_1, x_2 \in A \text{ if } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

وإذا كان f متناقصاً أو متناقصاً تماماً على كامل مجموعة تعريفه، عندئذ نسمي f بالتابع المتناقص أو المتناقص تماماً.

إن أي تابع متناقص تماماً هو بالوقت نفسه تابع متناقص.

إن بالإمكان تعريف التابع المتناقص من خلال الشرط التالي:

$$\forall\, x_1, x_2 \in A \text{ if } x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$$

أيضاً يمكن تعريف التابع المتناقص تماماً من خلال الشرط التالي:

$$\forall\, x_1, x_2 \in A \text{ if } x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

نسمي التوابع المتزايدة والمتناقصة بالتوابع وحيدة الطور، والتوابع المتزايدة تماماً، والتوابع المتناقصة تماماً بالتوابع وحيدة الطور تماماً، بالحقيقة إن أي تابع وحيد الطور تماماً هو تابع وحيد الطور.

التوابع الثابتة $f(x) = c$ هي بآن واحد توابع متزايدة ومتناقصة، «هي التوابع الوحيدة التي لها هذه الخواص».

١- التوابع وحيدة الطور تماماً هي متباينة:

بالحقيقة إذا فرضنا أن $x_1 \ne x_2$ «وفرضنا أن $x_1 < x_2$ مثلاً»، عندئذ نحن أمام إحدى المتراجحتين:

$$f(x_1) > f(x_2) \ \text{أو}\ f(x_1) < f(x_2)$$

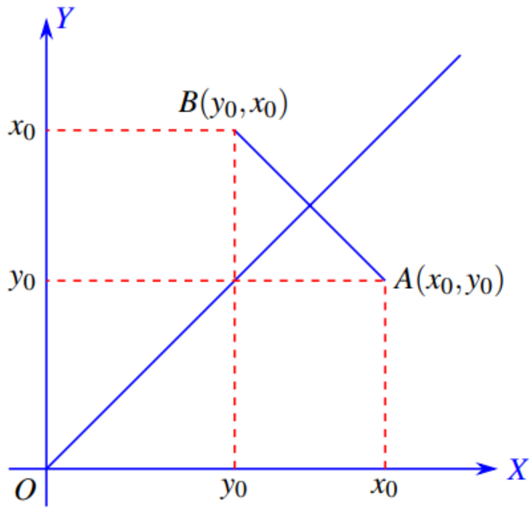
وذلك حسبما يكون $f(x)$ متزايداً تماماً أو متناقص تماماً، وفي كلا الحالتين لدينا $f(x_1) \ne f(x_2)$.

٢– بفرض أن $f(x)$ وحيد الطور تماماً وغامر عندها $f: E \to F$ هو تقابل، وبالتالي فإن للتابع $f(x)$ تابعاً عكسياً $f^{-1}: F \to E$. إن التابع العكسي f^{-1} هو أيضاً وحيد الطور تماماً.

٣– بفرض أن f هو متزايد تماماً عندها f^{-1} هو متزايد تماماً، أما إذا كان f متناقصاً تماماً عندئذٍ f^{-1} هو متناقص تماماً أيضاً.

٤– التمثيل البياني لـ f^{-1} و f هو متناظر «متماثل»:

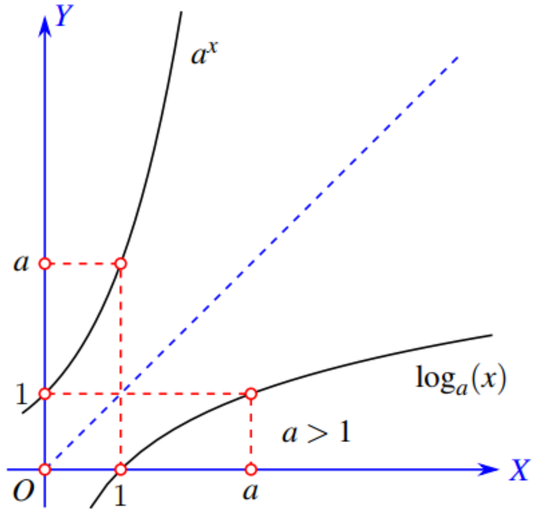
بالحقيقة إذا كان $y_0 = f(x_0)$ فإن $x_0 = f^{-1}(y_0)$، وبالتالي فالنقطة (x_0, y_0) واقعة على المنحني البياني لـ f، أما النقطة (y_0, x_0) فتقع على المنحني f^{-1}. النقطتين (x_0, y_0) ، (y_0, x_0) هما متناظرتان بالنسبة إلى المستقيم $y = x$ (منصف الربع الأول) «الشكل ٨–١».



الشكل (٨–١): تناظر التابع f وتابعه العكسي f^{-1}.

مثال (٨–١):

نعلم أن التابع الأسي $f(x) = a^x$ والتابع اللوغاريتمي $\varphi(x) = \log_a x$ أحدهما تابع عكسي للآخر. والمنحنيان البيانيان لهما متناظران بالنسبة لمنصف الربع الأول «الشكل ٨–٢».



الشكل (٨–٢): تناظر التابع $f(x) = a^x$ وتابعه العكسي $\varphi(x) = \log_a(x)$.

٨-٤ العمليات الجبرية على التوابع الحقيقية:

(I)– لنفرض أن $A \subset \mathbb{R}$، $B \subset \mathbb{R}$ و$f: A \to \mathbb{R},\ g: B \to \mathbb{R}$، تابعان، لنفرض أن $x \in \mathbb{R}$، حتى نستطيع إنجاز عملية الجمع $g(x) + f(x)$ وعملية الفرق $f(x) - g(x)$ وعملية الجداء $f(x) \cdot g(x)$ يجب وقبل كل شيء أن يكون التابعان $f(x)$ و$g(x)$ معرفين، أي أن يكونا معرفين من أجل النقطة x أو حتى على الأبعد من أجل النقطة x المنتمية إلى مجال تعريفهما A بالنسبة لـf وB بالنسبة لـ g، لهذا يجب أن تكون x نقطة مشتركة بين B, A أي إن تنتمي x إلى $A \cap B$.

إن المجموع $S = f + g$ للتابعين f وg هو معرف على المجموعة $A \cap B$ والمعرف من خلال المساواة:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)\ ;\ \forall x \in A \cap B$$

أما الفرق $d = f - g$ فهو معرف على $A \cap B$ من خلال المساواة:

$$(f-g)(x) = f(x) - g\ (x)\ ;\ \forall x \in A \cap B$$

والجداء $P = f \cdot g$ يكون معرفاً على $A \cap B$ من خلال المساواة:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)\ ;\ \forall x \in A \cap B$$

إذا كانت B, A غير محددة فإن التوابع $f + g$، $f - g$، $f \cdot g$، لا يمكن أن تكون معرفة.

أمثلة:

١– ليكن لدينا التابع $f(x) = \ln x$ المعرف على $A =]٠, \infty[$ والتابع $g(x) = \sqrt{-x}$ المعرف على $B =]-\infty, ٠]$، باعتبار أن B, A ليس بينهما نقاط مشتركة «$A \cap B = \emptyset$» فالتابعان $f + g$، $f - g$، $f \cdot g$، غير معرفين.

٢– لنفرض أن لدينا $f(x) = \ln x$ المعرف على $A =]٠, \infty[$ والتابع $g(x) = \sqrt{x - ١}$ المعرف على $B = [١, \infty[$. إن مجال تعريف هذين التابعين $\ln x + \sqrt{x - ١}$، $\ln x - \sqrt{x - ١}$ و$\ln x\left(\sqrt{x - ١}\right)$ هو المجموعة $A \cap B = [١, \infty[$.

ملاحظة:

من خلال جمع التوابع نجد أن التابع $\varphi(x) = ٠$ يلعب دور الصفر نفسه (الحيادي) حين جمع الأعداد.

حين ضرب التابع $f(x)$ بالتابع $\varphi(x) = ١$ فنحصل طبعاً على التابع $f(x)$ أيضاً إذن من خلال ضرب التوابع، فالتابع $\varphi(x) = ١$ يلعب دور الواحد نفسه (الحيادي) حين ضرب الأعداد.

(II)– إذا فرضنا أن $f: A \to \mathbb{R}$ تابع ما وa عدد ما فإن الجداء $a \cdot f(x)$ يكون معرفاً من أجل أية نقطة $x \in A$.

التابع $h = a \cdot f$ يكون معرفاً على مجموعة تعريف التابع f نفسها التي هي A من خلال المساواة:

$$(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)\ ;\ \forall x \in A$$

(III)– لنفرض أن لدينا التابعين $f: A \to \mathbb{R}, g: B \to \mathbb{R}$ ولنفرض أن $x \in \mathbb{R}$ حتى نستطيع إنجاز عملية القسمة $f(x)/g(x)$ يكون ضرورياً أن يكون العددان $f(x)$ و$g(x)$ معرفين من أجل $x \in A \cap B$ وأن يكون $g(x) \neq ٠$ أيضاً «لأن القسمة على صفر ليس لها معنى» نحصل على مجال تعريف تابع القسمة

$\boxed{C = f/g}$ من خلال استبعاد جميع النقاط التي تعدم المقسوم عليه g من مجموعة التعريف $A \cap B$، أما التابع $C = f/g$ فيكون معرفاً على كامل المجموعة من خلال المساواة:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad ; \quad \forall x \in A \cap B \ ; \quad g(x) \neq ٠$$

مثال (٨-٢):

بفرض أن لدينا $f(x) = \ln x$ المعرف على $A =]٠, \infty]$ والتابع $g(x) = \sqrt{١ - x^٢}$ المعرف على $B = [-١, ١]$. لدينا $A \cap B =]٠, ١]$ و $g(١) = ٠$. إذن فمجموعة تعريف تابع القسمة $\ln x / \sqrt{١ - x^٢}$ هي $A \cap B \backslash \{١\} =]٠, ١[$.

٨-٥ أنواع التوابع ومجموعات تعريفها:

يمكن النظر إلى التوابع من خلال صيغتها الرياضية:

٨-٥-١ التوابع الضمنية (المستترة):

نقول عن التابع y إنه تابعاً ضمنياً في المتغير المستقل x إذا كان معطىً بالعلاقة:

$$F(x, y) = ٠$$

وللتعرف عليها يتطلب إجراء بعض الحسابات عليها (نتيجة تحويليها إلى تابع صريح (ظاهر)) في بعض الأحيان وقد يكون غير ممكن في أحيان أخرى.

أمثلة:

$$٢x^٢y + y^٢x - ٥x^٢y^٢ - ١٠ = ٠,$$
$$\sqrt{x^٢ - yx^٢ + x^٢y^٢} - ٥ = ٠$$

٨-٥-٢ التوابع الصريحة (الظاهرة):

وهي التوابع التي قانون (قاعدة ربطها) معطاة بمساواة أحد طرفيها هو المتحول التابع y والطرف الآخر تعبير جبري بدلالة المتحول المستقل x. وشكلها العام هو:

$$y = f(x)$$

أمثلة:

$$y = ٢□ - ٣, \qquad y = x^٢ - ٣□ + ٤$$

وقد يدرج هذا النوع من التوابع في بعض المراجع تحت عنوان التوابع الأولية، والتي أهمها:

توابع كثيرات الحدود، التوابع الكسرية، التوابع الصماء، توابع القوى، التوابع الأسية، التوابع اللوغاريتمية، التوابع المثلثية $(\sin, \cos, \tan, \cot)$ والتوابع المثلثية العكسية $(\arcsin, \arccos, \arctan, \text{arccot})$ إضافة إلى التوابع الناتجة عن التوابع السابقة، من خلال التطبيقات المتتابعة عدة مرات للعمليات الجبرية والعمليات التركيبية والعمليات العكسية.

إذا لم تكن مجموعة تعريف أحد التوابع الأولية محددة بشكل دقيق، عندها يفهم من ذلك أنها مكونة من جميع النقاط التي جعلت العمليات المستخلصة من التابع ذات معنى، هذا يعني أنه المجال الأعظمي لتعريف هذا التابع، ويمكن اعتبار التابع الأولي معرفاً على جزء من المجال الأعظمي للتعريف.
لنأخذ الآن بعين الاعتبار جميع صفوف التعريف للتوابع الأولية ولنتعرف عليها من خلال:

٨-٥-٣ تابع القوى:

إن الشكل العام لتوابع القوى هو:

$$f(x) = x^{\alpha}$$

حيث α ثابت حقيقي ما لا على التعيين.

* إذا فرضنا أن $\alpha = ٠$ فعندها نحصل على التابع الثابت $f(x) = ١$.
* إذا فرضنا أن α عدد طبيعي $(\alpha = n)$ فنحصل عندها على كثير حدود خاص $f(x) = x^{n}$.
* إذا فرضنا أن $\alpha = -n$ فنحصل عندها على تابع كسري $f(x) = x^{-n} = ١/x^{n}$.
* إذا فرضنا أن α ليس عدداً صحيحاً، فلكي يكون للقوى x^{α} معنى نفرض أن يكون $x > ٠$، إذن فالمجال الأعظمي لمجموعة التعريف هو نصف المستقيم الحقيقي $]٠,+\infty[$، وفي هذه الحالة يأخذ التابع فقط القيم الموجبة تماماً، لأن $x^{\alpha} > ٠$ وذلك من أجل $x > ٠$، أي إن:

$$f :]٠,+\infty[\to]٠,+\infty[$$

إضافة لذلك إذا كان $\alpha > ٠$ فالتابع $f(x) = x^{\alpha}$ يكون معرفاً أيضاً عند لنقطة $x = ٠$ ويكون $f(٠) = ٠$.

ملاحظة:

كثيراً ما نصادف توابع القوى: $f(x) = x^{r}$ ذات الأس الكسري $r = m/n$ «$n > ٠$»، و m, n أوليان فيما بينهما، ويمكن كتابة هذا التابع وفق الصيغة:

$$f(x) = \sqrt[n]{x^{m}}$$

لنلاحظ أنه إذا كان m زوجياً أو فردياً فالجذر $\sqrt[n]{x^{m}}$ يكون ليس له معنى، وذلك من أجل $x < ٠$، لهذا يجب التمييز بين تابع القوى x^{r} والتابع $\sqrt[n]{x^{m}}$ لأن المجال الأعظمي لمجموعة تعريف التابع x^{r} هو $]٠,+\infty[$ والمجموعة $[٠,+\infty[$ وذلك حسب طبيعة $m < ٠$ و $m > ٠$، لكن بالنسبة للتابع $\sqrt[n]{x^{m}}$ فالمجموعة هي $\mathbb{R}\backslash\{٠\}$ «وذلك من أجل m زوجية أو فردية»، وذلك حسب طبيعة $m < ٠$ و $m > ٠$.

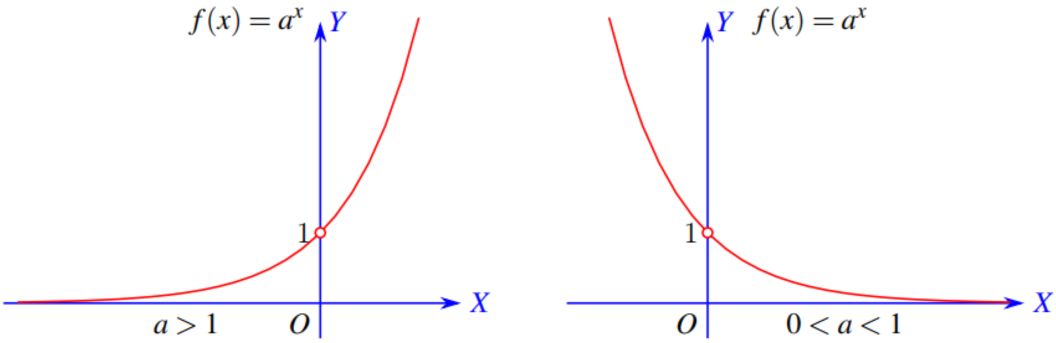
٨-٥-٤ التابع الأسي:

الشكل العام للتابع الأسي هو:

$$f(x) = a^{x} \quad ; \quad a > ٠, \qquad a \neq ١, \qquad x \in \mathbb{R}$$

المجال الأعظمي لمجموعة التعريف هو كامل المستقيم الحقيقي $\mathbb{R}$ «الشكل ٨-٣».

يأخذ التابع الأسي فقط القيم الموجبة تماماً «$y \in \mathbb{R}^{+}$» «عندما $-\infty < x < +\infty$».



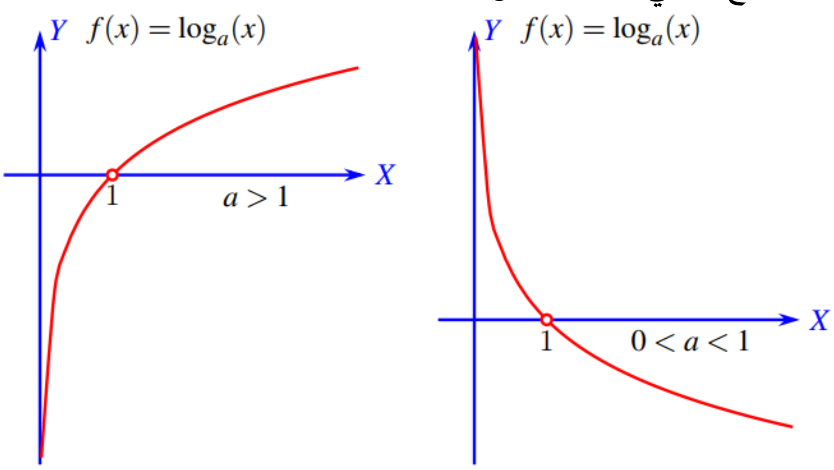
الشكل (٨-٣): التابع $f(x) = a^x$ حيث $a > 1$ أو $0 < a < 1$.

٨-٥-٥ التابع اللوغاريتمي:

الشكل العام له هو:

$$f(x) = \log_a x \quad ; \quad a > ٠, \qquad a \neq ١, \qquad x \in \mathbb{R}^{+*} \equiv (x > ٠)$$

وهو التابع المعاكس للتابع الأسي $g(x) = a^x$.



الشكل (٨-٤): التابع $f(x) = \log_a x$ حيث $a > 1$ أو $0 < a < 1$.

المجال الأعظمي لمجموعة التعريف «الشكل ٨-٤» هو نصف المستقيم $]٠,\infty[$ «اللوغاريتمات لها معنى عندما يكون المضمون موجباً تماماً»، يمكن أن يأخذ التابع اللوغاريتمي أيضاً القيم الموجبة والسالبة:

$$f:]٠,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

٨-٥-٦ تابع كثير الحدود:

توابع كثيرات «متعددة» الحدود: الشكل العام لتوابع كثيرات الحدود هي:

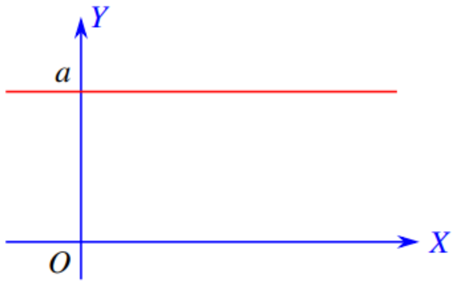
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-١}\, x^{n-١} + a_{n-٢} x^{n-٢} + \cdots + a_١ x + a_٠$$

حيث $a_n \neq ٠$ فيكون كثير الحدود من الدرجة n.

باعتبار أن القوى المرفوعة لـ x هي أعداد طبيعية، فيمكن لـ x أن تأخذ أي عدد حقيقي، لهذا فإن مجموعة تعريف أي كثير حدود يمكن أن تكون أي مجموعة من الأعداد الحقيقية، والمجال الأعظمي للتعريف هو كامل المستقيم الحقيقي $\mathbb{R}$.

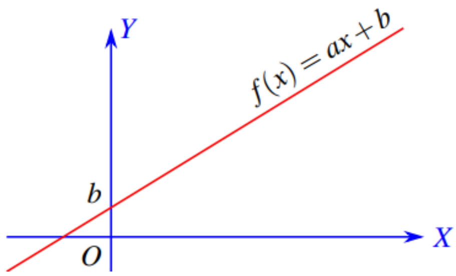
أمثلة:

١- كثيرات الحدود من الدرجة صفر هي توابع ثابتة $f(x) = a$، منحنياتها البيانية ممثلة بمستقيم موازٍ لمحور السينات OX «الشكل ٨-٥».



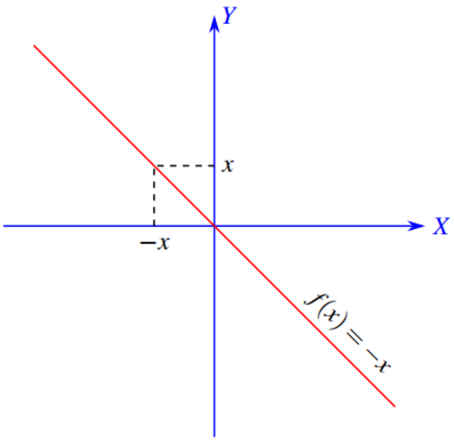
الشكل (٨-٥): التابع $f(x) = a$ حيث a ثابت.

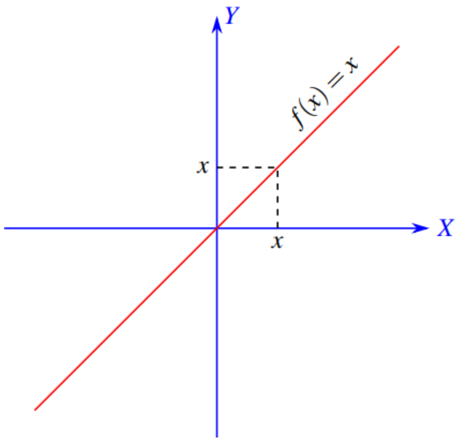
٢- كثيرات الحدود من الدرجة الأولى هي توابع خطية من الشكل $f(x) = ax + b$ ومنحنياتها البيانية مستقيم «الشكل ٨-٦».



الشكل (٨-٦): التابع $f(x) = ax + b$ حيث a, b ثوابت.

إذا كان $a = ١$ و $b = ٠$، عندئذ نحصل على التابع المطابق $f(x) = x$ ومنحنيه البياني هو منصف الربع الأول «الشكل ٨-٧»، وإذا كان $b = ٠$ و $a = -١$ فنحصل على التابع $f(x) = -x$، ومنحناه البياني هو منصف الربع الثاني «الشكل ٨-٨».

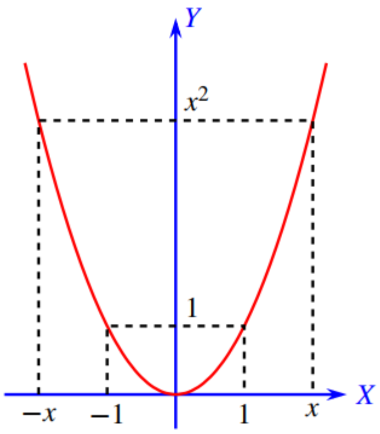




الشكل (٨-٧): منصف الربع الأول.

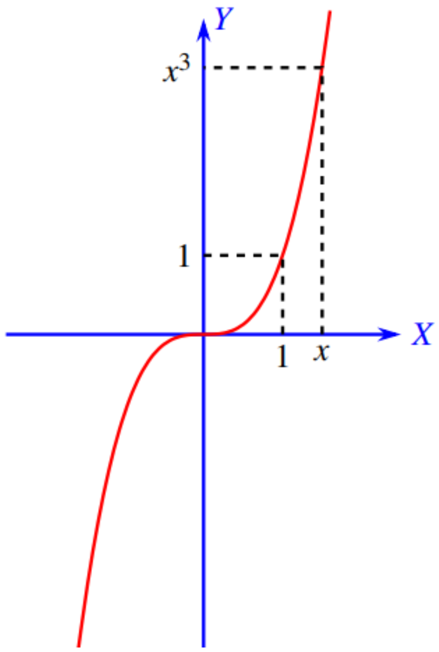
الشكل (٨-٨): منصف الربع الثاني.

٣- تابع كثير الحدود $f(x) = x^٢$ له القيم الموجبة فقط «الشكل ٨-٩» ويسمى قطعاً مكافئاً.



الشكل (٨-٩): المنحني البياني للتابع $f(x) = x^2$.

٤- تابع كثير الحدود $f(x) = x^٣$ له القيم السالبة من أجل $x < ٠$ وله القيم الموجبة من أجل $x > ٠$ «الشكل ٨-١٠».



الشكل (٨-١٠): المنحني البياني للتابع $f(x) = x^3$.

٨-٥-٧ التابع الكسري:

الشكل العام لها هو:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_١ x + a_٠}{b_m x^m + \cdots + b_١ x + b_٠}$$

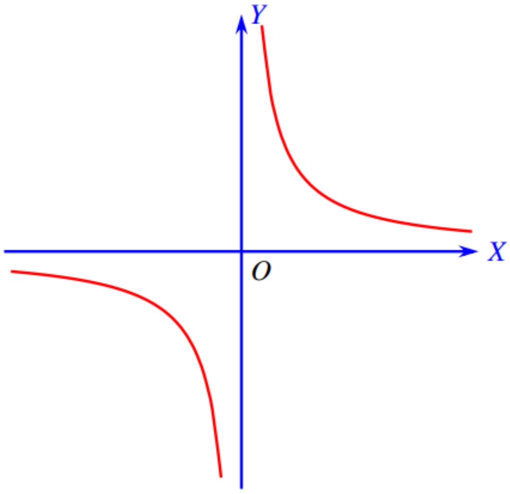
المجال الأعظمي للتعريف هو المجموعة E الناتجة عن طرح النقاط التي تعدم المقام من المستقيم الحقيقي، أي:

$$E = \mathbb{R} \backslash \{x :\ Q(x) = ٠\}$$

إذا كان المقام $Q(x)$ هو من الدرجة صفر، فالتابع ليس كسرياً بل هو كثير حدود.

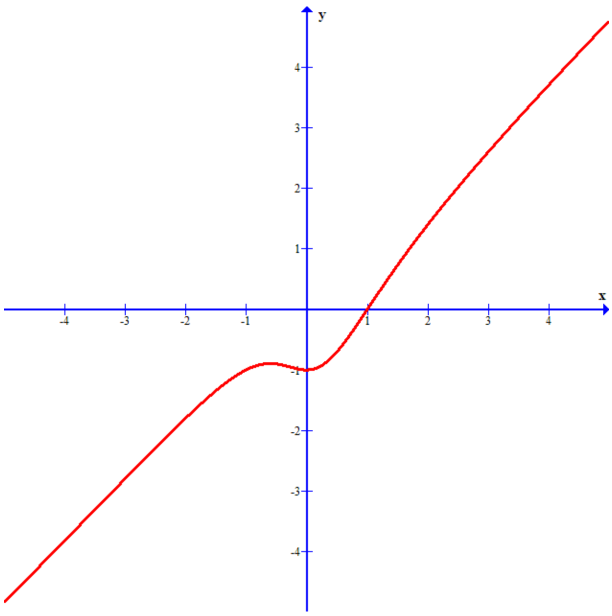
أمثلة:

١) لنفرض أن $f(x) = ١/x$ إن المجال الأعظمي لمجموعة التعريف $\mathbb{R}\backslash\{٠\}$ ومنحنيه البياني هو كما في «الشكل ٨-١١» ويسمى قطع زائد.



الشكل (٨-١١): المنحني البياني للتابع $f(x) = 1/x$.

٢) $f(x) = (x^٣ - ١)/(x^٢ + ١)$ «لاحظ المقام ليس له جذور حقيقية» فالمجال الأعظمي لمجموعة التعريف هو $\mathbb{R}$، «الشكل ٨-١٢».



الشكل (٨-١٢): المنحني البياني للتابع $f(x) = (x^3 - 1)/(x^2 + 1)$.

٨-٥-٨ التوابع الجذرية «الصماء»:

الشكل العام لمثل هذا النوع من التوابع هو: $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{١/n}$ «حيث إن $n \geq ٢$ عدد طبيعي ما لا على التعيين».

* إذا كان n زوجي «$n = ٢□$» فحتى يكون للجذر $\sqrt[n]{x}$ معنى يجب أن يكون $x \geq ٠$، هذا يعني أن المجال الأعظمي لمجموعة التعريف للتابع الجذري $f(x) = \sqrt[٢□]{x}$ هو نصف المستقيم الحقيقي $[٠,+\infty[$.

$$f : [٠,+\infty[\longrightarrow [٠,+\infty[$$

* إذا كان n طبيعياً فردياً «$n = ٢□ - ١$» فالجذر $\sqrt[n]{x}$ يكون له معنى، وذلك مهما يكن $x \in \mathbb{R}$، هذا يعني أن المجال الأعظمي لمجموعة التعريف التابع الجذري $f(x) = \sqrt[٢□-١]{x}$ هو المستقيم الحقيقي $\mathbb{R}$.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

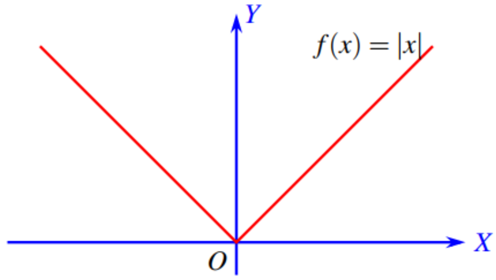
٨-٥-٩ التابع المعين بدلالة وسيط (للاطلاع فقط):

هو تابع معين بدلالة الوسيط t فيما إذا أمكن كتابة كل من المتحول x، والتابع y بدلالة تابع ما للوسيط t على الشكل التالي:

$$y = f(t), \qquad x = g(t)$$

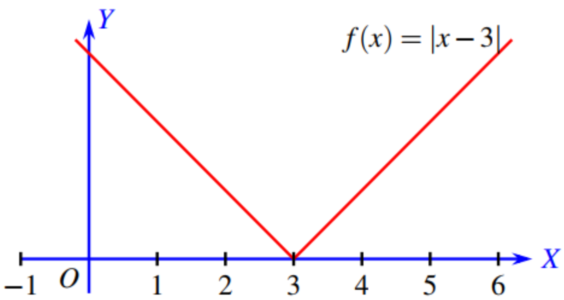
٨-٥-١٠ تابع القيمة المطلقة (للاطلاع فقط):

يأخذ تابع القيمة المطلقة الشكل العام التالي: $y = f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{if} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{if} \quad x < ٠ \end{cases}$. مجموعة تعريفها $\mathbb{R}$ ومجموعة قيمه $[٠, \infty[$ وتمثل بيانياً كما يلي «الشكل ٨-١٣».



الشكل (٨-١٣): المنحني البياني لتابع القيمة المطلقة $f(x) = |x|$.

أما التابع $y = |x - ٣|$ أي: $y = f(x) = |x - ٣| = \begin{cases} x - ٣ & \text{if} \quad x \geq 3 \\ 3 - x & \text{if} \quad x < ٣ \end{cases}$ فمجموعة قيمه $[٠,\infty[$ ومجموعة تعريفه $\mathbb{R}$. ويمكن تمثيلها بيانياً كما يلي «الشكل ٨-١٤».

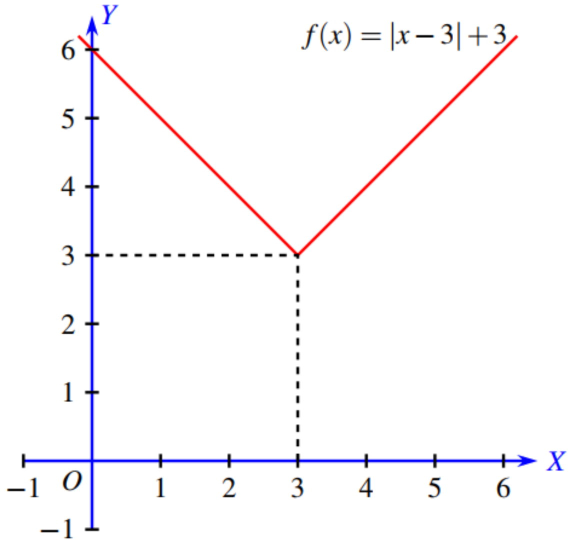


الشكل (٨-١٤): المنحني البياني للتابع $f(x) = |x - 3|$.

والتابع $y = |x - ٣| + ٣$ أي: $y = f(x) = |x - ٣| + ٣ = \begin{cases} x - ٣ + ٣ & \text{if} \quad x \geq 3 \\ 3 - x + 3 & \text{if} \quad x < ٣ \end{cases}$ أي:

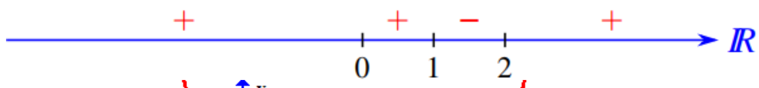
$$y = f(x) = \begin{cases} x & \text{if} \quad x \geq 3 \\ 6 - x & \text{if} \quad x < ٣ \end{cases}$$

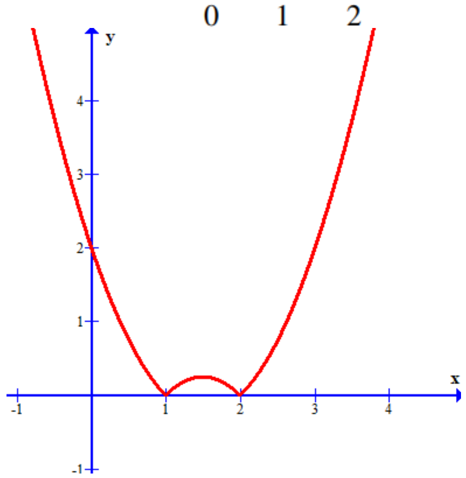
حيث مجموعة التعريف هي $\mathbb{R}$ ومجموعة القيم هي $[٣, \infty[$ والمنحني البياني هو كما في «الشكل ٨–١٥».



الشكل (٨–١٥): المنحني البياني للتابع $f(x) = |x-3| + 3$.

والتابع $y = |x^٢ - ٣□ + ٢|$، لاحظ أن: $x^٢ - ٣□ + ٢ = (x-١)(x-٢)$ يوجد جذران $x = ١, x = ٢$ «خارج الجذرين» $x^٢ - ٣□ + ٢ \geq ٠,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\backslash]١,٢[$ «داخل الجذرين» $x^٢ - ٣□ + ٢ < ٠,\ \forall\, x \in]١,٢[$.





الشكل (٨–١٦): المنحني البياني للتابع $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$.

إن الشكل البياني لهذا التابع هو الوارد في «الشكل ٨–١٦»، وبالتالي فإن التابع يكتب:

$$y = f(x) = |x^٢ - ٣□ + ٢| = \begin{cases} x^٢ - ٣□ + ٢ & \text{if} \quad x < ١ \\ -x^٢ + ٣□ - ٢ & \text{if} \quad ١ \leq x \leq ٢ \\ x^٢ - ٣□ + ٢ & \text{if} \quad x > ٢ \end{cases}$$

والتابع $y = (|x+١| + |x-١|)/٢$ لنلاحظ أن:

$$|x+١| = \begin{cases} x+١ & \text{if} \quad x \geq -1 \\ -x-1 & \text{if} \quad x < -١ \end{cases}, \qquad |x-١| = \begin{cases} x-١ & \text{if} \quad x \geq 1 \\ 1-x & \text{if} \quad x < ١ \end{cases}$$

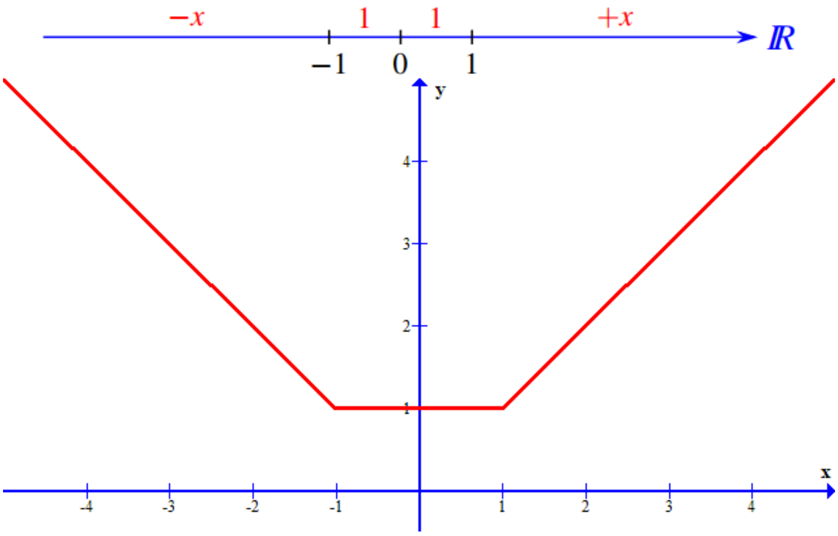
يمكن تمثيل هذه التابع على محور الأعداد الحقيقية كما يلي:

* عندما $x < -١$ يكون: $y = (|x+١| + |x-١|)/٢ = (-x-١+١-x)/٢ = -x$.

* عندما $-١ \leq x \leq ١$ يكون: $y = (|x+١| + |x-١|)/٢ = (x+١+١-x)/٢ = ١$.

* عندما $x = \mp ١$ يكون: $y = (|x + ١| + |x - ١|)/٢ = (١ + ١ + ١ - ١)/٢ = ١$.

* عندما $x > ١$ يكون: $y = (|x + ١| + |x - ١|)/٢ = (x + ١ + x - ١)/٢ = x$.



الشكل (٨-١٧): المنحني البياني للتابع $f(x) = 0.5(|x + 1| + |x - 1|)$.

$$y = \frac{|x + ١| + |x - ١|}{٢} = \begin{cases} -x & \text{if} \quad x \le -١ \\ ١ & \text{if} \quad -١ \le x \le ١ \\ x & \text{if} \quad x \ge ١ \end{cases}$$

مجموعة تعريفه $\mathbb{R}$ ومجموعة قيمه $[١, \infty[$ وتمثيلها البياني هو كما في الشكل ٨-١٧.

٨-٥-١١ التوابع الخطية وغير الخطية:

يكون التابع خطياً إذا كانت قوة المتغير فيه مساوية الواحد الموجب أما غير ذلك فيكون غير خطي.

أمثلة:

إن التوابع التالية هي خطية:

$$y = f(x) = ax + b, \qquad y = f(x, z) = ax + by + c, \qquad y = f(x, z, u) = ax + bz + cu + d$$

أما التوابع التالية فهي غير خطية:

$$y = f(x) = ax^{٢} + ٣, \qquad y = f(x, z) = ax^{٢} + bz^{٣} + c$$

٨-٥-١٢ التوابع العكسية:

إذا كان f و g تابعين بحيث يتحقق التكافؤ التالي:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$$

فعندها نقول إن أحدهما هو تابع عكسي للآخر.

مثال (٨-٣):

إن التابع العكسي للتابع $y = f(x) = ٧x - ٣$ هو: $x = g(y) = (y + ٣)/٧$.

٨-٥-١٣ التوابع المستمرة (المتصلة) والمنقطعة (المنفصلة):

نعرفها بأنها التوابع التي يكون فيها المتغير المستقل (أو المتغيرات المتعددة) متصلاً (لا يوجد به أي انقطاع) وفي حال وجد أي انقطاع في متغيرها (أو في متغيراتها المتعددة) فعندها يكون التابع غير متصل (غير مستمر).

* إن هناك ظواهر عديدة نلحظها في حياتنا تشرح لنا اتصال وانقطاعها التوابع منها:

– تمدد (تقلص) الأجسام مع الزمن أو مع درجة الحرارة فهذه العملية تأخذ شكلاً تدريجياً في التمدد (التقلص).

– كمية تدفق الماء من الصنبور تأخذ شكلاً متزايداً تدريجياً كلما أتحنا لعملية فتح الصنبور طريقاً أوسع، فلا يمكن أن تتدفق المياه من الصنبور دفعة واحدة.

– إن نمو النبات تتم بالتدريج، فلا يمكن للنبات أن ينمو من طول ٥٥ cm إلى طول ٦٠ cm دون المرور بالأطوال المحصورة بين ٦٠ – ٥٥.

– أما إذا أخذنا النمو السكاني فيزداد عدد السكان فرداً فرداً ولا يمكن القول إن هذه الزيادة تأتي نتيجة زيادة فرد ونصف أو فرد وثلاثة أرباع الفرد، فلا وجود لأي عدد ما بين الفرد والفردين. فإذا رمزنا لعدد السكان بالرمز y فإن y تأخذ القيم:

$$١,\quad ٢,\quad ٣,\quad ٤,\quad \cdots,\quad n$$

وما بين كل قيمتين لا يمكن وجود قيم أخرى ويكون التابع الذي متغيره عدد السكان غير معرف عند تلك القيم.

فإذا فرضنا أن لدينا التابع:

$$y = f(x) = \frac{٥\square - x^{٢}}{٢\square}$$

فإن هذا التابع غير معرف عند $x = ٠$، فمن أجل $x = ٠$ نجد أن $y = ٠/٠$ والتابع غير مستمر عند تلك النقطة. ذلك لأن ليس له قيمة معرفة.

٨-٥-١٤ التوابع الزوجية والتوابع الفردية:

التابع الزوجي هو أي تابع منطلقه A مجموعة متناظرة بالنسبة للصفر (أي $x \in A$ فإن $-x \in A$) ويحقق:

$$\forall\, x \in A \;\Longrightarrow\; f(x) = f(-x)$$

أمثلة:

$$y = f(x) = x^{٤} + ٤\,, \qquad y = f(x) = x^{٢}$$

أما التوابع الفردية فهي التي يكون لها قيمتان متعاكستان من أجل قيمتين متعاكستين للمتحول x شكلها العام هو (تابع منطلقه A):

$$\forall\, x \in A \;\Longrightarrow\; f(-x) = -f(x)$$

أمثلة:

$$y = f(x) = x^{٥} + ٣\square, \qquad y = f(x) = x^{٣}$$

٨-٥-١٥ التابع المركب (تابع التابع):

لنفرض أن لدينا التابعين التاليين:

$$y = f(x), \qquad z = g(y)$$

حيث x هو المتحول للتابع الأول y و y هو متحول التابع الثاني z، وهنا نلاحظ من العلاقتين أن التابع y يتبع المتحول x والتابع z يتبع المتحول y إذاً فالعلاقة:

$$z = g\big(f(x)\big)$$

تعرف لنا تابعاً جديداً ندعوه بالتابع المركب ونرمز له بـ $g \circ f$.

إن التابع المركب لايكون معرفا إلا إذا كانت مجموعة قيم التابع f متقاطعة مع منطلق التابع g، أن التقاطع لهما غير خال، ويكون منطلق التركيب (أي التركيب معرف على) مجموعة قيم المتحول x من منطلق f التي صورها منتمية لمنطلق g.

٨-٦ النهايات وطرائق حسابها:

٨-٦-١ نهاية متحول:

لتكن في A مجموعة جزئية في $\mathbb{R}$. الرمز الدال على عنصر اختياري في مجموعة A نسميه متحولاً في A، وغالباً ما نستخدم الرمز x لمثل هذا المتحول.

نقول عن متحول x إنه ينتهي أو يسعى في A إلى عدد a إذا حوى أي جوار لـ a، أي مجال مفتوح مركزه a، قيما لـ x في A غير a. في هذه الحالة نكتب $\lim\limits_{x\to a} x = a$. وهذا يكافئ تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > ٠, \qquad \exists x \in A\backslash\{a\} : \ |x-a| < \varepsilon$$

ونقول إن x ينتهي في A إلى عدد a بقيم متناقصة (من اليمين)، إذا حوى أي جوار يميني لـ a، أي مجال مفتوح طرفه الأيسر a، قيما لـ x في A غير a. في هذه الحالة نكتب $x \overset{>}{\to} a$ أو $x \to a^+$. وهذا يكافئ تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > ٠, \qquad \exists x \in A\backslash\{a\} : ٠ < x-a < \varepsilon$$

ونقول إن x ينتهي في A إلى عدد a بقيم متزايدة (من اليسار)، إذا حوى أي جوار يساري لـ a، أي مجال مفتوح طرفه الأيمن a، قيما لـ x في A غير a. في هذه الحالة نكتب $x \overset{<}{\to} a$ أو $x \to a^-$. وهذا يكافئ تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > ٠, \qquad \exists x \in A\backslash\{a\} : ٠ < a - x < \varepsilon$$

ونقول إن x ينتهي في A إلى عدد ∞، إذا حوى أي جوار لـ ∞، أي مجال من الشكل $]M,\infty[$، قيما لـ x في A. في هذه الحالة نكتب $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$ أو $x \to \infty$. وهذا يكافئ تحقق الشرط:

$$\forall\, M > ٠, \qquad \exists x \in A : \ x > M$$

ونقول إن x ينتهي في A إلى عدد $-\infty$، إذا حوى أي جوار لـ $-\infty$، أي مجال من الشكل $]-\infty, m[$، قيما لـ x في A. في هذه الحالة نكتب $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ أو $x \to -\infty$. وهذا يكافئ تحقق الشرط:

$$\forall\, m < ٠, \exists x \in A : \ x < m$$

٨-٦-٢ نهاية تابع:

نقول إن التابع $y = f(x)$ ينتهي إلى نهاية ما، ولتكن b وذلك عندما ينتهي x إلى a، حين تصبح كل من المقادير $(x-a)$، $(y-b)$ لا متناهياً في الصغر بوقت واحد.

يمكن أن نجد لنهايات تابع الحالات التالية:

إذا كان التابع $y = f(x)$ معيناً عن يسار $x = a$، فعندئذ نقول: إن هذا التابع ينتهي إلى b عندما $x \to a$ من اليسار، إذا تحققت العلاقة التالية:

$$a - \varepsilon_1 < x < a \Rightarrow |y - b| < \varepsilon_2$$

حيث $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ كل منها عدد حقيقي موجب صغير بقدر ما نريد.

إذا كان التابع $y = f(x)$ عن يمين $x = a$ فعندئذ نقول: إن هذا التابع ينتهي إلى b عندما $x \to a$ من اليمين، إذا تحققت العلاقة التالية:

$$a < x < a + \varepsilon_1 \Rightarrow |y - b| < \varepsilon_2$$

إن التابع $y = f(x)$ ينتهي إلى ما لا نهاية عندما ينتهي المتحول x إلى a «من اليمين أو من اليسار»، فيما إذا كان تحقق المتراجحة $|x - a| < \varepsilon$ يؤدي إلى تحقق المتراجحة $|y| > \mu$ حيث ε حقيقي موجب صغير بقدر ما نريد، μ عدد حقيقي موجب كبير بقدر ما نريد، ونكتب:

$$|x - a| < \varepsilon \Rightarrow |y| > \mu$$

إن التابع $y = f(x)$ ينتهي إلى العدد b وذلك عندما ينتهي المتحول x إلى ما لا نهاية، فيما إذا كان تحقق المتراجحة $|x| > \mu$ يؤدي إلى تحقق المتراجحة $|y - b| < \varepsilon$.

إن التابع $y = f(x)$ ينتهي إلى اللانهاية عندما x ينتهي إلى اللانهاية، فيما إذا كان تحقق المتراجحة $|x| > \mu_1$ يؤدي إلى تحقق المتراجحة $|y| > \mu_2$ حيث μ_1, μ_2 كل منها عدد حقيقي موجب كبير بقدر ما نريد.

بفرض أن $z = g(y)$ «$y = f(x)$» فإذا كان للتابع $y = f(x)$ نهاية تساوي b_1، وذلك عندما ينتهي x إلى a «أو عندما ينتهي x إلى ما لا نهاية»، وكان للتابع z نهاية تساوي b_2، وذلك عندما ينتهي y إلى b_1، فإننا نقول إن لتابع التابع $z = g(y)$ نهاية b_2، وذلك عندما ينتهي المتحول المستقل x إلى a، أي إن:

$$\lim_{x \to a} z = b_2$$

أو:

$$\lim_{x \to a} y = b_1, \qquad \lim_{y \to b_1} z = b_2$$

ملاحظات:

١- إذا كانت $a \in E$ «E مجموعة تعريف التابع» فإن نهاية التابع $f(x)$ عند a «إذا وجدت» يمكن أن تكون مختلفة عن $f(a)$، مثال ذلك: التابع التالي معرف على $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{if} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{if} \quad x = 0 \end{cases}$$

كما وأن:

$$\lim_{x\to ٠} f(x) = \infty, \qquad f(٠) = ١$$

٢- إذا كانت $a \notin E$، فليس هناك معنى لإيجاد النهاية، مثال ذلك: إذا أخذنا التابع $f(x) = \ln x$ المعرف على المجال $]٠,\infty[$، فليس هناك معنى لإيجاد نهايته عند النقطة $a = -١$.

٣- مما سبق، ومن أجل أي تابع $f: E \to \mathbb{R}$ إن إيجاد نهاية هذا التابع عند النقطة $a \in E$ يكون بتبديل x بـ a في التابع نفسه.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

مثال (٨-٤):

لنفرض أن:

$$y = f(x) = \frac{٣\square - ٤}{٢\square - ٣}$$

إذا جعلنا $x = \infty$ فنجد أنه $y = f(x) = \infty/\infty$ وهذا يعني أن y حالة عدم تعيين وإذا فرضنا أن:

$$y = f(x) = \frac{٥x^{٢} - ٣\square}{٢x^{٢} - ٣\square}$$

فإن $y = f(x) = ٠/٠$ عندما نجعل $x = ٠$ وهذا يعني أن y حالة عدم تعيين.

وإذا فرضنا أن: $y = f(x) = ٣x^{٢} - x$، فإن $y = f(x) = \infty - \infty$ عندما نجعل $x = \infty$ هذا يعني أن y كذلك هي حالة عدم تعين.

نلاحظ من المثال السابق أننا في كل مرة نجد للتابع y قيمة معينة ومحددة. إن بالإمكان حساب قيمة قريبة للتابع $y = f(x)$ وذلك عندما تقترب x من قيمة ما دون أن تساويها حيث يكتب ذلك رياضياً:

$$\lim_{x\to a} y = b$$

أمثلة:

لنفرض أن لدينا التابع:

$$y = f(x) = \frac{x^{٢} - ٤\square + ٣}{x - ٣}$$

إذا جعلنا $x = ٣$ نجد أن:

$$y = f(x) = \frac{٠}{٠}$$

وهي حالة عدم تعيين. لنحاول الآن إعطاء x قيم قريبة جداً من ٣ (بزيادة أو نقصان) فنجد أن $y = f(x)$ قد أخذت قيماً قريبة جداً من القيمة ٢ ونكتب ذلك:

$$\lim_{x\to ٣} y = \lim_{x\to ٣} \frac{x^{٢} - ٤\square + ٣}{x - ٣} = ٢$$

٨-٦-٣ حالات عدم التعيين وطرائق ازالتها:

حتى نتعرف على حالات عدم التعيين من الضروري الطرق الى خواص النهايات.

٨-٦-٤ خواص النهايات: (للاطلاع فقط)

A– نهاية المجموع الجبري لعدد من التوابع يساوي المجموع الجبري لنهايات هذه التوابع:

$$\lim_{x\to a}(f_١ + f_٢ + \cdots + f_n) = \lim_{x\to a} f_١ + \lim_{x\to a} f_٢ + \cdots + \lim_{x\to a} f_n$$

ملاحظة:

إذا كانت نهاية التابع $f_١$ تساوي ما لانهاية، وذلك عندما x ينتهي إلى a «أو عندما ينتهي x إلى ما لانهاية»، وإذا كانت أيضاً نهاية التابع $f_٢$ تساوي L «حيث L نهاية معينة ومحدودة» فعندها:

$$\lim_{x\to a}(f_١ + f_٢) = \infty$$

ملاحظة:

إذا كانت نهاية كل من التابعين $f_١$ و $f_٢$ تساوي ما لا نهاية «موجبة»، وذلك عندما ينتهي x إلى a «أو عندما ينتهي x إلى ما لا نهاية» فإن:

$$\lim_{x\to a}(f_١ + f_٢) = \infty$$

ملاحظة:

إذا كانت نهاية التابع $f_١$ هي ما لا نهاية «موجبة» وكانت نهاية التابع $f_٢$ هي ما لانهاية أيضاً «سالبة»، وذلك عندما ينتهي x إلى a «أو عندما ينتهي x إلى مالانهاية» فإن:

$$\lim_{x\to a}(f_١ + f_٢) = \infty - \infty$$

«وهي حالة عدم تعيين».

B– إن نهاية حاصل ضرب عدة توابع تساوي حاصل ضرب نهايات هذه التوابع ونكتب:

$$\lim_{x\to a}(f_١ \cdot f_٢ \cdot f_٣ \cdots f_n) = \lim_{x\to a} f_١ \cdot \lim_{x\to a} f_٢ \cdot \lim_{x\to a} f_٣ \cdots \lim_{x\to a} f_n$$

ملاحظة:

إذا كان التابع $f_١$ ينتهي إلى L، وذلك عندما ينتهي x إلى a «أو عندما ينتهي x إلى ما لانهاية»، وكان التابع $f_٢$ يساوي مقداراً ثابتاً وليكن M فإن:

$$\lim_{x\to a}(f_١ \cdot f_٢) = M \cdot L$$

ملاحظة:

إذا كانت نهاية التابع f هي L، وذلك عندما ينتهي x إلى a «أو عندما ينتهي x إلى ما لانهاية» فإن:

$$\lim_{x\to a} f^n = L^n$$

حيث «n صحيح موجب».

ملاحظة:

إذا انتهى كل من التابعين $f_١$ و $f_٢$ إلى ما لانهاية، وذلك عندما ينتهي x إلى a، «أو عندما ينتهي x إلى ما لانهاية» فإن:

$$\lim_{x\to a}(f_١ \cdot f_٢) = \infty$$

ملاحظة:

إذا انتهى التابع $f_١$ إلى نهاية معينة ومحدودة L، وانتهى التابع $f_٢$ إلى ما لانهاية، وذلك عندما ينتهي x إلى a «أو عندما ينتهي x إلى ما لانهاية» فإن:

$$\lim_{x\to a}(f_١ \cdot f_٢) = \infty$$

ملاحظة:

إذا انتهى التابع $f_١$ إلى الصفر، وكانت نهاية التابع $f_٢$ هي ما لانهاية، وذلك عندما ينتهي x إلى a «أو عندما ينتهي x إلى ما لانهاية» فإن:

$$\lim_{x\to a}(f_١ \cdot f_٢) = ٠ \cdot \infty$$

«وهي حالة عدم تعيين».

C– إن نهاية حاصل قسمة تابعين تساوي حاصل قسمة نهايتي هذين التابعين، «شريطة أن لا تكون نهاية المقام معدومة» أي إن:

$$\lim_{x\to x}\frac{f_١}{f_٢} = \frac{\lim_{x\to a} f_١}{\lim_{x\to a} f_٢}$$

ملاحظات:

١– إذا كانت نهاية التابع $y = f(x)$ هي L «حيث L نهاية معينة ومحدودة ولا تساوي الصفر»، وذلك عندما تنتهي x إلى a «أو عندما ينتهي x إلى ما لانهاية»، فإن مقلوب التابع f ينهي إلى نهاية معينة ومحدودة هي مقلوب النهاية. أي إن:

$$\lim_{x\to a} f = L \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{١}{f} = \frac{١}{L}$$

٢– إذا كانت نهاية كل من التابعين $f_١$ و$f_٢$ هي ما لانهاية، وذلك عندما تنتهي x إلى a «أو عندما ينتهي x إلى مالانهاية»، فإن حاصل القسمة $f_١/f_٢$ ينتهي إلى ∞/∞، أي إن:

$$\lim_{x\to a}\frac{f_١}{f_٢} = \frac{\infty}{\infty}$$

«وهي حالة عدم تعيين».

٣– إذا كانت نهاية التابع $f_١$ هي ما لانهاية وكانت نهاية التابع $f_٢$ هي الصفر، «أو أي عدد ثابت»، وذلك عندما ينتهي x إلى a «أو عندما ينتهي x إلى ما لانهاية»، فإن حاصل القسمة $f_١/f_٢$ ينتهي إلى ما لانهاية، أي إن:

$$\lim_{x\to a}\frac{f_١}{f_٢} = \infty$$

٤– إذا انتهى التابع $f_١$ إلى الصفر «أو إلى نهاية معينة ومحددة L»، وانتهى التابع $f_٢$ إلى ما لانهاية، وذلك عندما ينتهي x إلى a «أو عندما ينتهي x إلى ما لانهاية» فإن:

$$\lim_{x\to a}\frac{f_١}{f_٢} = ٠$$

D− إن نهاية الجذر النوني لتابع ما تساوي الجذر النوني لنهايته، أي إذا كان $y=f(x)$ تابعاً ما نهايته L، وذلك عندما ينتهي x إلى a، «أو عندما ينتهي x إلى ما لا نهاية» فإن:

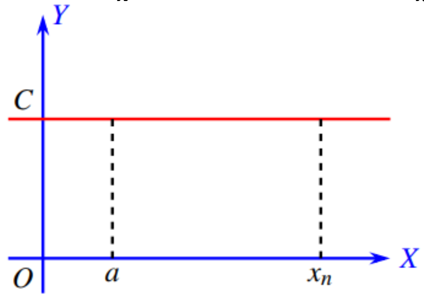
$$\lim_{x\to a} f(x)=L \Longrightarrow \lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L}$$

أمثلة:

١− التابع الثابت $y=f(x)=C$ المعرف على $\mathbb{R}$ «الشكل ٨−١٨».

$$\forall\, a\in\mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{x\to a} C=C$$

$$\lim_{x\to ٢} ١٠=١٠,\qquad \lim_{x\to ٣}(-٣١)=-٣١,\qquad \lim_{x\to ١} ٥=٥$$



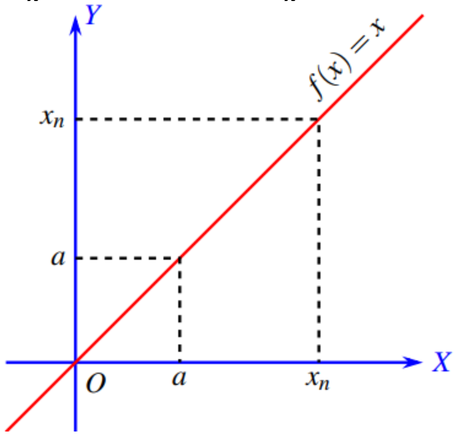
الشكل (٨−١٨): نهاية التابع الثابت $f(x)=C$.

٢− التابع المتناظر $y=f(x)=x$ المعرف على $\mathbb{R}$ «الشكل ٨−١٩».

$$\forall\, a\in\mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{x\to a} x=a$$

وبشكل خاص:

$$\lim_{x\to -\infty} x=-\infty,\qquad \lim_{x\to\infty} x=\infty$$



الشكل (٨−١٩): نهاية التابع المتناظر $f(x)=x$.

٣− التابع $y=f(x)=x^k$ «$k\in\mathbb{N}$» المعرف على $\mathbb{R}$:

$$\forall\, a\in\mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{x\to a} x^k=a^k$$

وبشكل خاص:

$$\lim_{x\to -\infty} x^k=(-\infty)^k,\qquad \lim_{x\to\infty} x^k=\infty$$

٤− التابع $y=f(x)=١/x^k$ «$k\in\mathbb{N}$» المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{٠\}$:

$$\forall\, a\in\mathbb{R}\backslash\{٠\} \Longrightarrow \lim_{x\to a}\frac{١}{x^k}=\frac{١}{a^k}$$

وبشكل خاص:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{١}{x^k}=٠,\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{١}{x^k}=٠,$$

$$\lim_{x\to-١}\frac{١}{x^٤}=١,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{١}{x^٥}=٠,\quad \lim_{x\to٢}\frac{١}{x^٣}=\frac{١}{٨},\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{١}{x^٣}=٠$$

٥- بفرض أن n زوجي، لدينا:

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}\quad ;\quad ٠\le a\le\infty$$

$$\lim_{x\to a}\frac{١}{\sqrt[n]{x}}=\frac{١}{\sqrt[n]{a}}\quad ;\quad ٠<a\le\infty$$

وبشكل خاص:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{١}{\sqrt[n]{x}}=٠,\qquad \lim_{x\to٠}\frac{١}{\sqrt[n]{x}}=\infty,\qquad \lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{x}=\infty$$

٦- بفرض أن n فردياً، لدينا:

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}\quad ;\quad -\infty\le a\le\infty$$

$$\lim_{x\to a}\frac{١}{\sqrt[n]{x}}=\frac{١}{\sqrt[n]{a}}\quad ;\quad a\in\mathbb{R}\backslash\{٠\}$$

وبشكل خاص:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{١}{\sqrt[n]{x}}=٠,\qquad \lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{x}=\infty,\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{١}{\sqrt[n]{x}}=٠,\qquad \lim_{x\to-\infty}\sqrt[n]{x}=-\infty$$

٧- بفرض أن $c>٠$، لدينا:

$$\lim_{x\to a}x^c=a^c\quad ;\quad ٠\le a\le\infty$$

وبشكل خاص:

$$\lim_{x\to٠}x^c=٠,\qquad \lim_{x\to\infty}x^c=\infty$$

٨- بفرض أن $c>٠$، لدينا:

$$\lim_{x\to a}\frac{١}{x^c}=\frac{١}{a^c}\quad ;\quad ٠<a\le\infty$$

وبشكل خاص:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{١}{x^c}=٠,\qquad \lim_{x\to٠}\frac{١}{x^c}=\infty$$

٩- بفرض أن $a>٠$ و $a\neq١$، لدينا:

$$\lim_{x\to b}a^x=a^b\quad ;\quad -\infty\le b\le+\infty$$

وبشكل خاص:

$$\text{if } a>١\Longrightarrow\lim_{x\to\infty}a^x=\infty,\qquad \lim_{x\to-\infty}a^x=٠$$

$$\text{if } ٠<a<١\Longrightarrow\lim_{x\to\infty}a^x=٠,\qquad \lim_{x\to-\infty}a^x=\infty$$

$$\lim_{x\to٥}e^x=e^٥,\qquad \lim_{x\to\infty}e^x=\infty,\qquad \lim_{x\to-\infty}e^x=٠$$

١٠- بفرض أن $a>٠$ و $a\neq١$، لدينا:

$$٠\le b\le\infty\Longrightarrow\lim_{x\to b}\log_a x=\log_a b$$

وبشكل خاص:

$$\text{if } a > ١ \Rightarrow \lim_{x\to ٠} \log_a x = -\infty, \qquad \lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty$$
$$\text{if } ٠ < a < ١ \Rightarrow \lim_{x\to ٠} \log_a x = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty} \log_a x = -\infty$$

١١- $\lim_{x\to -\infty}(١ + ١/x)^x = e$ و $\lim_{x\to\infty}(١ + ١/x)^x = e$ و $\lim_{x\to ٠}(١ + x)^{١/x} = e$.

إن هناك طريقتان للتعرف على كيفية حساب نهايات تابع ما وذلك بعد اللجوء إلى الطريقة الأساسية التي يتم من خلالها تعويض x بقيمتها في التابع فإذا كان للتابع قيمة معينة ومحدودة فتلك هي النتيجة، أما إذا كان للتابع قيمة غير معينة (حالة عدم تعيين) فعندها نلجأ إلى إحدى الطريقتين التاليتين:

الطريقة الأولى:

وفيها نفتش فيما إذا كان هناك علاقة بين البسط والمقام من خلال التحليل حيث نقوم بعملية الاختصار ثم بعدها نلجأ إلى الطريقة المباشرة وهي التعويض.

الطريقة الثانية:

وهي الطريقة العامة لحساب نهاية دالة ما حيث نعطي قيمة تقريبية لـ x ونعوضها في التابع فإذا فرضنا أن $x = a$ فعندها نأخذ قيمة تقريبية لـ x ولتكن $x + \Delta x$ (بزيادة أو نقصان Δx) ونحسب قيمة التابع عندما Δx تصبح قريبة جداً من الصفر.

مثال (٨-٥):

لنفرض أن:

$$y = f(x) = \frac{٣\square - ٤}{٢\square - ٣}$$

إذا جعلنا $x = \infty$ فنجد أنه $y = f(x) = \infty/\infty$ وهذا يعني أن y حالة عدم تعيين.

وإذا فرضنا أن:

$$y = f(x) = \frac{٥x^{٢} - ٣\square}{٢x^{٢} - ٣\square}$$

فإن: $y = f(x) = ٠/٠$ (صفر على صفر) عندما نجعل $x = ٠$ وهذا يعني أن y حالة عدم تعيين.

وإذا فرضنا أن:

$$y = f(x) = ٣x^{٢} - x$$

فإن $y = f(x) = \infty - \infty$ عندما نجعل $x = \infty$ هذا يعني أن y كذلك هي حالة عدم تعين.

نلاحظ من المثال السابق أننا في كل مرة نجد للتابع y قيمة معينة ومحددة. إن بالإمكان حساب قيمة قريبة للتابع $y = f(x)$ وذلك عندما تقترب x من قيمة ما دون أن تساويها حيث يكتب ذلك رياضياً:

$$\lim_{x\to a} y = b$$

مثال (٨-٦):

لنفرض أن لدينا التابع:

$$y = f(x) = \frac{x^{٢} - ٤\square + ٣}{x - ٣}$$

إذا جعلنا $x = ٣$ نجد أن:

$$y = f(x) = ٠/٠$$

وهي حالة عدم تعيين.

لنحاول الآن إعطاء x قيم قريبة جداً من ٣ (بزيادة أو نقصان) فنجد أن $y = f(x)$ قد أخذت قيماً قريبة جداً من القيمة ٢ ونكتب ذلك:

$$\lim_{x\to ٣} f(x) = \lim_{x\to ٣} \frac{x^{٢} - ٤x + ٣}{x - ٣} = ٢$$

مثال (٨-٧):

أوجد نهاية التابع:

$$y = f(x) = \frac{٢x - ١}{٣x + ٢}$$

عندما تنتهي x إلى ٢/٣−.

الحل:

إن:

$$\lim_{x\to -٢/٣} \frac{٢x - ١}{٣x + ٢} = \frac{-٧/٣}{٠} = \pm\infty \qquad (\infty \text{ قيمة معينة})$$

مثال (٨-٨):

أوجد نهاية التابع:

$$y = f(x) = \frac{x^{٢} - ٢٥}{x - ٥}$$

عندما x تنتهي إلى ٥.

الحل: إن:

$$\lim_{x\to ٥} \frac{x^{٢} - ٢٥}{x - ٥} = \frac{٠}{٠} \quad \text{حالة عدم تعيين}$$

يمكن إزالة حالة عدم التعيين هذه إذا طبقنا الطريقة الأولى، حيث نجد أن:

$$\lim_{x\to ٥} \frac{x^{٢} - ٢٥}{x - ٥} = \lim_{x\to ٥} \frac{(x - ٥)(x + ٥)}{x - ٥} = \lim_{x\to ٥}(x + ٥) = ١٠$$

مثال (٨-٩):

أوجد نهاية التابع:

$$y = f(x) = \frac{x^{٢} - ٣x + ٢}{x - ٢}$$

عندما x تنتهي إلى ٢.

الحل: إن:

$$\lim_{x\to ٢} \frac{x^{٢} - ٣x + ٢}{x - ٢} = \frac{٠}{٠} \qquad \text{حالة عدم تعيين}$$

لإزالة حالة عدم التعيين هذه نطبق الطريقة الأولى:

$$\lim_{x\to ٢}\frac{x^{٢}-٣\square+٢}{x-٢}=\lim_{x\to ٢}\frac{(x-٢)(x-١)}{x-٢}=\lim_{x\to ٢}(x-١)=١$$

ملاحظة هامة:

إن هناك بعض المبرهنات التي تغنينا عن تطبيق الطرق السابقة للتعرف على نهاية دالة كسرية ما، وذلك حينما ينتهي متحولها المستقل إلى $\pm\infty$ ونستطيع تطبيقها بشكل دائم.

نورد هذه المبرهنات دون التطرق لبراهينها.

١- إذا كانت درجة بسط التابع الكسرية أكبر من درجة مقامها فعندها تكون النهاية دائماً هي اللانهاية الموجبة أو السالبة حسب إشارة المتغير x.

مثال (٨-١٠):

إن:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{٢}-٣\square+١}{x-٢}=\infty,\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^{٢}-٣\square+١}{x-٢}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{٢x^{٢}+x+٥}{x+٣}=\infty,\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^{٣}-٢x^{٢}+١}{x-٢}=+\infty$$

٢- إذا كانت درجتا البسط والمقام واحدة، فعندها تكون النهاية مساوية لأمثال أعلى درجة في البسط على أمثال أعلى درجة في المقام.

مثال (٨-١١):

إن:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{٣x^{٢}+٤\square-١}{٢x^{٢}+٣}=\frac{٣}{٢},\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{٥x^{٢}-٢\square+٧}{٧x^{٢}-١}=\frac{٥}{٧}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{٢x^{٢}-٣\square+٥}{٥x^{٢}-٣}=\frac{٢}{٥},\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^{٢}+٧\square-٣}{٢x^{٢}-٥}=\frac{١}{٢}$$

٣- إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام فعندها تكون نهاية الدالة الكسرية مساوية الصفر.

مثال (٨-١٢):

إن:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{٢\square+٧}{x^{٢}+٣}=٠,\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{٢\square+٧}{x^{٢}+٣}=٠,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{٥x^{٢}-x+١}{x^{٣}-١}=٠,\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{٧x^{٢}+٣\square-٢}{x^{٣}+١}=٠$$

أضف إلى ذلك هناك القواعد التي يمكن تطبيقها على التوابع لإيجاد نهاياتها وهي:

$(i)\quad \lim_{x\to a}B=B$

$(ii)\quad \lim_{x\to a}B\,f(x)=B\lim_{x-a}f(x)$

$(iii)\quad \lim_{x\to a}[f_{١}(x)\pm f_{٢}(x)\pm\cdots\pm f_n(x)]=\lim_{x\to a}f_{١}(x)\pm\lim_{x\to a}f_{٢}(x)\pm\cdots\pm\lim_{x\to a}f_n(x)$

$(iv)\quad \lim_{x\to a}[f_{١}(x)\cdot f_{٢}(x)\cdot\cdots\cdot f_n(x)]=\lim_{x\to a}f_{١}(x)\cdot\lim_{x\to a}f_{٢}(x)\cdot\cdots\cdot\lim_{x\to a}f_n(x)$

$(v)\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$

أمثلة:

أوجد نهاية كلاً من التوابع التالية:

$$\lim_{x\to ٢}(x^{٢}-٣□-٩)=\lim_{x\to ٢}x^{٢}-٣\lim_{x\to ٢}x-\lim_{x\to ٢}٩=-١١$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{٢}-٣□+٤}{x-١}=\infty,\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^{٢}-٤□+٥}{x-٣x^{٢}+٤x^{٣}}=٠$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{٣x^{٣}-٤□+٥}{٣□+x^{٣}-x^{٢}}=٣,\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{٥x^{٣}-٢□+١}{٢x^{٢}-٤x^{٣}+x}=-\frac{٥}{٤}$$

٨-٧ الاستمرار والانقطاع:

٨-٧-١ استمرار تابع من خلال التعريف:

وهنا لا بد من التطرق إلى مجموعة تعريف التابع:

تعريف (٨-١):

نقول عن التابع $y=f(x)$ أنه معين من أجل $x=a$، إذا كانت القيمة $f(a)$ معينة تماماً. فالتابع $f(x)=١/x$ معين (معرف) من أجل $x=-١,-٢٠,٥,\cdots$ بينما $f(٠)=١/٠$ لا تعني شيئاً. أي أن التابع غير معين (غير معرف) من أجل $x=٠$.

نقول عن التابع $y=f(x)$ أنه معين بجوار $x=a$ فيما إذا كان معيناً عن يمين القيمة $x=a$ ويسارها، وبعبارة أخرى يكون التابع $y=f(x)$ معيناً بجوار $x=a$ فيما إذا أمكن إيجاد عدد حقيقي موجب صغير بقدر ما نريد وليكن ε بحيث إنه من أجل جميع x تتحقق المتراجحة: $x-\varepsilon<x<x+\varepsilon$.

تعريف (٨-٢):

نقول إن التابع $y=f(x)$ معين (معرف) في مجال ما $[a,b]$ إذا كان معيناً (معرفاً) من أجل كل نقطة من نقط هذا المجال، أي إذا كان التابع معيناً (معرفاً) من أجل كل قيمة في المجال $a\le x\le b$.

مثال (٨-١٣):

إن التابع:

$$y=\frac{٢□+١}{x-١}$$

معين من أجل جميع قيم x باستثناء $x-١$.

نقول إن التابع $y=f(x)$ هو معين عن يسار $x=a$، فيما إذا عوضنا كل x بأية قيمة عددية من مجال حده الأعلى a فنتج للتابع قيمة عددية معروفة، وبعبارة أخرى إذا أمكن إيجاد عدد حقيقي موجب صغير بقدر ما نريد وليكن ε بحيث يكون التابع معيناً من أجل جميع قيم x التي تحقق المتراجحة: $a-\varepsilon<x<a$.

مثال (٨-١٤):

إن التابع:

$$y=\frac{٣□}{\sqrt{٢-x}}$$

هو معين من اليسار من أجل $x = ٢$ وغير معين من أجل $x = ٢$.

نقول إن التابع $y = f(x)$ هو معين عن يمين $x = a$، إذا عوضنا كل x بأية قيمة عددية من مجال حده الأعلى a ونتج للتابع قيمة عددية معروفة، وبعبارةٍ أخرى إذا أمكن إيجاد عدد حقيقي موجب صغير بقدر ما نريد وليكن ε بحيث يكون التابع معيناً من أجل جميع قيم x المحققة للمتراجحة: $a < x < a + \varepsilon$.

مثال (٨-١٥):

التابع $y = \sqrt{٢□ - ٣}$ هو معين من اليمين من أجل $x = ٣/٢$.

نقول إن التابع $y = f(x)$ هو معين مهما تكن قيمة x إذا قابلت كل قيمة لـ x قيمة للتابع y.

مثال (٨-١٦):

التابعان: $y = \sqrt{٢x^٢ + ٣}$ (و) $y = ٢/(x^٢ + ١)$ معينان من أجل جميع قيم x.

نتيجة:

نستنتج مما سبق أن التابع الصحيح هو معين دوماً، بينما التابع الكسري فهو معين من أجل القيم التي تجعل المقام غير معدوم، وأما التابع الأصم (الجذري) فهو معين دوماً من أجل قيم x التي تجعل المقدار المجذور موجباً.

٨-٧-٢ التابع المستمر:

نقول عن التابع $y = f(x)$ إنه مستمر من أجل $x = a$ إذا حقق الشرطين التاليين:

آ- التابع $y = f(x)$ هو معين من أجل $x = a$ وفي جوار لها.

ب- إذا أعطينا للمتحول x تزايداً قدره Δx، فإن التابع $y = f(x)$ يأخذ تزايداً قدره Δy وذلك اعتباراً من أجل القيمة $x = a$، إذا كان نهاية تزايد المتحول Δx وتزايد التابع Δy من أجل $a = ٠$ تساوي كل منها الصفر.

أي: $\left(\lim_{\Delta x \to ٠} \Delta y = ٠\right)$ أي: $\Delta x \to ٠ \Rightarrow \Delta y \to ٠$.

أيضاً:

إذا كان التابع $y = f(x)$ معيناً على $]a, b[$ وكان $x_٠ \in]a, b[$ فنقول إن التابع $y = f(x)$ هو مستمر في النقطة $x = x_٠$ إذا كان من أجل $x \to x_٠$ كان $y \to y_٠$ أي إذا قبل التابع النهاية $y_٠ = f(x_٠)$ من أجل $x = x_٠$ ونكتب ذلك كما يلي:

$$\forall\, b > ٠, \exists a > ٠ : x_٠ - a < x < x_٠ + a \Rightarrow y_٠ - b < y < y_٠ + b$$

مثال (٨-١٧):

التابع $y = ٥□/(x^٢ - ٤)$ مستمر إلا من أجل $x = \pm ٢$، والتابع $y = \sqrt{x}$ مستمر من أجل $\mathbb{R}^{*+}$ إلا أنه غير مستمر من أجل $\mathbb{R}^{*-}$، ويكون مستمراً عند $x = ٠$ حينما $x \to ٠^-$، وغير مستمر عند $x = ٠$ حينما $x \to ٠^+$.

كما وأن التابع $y = ١/x$ غير مستمر من أجل $x = ٠$، لأن قيمته تصبح $+\infty$ عندما $x \to ٠^-$ وقيمته تصبح $-\infty$ عندما $x \to ٠^+$.

٨-٧-٣ الاستمرار على مجال:

نقول إن التابع $y = f(x)$ مستمر على مجال ما إذا كان مستمراً في كل نقطة من نقاط هذا المجال. وإذا كان التابع $y = f(x)$ مستمراً في كل نقطة من نقاط المجال بما في ذلك طرفي المجال فعندئذٍ نقول إن هذا التابع $y = f(x)$ هو مستمر على المجال المغلق $[a, b]$.

وبعبارةٍ أخرى: يكون التابع مستمراً على مجال ما إذا كانت كل قيمة ما لـ x واقعة ضمن هذا المجال تقابلها قيمة محدودة للتابع المذكور.

مثال (٨-١٨):

إن التابع $y = (٤□ + ١)/(x - ٢)$ هو مستمر على المجال $[-٥, ١]$ ولكنه غير مستمر من أجل المجال $[٢, ٣]$، إذ أنه غير معين من أجل طرفي المجال المذكور، أيضاً هو غير مستمر من أجل المجال $[١, ٤]$ وذلك لأنه غير مستمر من أجل النقطة $x = ٢$ من هذا المجال.

ملاحظة:

إن كل تابع على شكل كثير حدود هو تابع معرف ومستمر من أجل أي مجال من $\mathbb{R}$، أي من أجل جميع قيم x المنتمية إلى المجال $]-\infty, +\infty[$.

٨-٧-٤ مبرهنات الاستمرار:

وجدنا أنه حين يكون التابع $y = f(x)$ مستمراً عند النقطة $x = x.$ فهذا يقتضي وجود نهاية للتابع $y = f(x)$ وذلك عندما تنتهي x إلى $x.$ (وحسب ما ورد في بحث النهايات والخواص المتعلقة بها) هذه النهاية تساوي $f(x.)$.

فإذا فرضنا أن $f(x), g(x)$ تابعان معرفان على المجموعة نفسها وإذا فرضنا أنهما مستمران عند النقطة $x = a$ فيمكن أن نتوصل إلى المبرهنات التالية المتعلقة بهذين التابعين.

١- إذا كان: $T(x) = f(x) \pm g(x)$ فإن $T(x)$ هو تابع مستمر عند النقطة $x = a$ ويمكن أن نكتب:

$$\lim_{x \to a} T(x) = f(a) \pm g(a)$$

٢- إذا كان: $T(x) = f(x) \cdot g(x)$ فإن $T(x)$ هو تابع مستمر عند النقطة $x = a$ ويمكن أن نكتب:

$$\lim_{x \to a} T(x) = f(a) \cdot g(a)$$

٣- إذا كان: $T(x) = f(x)/g(x)$ فإن التابع $T(x)$ هو تابع مستمر من أجل جميع القيم التي لا تعدم المقام (شريطة أن يكون $g(x) \neq ٠$). ويمكن أن نكتب:

$$\lim_{x \to a} T(x) = f(a)/g(a)$$

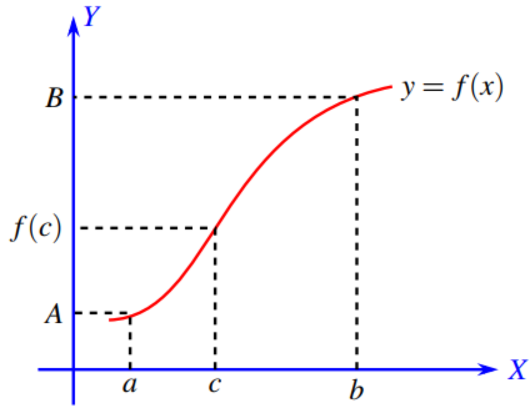
٨-٧-٥ خواص التوابع المستمرة:

الخاصة الأولى:

إذا كان التابع $y = f(x)$ معرفاً ومستمراً على مجال مغلق $[a, b]$ فإن هذا التابع يأخذ قيماً محصورةً بين قيمتي التابع عند طرفي هذا المجال، أي أنه يأخذ قيماً محصورةً بين $f(a)$ و $f(b)$.

وبعبارةٍ أخرى:

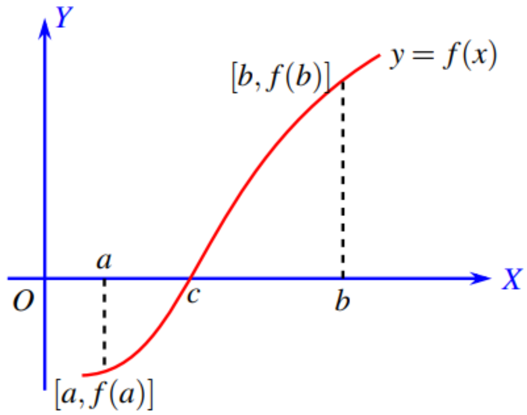
إن تحولات قيم التابع $y = f(x)$ المعرف والمستمر ضمن المجال المذكور وفي أثناء انتقاله هي قيم ضمن هذا المجال ولا يمكن أن يأخذ قيماً خارجةً عن هذا المجال وذلك كما نلاحظ في الشكل ٨-٢٠، فإذا فرضنا أن منحني التابع $y = f(x)$ هو كما ورد في الشكل السابق، وأن هذا التابع معروفاً ومستمراً ضمن المجال $[a, b]$ فنلاحظ بأنه من أجل القيمة c يكون فيها التابع مساوياً $f(c)$.



الشكل (٨-٢٠): استمرار التابع $f(x)$.

الخاصة الثانية:

بفرض أن التابع $y = f(x)$ معرف ومستمر على المجال المغلق $[a, b]$ وبفرض أن للتابع إشارتين مختلفتين عند طرفي هذا المجال، فلا بُدَّ أن ينعدم هذا التابع من أجل نقطة ما ولتكن c تقع داخل هذا المجال، كما نلاحظ في الشكل ٨-٢١.



الشكل (٨-٢١): تغيُّر إشارة التابع $f(x)$ عند $x = c$.

الخاصة الثالثة:

بفرض أن التابع $y = f(x)$ معرف ومستمر على المجال المغلق $[a,b]$، فإن هذا التابع يأخذ قيمة عظمى ولتكن $\alpha_{١}$ يكون من أجلها $f(x) \leq \alpha_{١}$، وقيمة صغرى ولتكن $\alpha_{٢}$ يكون من أجلها $f(x) \geq \alpha_{٢}$. وذلك من أجل جميع قيم x المحصورة داخل المجال المذكور.

٨-٨ تمارين ومسائل:

١- حدد مجموعة تعريف كل من التوابع الآتية:

$y_{١} = f(x) = x^{٢} + ٥\square - ٦$

$y_{٢} = f(x) = -x^{٢} + ٤\square$

$y_{٣} = f(x) = -٢x^{٢} + x + ١$

$y_{٤} = f(x) = x^{٣} - ٣\square + ٢$

$y_{٥} = f(x) = ٢x^{٣} - ٥\square - ٧$

$y_{٦} = f(x) = -x^{٣} - x + ٢$

$y_{٧} = f(x) = x^{٣} - ٣x^{٢} + ٣\square + ١$

$y_{٨} = f(x) = ٢x^{٣} - ٩x^{٢} + ١٢\square - ١$

$y_{٩} = f(x) = \frac{٢}{٣}x^{٣} - ٢x^{٢} + ٢\square - \frac{٢}{٣}$

$y_{١٠} = f(x) = -\frac{x^{٢}}{٣} + x$

$y_{١١} = f(x) = x^{٣} - ٣x^{٢} + x - ١$

$y_{١٢} = f(x) = \frac{٢\square - ٣}{x + ١}$

$y_{١٣} = f(x) = \frac{x}{x^{٢} - ٩}$

$y_{١٤} = f(x) = \frac{x - ١}{٢\square + ١}$

$y_{١٥} = f(x) = \frac{٢\square + ١}{x - ١}$

$y_{١٦} = f(x) = \frac{١}{x^{٢} + ١}$

$y_{١٧} = f(x) = \frac{x^{٢}}{x - ٢}$

$y_{١٨} = f(x) = \frac{x}{١ + x^{٢}}$

$y_{١٩} = f(x) = \frac{١}{x^{٢} - ١}$

$y_{٢٠} = f(x) = \frac{x(x^{٢} + ١)}{x^{٢} - ١}$

$y_{٢١} = f(x) = \frac{x^{٢} + ٢\square + ١}{x - ١}$

$y_{٢٢} = f(x) = \frac{x^{٢} + ١}{x}$

$y_{٢٣} = f(x) = \frac{(١ - x)^{٣}}{x^{٢}}$

$y_{٢٤} = f(x) = \frac{٣}{(١ - x^{٣})(٤ - x^{٢})}$

$y_{٢٥} = f(x) = \frac{١}{x}$

$y_{٢٦} = f(x) = \frac{١}{x^{٢\square}} \quad (n \in \mathbb{N})$

$y_{٢٧} = f(x) = \frac{١}{x^{٢\square+١}} \quad (n \in \mathbb{N})$

$y_{٢٨} = f(x) = c^{-٣x^{٢}}$

$y_{٢٩} = f(x) = c^{x/٢}$

$y_{٣٠} = f(x) = a^{x} \ (٠ < a < ١)$

$y_{٣١} = f(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{٢}$

$y_{٣٢} = \frac{١}{١ + e^{١/x}}$

$y_{٣٣} = f(x) = e^{١/x}$

$y_{٣٤} = f(x) = x\, e^{x}$

$y_{٣٥} = f(x) = x\, e^{١/x}$

$y_{٣٦} = f(x) = [x]\, e^{-[x-١]}$

$y_{٣٧} = f(x) = \log(١ - x^{٢})$

$y_{٣٨} = f(x) \log(٩ - x^{٢})$

$y_{٣٩} = f(x) = \frac{١}{٢}\log\frac{١ + x}{١ - x}$

$y_{٤٠} = f(x) = \frac{\log x}{i + \log x}$

$$y_{٤١} = f(x) = \log\frac{٤ + x}{٤ - x} \qquad y_{٤٢} = f(x) = \log_{١٠}(x^{٢} + ٢)$$

$$y_{٤٣} = f(x) = x\log x \qquad y_{٤٤} = f(x) = x^{٢}\log x$$

٢- أوجد نهاية كل من التوابع الآتية:

$$(i)\quad \lim_{x\to -١} \frac{x - ١}{x - ٣} \qquad (ii)\quad \lim_{x\to -\infty} \frac{x - ١}{٢\square + ١}$$

$$(iii)\quad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^{٢} + ٥}{x^{٣} + x^{٢} - ٣} \qquad (iv)\quad \lim_{x\to ١} \frac{٣\square - ١}{(x - ١)^{٣}}$$

$$(v)\quad \lim_{x\to -\infty} \frac{٢x^{٥} + x^{٤}}{x^{٢} - ٨} \qquad (vi)\quad \lim_{x\to \infty} \frac{x - ١ + x^{٣}}{x - ٣}$$

$$(vii)\quad \lim_{x\to -٣} \frac{x^{٢} - ٥\square + ٦}{x^{٢} - ٣} \qquad (viii)\quad \lim_{x\to -\infty} \frac{٣x^{٤} - ٥\square - ٧}{٢x^{٢} + x + ١}$$

$$(ix)\quad \lim_{x\to ٣} \frac{x^{٣} - ٥x^{٢} + ٣\square + ٩}{x^{٣} - ٤x^{٢} - ٣\square + ١٨} \qquad (x)\quad \lim_{x\to ٢} \frac{x - ١ + x^{٢}}{(x + ٢)^{٣}}$$

$$(xi)\quad \lim_{x\to ١} \frac{٣\square - ٣}{(x - ١)^{٢}}$$

الفصل التاسع: الاشتقاق وقواعده

٩-١ تعريف المشتق:

لنفرض أن لدينا التابع $y = f(x)$ لنعطي لـ x القيمتين $x_{١}$ و $x_{٢}$ فيأخذ التابع $y = f(x)$ قيمتين تقابلهما هما $y_{١} = f(x_{١})$ و $y_{٢} = f(x_{٢})$ وإذا رمزنا لفرق لـ $x_{٢} - x_{١}$ بالرمز Δx فعندها نسمي الفرق Δx بتغير المتحول x وكما نلاحظ أنه يمكن أن يكون هذا التغير موجباً أو سالباً، أي $\Delta x > ٠$ أو $\Delta x < ٠$، كما ونعرف الفرق $y_{٢} - y_{١}$ والذي نرمز له بالرمز Δy بتغير التابع $y = f(x)$ الذي يمكن أن يكون موجباً $\Delta y > ٠$ أو يكون سالباً $\Delta y < ٠$.

لنأخذ الآن النسبة بين هذين التغيرين، فنجد أن:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{٢} - y_{١}}{x_{٢} - x_{١}} = \frac{f(x_{٢}) - f(x_{١})}{x_{٢} - x_{١}}$$

حيث نميز الحالات التالية:

١- إذا كان $\Delta y/\Delta x > ٠$ هذا يعني أن لتغيرات y و x الاتجاه نفسه. بمعنى آخر أن التابع $y = f(x)$ هو تابع متزايد.

٢- إذا كان $\Delta y/\Delta x < ٠$ فهذا يعني أن تغييري x, y متعاكسان، وبالتالي فالتابع $y = f(x)$ هو تابع متناقص.

٣- إذا كان $\Delta y/\Delta x = ٠$ فهذا يعني أن التابع هو تابع ثابت.

لنكتب الآن النسبة السابقة بالشكل التالي:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ولنأخذ نهايتي طرفيها وذلك عندما Δx تسعى نحو الصفر:

$$\lim_{\Delta x \to ٠} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to ٠} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ولنرمز لها بالرمز y'_x أو f'_x أو dy/dx أو $df(x)/dx$ أو $f'(x)$ أو ... حيث نطلق عليها اسم المشتق عند النقطة x.

إذاً يمكن أن نعرف مشتق التابع $y = f(x)$ عند النقطة x بأنه نهاية لنسبة تغيري التابع والمتحول وذلك عندما ينتهي Δx نحو الصفر.

مثال (٩-١):

احسب مشتق التابع: $y = f(x) = x^{٢} - ٣x + ١$.

الحل:

لنعط لـ x تغيراً قدره $\Delta x \neq ٠$ فيأخذ التابع y مقابل ذلك تغيراً قدره $\Delta y \neq ٠$ ويصبح التابع بعد التغير كما يلي:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^{٢} - ٣(x + \Delta x) + ١ = x^{٢} + ٢□ \cdot \Delta x + (\Delta x)^{٢} - ٣□ - ٣□□ + ١$$
$$\Delta y = x^{٢} + ٢□ \cdot \Delta x + (\Delta x)^{٢} - ٣□ - ٣□□ + ١ - x^{٢} + ٣□ - ١$$
$$\Longrightarrow \Delta y = \Delta x(٢□ - ٣ + \Delta x)$$

أي أن:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = ٢□ - ٣ + \Delta x$$
$$y'_x = \lim_{\Delta x \to ٠} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to ٠} (٢□ - ٣ + \Delta x) = ٢□ - ٣$$

مثال (٩-٢):

أوجد مشتق التابع التالي:

$$y = \frac{٥}{٢□ - ٣}$$

الحل:

لنعطي لـ x تغيراً قدره $\Delta x \neq ٠$ فيأخذ التابع y تغيراً قدره $\Delta y \neq ٠$ ويصبح التابع بعد التغير كما يلي:

$$y + \Delta y = \frac{٥}{٢(x + \Delta x) - ٣} \Longrightarrow$$
$$\Delta y = \frac{٥}{٢(x + \Delta x) - ٣} - \frac{٥}{٢□ - ٣} =$$
$$= \frac{١٠□ - ١٥ - ١٠(x + \Delta x) + ١٥}{(٢□ - ٣) \cdot [٢(x + \Delta x) - ٣]} =$$
$$= \frac{-١٠□□}{(٢□ - ٣) \cdot [٢(x + \Delta x) - ٣]}$$

وبالتقسيم على $\Delta x \neq ٠$ نجد أن:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-١٠}{(٢□ - ٣) \cdot [٢(x + \Delta x) - ٣]}$$

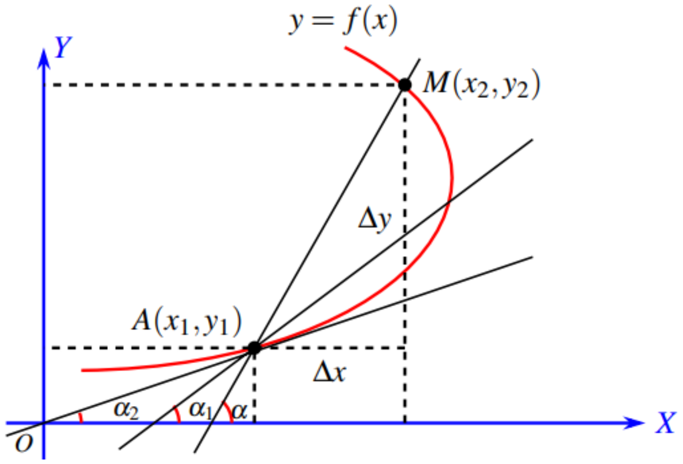
وبأخذ نهاية الطرفين عندما Δx تنتهي نحو الصفر، نجد أن:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to ٠} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to ٠} \frac{-١٠}{(٢□ - ٣) \cdot [٢(x + \Delta x) - ٣]} \Longrightarrow$$
$$y'_x = \frac{-١٠}{(٢□ - ٣)^{٢}}$$

٩-٢ المعنى الهندسي للاشتقاق:

ليكن لدينا التابع $y = f(x)$ المعرف والمستمر ضمن المجال $[a, b]$، ولنرسم المنحني البياني لهذا التابع (الشكل ٩-١) ولنأخذ عليه نقطة ما ولتكن M، ومستقيماً ما يمر من النقطة M ويقطع المنحني في نقطةٍ ما ولتكن A. إن هذا المستقيم يصنع مع محور السينات زاويةً ما ولتكن α، لنثبت النقطة A ولنجعل النقطة M تتحول على هذا المنحني، عندها نلاحظ بأن المستقيم يأخذ أوضاعاً مختلفةً صانعاً زوايا مختلفة مع

محور السينات ولتكن $\alpha, \alpha_١, \alpha_٢$. نلاحظ بأن المستقيم AM يصبح مماساً للمنحني $y = f(x)$ وذلك عندما تنطبق النقطة M على النقطة A.



الشكل (٩-١): المعنى الهندسي للمشتق.

لنفرض أن $A(x_١, y_١)$ و $M(x_٢, y_٢)$ فنجد ومن الشكل ٩-١ أن:

$$\Delta x = x_٢ - x_١, \qquad \Delta y = y_٢ - y_١$$

ولكن $\Delta y/\Delta x$ ليست إلا ميل القاطع AM، فإذا جعلنا $\Delta x \to ٠$ فإن: $\lim_{\Delta x \to ٠} \Delta y/\Delta x$ تساوي المشتق عند النقطة A، هذا يعني أنه عندما تنطبق النقطة M على النقطة A فإن المشتق عند النقطة A ليس إلا ميل مماس التابع $y = f(x)$ عند نقطة التماس A.

إذن من تعريف الاشتقاق نستنتج أن قيمة المشتق عند النقطة x ليست إلا ظل الزاوية التي يصنعها المماس للمنحني في النقطة التي سينها x وذلك في الاتجاه الموجب لمحور السينات، أي أن:

$$\tan \alpha = y' = \lim_{\Delta x \to ٠} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to ٠} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

وإذا ما أمعنا النظر في العلاقة السابقة لوجدنا أن قيمة هذا المشتق لها علاقة مع الزاوية α، فإذا كانت هذه الزاوية منفرجة، أي $\tan \alpha < ٠$ وبالتالي فإن $y' < ٠$. وإذا كانت هذه الزاوية حادة أي $\tan \alpha > ٠$ فإن $y' > ٠$. أما إذا كانت α مساويةً الصفر فعندها يكون المشتق معدوماً ويكون المماس موازياً لـ ox.

٩-٣ قـواعد الاشـتقاق

٩-٣-١ مشتقات التوابع الصحيحة:

٩-٣-٢ مشتق التابع الثابت:

لنفرض أن لدينا التابع $y = f(x) = c$ حيث c ثابتة عددية لا تساوي الصفر، إن:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = ٠$$

أي أن:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to ٠} \frac{\Delta y}{\Delta x} = ٠$$

هذا يعني أن مشتق التابع الثابت معدوم.

٩-٣-٣ مشتق المتحول:

لنفرض أن لدينا التابع: $y = f(x) = x$ فيكون: $\Delta y = \Delta x$، أي أن:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = ١$$

هذا يعني أن:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to ٠} \frac{\Delta y}{\Delta x} = ١$$

أي أن مشتق المتحول يساوي الواحد.

٩-٣-٤ مشتق تابع القوى:

لنفرض أن لدينا التابع: $y = f(x) = x^n$ (n صحيح موجب) لنميز الحالات التي يمكن أن تأخذها n:

$n = ١$ يصبح التابع: $y = f(x) = x$، وقد وجدنا أن: $y'_x = ١$.

$n = ٢$ يصبح التابع: $y = f(x) = x^٢$، لنعطي لـ x تغيراً قدره $\Delta x \neq ٠$ فيأخذ التابع y تغيراً قدره $\Delta y \neq ٠$ ويصبح التابع بعد التغير:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^٢ = x^٢ + ٢x \cdot \Delta x + (\Delta x)^٢ \Longrightarrow$$
$$\Delta y = x^٢ + ٢x \cdot \Delta x + (\Delta x)^٢ - x^٢ = \Delta x(٢x + \Delta x) \Longrightarrow$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = ٢x + \Delta x$$

وبأخذ نهاية الطرفين نجد أن:

$$\lim_{\Delta x \to ٠} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to ٠} (٢x + \Delta x) = ٢x$$

أي أن:

$$y'_x = ٢x$$

وبشكل عام لنفرض أن n أخذت قيماً كبيرة، عندها نجد أن:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to ٠} \frac{\Delta y}{\Delta x} = n \cdot x^{n-١}$$

إذاً إن:

$$y = f(x) = x^n \Longrightarrow y'_x = n \cdot x^{n-١}$$

٩-٣-٥ مشتق مجموع عدد محدود من التوابع:

لنفرض أن لدينا التوابع التالية:

$$y_١ = f_١(x), \qquad y_٢ = f_٢(x), \qquad \cdots, \qquad y_n = f_n(x)$$

ولنفرض أن:

$$z = y_١ + y_٢ + y_٣ + \cdots + y_n$$

ولنعطي لـ x تغيراً قدره $\Delta x \neq ٠$ فيأخذ كلاً من $y_١$، $y_٢$، $\cdots$، y_n، z تغيراً قدره:

$$\Delta y_١ \neq ٠, \qquad \Delta y_٢ \neq ٠, \qquad \cdots, \qquad \Delta y_n \neq ٠, \qquad \Delta z \neq ٠$$

ويصبح المجموع z بعد التغيير كما يلي:

$$z + \Delta z = y_{١} + \Delta y_{١} + y_{٢} + \Delta y_{٢} + \cdots + y_n + \Delta y_n \Longrightarrow$$
$$\Delta z = y_{١} + \Delta y_{١} + y_{٢} + \Delta y_{٢} + \cdots + y_n + \Delta y_n - y_{١} - y_{٢} - \cdots - y_n \Longrightarrow$$
$$\Delta z = \Delta y_{١} + \Delta y_{٢} + \cdots + \Delta y_n$$

نقسم الطرفين على $\Delta x \neq ٠$ نجد أن:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta y_{١}}{\Delta x} + \frac{\Delta y_{٢}}{\Delta x} + \cdots + \frac{\Delta y_n}{\Delta x}$$

وبأخذ نهاية الطرفين عندما Δx تنتهي نحو الصفر نجد أن:

$$\lim_{\Delta x \to ٠} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to ٠} \frac{\Delta y_{١}}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to ٠} \frac{\Delta y_{٢}}{\Delta x} + \cdots + \lim_{\Delta x \to ٠} \frac{\Delta y_n}{\Delta x}$$

وحسب تعريف الاشتقاق نجد أن:

$$z'_x = y'_{١_x} + y'_{٢_x} + \cdots + y'_{n_x}$$

وهذا يعني أن مشتق مجموع عدد محدد من التوابع يساوي مجموع مشتقات هذه التوابع.

مثال (٩-٣):

احسب مشتق التابع التالي: $y = x^{٢} - ٣\square + ٥$.

الحل:

إن: $y'_x = ٢\square - ٣$.

٩-٣-٦ مشتق جداء تابعين:

لنفرض أنه لدينا التابعين التاليين: $u = f(x)\,, v = g(x)$ ولنفرض أن:

$$y = u \cdot v = f(x) \cdot g(x)$$

لنعطي لـ x تغيراً قدره $\Delta x \neq ٠$ فيأخذ كلٌ من التابعين v, u تغيراً قدره $\Delta u \neq ٠$، $\Delta v \neq ٠$ أيضاً $\Delta y \neq ٠$

ويصبح التابع y بعد التغيير كما يلي:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v) = u \cdot v + v \cdot \Delta u + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v$$
$$\Delta y = u \cdot v + v \cdot \Delta u + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v - u \cdot v$$

وبتقسيم الطرفين على $\Delta x \neq ٠$ نجد أن:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \cdot \Delta u + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} = v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

نجعل $\Delta x \to ٠$ ثم نأخذ نهاية الطرفين فنجد أن:

$$\lim_{\Delta x \to ٠} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \cdot \lim_{\Delta x \to ٠} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \lim_{\Delta x \to ٠} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to ٠} \left(\frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \Delta x\right) \cdot \lim_{\Delta x \to ٠} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

أي أن:

$$y'_x = v \cdot u'_x + u \cdot v'_x + u'_x \cdot v'_x \cdot ٠$$

إذاً:

$$y' = v \cdot u' + u \cdot v'$$

مثال (٩-٤):

أوجد مشتق التابع التالي: $y = ٥x^{٢} - ٣\square(x - ٢) + ٤x^{٣}$.

الحل:

$$y'_x = ١٠\square - ٣(x - ٢) - ٣\square \cdot ١ + ١٢x^{٢}$$

مثال (٩-٥):

أوجد مشتق التابع التالي: $y = (x^{٢} - ٣\square) \cdot (٢\square + x^{٣})$.

الحل:

$$y'_x = (٢\square - ٣) \cdot (٢\square + x^{٣}) + (x^{٢} - ٣\square) \cdot (٢ + ٣x^{٢})$$

ملاحظة:

إن بالإمكان تعميم قاعدة مشتق جداء عدد محدود من التوابع كما يلي:

لنفرض أن: $y = f_{١} \cdot f_{٢} \cdot f_{٣} \cdots f_n$. فإن:

$$y' = f'_{١} \cdot f_{٢} \cdot f_{٣} \cdots f_n + f_{١} \cdot f'_{٢} \cdot f_{٣} \cdots f_n + f_{١} \cdot f_{٢} \cdot f'_{٣} \cdots f_n + \cdots + f_{١} \cdot f_{٢} \cdot f_{٣} \cdots f'_n$$

وإذا فرضنا أن:

$$f_{١} = f_{٢} = f_{٣} = \cdots = f_n = f \Longrightarrow$$

عندها نجد أن:

$$y = f^n$$

وبالتالي نجد إن:

$$y'_x = n \cdot f^{n-١} \cdot f'$$

مثال(٩-٦):

أوجد مشتق التابع التالي:

$$y = (٢\square + ١) \cdot (x^{٢} - ٢) \cdot (x^{٣} + ٢x^{٢} + ٥)$$

الحل:

$$y'_x = ٢(x^{٢} - ٢) \cdot (x^{٣} + ٢x^{٢} + ٥) + (٢\square + ١) \cdot (٢\square) \cdot (x^{٣} + ٢x^{٢} + ٥) + (٢\square + ١) \cdot (x^{٢} - ٢) \cdot (٣x^{٢} + ٤\square)$$

٩-٣-٧ مشتق التابع الكسري:

لنفرض أن لدينا التابعين التاليين: $u = f(x)$، $v = g(x) \neq ٠$، ولنفرض أن: $y = u/v$، لنعطي لـ x تغيراً قدره $\Delta x \neq ٠$ فيأخذ كل من v, u تغيراً قدره $\Delta v \neq ٠$ و $\Delta u \neq ٠$ كما ويأخذ y تغيراً قدره $\Delta y \neq ٠$ ويصبح التابع y بعد التغير كما يلي:

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

وبالتالي فإن:

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v(u + \Delta u) - u(v + \Delta v)}{v(v + \Delta v)}$$

$$\Delta y = \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

وبقسمة الطرفين على $\Delta x \neq ٠$ وبأخذ نهاية الطرفين نجد أن:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to ٠} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \cdot \lim_{\Delta x \to ٠} (\Delta u/\Delta x) - u \cdot \lim_{\Delta x \to ٠} (\Delta v/\Delta x)}{\lim_{\Delta x \to ٠} v(v + \Delta v)} = \frac{v \cdot u'_x - u \cdot v'_x}{v^{٢}}$$

ملاحظة:

كان بالإمكان التوصل إلى القاعدة السابقة وذلك بتحويل القسمة $y = u/v$ إلى جداء $u = y \cdot v$ ثم بتطبيق قاعدة مشتق جداء تابعين.

$$u'_x = y'_x \cdot v + y \cdot v'_x \Longrightarrow u'_x = y'_x \cdot v + \frac{u}{v} \cdot v'_x$$

أي أن:

$$y'_x = \frac{u'_x \cdot v - u \cdot v'_x}{v^٢}$$

أمثلة:

أوجد مشتقات التوابع التالية:

$$y = \frac{٣}{x} \Longrightarrow y'_x = \frac{٠ \cdot x - ١ \cdot ٣}{x^٢} = -\frac{٣}{x^٢}$$

$$y = \frac{٥x^٢ - ١}{x} \Longrightarrow y'_x = \frac{١٠x \cdot x - ١ \cdot (٥x^٢ - ١)}{x^٢} = \frac{١٠x^٢ - ٥x^٢ + ١}{x^٢} = \frac{٥x^٢ + ١}{x^٢}$$

$$y = \frac{٣x}{x^٢ + ٣} \Longrightarrow y'_x = \frac{٣ \cdot (x^٢ + ٣) - ٢x \cdot ٣x}{(x^٢ + ٣)^٢} = \frac{-٣x^٢ + ٩}{(x^٢ + ٣)^٢}$$

$$y = \frac{٢x^٢ + x}{x^٢ - ٣x} \Longrightarrow y'_x = \frac{(٤x + ١)(x^٢ - ٣x) - (٢x - ٣)(٢x^٢ + x)}{(x^٢ - ٣x)^٢} = \frac{-٧x^٢}{(x^٢ - ٣x)^٢}$$

٩-٣-٨ مشتق التابع المركب (تابع التابع):

لنفرض أن لدينا التابع $z = f(y)$ (حيث $y = g(x)$)، لنعط لـ x تغيراً قدره $\Delta x \neq ٠$ فيأخذ التابعان y, z تغيراً قدره $\Delta y \neq ٠$ و $\Delta z \neq ٠$ تحقق هذه التغيرات العلاقة التالية:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ولنأخذ نهاية الطرفين بجعل $\Delta x \to ٠$، فنجد أن:

$$\lim_{\Delta x \to ٠} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to ٠} \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta x \to ٠} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Longrightarrow z'_x = z'_y \cdot y'_x$$

مثال (٩-٧):

أوجد مشتق التابع التالي: $(z = x^٢ - ٣x + ١) \quad ; \quad y = ٥z^٣$.

الحل:

$$y'_x = y'_z \cdot z'_x = ١٥z^٢ \cdot (٢x - ٣) = ١٥(x^٢ - ٣x + ١)^٢ \cdot (٢x - ٣)$$

مثال (٩-٨):

أوجد مشتق التابع التالي:

$$z = ٢y^٢ + ٧y - ٥ \quad ; \quad (y = ٢x^٢ - ٣x + ٢)$$

الحل:

$$z'_x = z'_y \cdot y'_x = (٤y + ٧) \cdot (٤x - ٣) = [٤(٢x^٢ - ٣x + ٢) + ٧] \cdot (٤x - ٣)$$

٩-٣-٩ مشتق التابع العكسي:

لنفرض أن لدينا التابع $y = f(x)$ إن تابعه العكسي (حين وجوده) هو $x = g(y)$ ولإيجاد x'_y نعطي x تغيراً قدره $\Delta x \neq ٠$ فيأخذ y تغيراً قدره $\Delta y \neq ٠$ ولكن لدينا:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = ١$$

وإذا ما جعلنا $\Delta x \to ٠$ و $\Delta x \neq ٠$ نجد أن:

$$y'_x \cdot x'_y = ١$$

أي أن:

$x'_y = ١/y'_x$ وذلك من أجل $\Delta x \to ٠$.

مثال (٩-٩):

أوجد مشتق التابع التالي: $y = (٥\square - ١)/(٢\square + ٣)$ ثم مشتق تابعه العكسي ثم قارن المشتقين.

الحل:

$$y'_x = \frac{١٧}{(٢\square + ٣)^٢}$$

إن التابع العكسي هو:

$$x = g(x) = \frac{٣\square + ١}{٥ - ٢\square}$$

$$x'_y = \frac{٣(٥ - ٢\square) + ٢(٣\square + ١)}{(٥ - ٢\square)^٢} = \frac{١٧}{(٥ - ٢\square)^٢} = \frac{١٧}{١٧^٢/(٢\square + ٣)^٢} = \frac{(٢\square + ٣)^٢}{١٧}$$

لنبدل كلاً من x'_x, y'_x بقيمتها فنجد أن:

$$x'_y \cdot y'_x = \frac{(٢\square + ٣)^٢}{١٧} \cdot \frac{١٧}{(٢\square + ٣)^٢} = ١$$

مثال (٩-١٠):

أوجد مشتق التابع التالي: $y = ٤x^٢ + ٥$ ثم مشتق تابعه العكسي.

الحل:

$$y'_x = ٨\square \Longrightarrow x'_y = \frac{١}{٨\square} = \frac{١}{٨\sqrt{(y - ٥)/٤}}$$

٩-٣-١٠ مشتق التابع اللوغاريتمي:

لنفرض أن لدينا التابع اللوغاريتمي: $y = \ln x$، لنعطي لـ x تغيراً قدره $\Delta x \neq ٠$ فيأخذ التابع $y = \ln x$ تغيراً قدره $\Delta y \neq ٠$ ويصبح التابع بعد التغيير على النحو التالي:

$$y + \Delta y = \ln(x + \Delta x) \Longrightarrow \Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x$$

لنطبق بعضاً من خواص اللوغاريتمات:

$$\Delta y = \ln \frac{x + \Delta x}{x}$$

لنقسم الطرفين على $\Delta x \neq ٠$ ولنكتب:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{١}{\Delta x}\cdot\ln\frac{x+\Delta x}{x}$$

لنضرب الطرف الأيمن بالكسر x/x فتصبح العلاقة السابقة بالشكل التالي:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x}{\Delta x}\cdot\frac{١}{x}\cdot\ln\frac{x+\Delta x}{x}$$

وبالتالي باستخدام خواص اللوغاريتمات لدينا:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{١}{x}\cdot\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}$$

لنأخذ نهاية الطرفين من أجل $\Delta x\to ٠$ فنجد أن:

$$\lim_{\Delta x\to ٠}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{١}{x}\lim_{\Delta x\to ٠}\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}=\frac{١}{x}\lim_{\Delta x\to ٠}\ln\left(١+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\Longrightarrow$$

$$y'_x=\frac{١}{x}\ln e=\frac{١}{x}$$

ملاحظة:

يمكن تعميم هذه القاعدة فإذا فرضنا أن لدينا التابع: $y=\ln f(x)$ عندها نجد أن:

$$y'_x=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

لنفرض من جديد أن التابع اللوغاريتمي أخذ الصيغة التالية: $y=\log_a x$، فلإيجاد مشتقه y'_x نتبع الطريقة السابقة حرفياً حيث نجد أن:

$$y'_x=\frac{١}{x}\log_a e=\frac{١}{x\ln a}$$

وإذا أخذ التابع اللوغاريتمي الصيغة التالية: $y=\log_a f(x)$، فإن:

$$y'_x=\frac{f'(x)}{x}\log_a e=\frac{f'(x)}{f(x)\cdot\ln a}$$

ملاحظة:

كان بالإمكان إيجاد المشتق y'_x (دون تطبيق الطريقة السابقة) على النحو التالي:

نعلم أن:

$$\log_a x=\log_e x\cdot\log_a e=\ln x\cdot\log_a e$$

لنشتق الطرفين فنجد أن:

$$(\log_a x)'_x=\frac{١}{x}\cdot\log_a e+\ln x\cdot ٠$$

أي أن:

$$(\log_a x)'_x=\frac{١}{x}\cdot\log_a e=\frac{١}{x\ln a}$$

وهي النتيجة السابقة نفسها.

أمثلة:

أوجد مشتقات التوابع التالية:

$$(i)\quad y=\ln(٣\square)\Rightarrow y'_x=\frac{٣}{٣\square}=\frac{١}{x}$$

$$(ii)\quad y=\ln(٥\square-٣)\Rightarrow y'_x=\frac{٥}{٥\square-٣}$$

$$(iii)\quad y=\ln\left(٣x^{٢}-٢\square+١\right)\Rightarrow y'_x=\frac{٦\square-٢}{٣x^{٢}-٢\square+١}$$

$$(iv)\quad y=\log_{٣}\left(x^{٢}-١\right)\Rightarrow y'_x=\frac{٢\square}{(x^{٢}-١)\ln ٣}$$

$$(v)\quad y=\log_{٤}\left(٧x^{٢}+٢\square-٥\right)\Rightarrow y'_x=\frac{١٤\square+٢}{(٧x^{٢}+٢\square-٥)\ln ٤}$$

٩-٣-١١ مشتق التابع الأسي:

لنفرض أنه لدينا التابع الأسي التالي: $y=e^{x}$، لإيجاد مشتقه نستعين بطريقة الاشتقاق اللوغاريتمي المكونة من المرحلتين التاليتين:

١- نأخذ لوغاريتم الطرفين (ويفضل اللوغاريتم الطبيعي).

٢- نطبق عليه خواص اللوغاريتمات ثم نشتق.

فإذا عدنا للتابع: $y=e^{x}$ وأخذنا اللوغاريتم الطبيعي للطرفين لوجدنا أن:

$$\ln y=\ln e^{x}$$

وحسب خواص اللوغاريتمات نجد أن:

$$\ln y=x\ln e=x$$

نشتق الطرفين فنجد أن:

$$\frac{y'_x}{y}=١\Rightarrow y'_x=y=e^{x}$$

لنفرض أنه لدينا التابع: $y=e^{f(x)}$ عندها نجد أن:

$$y'_x=f'(x)\cdot e^{f(x)}$$

وإذا أخذنا التابع الأسي بشكل عام: $٠ < a \neq ١\ ;\ y=a^{x}$، وطبقنا عليه طريقة الاشتقاق اللوغاريتمي لوجدنا أن:

$$\ln y=\ln a^{x}\Rightarrow\frac{y'_x}{y}=١\cdot\ln a+x\cdot ٠$$

أي أن:

$$y'_x=y\cdot\ln a=a^{x}\cdot\ln a$$

ويمكن تعميم هذه القاعدة، فإذا فرضنا أن لدينا التابع: $y=a^{f(x)}$، لوجدنا أن:

$$y'_x=f'(x)\cdot a^{f(x)}\cdot\ln a$$

أمثلة:

أوجد مشتق كل من التوابع التالية:

$$(i)\quad y=e^{٥\square-١}\Rightarrow y'_x=٥\cdot e^{٥\square-١}$$

$$(ii)\quad y=e^{x^{٢}-٣\square}\Rightarrow y'_x=(٢\square-٣)\cdot e^{x^{٢}-٣\square}$$

$$(iii)\quad y=e^{٥x^{٢}-٣\square+٢}\Rightarrow y'_x=(١٠\square-٣)\cdot e^{٥x^{٢}-٣\square+٢}$$

$$(iv) \quad y = ٢^{x^٢-١} \Longrightarrow y'_x = ٢\square \cdot ٢^{(x^٢-١)} \ln ٢$$
$$(v) \quad y = ٣^{٢x^٢-٣\square+٥} \Longrightarrow y'_x = (٤\square - ٣) \cdot ٣^{٢x^٢-٣\square+٥} \cdot \ln ٣$$
$$(vi) \quad y = ٥^{\ln x} \Longrightarrow y'_x = \frac{١}{x} \cdot ٥^{\ln x} \cdot \ln ٥$$
$$(vii) \quad y = e^{x^٢+٣} \cdot \ln x^٢ \Longrightarrow y'_x = ٢\square \cdot e^{x^٢+٣} \cdot \ln x^٢ + \frac{٢\square}{x^٢} \cdot e^{x^٢+٣}$$

٩-٣-١٢ مشتق التابع الأصم:

لنفرض أنه لدينا التابع التالي:

$$z = f(y) = f\big(g(x)\big) = \sqrt{y}$$

لنعطي لـ x تغيراً قدره $\Delta x \neq ٠$ فيأخذ التابع $y = g(x)$ تغيراً قدره $\Delta y \neq ٠$ كما ويأخذ التابع z تغيراً قدره $\Delta z \neq ٠$ ويصبح التابع بعد التغيير على النحو التالي:

$$z + \Delta z = \sqrt{y + \Delta y} \Longrightarrow \Delta z = \sqrt{y + \Delta y} - \sqrt{y}$$

لنضرب بمرافق الطرف الأيمن وهو $\left(\sqrt{y + \Delta y} + \sqrt{y}\right)$ فنجد أن:

$$\Delta z = \frac{\left(\sqrt{y + \Delta y} - \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{y + \Delta y} + \sqrt{y}\right)}{\sqrt{y + \Delta y} + \sqrt{y}} = \frac{y + \Delta y - y}{\sqrt{y + \Delta y} + \sqrt{y}} = \frac{\Delta y}{\sqrt{y + \Delta y} + \sqrt{y}}$$

وبتقسيم الطرفين على $\Delta x \neq ٠$ ثم بأخذ نهاية الطرفين وجعل $\Delta x \to ٠$ نجد أن:

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to ٠} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to ٠} \frac{\Delta y}{\Delta x\left(\sqrt{y + \Delta y} + \sqrt{y}\right)} = \lim_{\Delta x \to ٠} \frac{\Delta y / \Delta x}{\sqrt{y + \Delta y} + \sqrt{y}} = \frac{y'_x}{٢\sqrt{y}}$$

ملاحظة:

كان بالإمكان التوصل إلى النتيجة السابقة وذلك من خلال ملاحظة أن $z = \sqrt{y}$ بتربيع الطرفين نجد أن:

$$z^٢ = y$$

وبأخذ مشتق الطرفين:

$$٢\square \cdot z'_x = y'_x$$

أي أن:

$$z'_x = \frac{y'_x}{٢\square} = \frac{y'_x}{٢\sqrt{y}}$$

أمثلة:

أوجد مشتق كل من التوابع التالية:

$$(i) \quad y = \sqrt{x} \Longrightarrow y'_x = \frac{١}{٢\sqrt{x}}$$
$$(ii) \quad y = \sqrt{٢\square + ٣} \Longrightarrow y'_x = \frac{٢}{٢\sqrt{٢\square + ٣}}$$
$$(iii) \quad y = \sqrt{x^٢ - ٣\square + ١} \Longrightarrow y'_x = \frac{٢\square - ٣}{٢\sqrt{x^٢ - ٣\square + ١}}$$
$$(iv) \quad y = \sqrt{x^٥} \Longrightarrow y'_x = \frac{٥x^٤}{٢\sqrt{x^٥}} = \frac{٥}{٢}\sqrt{x^٣}$$

$$(v)\quad y=\sqrt[٣]{(٣\square-٢)^{٥}}=(٣\square-٢)^{٥/٣}\Rightarrow y'_x=\frac{٥}{٣}(٣\square-٢)^{(٥/٣)-١}\cdot ٣$$
$$\Rightarrow y'_x=٥(٣\square-٢)^{٢/٣}=٥\sqrt[٣]{(٣\square-٢)^{٢}}$$

$$(vi)\quad y=\sqrt{e^{٥\square+١}}\Rightarrow y'_x=\frac{٥e^{٥\square+١}}{٢\sqrt{e^{٥\square+١}}}=\frac{٥}{٢}\cdot\sqrt{e^{٥\square+١}}$$

$$(vii)\quad y=\sqrt{\ln x}\Rightarrow y'_x=\frac{١/x}{٢\sqrt{\ln x}}$$

$$(viii)\quad y=\sqrt{٣^{x^{٢}-٣}}\Rightarrow y'_x=\frac{٢\square\cdot ٣^{x^{٢}-٣}\cdot\ln ٣}{٢\sqrt{٣^{x^{٢}-٣}}}=x\cdot ٢\sqrt{٣^{x^{٢}-٣}}\cdot\ln ٣$$

$$(ix)\quad y=\sqrt{\ln^{٣}x^{٢}}\Rightarrow y'_x=\frac{٣\ln^{٢}x^{٢}\,(٢\square/x^{٢})}{٢\sqrt{\ln^{٣}x^{٢}}}=\frac{٣}{x}\frac{\ln^{٢}x^{٢}}{\sqrt{\ln^{٣}x^{٢}}}$$

$$(x)\quad y=\sqrt[٥]{\ln x^{٣}}=(\ln x^{٣})^{١/٥}\Rightarrow y'_x=\frac{١}{٥}(\ln x^{٣})^{(١/٥)-١}(\ln x^{٣})'$$
$$\Rightarrow y'_x=\frac{١}{٥}(\ln x^{٣})^{-٤/٥}\cdot\frac{٣x^{٢}}{x^{٣}}=\frac{٣}{٥}(\ln x^{٣})^{-٤/٥}\cdot\frac{١}{x}$$

٩-٣-١٣ المشتقات المتتالية:

لنفرض أن لدينا التابع $y=f(x)$ المعرف والمستمر ضمن مجال ما والقابل للاشتقاق حتى المرتبة n على الأقل. إن:

$$y'_x=f'(x)$$

وهذا الأخير قابل للاشتقاق أيضاً فمشتقه هو:

$$y''_x=f''(x)$$

وبالمناقشة نفسها نجد أن المشتق الثالث أو المشتق من المرتبة الثالثة هو:

$$y'''_x=f'''(x)$$

وهكذا المشتق من المرتبة n (المشتق النوني) هو:

$$y_x^{(n)}=f^{(n)}(x)$$

وإذا أمكن إيجاد مثل هذه المشتقات:

$$f'(x),\qquad f''(x),\qquad f'''(x),\qquad \cdots,\qquad f^{(n)}(x)$$

فنسميها بالمشتقات المتتالية للتابع $y=f(x)$.

مثال (٩-١١):

أوجد المشتقات المتتالية للتابع: $y=x^{٣}-٤x^{٢}+٥\square-١٧$.

الحل:

$$y'=٣x^{٢}-٨\square+٥,\qquad y''=٦\square-٨,\qquad y'''=٦,\qquad y^{(٤)}=٠$$

مثال (٩-١٢):

أوجد المشتق النوني للتابع: $y=\ln x$.

الحل:

$$y' = \frac{١}{x}, \quad y'' = -\frac{١}{x^{٢}}, \quad y''' = \frac{٢}{x^{٣}}, \quad y^{(٤)} = -\frac{٢ \cdot ٣}{x^{٤}}, \cdots, y^{(n)} = (-١)^{n+١} \cdot \frac{(n-١)!}{x^{n}}$$

٩-٤ المشتقات الجزئية:

هناك العديد من التوابع التي تتبع أكثر من متحول مستقل:

إن التابع $y = f(x)$ يتبع متحولاً واحداً هو x.

أما التابع $g = f(x, y)$ فإنه يتبع متحولين أثنين هما: x, y.

والتابع $y = f(x_{١}, x_{٢}, x_{٣})$ يتبع ثلاثة متحولات هي $x_{١}, x_{٢}, x_{٣}$.

⋮ ⋮ ⋮

والتابع $y = f(x_{١}, x_{٢}, \cdots, x_{n})$ يتبع n متحول هم $x_{١}, x_{٢}, \cdots, x_{n}$.

⋮ ⋮ ⋮

وقد يتطلب الأمر أحياناً إيجاد أحد مشتقات هذه التوابع، فلقد كنا قد تعرفنا على كيفية إيجاد مشتق التابع $y = f(x)$، أما إيجاد مشتقات التوابع الباقية فهذا يؤول إلى المشتقات الجزئية بالنسبة لكل متحول من متحولاتها أما كيفية اشتقاق هذه المشتقات الجزئية فيكون بالأسلوب نفسه إلا أننا وفي هذا الاشتقاق نتعامل مع بقية المتحولات كثوابت باستثناء المتحول الذي من خلاله نوجد المشتق.

فإذا فرضنا أن لدينا التابع $z = f(x, y)$ تابع لمتحولين هما x, y وأردنا التعرف على عملية الاشتقاق، فإننا نجد أن هناك مشتقاً جزئياً أولاً بالنسبة لـ x ونرمز له بالرمز:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{أو} \quad z'_{x} \quad \text{أو} \quad \frac{\partial f}{\partial x}$$

وهناك أيضاً مشتق جزئي أول بالنسبة لـ y ونرمز له بالرمز:

$$\frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{أو} \quad z'_{y} \quad \text{أو} \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

أما لإيجاد أحدهما وليكن المشتق الجزئي الأول بالنسبة لـ x فإننا نعطي لـ x تغيراً قدره $\Delta x \neq ٠$ فيأخذ التابع z تغيراً قدره $\Delta z \neq ٠$ (طبعاً المتحول الآخر y هو بمثابة ثابت لا يأخذ أي تغير وبالتالي فمشتقه معدوم) ويصبح التابع بعد التغير كما يلي:

$$z + \Delta z = f(x + \Delta x, y) \Longrightarrow \Delta z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

وبقسمة الطرفين على $\Delta x \neq ٠$ وأخذ نهاية الطرفين عندما Δx تسعى نحو الصفر نجد أن:

$$z'_{x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to ٠} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to ٠} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

وبالأسلوب نفسه نتعامل مع المشتق الجزئي الأول بالنسبة لـ y:

مثال (٩-١٣):

لنفرض أن لدينا التابع: $z = f(x, y) = x^{٢}y - ٣\square y^{٣} + x^{٣}y - ٥$. أوجد المشتق الجزئي الأول بالنسبة لكل من x, y.

الحل: إن:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = ٢□□ - ٣y^{٣} + ٣x^{٢}y$$

أما المشتق الجزئي الأول بالنسبة لـ y فهو:

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = x^{٢} - ٩□y^{٢} + x^{٣}$$

عادة حين التعرف على المشتقات الجزئية يكون ضرورياً التعرف على المشتقات الجزئية المتتالية لتابع ما حيث نرمز للمشتق الجزئي الثاني (من المرتبة الثانية) بالنسبة لمتحول (وليكن x أو y أو...) ما وفق الشكل التالي:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^{٢} f}{\partial x^{٢}}$$

أو

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^{٢} f}{\partial y^{٢}}$$

أو

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^{٢} f}{\partial x \partial y}$$

أو

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^{٢} f}{\partial y \partial x}$$

وهكذا بالنسبة لبقية المشتقات الجزئية المتتالية:

ملاحظة:

إن هناك مبرهنة تبرهن على أن المشتق الجزئي من المرتبة الثانية بالنسبة لمتحولين لا يتأثر بترتيب الاشتقاق لهذين المتحولين أي أن:

$$\frac{\partial^{٢} f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^{٢} f}{\partial x \partial y}$$

مثال (٩-١٤):

أوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للتابع: $z = f(x, y, v) = x^{٢}yv^{٣} - ٢□y^{٣}v^{٢} + ٤x^{٢}y^{٢}v^{٣}$.

الحل:

إن المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى هي:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = ٢□□v^{٣} - ٢y^{٣}v^{٢} + ٨□y^{٢}v^{٣}$$
$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = x^{٢}v^{٣} - ٦□y^{٢}v^{٢} + ٨x^{٢}yv^{٣}$$
$$z'_v = \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial v} = ٣x^{٢}yv^{٢} - ٤□y^{٣}v + ١٢x^{٢}y^{٢}v^{٢}$$

أما المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية فهي:

$$z''_{yy}=\frac{\partial^{٢}z}{\partial y^{٢}}=\frac{\partial^{٢}f}{\partial y^{٢}}=-١٢\square\square v^{٢}+٨x^{٢}v^{٣}$$
$$z''_{vv}=\frac{\partial^{٢}z}{\partial v^{٢}}=\frac{\partial^{٢}f}{\partial v^{٢}}=٦x^{٢}yv-٤\square y^{٣}+٢٤x^{٢}y^{٢}v$$
$$z''_{xy}=\frac{\partial^{٢}z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^{٢}f}{\partial x\partial y}=٢\square v^{٣}-٦y^{٢}v^{٢}+١٦\square\square v^{٣}$$
$$z''_{xv}=\frac{\partial^{٢}z}{\partial x\partial v}=\frac{\partial^{٢}f}{\partial x\partial v}=٦\square\square v^{٢}-٤y^{٣}v+٢٤\square y^{٢}v^{٢}$$
$$z''_{yv}=\frac{\partial^{٢}z}{\partial y\partial v}=\frac{\partial^{٢}f}{\partial y\partial v}=٣x^{٢}v^{٢}-١٢\square y^{٢}v+٢٤x^{٢}yv^{٢}$$
$$z''_{yx}=\frac{\partial^{٢}z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^{٢}f}{\partial y\partial x}=٢\square v^{٣}-٦y^{٢}v^{٢}+١٦\square\square v^{٣}$$
$$z''_{vy}=\frac{\partial^{٢}z}{\partial v\partial y}=\frac{\partial^{٢}f}{\partial v\partial y}=٣x^{٢}v^{٢}-١٢\square y^{٢}v+٢٤x^{٢}yv^{٢}$$
$$z''_{vx}=\frac{\partial^{٢}z}{\partial v\partial x}=\frac{\partial^{٢}f}{\partial v\partial x}=٦\square\square v^{٢}-٤y^{٣}v+٢٤\square y^{٢}v^{٢}$$

لاحظ من خلال هذا المثال أن:

$$z''_{xv}=z''_{vx},\qquad z''_{yx}=z''_{xy},\qquad z''_{xv}=z''_{vx}$$

٩-٥ تمارين ومسائل:

١- أوجد مشتق كل من التوابع الآتية:

$y_{١}=٣\square+٤x^{٢}-١١$

$y_{٢}=٥x^{٢}+٣x^{٣}+٧$

$y_{٣}=(٣\square+٤)^{٢}(٢x^{٢}+١)^{٢}$

$y_{٤}=(٢x^{٢}-٥)(٤x^{٣}+٣\square)^{٣}$

$y_{٥}=\frac{٢\square}{x+١}$

$y_{٦}=\frac{٥x^{٢}+١}{٣\square+١}$

$y_{٧}=(٥x^{٢}+١)^{١٠}$

$y_{٨}=\frac{(٣\square+١)(٢x^{٢}-١)}{٤\square+٢}$

$y_{٩}=\sqrt{(٢x^{٢}-٣\square+١)^{٣}}$

$y_{١٠}=\sqrt{٤x^{٢}-١}$

٢- أوجد مشتق كل من التوابع الآتية:

$y_{١}=e^{٣\square}$

$y_{٢}=e^{٥\square-٢}$

$y_{٣}=(x+١)\,e^{٢x^{٢}-١}$

$y_{٤}=e^{٣\square}\,e^{x+١}$

$y_{٥}=\frac{e^{x-١}}{٥\,e^{٢\square}}$

$y_{٦}=a^{٢\square}$

$y_{٧}=a^{٣x^{٢}-٢\square+١}$

$y_{٨}=(٢\square-٣)\cdot a^{٥\square-١}$

$y_{٩}=x^{x+١}$

$y_{١٠}=x^{r\,e\,z}$

٣- أوجد مشتق كل من التوابع الآتية:

$y_{١}=\ln(٣\square+١)$

$y_{٢}=\ln(٢x^{٢}+١)$

$y_{٣}=\ln(٥x^{٢}-٣\square-١)$

$y_{٤}=\ln(٤x^{٣}+٤x^{٢}-١)^{٣}$

$y_{٥}=\ln e^{٥\square}$

$y_{٦}=\log_{٥}(٢\square-١)$

$$y_7 = \log_4(5x^2 + 4x + 3)^2 \qquad y_8 = \log_4(4x^2 - 3x + 2)^5$$
$$y_9 = \log_3(3x + 1) \qquad y_{10} = \log_4\left(\frac{2x - 1}{3x + 2}\right)$$

الفصل العاشر: دراسة تحولات التوابع ورسم منحنياتها

١٠-١ دراسة تحولات المنحنيات البيانية للتوابع الصحيحة ورسمها:

التوابع الصحيحة هي دوماً معرفة ومستمرة من أجل جميع قيم المتحول x، أي من أجل قيم x التي تحقق العلاقة التالية: $x \in]-\infty, +\infty[$.

١٠-٢ الدراسة العامة للتابع الصحيح من الدرجة الثانية[*]:

الشكل العام لهذا التابع هو: $y = ax^2 + bx + c$، حيث a, b, c ثوابت عددية ($a \neq 0$).

١- التابع معرف ومستمر من أجل قيم x المنتمية إلى مجموعة الأعداد الحقيقية.

٢- المشتق الأول y' هو: $y' = 2ax + b$.

ينعدم المشتق y' من أجل: $x = -b/2a$، حيث قيمة y المقابلة لقيمة x هذه هي:

$$y = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

إذن فالنقطة: $(-b/2a, (4ac - b^2)/4a)$ هي نهاية حدية عظمى (أو صغرى)، يتم تحديدها حسب a:

آ) إذا كانت $a > 0$ فإن:

$x < -b/2a \Leftarrow y' < 0$ فالتابع متناقص.

$x > -b/2a \Leftarrow y' > 0$ فالتابع متزايد.

والنقطة $(-b/2a, (4ac - b^2)/4a)$ هي نهاية حدية صغرى.

ب) أما إذا كانت $a < 0$ فإن:

$x < -b/2a \Leftarrow y' > 0$ فالتابع متزايد.

$x < -b/2a \Leftarrow y' < 0$ فالتابع متناقص.

والنقطة $(-b/2a, (4ac - b^2)/4a)$ هي نهاية حدية عظمى.

٣- أوضاع النهايات:

عندما $x \to \pm\infty$ فنهاية التابع كنهاية الحد ax^2 وهذا يعتمد على a:

آ) إذا كانت $a > 0$ فإن: $x \to -\infty \Rightarrow y \to +\infty$، $x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty$.

وجدول التغيرات في هذه الحالة هو:

---

[*] الدراسة العامة للتابع الصحيح من الدرجة الأولى بسيطة وسهلة للغاية.

x	$-\infty$		$-b/٢\square$		$+\infty$
y'		$-$	٠	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{٤\square\square - b^٢}{٤\square}$	$\nearrow$	$+\infty$

حيث رمزنا لهذه النهاية والتي هي صغرى (دنيا) بالرمز $\mathrm{Min.Limit}$.

ب) أما إذا كانت $a < ٠$ فإن: $x \to -\infty \Rightarrow y \to -\infty$، $x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty$.

وجدول التغيرات في هذه الحالة هو:

x	$-\infty$		$-b/٢\square$		$+\infty$
y'		$+$	٠	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{٤\square\square - b^٢}{٤\square}$	$\searrow$	$-\infty$

حيث رمزنا لهذه النهاية والتي هي عظمى بالرمز $\mathrm{Max.Limit}$.

٤- نحسب المشتق الثاني فنجد أن: $y'' = ٢\square$.

إن اتجاه تقعر المنحني يتوقف على إشارة الثابتة a:

فإذا كانت $a > ٠$ فإن $y'' > ٠$ وتقعر المنحني نحو العينات الموجبة (نحو الأعلى y^+).

أما إذا كانت $a < ٠$ فإن $y'' < ٠$ وتقعر المنحني نحو العينات السالبة (نحو الأسفل y^-).

وكما يلاحظ المشتق الثاني ثابتاً فلا ينعدم مطلقاً وبالتالي فلا يوجد للتابع نقطة انعطاف.

٥- التقاطع مع المحاور الإحداثية:

آ) مع محور السينات: $y = ٠ \Rightarrow ax^٢ + bx + c = ٠$، المعادلة السابقة هي من الدرجة الثانية، جذراها يتبعان قيمة المميز: $\Delta = b^٢ - ٤\square\square$.

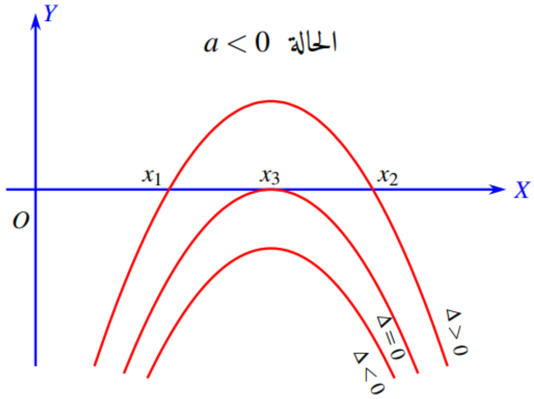
* فإذا كان $\Delta > ٠ \Leftarrow$ فللمعادلة جذران حقيقيان مختلفان $x_١, x_٢$ ومنحني التابع يقطع محور السينات بنقطتين هما: $(x_١, ٠), (x_٢, ٠)$.

* وإذا كان $\Delta = ٠ \Leftarrow$ فللمعادلة جذر حقيقي مضاعف $x_٣$ ومنحني التابع يمس محور السينات بنقطة هي: $(x_٣, ٠)$.

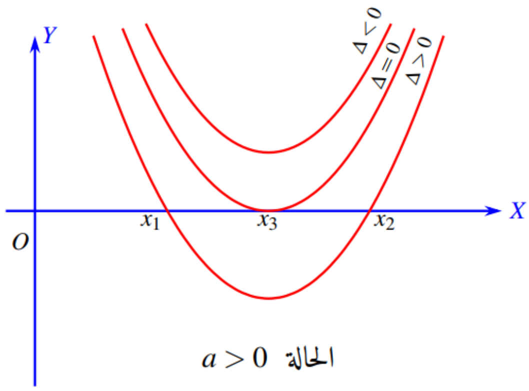
* أما إذا كان $\Delta < ٠ \Leftarrow$ فللمعادلة جذور عقدية (تخيلية)، أي ليس لها جذور حقيقية، وبالتالي فمنحني التابع لا يقطع محور السينات.

ب) مع محور العينات: $x = ٠ \Rightarrow y = c$ والنقطة $(٠, c)$ هي نقطة تقاطع منحني التابع مع محور العينات.

٦- رسم المنحني البياني: سوف نميز عده أشكال لمنحني هذا التابع وذلك حسب الحالات التي تأخذها a ونقط تقاطع المنحني مع المحاور الإحداثية (الشكل ١٠-١ والشكل ١٠-٢).



الشكل (١٠-١): حالة $a < 0$.



الشكل (١٠-٢): حالة $a > 0$.

مثال (١٠-١):

ادرس تحولات التابع: $y = x^{٢} - ٤□ + ٤$ وارسم خطه البياني.

الحل:

التابع معرف ومستمر على مجموعة الأعداد الحقيقية.

المشتق الأول هو: $y' = ٢□ - ٤$.

ينعدم عند القيمة $x = ٤/٢ = ٢$ ويكون من أجلها $y = ٠$ إذن فالنقطة $(٢, ٠)$ هي نهاية حدية صغرى (لأن $a > ٠$).

لنلاحظ أن: $x \to -\infty \Rightarrow y \to \infty$ ، $x \to +\infty \Rightarrow y \to \infty$. وجدول التغيرات هو:

x	$-\infty$		٢		$+\infty$
y'		$-$	٠	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	٠	$\nearrow$	$+\infty$
			Min. Limit		

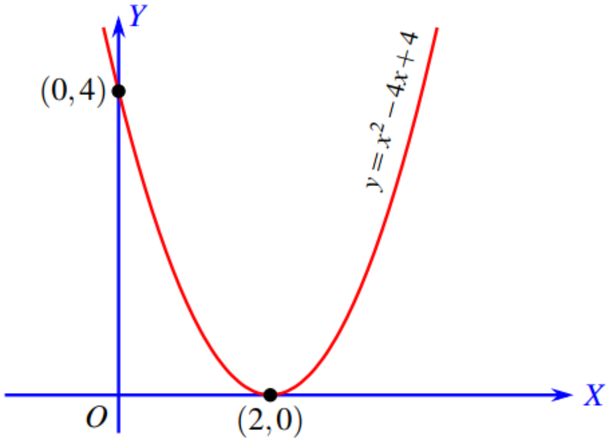
المشتق الثاني: $y'' = ٢$.

y'' لا ينعدم وبالتالي لا توجد نقطة انعطاف، وحيث إن $y'' > ٠$ إذن فالتقعر نحو الأعلى. أما نقاط التقاطع مع المحاور الإحداثية فنجد أن: $x = ٠ \Rightarrow y = ٤$. والنقطة $(٠, ٤)$ هي نقطة تقاطع مع محور العينات.

$$y = ٠ \Rightarrow x^{٢} - ٤□ + ٤ = ٠ \Rightarrow (x - ٢)^{٢} = ٠$$

ومنه $x = ٢$ جذر مضاعف. ومنحني التابع يمس محور السينات في النقطة $x = ٢$.

أما منحني التابع فهو موضح في (الشكل ١٠-٣):



الشكل (١٠-٣): منحني التابع $x^2 - 4x + 4$.

١٠-٣ الدراسة العامة للتابع الصحيح من الدرجة الثالثة:

الشكل العام لهذا التابع هو: $y = f(x) = ax^{٣} + bx^{٢} + cx + d$، حيث a, b, c, d ثوابت عددية $(a \neq ٠)$.

١- التابع معرف ومستمر على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

٢- المشتق الأول هو: $y' = ٣\square x^{٢} + ٢\square\square + c$، ينعدم هذا المشتق عندما $٣\square x^{٢} + ٢\square\square + c = ٠$، وهي معادلة من الدرجة الثانية لإيجاد جذريها نميز حسب قيمة المميز:

آ) $\Delta > ٠$ فللتابع نهايتان حديتان صغرى وعظمى توافقان $x_{١}, x_{٢}$ جذري المعادلة ولنفرض أنهما $(x_{١}, y_{١})$ و$(x_{٢}, y_{٢})$.

ب) $\Delta \leq ٠$ وهنا لا يوجد للتابع نهايات حدية.

٣- أوضاع النهايات: وتتعلق حسب إشارة الثابت a حيث نميز الحالات التالية:

آ) إذا كانت $a > ٠$ فإن: $x \to -\infty \Rightarrow y \to -\infty$، $x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty$.

ب) إذا كانت $a < ٠$ فإن: $x \to -\infty \Rightarrow y \to +\infty$، $x \to +\infty \Rightarrow y \to -\infty$.

أما جدول التغيرات فهو:

آ) نفرض أن مميز معادلة المشتق الأول هو موجب (أي للتابع نهايتان حديتان صغرى وعظمى) وإن أمثال $x^{٢}$ هو موجب (أي $a > ٠$) فإن جدول تغيرات التابع هو:

x	$-\infty$		$x_{١}$		$x_{٢}$		$+\infty$
y'		$+$	٠	$-$	٠	$+$	
y	$+\infty$	$\nearrow$	$y_{١}$	$\searrow$	$y_{٢}$	$\nearrow$	$+\infty$
			Max. Limit		Min. Limit		

أما إذا كان مميز معادلة المشتق الأول هو موجب وأمثال $x^{٢}$ هو سالب (أي $a < ٠$) فإن جدول تغيرات التابع هو:

x	$-\infty$		$x_{١}$		$x_{٢}$		$+\infty$
y'		$-$	٠	$+$	٠	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$y_{١}$	$\nearrow$	$y_{٢}$	$\searrow$	$-\infty$
			Min. Limit		Max. Limit		

ب) أما إذا فرضنا أن مميز معادلة المشتق الأول هو مساوي الصفر ($\Delta = ٠$) فيكون لمعادلة المشتق y' جذر مضاعف هو $x = -b/٣a$ حيث إشارة المشتق كإشارة a وذلك في كل من المجالين $]-\infty, -b/٣a[$، $]-b/٣a, +\infty[$، وجدول التغيرات الموافق هو:

x	$-\infty$		$-b/٣a$		$+\infty$
y'		مثل إشارة a	٠	مثل إشارة a	

ج) أما إذا فرضنا أن مميز معادلة المشتق الأول هو سالب (أي $\Delta < ٠$) فيكون لمعادلة المشتق الأول y' جذور عقدية (تخيلية) كما وأن إشارة المشتق y' هي إشارة a نفسها.

٤- المشتق الثاني $y'' = ٦ax + ٢b$، ينعدم المشتق y'' من أجل $x = -b/٣a$ وتكون قيمة التابع y من أجل قيمة x السابقة هي: $\frac{٢b^٣}{٢٧a^٢} - \frac{bc}{٣a} + d$.

أي أن النقطة التي إحداثياها $\left(-\frac{b}{٣a}, \frac{٢b^٣}{٢٧a^٢} - \frac{bc}{٣a} + d\right)$ هي نقطة انعطاف.

لمعرفة اتجاه تقعر المنحني نميز بين الحالتين التاليتين:

آ) إذا كانت $a > ٠$ فإن: $x < -b/٣a \Leftarrow y'' < ٠$ والتقعر نحو العينات السالبة، $x > -b/٣a \Leftarrow y'' > ٠$ والتقعر نحو العينات الموجبة.

ب) أما إذا كانت $a < ٠$ فإن: $x < -b/٣a \Leftarrow y'' > ٠$ والتقعر نحو العينات الموجبة، $x > -b/٣a \Leftarrow y'' < ٠$ والتقعر نحو العينات السالبة.

٥- التقاطع مع المحاور الإحداثية:

آ) مع محور العينات: $x = ٠ \Rightarrow y = d$ فالنقطة $(٠, d)$ هي نقطة تقاطع المنحني مع محور العينات.

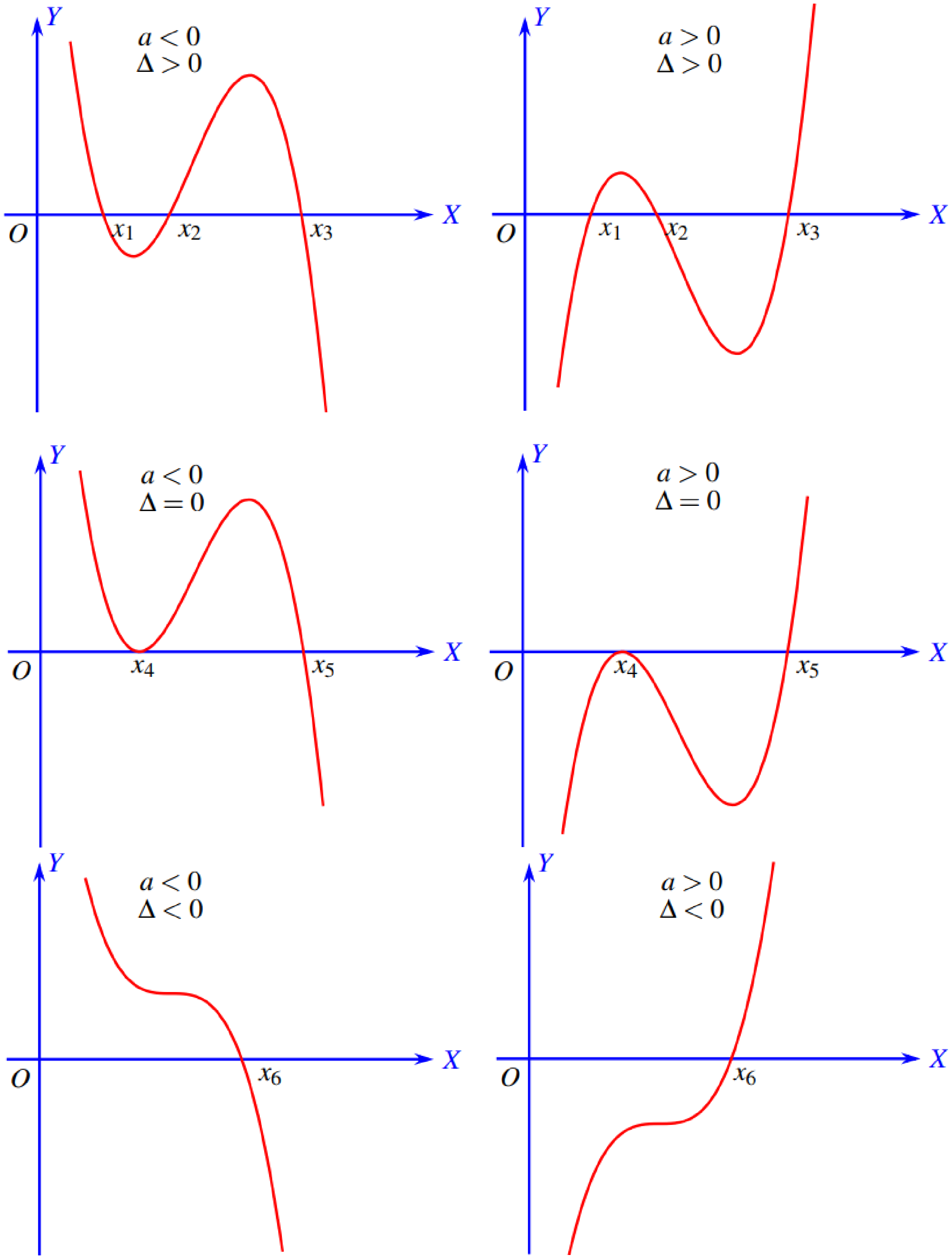
ب) مع محور السينات: $y = ٠ \Rightarrow ax^٣ + bx^٢ + cx + d = ٠$ وهي معادلة من الدرجة الثالثة يمكن كتابتها بشكل جداء معادلة من الدرجة الثانية ومعادلة من الدرجة الأولى، وحسب قيم Δ مميز المعادلة من الدرجة الثانية يمكن تمييز الحالات التالية:

* إذا كان $\Delta > ٠$ فللمعادلة ثلاثة جذور حقيقية $x_١, x_٢, x_٣$ وبالتالي فمنحني التابع يقطع محور السينات بثلاث نقط مختلفة $(x_١, ٠), (x_٢, ٠), (x_٣, ٠)$.

* إذا كان $\Delta = ٠$ فللمعادلة جذران حقيقيان مختلفان $x_٤, x_٥$ (أحدهما جذر مضاعف وليكن $x_٤$) ومنحني التابع يقطع محور السينات في النقطة $(x_٥, ٠)$ ويمس محور السينات في النقطة $(x_٤, ٠)$.

* إذا كان $\Delta < ٠$ فللمعادلة جذر واحد وليكن $x_٦$ ومنحني التابع يقطع محور السينات بنقطة واحدة هي $(x_٦, ٠)$.

٦- المنحني البياني لهذا التابع: سوف نلاحظ عدة أشكال لهذا المنحني وذلك حسب إشارة a (موجبة أم سالبة) وكذلك نقاط تقاطع المنحني مع المحاور الإحداثية. (الشكل ١٠-٤).



الشكل (١٠-٤): حالات منحني التابع من الدرجة الثالثة.

مثال (١٠-٢):

ادرس تحولات التابع وارسم خطه البياني: $y = -٦x^٣ + ٩x^٢$.

الحل:

هذا التابع معرف ومستمر على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$، إن المشتق الأول هو:

$$y' = -١٨x^٢ + ١٨x$$

ينعدم هذا المشتق من أجل: $-x^٢ + x = ٠$، وبالتالي: $x_١ = ٠$ أو $x_٢ = ٠$.

وبالتالي فإن قيم التابع الموافقة لقيم $x_١, x_٢$ هي: $y_١ = ٠$، $y_٢ = ٣$.

إذن فالنقطتين $(٠,٠)$ و$(١,٣)$ تمثلان نهايتان حديتان (صغرى وعظمى). لنلاحظ أن:

$$x \to -\infty \Rightarrow y \to +\infty, \qquad x \to +\infty \Rightarrow y \to -\infty$$

ويكون جدول التغيرات هو:

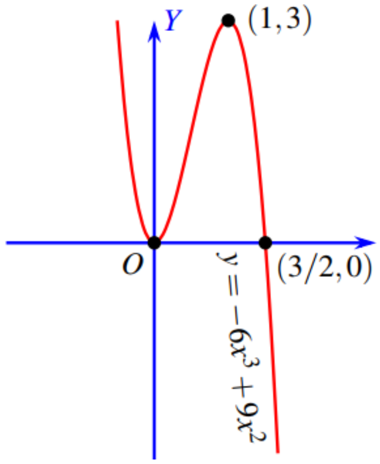
x	$-\infty$		٠		١		$+\infty$
y'		$-$	٠	$+$	٠	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	٠	$\nearrow$	٣	$\searrow$	$-\infty$
			Min. Limit		Max. Limit		

لنحسب الآن المشتق الثاني فنجد أن: $y'' = -٣٦x + ١٨$ ينعدم عندما: $-٣٦x + ١٨ = ٠$ من أجل $x = ١/٢$ وبالتالي فإن قيمة التابع من أجل هذه القيمة هي $y = ٣/٢$ أي أن النقطة $(١/٢, -٣/٢)$ هي نقطة انعطاف.

إن نقاط تقاطع منحني التابع مع المحاور الإحداثية هي:

آ) مع محور السينات: $y = ٠ \Rightarrow -٦x^٣ + ٩x^٢ = ٠ \Rightarrow -٣x^٢(٢x - ٣) = ٠$، لدينا هنا نقطتا تقاطع (إحداهما تمس محور السينات) وهما: $(٣/٢,٠), (٠,٠)$.

ب) مع محور العينات: $x = ٠ \Rightarrow y = ٠$، إذن فنقطة تقاطع منحني التابع مع محور العينات هي $(٠,٠)$، ويكون المنحني البياني للتابع هو (الشكل ١٠-٥):



الشكل (١٠-٥): منحني التابع $y = -6x^3 + 9x^2$.

١٠-٤ دراسة تحولات الخطوط البيانية للتوابع الأسية واللوغاريتمية ورسمها:

١٠-٤-١ التابع اللوغاريتمي الطبيعي:

لدراسة التابع $y = \log_e x = \ln x$ نتبع خطوات دراسة التوابع الصحيحة نفسها.

١- هذا التابع معرف ومستمر من أجل $x \in \mathbb{R}^+ - \{٠\}$، أي أن مجال تحولاته هو $]٠, \infty[$.

٢- إن المشتق الأول هو: $y' = ١/x$.

نلاحظ أن $y' > ٠$ دوماً فالتابع متزايد تماماً.

٣- أوضاع النهايات: $x \to \infty \Rightarrow y \to \infty$ ، $x \to -\infty \Rightarrow y' \to ٠$، أي أن المنحني هو أفقي، $x \to ٠ \Rightarrow y \to -\infty$ من اليمين، $y' \to +\infty$ والمنحني شاقولي.

ويكون $x = ٠$ مستقيماً مقارباً. ونلاحظ أيضاً أن: $x = ١ \Rightarrow y = ٠ \Rightarrow y' = ١$.

٤- جدول تغيرات هذا التابع هو:

x		٠		١		$+\infty$
y'		$+\infty$	$+$	$+$	$+$	٠
y		$-\infty$	$\nearrow$	٠	$+$	$+\infty$

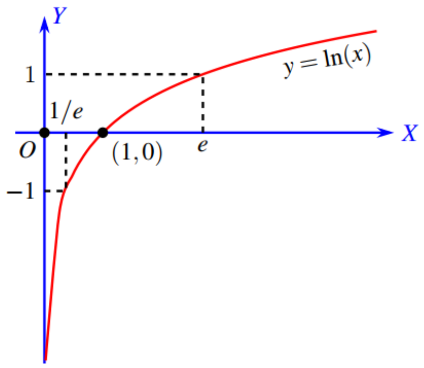
٥- إن المشتق الثاني هو: $y'' = -١/x^٢$ هذا يعني أن $y'' < ٠$ والتقعر نحو العينات السالبة.

٦- نقط التقاطع مع المحاور الإحداثية:

آ) مع محور السينات: $y = ٠ \Rightarrow \ln x = ٠ \Rightarrow x = ١$ والنقطة $(١, ٠)$ هي نقطة تقاطع منحني التابع مع محور السينات.

ب) مع محور العينات: $x = ٠ \Rightarrow y = \ln ٠ = -\infty$ (من اليمين) ولا يوجد تقاطع مع محور العينات.

٧- أما المنحني البياني للتابع فهو كما ورد في (الشكل ١٠-٦).



الشكل (١٠-٦): منحني التابع $y = \log_e x = \ln x$.

١٠-٤-٢ التابع اللوغاريتمي العادي:

شكله العام: $y = \log_a x \quad ; \quad a > ١$.

١- التابع معرف ومستمر من أجل جميع قيم x المحققة للعلاقة $x \in \mathbb{R}^+ - \{٠\}$، إذن مجال دراسة هذا التابع هو $]٠,+\infty[$.

٢- ندرس إشارة المشتق فنجد أن: $y' = (١/x) \cdot \log_a e$ ويكون $y' > ٠$ دوماً فالتابع متزايد تماماً.

٣- أوضاع النهايات: $x \to \infty \Rightarrow y \to \infty$، $x \to ٠ \Rightarrow y \to -\infty$ (بقيم موجبة)، و $x = ٠$ مستقيم مقارب.

٤- جدول تغيرات هذا التابع هو:

x		٠		١		$+\infty$
y'		$+\infty$	$+$	$+$	$+$	٠
y		$-\infty$	$\nearrow$	٠	$+$	$+\infty$

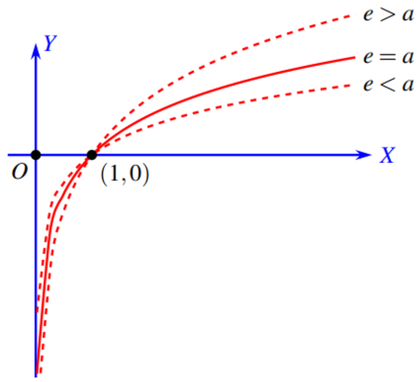
٥- ندرس إشارة المشتق الثاني y'' فنجد أن: $y'' = (-١/x^٢) \log_a e$ هذا يعني أن $y'' < ٠$ والتقعر نحو العينات السالبة دوماً.

٦- نقط التقاطع مع المحاور الإحداثية:

آ) مع محور السينات: $y = ٠ \Rightarrow \log_a x = ٠ \Rightarrow x = ١$ والنقطة $(١,٠)$ هي نقطة تقاطع منحني التابع مع محور السينات.

ب) مع محور العينات: $x = ٠ \Rightarrow y = \log_a ٠ = -\infty$ (من اليمين) ولا يوجد تقاطع مع محور العينات.

٧- أما المنحني البياني للتابع فهو كما ورد في (الشكل ١٠-٧).



الشكل (١٠-٧): منحني التابع $y = \log_a x$.

١٠-٤-٣ التابع الأسي:

الشكل العام لهذا التابع: $y = e^x$.

١- معرف ومستمر من أجل جميع قيم x المنتمية إلى المجال $]-\infty,+\infty[$.

٢- المشتق الأول $y' = e^x$، $y' > ٠$ دوماً فالتابع متزايد تماماً.

٣- أوضاع النهايات: $x = ٠ \Rightarrow y = ١$، $x \to -\infty \Rightarrow y \to ٠$، إذن فالمستقيم $y = ٠$ هو مقارب.

$$x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty$$

٤- جدول تغيرات هذا التابع هو:

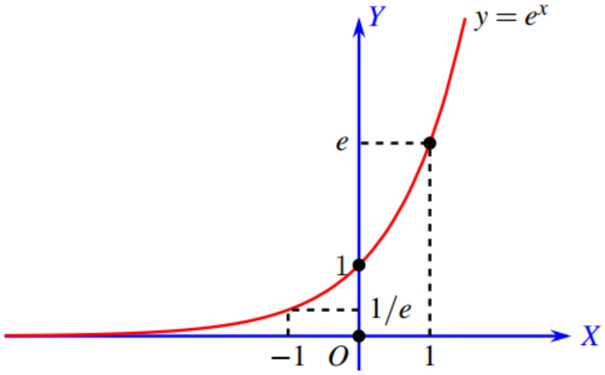
x	$-\infty$		٠		$+\infty$
y'		$+$	$+$	$+$	
y	٠	$\nearrow$	١	$\nearrow$	$+\infty$

٥- ندرس إشارة y'' فنجد أن: $y'' = e^x$، $y'' > ٠$ دوماً فالتقعر نحو العينات الموجبة.

٦- نقاط التقاطع مع المحاور الإحداثية.

مع محور العينات: $x = ٠ \Rightarrow y = ١$، فالنقطة $(٠,١)$ هي نقطة تقاطع منحنى التابع مع محور العينات.

٧- المنحني البياني لهذا التابع هو كما في (الشكل ١٠-٨).



الشكل (١٠-٨): منحني التابع $y = e^x$.

١٠-٤-٤ التابع الأسي العادي:

الشكل العام لهذا التابع: $(a \neq ٠) \quad ; \quad y = a^x$.

1- التابع معرف ومستمر من أجل جميع قيم x المنتمية إلى المجال $]-\infty, +\infty[$.

٢- المشتق الأول ودراسة إشاراته: $y' = a^x \ln a$، $y' > ٠$ موجب دوماً فالتابع متزايد تماماً عندما $a > ١$ ومتناقص تماما عندما $a < ١$.

٣- أوضاع النهايات: $x \to -\infty \Rightarrow y' \to ٠$، أي أن منحنى التابع أفقي.

$x \to -\infty \Rightarrow y \to ٠$، والمستقيم $y = ٠$ هو مقارب. $x \to +\infty \Rightarrow y' \to +\infty$، والمنحني شاقولي.

أيضاً إن:

$x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty$، $x = ٠ \Rightarrow y = ١$، $x = ١ \Rightarrow y = a$.

٤- جدول تغيرات هذا التابع في الحالة $a > ١$ هو:

x	$-\infty$		٠		١		$+\infty$
y'		+	+		+	+	
y	٠	↗	١	↗	a	↗	$+\infty$

أما جدول تغيرات هذا التابع في الحالة $a < ١$ فهو:

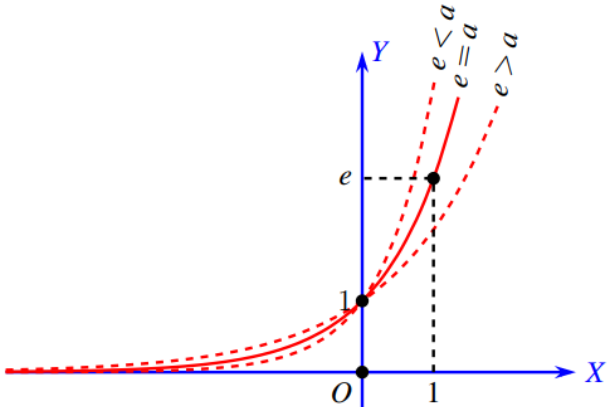
x	$-\infty$		٠		١		$+\infty$
y'		−	−		−	−	
y	$+\infty$	↘	١	↘	a	↘	٠

٥- ندرس إشارة المشتق الثاني: $y'' = a^x (\ln a)^٢$، $y'' > ٠$، موجب دوماً فالتقعر نحو العينات الموجبة.

٦- نقاط التقاطع مع المحاور الإحداثية:

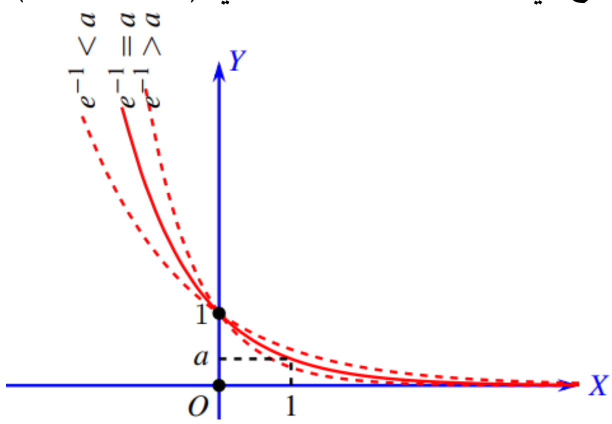
مع محور العينات: $x = ٠ \Rightarrow y = ١$، والنقطة $(٠,١)$ هي نقطة تقاطع منحنى التابع مع محور العينات.

٧- المنحني البياني لهذا التابع في الحالة $a > ١$ هو كما في (الشكل ١٠-٩).



الشكل (١٠-٩): منحني التابع $y = a^x$ حيث $a > 1$.

أما المنحني البياني لهذا التابع في الحالة $a < ١$ فهو كما في (الشكل ١٠-١٠).



الشكل (١٠-١٠): منحني التابع $y = a^x$ حيث $a < 1$.

١٠-٥ تمارين ومسائل:

١- ادرس تحولات كل من التوابع الآتية وارسم خطوطها البيانية:

$$f(x) = x^{٢} + ٥x - ٦, \qquad f(x) = -x^{٢} + ٤x, \qquad f(x) = -٢x^{٢} + x + ١$$

٢- ادرس تحولات كل من التوابع الآتية وارسم خطوطها البيانية:

$$f(x) = x^{٣} - ٣x + ٢ \qquad f(x) = ٢x^{٣} - ٥x - ٧$$

$$f(x) = x^{٣} - ٣x^{٢} + ٣x + ١ \qquad f(x) = -x^{٣} - x + ٢$$

$$f(x) = \frac{٢}{٣}x^{٣} - ٢x^{٢} + ٢x - \frac{٢}{٣} \qquad f(x) = -\frac{x^{٢}}{٣} + x$$

$$f(x) = ٢x^{٣} - ٩x^{٢} + ١٢x - ١ \qquad f(x) = x^{٣} - ٣x^{٢} + x - ١$$

٣- ادرس تحولات كل من التوابع الآتية وارسم خطوطها البيانية:

$$f(x) = \frac{٢x - ٣}{x + ١} \qquad f(x) = \frac{x}{x^{٢} - ٩}$$

$$f(x)=\frac{x-١}{٢\square+١}$$
$$f(x)=\frac{x^{٢}+١}{x}$$
$$f(x)=\frac{(١-x)^{٣}}{x^{٢}}$$
$$f(x)=\frac{٣}{(١-x^{٣})(٤-x^{٢})}$$
$$f(x)=\frac{١}{x}$$
$$f(x)=\frac{١}{x^{٢\square}}\quad;\quad(n\in\mathbb{N})$$
$$f(x)=\frac{١}{x^{٢\square+١}}\quad;\quad(n\in\mathbb{N})$$

$$f(x)=\frac{x^{٢}+٢\square+١}{x-١}$$
$$f(x)=\frac{٢\square+١}{x-١}$$
$$f(x)=\frac{١}{x^{٢}+١}$$
$$f(x)=\frac{x^{٢}}{x-٢}$$
$$f(x)=\frac{x}{١+x^{٢}}$$
$$f(x)=\frac{١}{x^{٢}-١}$$
$$f(x)=\frac{x(x^{٢}+١)}{x^{٢}-١}$$

٤- ادرس تحولات كل من التوابع الآتية وارسم خطوطها البيانية:

$$f(x)=e^{١/x}$$
$$f(x)=x\cdot e^{x}$$
$$f(x)=x\cdot e^{١/x}$$
$$f(x)=\frac{١}{١+e^{١/x}}$$
$$f(x)=x\cdot e^{-x}$$

$$f(x)=e^{-٣x^{٢}}$$
$$f(x)=e^{x/٢}$$
$$f(x)=a^{x}\quad(٠<a<١)$$
$$f(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{٢}$$
$$f(x)=[x]\cdot e^{-[x-١]}$$

٥- ادرس تحولات كل من التوابع الآتية وارسم خطوطها البيانية:

$$f(x)=\log(٩-x^{٢})$$
$$f(x)=\frac{\log x}{i+\log x}$$
$$f(x)=\log_{١٠}(x^{٢}+٢)$$
$$f(x)=x^{٢}\log x$$

$$f(x)=\log(١-x^{٢})$$
$$f(x)=\frac{١}{٢}\log\frac{١+x}{١-x}$$
$$f(x)=\log\frac{٤+x}{٤-x}$$
$$f(x)=x\log x$$

الفصل الحادي عشر: التفاضل والتكامل

تمهيد:

كثيراً ما يكون معلوماً لدينا التابع الاقتصادي الهامشي ونحتاج إلى إيجاد التابع الأصلي له، فبتكامل هذا التابع الاقتصادي الهامشي، نستطيع أن نتوصل إلى التابع الأصلي، **فمثلاً:** إن تكامل تابع التكلفة الهامشي يعطينا تابع التكلفة الكلية وبتكامل تابع الدخل الهامشي نحصل على تابع الدخل الكلي وبتكامل تابع المنفعة الهامشي نستطيع أن نتوصل إلى تابع المنفعة الكلية... وهكذا.

١١-١ تعريف التفاضل:

لنفرض أن f تابع قابلٌ للاشتقاق على المجال $\boldsymbol{I}$ و a_0 نقطة من $\boldsymbol{I}$ ولنفرض أن: $f'(x_0)$ مشتق f عند النقطة x_0.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

لنرمز لـ:

$$\alpha(x) = f'(x_0) - \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad ; \quad x \neq x_0$$

عندئذ:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) - \alpha(x) \quad ; \quad x \neq x_0$$

وأيضاً:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = f'(x_0) - \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

وباعتبار أن $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ ينتج أنه ومن أجل قيم لـ x قريبة جداً من x_0 فيمكن جعل $\alpha(x)$ صغيرة جداً بقدر ما نريد، إذن من أجل هذه القيم لـ x فإن النسبة: $[f(x) - f(x_0)]/(x - x_0)$ مساوية تقريباً لـ $f'(x_0)$، أي إن:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \approx f'(x_0)$$

أي إن:

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0)$$

إذا رمزنا بـ $h = x - x_0$ عندئذ $x = x_0 + h$ وبالتالي فالعلاقة السابقة يمكن كتابتها بشكل آخر:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0)$$

حيث تشرح لنا حقيقة أنه من أجل زيادة لـ h بقدر صغير من $x.$ إلى $x. + h$ فالزيادة المقابلة $f(x. + h) - f(x.)$ للتابع يمكن أن تكون قريبة من الجداء $f'(x.) \cdot h$ بقدر زيادة التابع $f(x. + h) - f(x.)$ أيضاً وبقدر الجداء $f'(x.) \cdot h$.

تعريف:

إن التابع $f'(x.) \cdot h$ (حيث h الدليل) يسمى تفاضل التابع f عند النقطة $x.$ ونرمز له بـ $df(x.)$، ونكتب:

$$df(x.) = f'(x.) \cdot h$$

مما سبق نستنتج أن التفاضل $df(x.)$ يقترب من زيادة التابع:

$$f(x. + h) = f'(x.) \cdot h = df(x.)$$

أي :

$$f(x. + h) - f(x.) \approx df(x.)$$

إن تفاضل التابع f عند نقطة ما لا على التعيين $x \in \boldsymbol{I}$ يمكن كتابته كما يلي:

$$df(x) = f'(x) \cdot h$$

مثلاً: من أجل التابع $f(x) = x^{٢} + ١$ نجد أن $df(x) = d(x^{٢} + ١) = ٢□□$.

لنأخذ التابع المطابق $\varphi(x) = x$ لدينا $d\varphi(x) = dx$ ويساوي أيضاً $x'h = h$، مما سبق نلاحظ أن تفاضل التابع المطابق $d(x)$ يساوي إلى تزايد المتغير h.

ولقد جرت العادة بدلاً من كتابة $d(x)$ كتابة dx بشكل أبسط، أي إن:

$$dx = h$$

إذا ما أخذنا النسبة بين تفاضل التابع f وتفاضل الدليل لوجدنا أن:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f'(x) \cdot h}{h} = f'(x)$$

إذن إن مشتق $f(x)$ يساوي النسبة بين تفاضلين: تفاضل $f(x)$ وتفاضل المتغير x، وهذا يؤكد لنا صحة تعريف الاشتقاق فيما سبق:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

ينتج من هذا أن:

$$df(x) = f'(x)dx$$

لهذا إن تفاضل f يساوي جداء مشتق $f(x)$ بتفاضل x.

ملاحظة:

إن الصيغة التي من خلالها نرمز للمتغير x ليست جوهرية، بل يمكن أن نكتب:

$$df(u) = f'(u)du, \qquad df(t) = f'(t)dt, \qquad \cdots etc$$

أمثلة:

١) $f(x) = x^{٢} + ٢$، وبالتالي: $df(x) = d(x^{٢} + ٢) = ٢□□□$. ومن أجل $x = ١$ نجد أن: $df(١) = ٢□□$، لنلاحظ أن $df(١)$ هو تابع لـ dx.

مثلاً: من أجل $dx = ١/٢٠٠٠$ نجد أن قيم التابع هي ١/١٠٠٠، ومن أجل $x = ٢$ نجد أن $df(٢) = ٢□□$،
وبالتالي فإن التفاضل $df(٢)$ هو أيضاً تابع لـ dx.

مثلاً: من أجل $dx = ١/٢٠٠٠$ نجد أن قيمة هذا التابع هي ٢/١٠٠٠.

٢) $u(t) = ١/t$، وبالتالي: $du(t) = d(١/t) = (-١/t^٢)dt$.

مثال (١١-١):

أوجد تفاضلات كل من التوابع التالية:

$$١)\quad y = ٣x^٢ - ٢□ + ١ \Longrightarrow dy = (٦□ - ٢)dx$$
$$٢)\quad y = e^{٥□+٢} \Longrightarrow dy = ٥\, e^{٥□+٢}\, dx$$
$$٣)\quad y = a^{x^٢-٢□+١} \Longrightarrow dy = (٢□ - ٢)\, a^{x^٢-٢□+١} \log_e a\ dx$$
$$٤)\quad y = \ln(٢x^٢ + ٣) \Longrightarrow dy = \frac{٤□}{٢x^٢ + ٣}dx$$
$$٥)\quad y = \log_a e^x \Longrightarrow dy = \frac{١}{\log_e a}dx = \log_a e\ dx$$

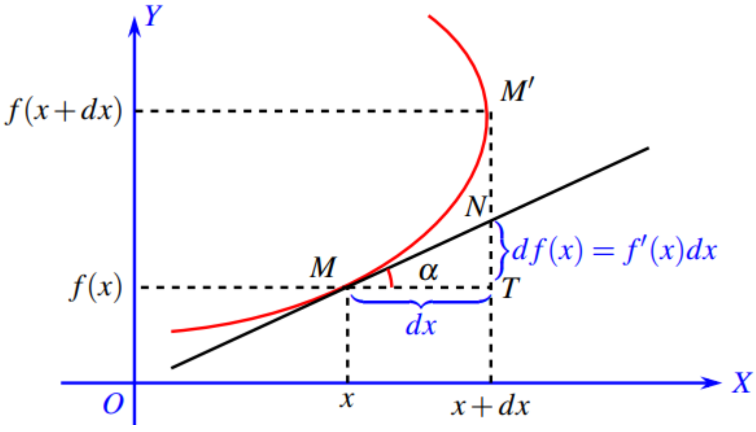
١١-٢ التفسير الهندسي لتفاضل:

إن التفسير (التأويل) الهندسي هو سهل جداً.

الزيادة dx للمتغير x هي عبارة عن طول الضلع MN في المثلث قائم الزاوية MNT لكن:

$$f'(x) = \tan\alpha$$

التفاضل $f'(x)dx$ هو طول الضلع NT والزيادة $f(x_\cdot + dx) - f(x_\cdot)$ هي طول القطعة NM' يوجد نقطة من أجل زيادة dx كافية للمتغير، فإن القطع NT و NM' هي متساوية تقريباً. لهذا فجوار النقطة M يمكن اعتباره قطعة المماس عند تلك النقطة.



الشكل (١١-١): تفسير التفاضل هندسياً.

١١-٣ التفاضل الكلي:

لنفرض أن لدينا التابع $z = f(x,y)$ لنعط للمتحول x تزايداً قدره Δx وللمتحول y تزايداً قدره Δy، فيأخذ عندها التابع z تزايداً قدره Δz حيث نجد:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)$$

لنضف ونطرح المقدار $f(x, y+\Delta y)$ فنجد أن:

$$\Delta z = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)] \qquad (١)$$

فإذا كان التابع مستمراً أمكن تطبيق مبرهنة التزايدات المحدودة، حيث نجد أن:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = \Delta x \cdot f'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y)$$

حيث $٠ < \theta < ١$، أيضاً:

$$f(x, y+\Delta y) - f(x, y) = \Delta y \cdot f'_y(x, y+\beta\Delta y) \quad ; \quad ٠ < \beta < ١$$

فإذا ما عوضنا في (١) لوجدنا أن:

$$\Delta z = \Delta x \cdot f'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y) + \Delta y \cdot f'_y(x, y+\beta\Delta y) \qquad (٢)$$

فإذا ما جعلنا $\Delta x \to ٠$ و $\Delta y \to ٠$ بالوقت نفسه لوجدنا أن:

$$f'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y) \to f'_x(x, y), \qquad f'_y(x, y+\beta\Delta y) \to f'_y(x, y)$$

وإذا كان Δx، Δy صغيرين جداً، فالعلاقة (٢) يمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$\Delta z = \Delta x[f'_x(x, y) + \varepsilon] + \Delta y[f'_y(x, y) + \varepsilon_١]$$

حيث ε و $\varepsilon_١$ لا متناهيان في الصغر مع Δx وΔy، أي إن:

$$\Delta z = \Delta x\, f'_x(x, y) + \varepsilon\, \Delta x + \Delta y\, f'_y(x, y) + \varepsilon_١\, \Delta y$$

ونلاحظ أن Δz لا متناه في الصغر، قسمه الرئيس $\Delta x\, f'_x + \Delta y\, f'_y$، حيث نسميه بالتفاضل الكلي، ونرمز له بـ dz ونكتب:

$$dz = \Delta x\, f'_x + \Delta y\, f'_y$$

وفي حال كان Δx وΔy صغيرين جداً فعندها يكون:

$$\Delta x = dx, \qquad \Delta y = dy$$

أي إن:

$$dz = f'_x\, dx + f'_y\, dy$$

أو بالشكل:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

أي إن التفاضل الكلي للتابع $z = f(x, y)$ ليس إلا مجموع تفاضلين جزئيين له.

يمكن التعميم:

إذا فرضنا أن: $F = f(x, y, z, \cdots)$ فإن التفاضل الكلي هو:

$$dF = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \cdots$$

مثال (١١-٢):

احسب التفاضل الكلي للتابع: $z = f(x, y) = xy^٢ + \ln xy^٢$.

الحل:

حسب الدستور فإن:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \left(y^٢ + \frac{١}{x}\right) dx + \left(٢\square\square + \frac{٢}{y}\right) dy$$

١١-٣-١ المشتق الكلي:

لنفرض أن لدينا التابع المركب التالي: $z = f(x,y)$ حيث كلاً من x و y يتبع لـ t، إن التفاضل الكلي لهذا التابع هو:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

نقسم الطرفين على dt نجد أن:

$$\frac{dz}{dt} = f'_x\frac{dx}{dt} + f'_y\frac{dy}{dt}$$

أو بالشكل:

$$f'_t = z'_t = f'_x \cdot x'_t + f'_y \cdot y'_t$$

حيث يسمى هذا الأخير بالمشتق الكلي.

١١-٣-٢ خواص(قواعد) التفاضل:

نحصل على قواعد التفاضل من قواعد الاشتقاق التي مرت معنا سابقاً، وذلك بتعويض المشتق بالتفاضل:

١) $d(u \pm v) = du \pm dv$

٢) $d(u \cdot v) = v\,du + u\,dv$

٣) $d(c\,u) = c\,du \quad ; \quad c = \text{constant}$

٤) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^٢}$

وللتوضيح نبرهن على صحة قاعدة تفاضل الجداء:

$$d(u \cdot v) = (u \cdot v)'dx = (u'v + v'u)dx = u'v\,dx + v'u\,dx = v(u'dx) + u(v'dx) =$$
$$= v\,du + u\,dv$$

بالطريقة نفسها نستطيع التحقق من بقية القوانين:

مثال (١١-٣):

١) $$d\left(\frac{x}{x^٢+١}\right) = \frac{(x^٢+١)\,dx - x\,d(x^٢+١)}{(x^٢+١)^٢} = \frac{x^٢+١-٢x^٢}{(x^٢+١)^٢}dx = \frac{x^٢-١}{(x^٢+١)^٢}dx$$

١١-٣-٣ التفاضلات المتتالية:

تبقى القاعدة المطبقة في إيجاد المشتقات المتتالية صحيحة من أجل التفاضلات المتتالية. فإذا فرضنا أن $y = f(x)$ فإن: التفاضل الأول للتابع y هو: $dy = y'\,dx$، وبالمفاضلة مرة ثانية نحصل على التفاضل الثاني لـ y، حيث نجد أن:

$$d^٢y = (y'\,dx)'\,dx$$

(حيث تقرأ $d^٢y$ بالتفاضل الثاني لـ y أو d اثنين y). تكتب العلاقة السابقة بشكل آخر، كمايلي:

$$d^٢y = y''\,dx^٢$$

وهنا يجب التمييز بين $dx^٢$ الذي هوجداء dx بـ dx وبين $d^٢y$ الذي هو التفاضل الثاني لـ y، كما نجد أن:

$$d^٣y = (y''\,dx^٢)'\,dx = y'''\,dx^٣$$

حيث $d^٣y$ تلفظ d ثلاثة y و $dx^٣$ تلفظ dx ثلاثة.

وهكذا نستطيع أن نجد:

$$d^{٤}y = (y''' \, dx^{٣})' \, dx = y'''' \, dx^{٤} = y^{(٤)}dx$$

وبالتالي فإن التفاضل النوني (أو التفاضل ذا المرتبة n) هو:

$$d^{n}y = \left(y^{(n-١)}dx^{n-١}\right)'dx = y^{(n)}dx^{n}$$

مثال (١١-٤):

احسب التفاضلات المتتالية للتابع التالي: $y = x^{٥}$.

الحل:

التفاضل الأول هو: $dy = ٥x^{٤} \, dx$.

التفاضل الثاني هو: $d^{٢}y = ٢٠x^{٣} \, dx^{٢}$.

التفاضل الثالث هو: $d^{٣}y = ٦٠x^{٢} \, dx^{٣}$.

التفاضل الرابع هو: $d^{٤}y = ١٢٠\square \, dx^{٤}$.

التفاضل الخامس هو: $d^{٥}y = ١٢٠ \, dx^{٥}$.

التفاضل السادس هو: $d^{٦}y = ٠ \, dx^{٦} = ٠$.

١١-٣-٤ تفاضل تابع التابع (التابع المركب):

لنفرض أن لدينا التابع المركب $f(u(x))$ القابل للاشتقاق على المجال $\boldsymbol{I}$. إن مشتقه هو:

$$\left(f(u(x))\right)' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$$

إلا أن $u'(x) \, dx$ هو تفاضل للتابع $u(x)$:

$$d \, u(x) = u'(x) \, dx$$

وفق هذا فإن تفاضل التابع المركب يكتب على الشكل التالي:

$$d \, f(u(x)) = f'(u(x)) \, d \, u(x)$$

وإذا أردنا عدم الأخذ بالاعتبار المتغير x، فإن المساواة تكتب بشكل آخر:

$$d \, f(u) = f'(u) \, du$$

ويجب التذكير أن u ليس متغيراً مستقلاً بل تابع لـ x، ومع كل هذا فصيغة المساواة تعتبر وكأنها متمثلة الشكل الذي يوضع فيه $f(u)$ ليس تابعاً مركباً لـ x بل تابع للمتغير u.

إن هذه الصيغة تسهل لنا حساب تفاضل التوابع المركبة.

يمكن أن نستنتج من قواعد اشتقاق التوابع الأولية المركبة مباشرة قواعد تفاضل مثل هذه التوابع:

١) $du^{n} = n \, u^{n-١}du$

٢) $d\left(\dfrac{١}{u^{n}}\right) = -n \, u^{-n-١}du$

٣) $d\sqrt{u} = \dfrac{du}{٢\sqrt{u}}$

٤) $d \, a^{u} = a^{u}\ln a \; du \quad ; \quad d\ln u = \dfrac{du}{u}$

أمثلة:

$$١)\quad d(٣x+٢)^{٥} = ٥(٣x+٢)^{٤}\, d(٣x+٢) = ١٥(٣x+٢)^{٤}\, dx$$

$$٢)\quad d\frac{١}{(٧x^{٢}+١)^{٣}} = d(٧x^{٢}+١)^{-٣} = -٣(٧x^{٢}+١)^{-٤} d(٧x^{٢}+١) = -\frac{٤٢x}{(٧x^{٢}+١)^{٤}}dx$$

١١-٤ تمارين عامة:

أوجد تفاضل كل من التوابع التالية، وعند النقطة المجاورة للتابع.

$(i)\quad f(x) = x^{٢} + x + ١ \quad ; \quad (x = ١)$ $\qquad (ii)\quad f(x) = xe^{x} \quad ; \quad (x = ٠)$

$(iii)\quad f(x) = \dfrac{\ln x}{x} \quad ; \quad (x = ١)$ $\qquad (iv)\quad f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{١ - x^{٢}}} \quad ; \quad \left(x = \dfrac{١}{٢}\right)$

$(v)\quad f(x) = \ln(١ - x^{٢}) \quad ; \quad (x = -١/٢)$

١١-٥ التابع الأصلي وعملية إيجاده:

كثيراً ما نحتاج أثناء دراستنا لمشتق تابع أو لتفاضل تابع ما أن نتعرف على التابع بالذات.

لقد أسمينا العملية التي تنقلنا من التابع إلى مشتقه عملية الاشتقاق، ونسمي العملية المعاكسة لها إيجاد التابع الأصلي، كما أن العملية التي تنقلنا من التابع إلى تفاضله عملية التفاضل، ونسمي العملية المعاكسة لها عملية إيجاد التكامل. فإذا كان لدينا التابع $y = f(x)$ المعرف والمستمر على المجموعة X (حيث $x \subseteq \mathbb{R}$) فإننا نسمي $g(x)$ تابعاً أصلياً لـ $y = f(x)$ (في مجموعة التعريف X نفسها) إذا كان $g(x)$ معرفاً ومستمراً وقابلاً للاشتقاق على X وكان:

$$g'(x) = f(x)$$

أيضاً إذا كان لدينا التابع $y = f(x)$ فإن تفاضله هو $dy = y'\,dx$ وبالتالي فإن تكامله والذي نرمز له بالرمز $\int$ هو:

$$y = \int f(x)dx + C \quad ; \quad \left(\text{حيث } C \text{ ثابتة عددية}\right)$$

فمثلاً: إذا كان لدينا التابع $y = ٢x^{٣} + ١٠x$ وأردنا إيجاد مشتقه لوجدنا أن $y' = ٦x + ١٠$ نستطيع استبدال هذا بقولنا إن التابع الذي مشتقه $y' = ٦x + ١٠$ هو $y = ٢x^{٣} + ١٠x + C$ (حيث C ثابتة عددية) إذاً فالتابع $y = ٢x^{٣} + ١٠x + C$ هو تابع أصلي للتابع $y' = ٦x + ١٠$ إذ أننا لو اشتققنا المقدار $y = ٢x^{٣} + ١٠x + C$ والذي هو $y' = ٦x + ١٠$ لوجدنا التطابق بينهما.

وبشكل عام: إذا كان لدينا التابع $y = f(x)$ المعرف والمستمر على المجموعة X $(X \subseteq \mathbb{R})$ فإننا نسمي $g(x)$ تابعاً أصلياً للتابع $y = f(x)$ (في مجموعة التعريف نفسها) إذا كان $g(x)$ معرفاً ومستمراً وقابلاً للاشتقاق على X $(X \subseteq \mathbb{R})$ وكان:

$$g'(x) = f(x)$$

أيضاً إذا كان لدينا التابع $y = f(x)$ فتفاضله هو $dy = f'(x)\,dx$ وبالتالي فإن تكامله:

$$y = \int f'(x)\,dx + C \quad ; \quad \text{حيث } C \text{ ثابتة عددية}$$

ملاحظة هامة:

يجب أن ننتبه في أثناء دراستنا لهذا البحث لوجود كثير من التوابع يمكن القول إنها توابع أصلية لتوابع عديدة معروفة. إلا أننا إذا درسناها بشكل جيد يحقق تعريف التابع الأصلي لوجدنا بأنها ليست توابع أصلية. وخير مثال على ذلك الأمثلة التالية:

۞ إن التابع $y' = ١/x$ هو مشتق التابع $y = \log x$ على الرغم من ذلك لا يمكن القول أن التابع $y = \log x$ هو دوماً تابع أصلي للتابع $y' = ١/x$ وذلك لأن التابع $y = \log x$ معرف من أجل $x > ٠$ بينما التابع التالي $y' = ١/x$ معرف من أجل $x \neq ٠$، لذا فعندما نقول إن التابع $y = \log x$ هو تابع أصلي للتابع $y' = ١/x$ يجب أن نضيف إلى ذلك الشرط $x > ٠$.

۞ إن التابع $y' = ١/(٢\sqrt{x})$ هو مشتق التابع $y = \sqrt{x}$ ومع كل هذا فلا يمكن أن نقول إن التابع $y = \sqrt{x}$ هو دوماً تابع أصلي للتابع $y' = ١/(٢\sqrt{x})$ وذلك لأن التابع $y = \sqrt{x}$ معرف من أجل $x \geq ٠$ في حين أن التابع الثاني $y' = ١/(٢\sqrt{x})$ معرف من أجل $x > ٠$ فالقيمة $x = ٠$ تنتمي إلى مجموعة تعريف التابع $y = \sqrt{x}$ بينما لا تنتمي إلى مجموعة تعريف التابع $y' = ١/(٢\sqrt{x})$. لذا فعندما نقول إن التابع $y = \sqrt{x}$ هو تابع أصلي للتابع $y' = ١/(٢\sqrt{x})$ علينا أن نضيف إلى ذلك بأنه من أجل $x > ٠$.

من هنا نستنتج أنه حتى يكون التابع $y' = g(x)$ هو تابع أصلي للتابع $y = f(x)$ يجب أن يكون التابع $y' = g(x)$ تابعاً معرفاً على مجموعة تعريف التابع $y = f(x)$ نفسه.

لنأخذ الآن التوابع التالية:

$$\begin{array}{c} y = x^{٢} + ٢\square \pm ٣ \\ y = x^{٢} + ٢\square \pm ٥ \\ y = x^{٢} + ٢\square \pm ١٠٠ \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ y = x^{٢} + ٢\square \pm C \end{array}$$

(حيث C ثابتة عددية).

نلاحظ أن هذه المجموعة من التوابع السابقة لها المشتق $y' = ٢\square + ٢$، إذاً فكل تابع من التوابع السابقة يصلح لأن يكون تابعاً أصلياً لهذا المشتق، إذاً التوابع الأصلية لتابع ما يختلف بعضها عن بعض فقط بعدد جبري ثابت، إن بالإمكان البرهان على هذا وفق الشكل التالي:

لنفرض أن $h(x),\ g(x)$، تابعان أصليان للتابع $y = f(x)$ وأن:

$$g(x) - h(x) = \psi(x)$$

بالاشتقاق نجد أن:

$$g'(x) - h'(x) = \psi'(x)$$

ولكن $g'(x) = f(x)$ و $h'(x) = f(x)$ إذاً $\psi'(x) = ٠$ أي أن $\psi(x)$ هو مقدار ثابت، (كون مشتقه معدوماً) وليكن C وهو ما دعوناه بثابت التكامل.

١١-٥-١ كيفية إيجاد التوابع الأصلية:

وجدنا أن عملية إيجاد التابع الأصلي هي العملية المعاكسة لإيجاد المشتق، فإذا فرضنا أن $y = x^{٢}$ فإن مشتقه $y' = ٢x$ أي ضربنا المتحول بقوة ثم جعلنا للمتحول القوة السابقة بعد طرحها من الواحد، فإذا أردنا تطبيق العملية العكسية فإننا نأخذ المشتق $y' = ٢x^{١}$ حيث تضيف لقوة المتحول الواحد ثم نقسم المتحول على القوة الأصلية، حيث نجد أن التابع الأصلي $y = x^{٢}$. إذاً وفق هذه الخطوات نحصل على التابع الأول.

أمثلة:

إذا كان $y = x^{٣}$ فإن تابعه الأصلي $Y = x^{٤}/٤ + C$.

$y = x^{٢} - ٢x + ٣$ فإن تابعه الأصلي $Y = x^{٣}/٣ - ٢x^{٢}/٢ + ٣x + C$.

$y = ٥x^{٣} - ٣x^{٢}$ فإن تابعه الأصلي $Y = ٥x^{٤}/٤ - ٣x^{٣}/٣ + C$.

مثال (١١-٥):

أوجد التابع الأصلي $F(x)$ للتابع $y = f(x) = x^{٢} - ٣x + ٥$ وذلك من أجل $F(١) = ٣$.

الحل:

إن التابع الأصلي هو:

$$Y = \frac{x^{٣}}{٣} - \frac{٣x^{٢}}{٢} + ٥x + C$$

أما لتعيين C نجعل $x = ١$ فنجد أن:

$$\frac{١}{٣} - \frac{٣}{٢} + ٥ + C = ٣ \Rightarrow C = \frac{٥}{٦}$$

إذاً:

$$Y = \frac{x^{٣}}{٣} - \frac{٣x^{٢}}{٢} + ٥x + \frac{٥}{٦}$$

مثال (١١-٦):

أوجد التابع الأصلي للتابع $y = ٤x^{٢} + ٣x - ٦$ وذلك من أجل $f(٢) = ٤$.

الحل:

إن التابع الأصلي هو:

$$Y = \frac{٤x^{٣}}{٣} + \frac{٣x^{٢}}{٢} - ٦x + C$$

ولتعيين الثابتة C نجعل $x = ٢$ فنجد أن:

$$\frac{٤}{٣}(٨) + \frac{٣}{٢}(٤) - ٦(٢) + C = ٤ \Rightarrow C = -\frac{٢}{٣}$$

إذاً:

$$Y = \frac{٤x^{٣}}{٣} + \frac{٣x^{٢}}{٢} - ٦x - \frac{٢}{٣}$$

يمكن التعميم وفق الشكل التالي:

١) إذا أخذ التابع الشكل العام التالي:

$$Y = f(x) = a \quad ; \quad \left(\text{حيث } a \text{ ثابتة عددية}\right)$$

فتابعه الأصلي:

$$g(x) = ax + C \qquad \left(\text{حيث } C \text{ ثابتة عددية كيفية}\right)$$

٢) إذا كان الشكل العام لتابع هو:

$$y = ax^n \qquad \left(\text{حيث } a \text{ ثابتة عددية لا تساوي الصفر}\right)$$

فإن تابعه الأصلي هو:

$$g(x) = a\frac{x^{n+١}}{n+١} + C \qquad \left(\text{حيث } C \text{ ثابتة عددية كيفية}\right)$$

هذه القاعدة صحيحة مهما تكن قيمة القوة n (باستثناء $n = -١$).

٣) إذا أخذ التابع الشكل العام التالي:

$$y = \frac{١}{x^n} \qquad \left(\text{حيث } n \neq ١\right)$$

فتابعه الأصلي هو:

$$g(x) = \frac{-١}{n-١} \cdot \frac{١}{x^{n-١}} + C$$

لأن بالإمكان رده إلى الشكل: $y = x^{-n}$ وتابعه الأصلي (حسب ٢) هو:

$$g(x) = \frac{x^{-n+١}}{-n+١} + C$$

٤) إذا كان الشكل العام لتابع هو:

$$y = f(x) = (x+a)^n$$

فتابعه الأصلي هو:

$$g(x) = \frac{(x+a)^{n+١}}{n+١} + C \qquad \left(\text{حيث } n \neq -١\right)$$

٥) إذا كان الشكل العام لتابع هو:

$$y = f(x) = \frac{١}{(x+a)^n} \qquad \left(\text{حيث } n \neq ١\right)$$

فتابعه الأصلي هو:

$$g(x) = \frac{-١}{n-١} \cdot \frac{١}{(x+a)^n} + C$$

٦) إذا كان الشكل العام لتابع هو:

$$y = f(x) = \frac{١}{\sqrt{ax+b}} \qquad \left(\text{حيث } ax+b > ٠\right)$$

فتابعه الأصلي هو:

$$g(x) = \frac{٢}{a}\sqrt{ax+b} + C$$

٧) إذا كان الشكل العام لتابع هو:

$$y = f(x) = \frac{١}{\sqrt{x}} \qquad \left(x > ٠ \text{ حيث}\right)$$

فتابعه الأصلي هو:

$$y = ٢\sqrt{x} + C$$

٨) إذا كان الشكل العام لتابع هو:

$$y = f(x) = \frac{١}{ax+b} \qquad \left(ax + b \neq ٠ \text{ حيث}\right)$$

فتابعه الأصلي هو:

$$g(x) = \frac{١}{a}\log|ax+b| + C$$

٩) إذا كان الشكل العام لتابع هو:

$$y = f(x) = \frac{١}{١ - x^{٢}}$$

فإن تابعه الأصلي هو:

$$g(x) = \frac{١}{٢}\log_e\left|\frac{١+x}{١-x}\right| + C = \frac{١}{٢}\ln\left|\frac{١+x}{١-x}\right| + C$$

١٠) إذا كان الشكل العام لتابع هو:

$$y = f(x) = e^{ax}$$

فإن تابعه الأصلي هو:

$$g(x) = \frac{١}{a}e^{ax} + C$$

١١) إذا كان الشكل العام لتابع هو:

$$y = f(x) = a^{bx}$$

فإن تابعه الأصلي هو:

$$g(x) = \frac{١}{b\log_e a}a^{bx} + C = \frac{١}{b\ln a}a^{bx} + C$$

نرفق الآن جدولاً بالتوابع الأصلية لبعض التوابع المتداولة:

الشكل العام للتابع	التابع الأصلي
$y = f(x) = x^{n}$	$Y = \frac{x^{n+١}}{n+١} + C \quad ; \quad (n \neq -١)$
$y = \frac{١}{x^{n}} \quad ; \quad (n \neq ١) \ \& \ n \in \mathbb{Z}$	$Y = -\frac{١}{n-١}\cdot\frac{١}{x^{n-١}} + C$
$y = (x \pm a)^{n} \quad ; \quad n \neq -١$	$Y = \frac{(x \pm a)^{n+١}}{n+١} + C$
$y = \frac{١}{(x \pm a)^{n}} \quad ; \quad n \neq ١$	$Y = -\frac{١}{n-١}\cdot\frac{١}{(x \pm a)^{n-١}} + C$
$y = \frac{١}{\sqrt{ax \pm b}} \quad ; \quad ax \pm b > ٠$	$Y = \frac{٢}{a}\sqrt{ax \pm b} + C$

$y = \frac{١}{\sqrt{x}} \quad ; \quad x > ٠$	$Y = ٢\sqrt{x} + C$
$y = \frac{١}{ax \pm b} \quad ; \quad ax \pm b \neq ٠$	$Y = \frac{١}{a}\ln\lvert ax \pm b\rvert + C$
$y = e^{ax}$	$Y = \frac{١}{a}e^{ax} + C$
$y = a^{bx}$	$Y = \frac{١}{b\ln a}\, a^{bx} + C$

أمثلة:

أوجد التوابع الأصلية لكل من التوابع التالية:

$$y = \frac{١}{٢x} \Longrightarrow Y = \frac{١}{٢}\ln\lvert ٢x\rvert + C$$

$$y = \frac{١}{٣x - ١} \Longrightarrow Y = \frac{١}{٣}\ln\lvert ٣x - ١\rvert + C$$

$$y = e^{٣x} \Longrightarrow Y = \frac{١}{٣}e^{٣x} + C$$

$$y = e^{٢x+٣} \Longrightarrow Y = \frac{١}{٢}e^{٢x+٣} + C$$

$$y = ٥^{٢x} \Longrightarrow Y = \frac{١}{٢\ln ٥}\, ٥^{٢x} + C$$

$$y = ٣^{٢x+٥} \Longrightarrow Y = \frac{١}{٢\ln ٣}\, ٣^{٢x+٥} + C$$

١١-٥-٢ التكامل غير المحدود:

كنا قد سمينا العملية التي تنقلنا من التابع إلى تفاضله عملية إيجاد تفاضل التابع والعملية المعاكسة لها عملية إيجاد التكامل، فإذا فرضنا أن $y = f(x)$ تابع معرف ومستمر فإن: $dy = f'(x)\,dx$ ويكون التكامل غير المحدود هو:

$$Y = \int dy = \int f'(x)\,dx + C$$

حيث نسمي $\int f'(x)\,dx$ التكامل غير المحدود للتفاضل dy والتابع $f'(x)$ هو التابع المكامل و C ثابتة التكامل والتي يتم تعيينها بإعطاء قيم معينة للمتحول x.

١١-٥-٣ التكامل المحدود:

يأخذ التكامل المحدود شكل نهاية مجموع، حيث نستطيع التحقق من وجود هذا التكامل على النحو التالي:
لنفرض أن لدينا التابع المتزايد $y = f(x)$ والمعرف والمستمر على المجال المغلق $[a, b]$ ولنفرض أننا نود حساب S مساحة السطح المحصور بين منحنى التابع $y = f(x)$ ومحور السينات والمستقيمين الموازيين لمحور العينات الأول $x = a$ والآخر $x = b$.
من أجل هذا نجزئ المجال $[a, b]$ إلى n مجالاً (متساوية أو مختلفة) مغلقاً (الشكل ١١-٢) على النحو التالي بوساطة النقاط $x_i\ ;\ i = ١, ٢, ٣, \cdots$:

$$[x_٠, x_١], \qquad [x_١, x_٢], \qquad [x_٢, x_٣], \qquad \cdots, \qquad [x_{n-١}, x_n]$$

حيث $x_0 = a$ ، $x_n = b$)

بحيث إن: $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = b$، أطوالها على الترتيب هي:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \quad \Delta x_2 = x_2 - x_1, \quad \Delta x_3 = x_3 - x_2, \quad \Delta x_4 = x_4 - x_3, \quad \cdots,$$
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \cdots, \quad \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$$

ولنأخذ النقاط التالية: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$ المحققة للعلاقات التالية:

$$\alpha_1 \in [x_0, x_1], \quad \alpha_2 \in [x_1, x_2], \quad \alpha_3 \in [x_2, x_3], \quad \cdots, \quad \alpha_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad \cdots, \quad \alpha_n \in [x_{n-1}, x_n]$$

ولنفرض أن قيم التابع $y = f(x)$ من أجل النقاط $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$ هي:

$$f(\alpha_1), \quad f(\alpha_2), \quad f(\alpha_3), \quad \cdots, \quad f(\alpha_n)$$

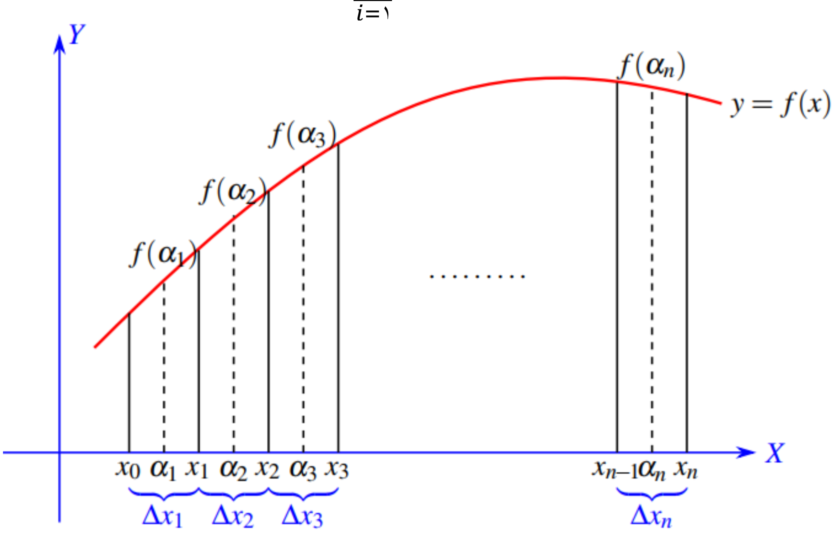
لإيجاد حاصل ضرب قيمة التابع $y = f(\alpha_i)$ في طول المجال المرافق له Δx_i، أي:

$$f(\alpha_i) \cdot \Delta x_i$$

ثم لنجمع نواتج الضرب والذي يشكل مساحة السطح S حيث نجد أن:

$$S = f(\alpha_1) \cdot \Delta x_1 + f(\alpha_2) \cdot \Delta x_2 + f(\alpha_3) \cdot \Delta x_3 + \cdots + f(\alpha_n) \cdot \Delta x_n$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) \cdot \Delta x_i$$



الشكل (١١-٢): التكامل المحدود للتابع $f(x)$.

لنلاحظ أن قيمة S تتوقف حسب المعطيات التالية:

* n عدد المجالات المغلقة.

* Δx_i أطوال هذه المجالات.

* قيم α_i المختارة ضمن المجالات المغلقة.

فإذا جعلنا $\Delta x_i \neq 0$ عندما $n \to \infty$ (وذلك مهما يكن $i = 1, 2, 3, \cdots, n$).

وكان للمجموع S نهاية معينة ومحدودة ولتكن V مستقلة عن Δx_i وعن كيفية اختيارنا للقيم α_i، حيث نكتب:

$$V = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) \cdot \Delta x_i$$

عندها نقول إن التابع $y = f(x)$ قابل للمكاملة على المجال المغلق $[a, b]$ ونرمز للتكامل المحدود بالرمز:

$$V = \int_a^b f(x)\, dx$$

هذه النهاية V تساوي قيمة مساحة السطح المحصور بين المنحني البياني للتابع $y = f(x)$ ومحور السينات والمستقيمين $x = a$ و $x = b$ وحسب نظرية السطوح فإن:

$$V = \int_a^b f(x)\, dx = [g(x)]_a^b$$

أي أن:

$$V = \int_a^b f(x)\, dx = g(b) - g(a)$$

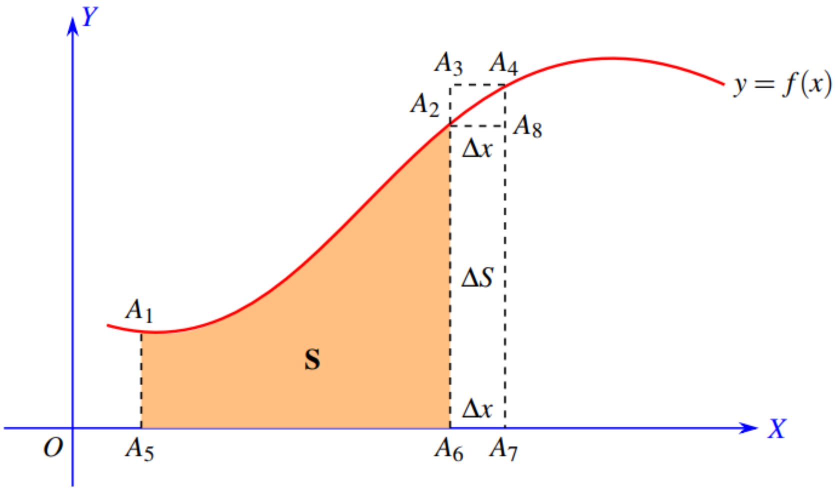
١١-٥-٤ نظرية السطوح (التكاملات الأساسية)

نظرية السطوح وإيجاد المساحات: لنفرض أن لدينا التابع $y = f(x)$ المعرف والمستمر ضمن المجموعة X $(X \subseteq \mathbb{R})$ ومن إشارة واحدة (موجب أو سالب).

إن مساحة السطح المحصور بين المنحني البياني للتابع $y = f(x)$ ومحور السينات ومستقيمين موازيين لمحور العينات أحدهما ثابت فاصلته $x_١$ والآخر متحول فاصلة x $(x_١ < x)$ هي تابع أصلي لـ $y = f(x)$.

البرهان:

لنرمز بـ S للسطح المحصور بين المنحني البياني للتابع $y = f(x)$ ومحور السينات OX والمستقيمين الموازيين لـ OY الأول ثابت $A_١, A_٥$ والثاني متحول $A_٢, A_٦$، (الشكل ١١-٣).



الشكل (١١-٣): نظرية السطوح (التكاملات الأساسية).

لنفرض أنه قد طرأ على المستقيم المتحول تغير $A_٦A_٢$ مقداره Δx $(\Delta \neq ٠)$ فيقابله تغير للتابع $y = f(x)$ مقداره Δy، كما ينتج عند ذلك تغير في السطح قدره ΔS.

فإذا عدنا إلى الشكل لوجدنا أن:

مساحة المستطيل $A_٦A_٣A_٤A_٧ < \Delta S <$ مساحة المستطيل $A_٦A_٢A_٨A_٧$ أي أن:

$$y \cdot \Delta x < \Delta S < (y + \Delta y) \cdot \Delta x$$

لنقسم طرفي المتراجحة السابقة على Δx $(\Delta x \neq ٠)$ ولنميز الحالتين التاليتين:

أ) إذا كان $\Delta x > ٠$ فإن:

$$y < \frac{\Delta S}{\Delta x} < y + \Delta y$$

ب) إذا كان $\Delta x < ٠$ فإن:

$$y > \frac{\Delta S}{\Delta x} > y + \Delta y$$

كون أن التابع $y = f(x)$ معرف ومستمر على x، فإذا جعلنا $\Delta x - ٠$ فإن $\Delta y \to ٠$ وبالتالي فإن:

$$\lim_{\Delta x \to ٠} (y + \Delta y) = y$$

كما وأن:

$$\lim_{\Delta x \to ٠} \frac{\Delta S}{\Delta x} = S'$$

هذا يعني أن:

$$S' = y = f(x)$$

أي أن:

$$S = g(x) + C$$

حيث $g(x)$ هو التابع الأصلي لـ $y = f(x)$ و C ثابتة عددية.

إذا أردنا التعرف على قيمة C نجعل $x = x_١$ فنجد أن $S = ٠$، أي أن:

$$g(x_١) = -C$$

ومنه:

$$S = g(x) - g(x_١)$$

لنفرض الآن أن المستقيم المتحول x، أخذ الوضعية $x = x_٢$ هذا يعني أن السطح المحصور بين المنحني البياني لـ $y = f(x)$ ومحور السينات ومستقيمين موازيين لمحور العينات الأول ثابت $x = x_١$ والآخر متحول $x = x_٢$ هو:

$$S = g(x_٢) - g(x_١)$$

إذا رمزنا للمقدار $g(x_٢) - g(x_١)$ بالرمز $[g(x)]_{x_١}^{x_٢}$ عندها نستطيع أن نكتب:

$$S = g(x_٢) - g(x_١) = [g(x)]_{x_١}^{x_٢}$$

١١-٥-٥ خواص التكامل:

يمكن التوصل إلى هذه الخواص مباشرة من خواص التفاضل وذلك كون عملية التكامل هي العملية المعاكسة للتفاضل:

١) مشتق تكامل غير محدود لتابع ما يعطينا التابع نفسه، أي أن:

$$\left[\int f(x)\,dx\right]' = [F(x) + C]' = f(x)$$

تنطبق هذه الخاصة أيضاً على التفاضل، أي أن:

$$d\left[\int f(x)\,dx\right] = d[F(x) + C] = f(x)$$

٢) يمكن إدخال الثابتة العددية (أو إخراجها) داخل (خارج) إشارة التكامل.

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

٣) بفرض أن f, g, h توابع لـ x معرفة ومستمرة على المجال $[a, b]$، فلدينا دوماً:

$$\int [f(x) + g(x) + h(x)]dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx + \int h(x)\,dx$$

أي أن تكامل المجموع الجبري لعدة توابع يساوي المجموع الجبري لتكاملات هذه التوابع.

٤) بفرض أن $c \in [a, b]$ فيمكن تجزئة التكامل المحدود بين حدي المجال المذكور بالشكل التالي:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

٥) إن تبديل حدي التكامل المحدود يعطينا تكاملاً محدوداً آخر يساوي نظير الأول.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

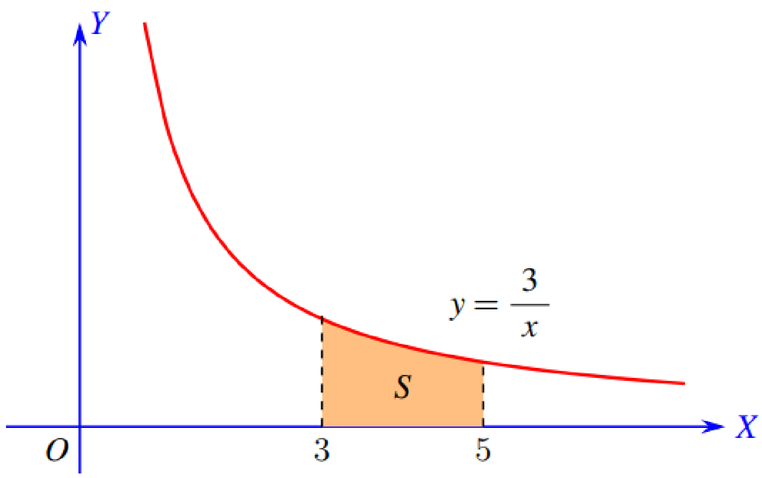
مثال (١١-٧):

احسب مساحة السطح المحصور بين المنحني البياني للتابع : $y = f(x) = ٣/x$، ومحور السينات والمستقيمين المتوازيين $x_١ = ٣, x_٢ = ٥$.

الحل:

يمكن التعرف على هذا السطح من خلال (الشكل ١١-٤):

$$S = \int_٣^٥ \frac{٣}{x}\,dx = ٣[\ln x]_٣^٥ = ٣ \cdot \ln\frac{٥}{٣}\ \text{unit square}\ (u.s.)$$



الشكل (١١-٤): مساحة السطح تحت منحني التابع $y = f(x) = 3/x$.

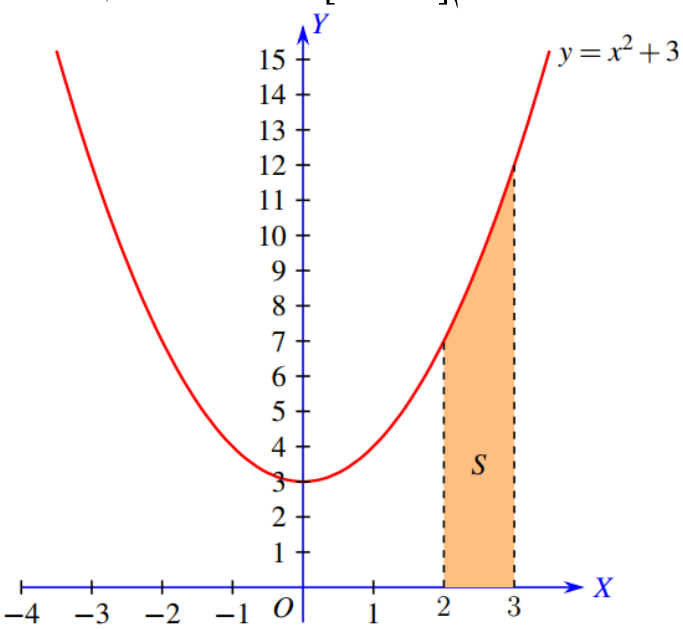
مثال (١١-٨):

احسب مساحة السطح المحصور بين المنحني البياني للتابع $y = f(x) = x^٢ + ٣$ ومحور السينات والمستقيمين $x_١ = ٢, x_٢ = ٣$.

الحل:

إن السطح المطلوب حساب مساحته هو كما في الشكل التالي:

$$S = \int_{٢}^{٣} (x^{٢} + ٣)\, dx = \left[\frac{x^{٣}}{٣} + ٣\square\right]_{٢}^{٣} = \frac{٢٨}{٣} \qquad u.s.$$



الشكل (١١-٥): مساحة السطح تحت منحني التابع $y = f(x) = x^2 + 3$.

١١-٥-٦ قواعد التكامل:

هناك تكاملات عديدة لا يمكن إيجادها مباشرة لهذا سوف نضطر لإيجادها عن طريق بعض القواعد العامة لحساب مثل هذه التكاملات. بالحقيقة لا توجد طريقة (قاعدة) أساسية معينة لاتباعها، إلا أننا سوف نورد قاعدتين أساسيتين من جملة هذه القواعد يشملان تكاملات غالبية التوابع. ونذكر بأن معرفة القاعدة (الطريقة) المطلوبة (والتي يمكن اختيارها من بين هذه القواعد) لإيجاد تكاملات التوابع تأتي من خبرة الطالب الناجمة عن حله لتمارين عديدة وذلك للتوصل لإيجاد تكاملاتها.

أولاً: طريقة (قاعدة) التعويض (تغيير المتحول):

وقد يسميها البعض المكاملة باستعمال التابع المساعد.

نلجأ إلى هذه الطريقة لتسهيل صيغة التكامل حيث عندها يمكن وبسهولة إيجاد التكامل المطلوب. فإذا فرضنا أن التكامل المطلوب إيجاده هو:

$$\int f(x)\, dx$$

عندها نستعين بمتحول آخر جديد وليكن u حيث نفرض أن: $x = g(u)$، وبتفاضل الطرفين نجد أن:

$$dx = g'_u\, du$$

ويكون بالتبديل في التكامل الأصلي:

$$\int f(x)\, dx = \int f\big(g(u)\big)\, g'(u)\, du$$

إن العلاقة السابقة صحيحة. إذ أننا لو قمنا بعملية إيجاد مشتق الطرفين بالنسبة لـ x لوجدنا (وحسب خواص التكامل) أن:

$$\left[\int f(x)\,dx\right]_x' = f(x)$$

$$\left[\int f\big(g(u)\big)\,g'(u)\,du\right]_x' = \left[\int f\big(g(u)\big)\,g'(u)\,du\right]_u' u_x' = f\big(g(u)\big)\,g'(u)\frac{du}{dx}$$

ولكن:

$$\frac{du}{dx} = \frac{١}{g'(u)}$$

إذن:

$$F(x) = f[g(u)]$$

وهي صحيحة.

سوف نأتي فيما يلي على بعض التوابع التي ترد تكاملاتها إلى هذه الطريقة، حيث سوف نستنتج من خلال تكاملات هذه التوابع خبرة جيدة (بعض القواعد الأساسية) وعامة.

مثال (١١-٩):

احسب التكامل التالي:

$$\int \frac{٧x}{(٢-٣x)}\,dx$$

الحل:

نفرض أن $u = ٢ - ٣x$ فيكون $du = -٣dx$ بالتبديل نجد أن:

$$\int \frac{٧x}{(٢-٣x)}dx = -\frac{٧}{٩}\int \frac{٢-u}{u}du = -\frac{١٤}{٩}\int \frac{du}{u} - \frac{٧}{٩}\int du = -\frac{١٤}{٩}\log u + \frac{٧}{٩}u + C$$

أي أن:

$$\int \frac{٧x}{(٢-٣x)}dx = -\log\sqrt[٩]{(٢-٣x)^{١٤}} + \frac{٧}{٩}(٢-٣x) + C$$

مثال (١١-١٠):

احسب التكامل التالي:

$$\int xe^{-x^{٢}}dx$$

الحل:

نفرض أن $u = -x^{٢}$ فيكون $du = -٢x\,dx$ بالتعويض في التكامل الأصلي نجد أن:

$$\int xe^{-x^{٢}}dx = -\frac{١}{٢}\int e^u du = -\frac{e^u}{٢} + C = -\frac{١}{٢}e^{-x^{٢}} + C$$

مثال (١١-١١):

أوجد التكامل التالي:

$$\int \sqrt[٣]{٣-٢x}\,dx$$

الحل:

نفرض أن $u = ٣ - ٢x$ فيكون $du = -٢dx$ بالتعويض في التكامل الأصلي نجد أن:

$$\int \sqrt[٣]{٣ - ٢x}\, dx = \int \sqrt[٣]{u} \left(-\frac{du}{٢}\right) = -\frac{١}{٢} \int u^{١/٣}\, du = -\frac{٣}{٨} \sqrt[٣]{(٣ - ٢x)^{٤}} + C$$

مثال (١١-١٢):

أوجد التكامل التالي:

$$\int \sqrt[٢]{٥x + ٣}\, dx$$

الحل:

نفرض أن $u = ٥x + ٣$ فيكون $du = ٥dx$ بالتعويض في التكامل الأصلي نجد أن:

$$\int \sqrt{٥x + ٣}\, dx = \frac{١}{٥} \int \sqrt{u}\, du = \frac{٢}{١٥} \sqrt{(٥x + ٣)^{٣}} + C$$

مثال (١١-١٣):

أوجد التكامل التالي:

$$\int \sqrt{x^{٣} - ٤}\; x^{٢}\, dx$$

الحل:

نفرض أن $u = x^{٣} - ٤$ فيكون $du = ٣x^{٢}dx$ بالتعويض في التكامل الأصلي نجد أن:

$$\int \sqrt{x^{٣} - ٤}\; x^{٢}\, dx = \frac{٢}{٩} \sqrt{(x^{٣} - ٤)^{٣}} + C$$

مثال (١١-١٤):

أوجد التكامل التالي:

$$\int e^{٥x} dx$$

الحل:

نفرض أن $u = ٥x$ فيكون $du = ٥dx$ بالتعويض في التكامل الأصلي نجد أن:

$$\int e^{٥x} dx = \frac{١}{٥} e^{u} + C = \frac{١}{٥} e^{٥x} + C$$

مثال (١١-١٥):

أوجد التكامل التالي:

$$\int e^{x^{٣} - ٢x^{٢} + ٣}\, (٣x^{٢} - ٤x)\, dx$$

الحل:

نفرض أن $u = x^{٣} - ٢x^{٢} + ٣$ فيكون $du = (٣x^{٢} - ٤x)dx$ بالتعويض في التكامل الأصلي نجد أن:

$$\int e^{x^{٣} - ٢x^{٢} + ٣}\, (٣x^{٢} - ٤x)\, dx = \int e^{u}\, du = e^{u} + C = e^{x^{٣} - ٢x^{٢} + ٣} + C$$

مثال (١١-١٦):

أوجد التكامل التالي:

$$\int \frac{٣x^{٢}}{x^{٣}-٤}\,dx$$

الحل:

نفرض أن $u = x^{٣} - ٤$ فيكون $du = (٣x^{٢})dx$ بالتعويض في التكامل الأصلي نجد أن:

$$\int \frac{٣x^{٢}}{x^{٣}-٤}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|(x^{٣}-٤)| + C$$

مثال (١١-١٧): أوجد التكامل التالي:

$$\int \frac{dx}{x+١}$$

الحل:

نفرض أن $u = x + ١$ فيكون $du = dx$ بالتعويض في التكامل الأصلي نجد أن:

$$\int \frac{dx}{x+١} = \ln|(x+١)| + C$$

مثال (١١-١٨):

أوجد التكامل التالي:

$$\int \frac{٥x^{٤} - ١٢x^{٣} + ٨\square}{x^{٥} - ٣x^{٤} + ٤x^{٢} - ٧}\,dx$$

الحل:

نفرض أن $u = x^{٥} - ٣x^{٤} + ٤x^{٢} - ٧$ فيكون $du = (٥x^{٤} - ١٢x^{٣} + ٨\square)dx$ بالتعويض في التكامل الأصلي نجد أن:

$$\int \frac{٥x^{٤} - ١٢x^{٣} + ٨\square}{x^{٥} - ٣x^{٤} + ٤x^{٢} - ٧}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|x^{٥} - ٣x^{٤} + ٤x^{٢} - ٧| + C$$

مثال (١١-١٩):

أوجد التكامل التالي:

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx$$

الحل:

نفرض أن $u = \ln x$ فيكون $du = dx/x$ بالتعويض في التكامل الأصلي نجد أن:

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int u\,du = \frac{u^{٢}}{٢} + C = \frac{(\ln x)^{٢}}{٢} + C$$

مثال (١١-٢٠):

أوجد التكامل التالي:

$$\int \frac{(\ln x)^{٥}}{x}\,dx$$

الحل:

نفرض أن $u = \ln x$ فيكون $du = dx/x$ بالتعويض في التكامل الأصلي نجد أن:

$$\int \frac{(\ln x)^٥}{x} dx = \int u^٥ du = \frac{u^٦}{٦} + C = \frac{(\ln x)^٦}{٦} + C$$

ثانياً: قاعدة التكامل بالتجزئة:

نفرض أن $u = g(x), v = f(x)$ تابعان معرفان ومستمران وقابلان للتفاضل على المجموعة X (حيث $X \subseteq \mathbb{R}$). لناخذ تفاضل جداء هذين التابعين فنجد أن:

$$d(u \cdot v) = u\, dv + v\, du$$

لنكامل طرفي هذه العلاقة فنجد أن:

$$\int d(u \cdot v) = \int u\, dv + \int v\, du$$

حيث نحصل على قانون التكامل بالتجزئة وذلك بنقل أحد التكاملين الموجودين في الطرف الأيمن إلى الطرف الأيسر، حيث نجد أن:

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

والعلاقة السابقة هي قانون التكامل بالتجزئة. إن هذه الطريقة هي الأكثر شيوعاً واستخداماً، إذ يمكن استخدام هذه الطريقة عندما يكون لدينا التابع المكامل (مثلاً $\int u\, dv$) معقداً فعندها بتطبيق القانون السابق نحصل على تكامل أقل تعقيداً وهو $\int v\, du$.

سوف نتناول فيما يلي بعض التوابع التي يمكن حساب تكاملاتها وفق هذه الطريقة، حيث سوف نستنتج من خلال هذه الأمثلة بعض القواعد الأساسية التي تتعلق بتكاملاتها.

مثال (١١-٢١):

أوجد التكامل التالي:

$$\int x\, e^x\, dx$$

الحل:

نفرض أن $u = x$ فيكون $du = dx$ ومنه $dv = e^x dx$، $v = e^x$ بالتبديل في قانون التكامل بالتجزئة نجد أن:

$$\int x\, e^x\, dx = x\, e^x - \int e^x dx = x\, e^x - e^x + C$$

ملاحظة هامة:

هناك بعض التكاملات التي نضطر لإيجادها أن نستخدم قانون التكامل بالتجزئة أكثر من مرة. مثلاً كما في إيجاد التكاملات التالية:

$$\int x^n\, e^x\, dx \qquad \& \qquad \int x^n\, \log x\ dx$$

مثال (١١-٢٢):

أوجد تكامل التابع التالي:

$$\int \log x \; dx$$

الحل:

نفرض أن $u = \log x$ ومنه $du = dx/x$، $dx = dv$، $v = x$.

بالتبديل في قانون التكامل بالتجزئة، نجد أن:

$$\int \log x \; dx = x \; \log x - \int x \; \frac{dx}{x} = x \; (\log x - ١) + C$$

مثال (١١-٢٣): أوجد التكامل التالي:

$$\int \sqrt[٥]{x^{٣}} \; \log_e x^{٤} \; dx$$

الحل:

نطبق قانون التكامل بالتجزئة، حيث نفرض أن: $u = \log_e x^{٤}$ فيكون تفاضل u هو: $du = (٤x^{٣}/x^{٤})dx$، $dv = \sqrt[٥]{x^{٣}} \; dx$ فيكون $v = \frac{٥}{٨} x^{٨/٥}$، بالتبديل في قانون التكامل بالتجزئة نجد أن:

$$\int \sqrt[٥]{x^{٣}} \; \log x^{٤} \; dx = \frac{٥}{٨} \; x^{٨/٥} \left(\log_e x^{٤} \; - \; \frac{٥}{٢} \right) + C$$

١١-٦ تمارين ومسائل:

١- أوجد التوابع الأصلية لكل من التوابع التالية:

$(i) \quad f(x) = x^{٣} + ٢□ + ٣ \quad ; \; x \in \mathbb{R}$

$(ii) \quad f(x) = x + \frac{١}{x} \quad ; \quad x \in]٠, \infty[$

$(iii) \quad f(x) = \frac{١}{\sqrt{١ - ٤x^{٢}}} \quad ; \; x \in]-٢, +٢[$

$(iv) \quad f(x) = \frac{١}{x^{٢} + ٤} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$

$(v) \quad f(x) = \frac{١}{٤x^{٢} + ١} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$

$(vi) \quad f(x) = ٢^{x} + e^{x} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$

$(vii) \quad f(x) = \frac{١}{x^{٢} - ١} \quad ; \quad x \in]-١, ١[$

$(viii) \quad f(x) = \frac{١}{x^{٢} - ١} \quad ; \quad x \in]-\infty, -١[$

$(ix) \quad f(x) = \frac{١}{\sqrt{x}} + \frac{١}{\sqrt[٣]{x^{٢}}} \quad ; \; x \in]٠, \infty[$

$(x) \quad f(x) = x\sqrt{x} + ٢x^{٣}\sqrt[٣]{x^{٢}} \quad ; \; x \in]٠, \infty[$

٢- أوجد التوابع الأصلية لكل من التوابع التالية، مستخدماً الطريقة الأولى لتغيير المتحول:

$(xi) \quad f(x) = \frac{٤□ + ٢}{x^{٢} + x + ٣} \quad ; \; x \in \mathbb{R}$

$(xii) \quad f(x) = \frac{٨x^{٣} + ٦□}{٢x^{٤} + ٣x^{٢} + ٥} \quad ; \; x \in \mathbb{R}$

$(xiii) \quad f(x) = x^{٢} \, e^{x^{٣}} \quad ; \; x \in \mathbb{R}$

$(xiv) \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{١ - x^{٣}}} \quad ; \; x \in]٠, ١[$

$(xv) \quad f(x) = \frac{x}{١ + x^{٤}} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$

$(xvi) \quad f(x) = \frac{x^{٢}}{١ + x^{٦}} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$

$(xvii) \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{١ - x}} \quad ; \quad x \in]-١, ١[$

$(xviii) \quad f(x) = \frac{e^{x}}{\sqrt{١ - e^{٢□}}} \quad ; \; x \in]-\infty, ٠[$

$(xix) \quad f(x) = \frac{١}{x(١ + \ln x)} \quad ; \; x \in]e, \infty[$

$(xx) \quad f(x) = \frac{١}{x(١ + \ln^{٢} x)} \quad ; \; x \in]٠, \infty[$

$(xxi) \quad f(x) = \sqrt{١ + x^{٢}} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$

$(xxii) \quad f(x) = \sqrt{x^{٢} - ٣□ + ٢} \quad ; \; x \in]٢, \infty[$

$(xxiii)\quad f(x) = \sqrt{١ + x + x^{٢}} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$

$(xxiv)\quad f(x) = \sqrt{-x^{٢} + ٣\square - ٢} ; x \in]١,٢[$

$(xxv)\quad f(x) = \sqrt{٩ - ٤x^{٢}} ; x \in]-\frac{٣}{٢},\frac{٣}{٢}[$

$(xxvi)\quad f(x) = x^{٢}\sqrt{x^{٢} + ٢\square + ٢} ; x \in \mathbb{R}$

$(xxvii)\quad f(x) = x\sqrt{(x-١)^{٣}} ; x \in]١,\infty[$

$(xxviii)\quad f(x) = \dfrac{١}{x + \sqrt{x^{٢} - ١}} \quad ; \quad x \in]١,\infty[$

$(xxix)\quad f(x) = \dfrac{١}{x\sqrt{x^{٤} + x^{٢} + ١}} \quad ; \quad x \in]٠,\infty[$

٣- أوجد التوابع الأصلية لكل من التوابع التالية مستخدماً طريقة التكامل بالتجزئة:

$(xxx)\quad f(x) = \ln x \quad ; \quad x > ٠$

$(xxxi)\quad f(x) = x\ln x \quad ; \quad x > ٠$

$(xxxii)\quad f(x) = \ln^{٢} x \quad ; \quad x > ٠$

$(xxxiii)\quad f(x) = \dfrac{١}{x}\ln x \quad ; \quad x > ٠$

$(xxxiv)\quad f(x) = x^{\alpha}\ln x \quad ; \quad x > ٠, \alpha \in \mathbb{R}$

$(xxxv)\quad f(x) = \ln^{n} x \quad ; x > ٠, n \in \mathbb{N}, n \geq ٢$

$(xxxvi)\quad f(x) = x^{٢}\ln x \quad ; \quad x > ٠$

$(xxxvii)\quad f(x) = x^{\alpha}(\ln x)^{\alpha} \quad ; \quad x > ٠, \alpha \in \mathbb{R}$

$(xxxiix)\quad f(x) = (x^{٣} - x + ١)e^{x} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$

$(xxxix)\quad f(x) = x^{n}\, e^{\alpha x} \quad ; \quad x, \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

$(xL)\quad f(x) = x\, e^{x} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$

$(xLi)\quad f(x) = (x^{٢} - ٢\square - ١)\, e^{x} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$

$(xLii)\quad f(x) = \sqrt{x^{٢} - ٤} \quad ; \quad x \in]٢,+\infty[$

$(xLiii)\quad f(x) = \sqrt{x^{٢} + ١} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$

$(xLiv)\quad f(x) = x^{٢}\sqrt{x^{٢} + ١} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$

$(xLv)\quad f(x) = x^{٣}\sqrt{x^{٢} + ١} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$

$(xLvi)\quad f(x) = x^{٤}\sqrt{x^{٢} - ٤} \quad ; \quad x \in]٢,+\infty[$

$(xLvii)\quad f(x) = x^{٥}\sqrt{x^{٢} - ٤} \quad ; \quad x \in]٢,+\infty[$

$(xLviii)\quad f(x) = \sqrt{٩ - x^{٢}} \quad ; \quad x \in]-٣,+٣[$

$(iL)\quad f(x) = x^{٢}\sqrt{٩ - x^{٢}} \quad ; \quad x \in]-٣,٣[$

المصطلحات العلمية

English language	باللغة العربية	English language	باللغة العربية
		A	
Abscissa	إحداثيي سيني	Absolute	مطلق
Absolute value	قيمة مطلقة	Accumulation	تراكم
Addition	جمع	Addition and subtraction	الجمع والطرح
Algebra	جبر	Analysis	تحليل
Anti-differentiation	عكس التفاضل	Anti-derivative	التابع الأصلي
Applications	تطبيقات	Approximate	تقريب
Arbitrary	اختياري	Associative property	خاصة التجميع
Asymptotic equation	المعادلة المقاربة	Axiom	مسلمة أو بديهية
Axis	محور		
		B	
Basses	الأسس	Basic	أساسي
Belonging symbol	رمز الانتماء	Bijection (one to one onto)	تقابل واحد لواحد
Bound	حد	Bounded	محدود
Bounded above	محدود من الأعلى	Bounded below	محدود من الأسفل
		C	
Cramer's rule	قاعدة كرامر	Cartesian	ديكارتي
Cartesian product	جداء ديكارتي	Characteristic equation	المعادلة المميزة
Closed	مغلق	Closed interval	مجال مغلق
Codomain	مستقر	Coefficient matrix	مصفوفة "المرافقات"
Co-factor	مرافق	Collection of things	حشد من أشياء
Column	عمود	Column vector	شعاع عمودي
Commutative law	قانون التبديل	Commutative property	خاصة التبديل

Complement	متمم	Complement of sets	متممة المجموعات
Complete	كامل	Composite function	تابع مركب
Composition	تركيب	Computer	حاسب إلكتروني
Concave	مقعر	Concavity	تقعر
Concavity downward	تقعر نحو الأسفل	Concept	مفهوم
Concept of a set	مفهوم المجموعة	Condition	شرط
Constant	ثابت	Constant of integration	ثابت التكامل
Continuous	مستمر	Continuity	استمرارية
Contradiction	تناقض		
D			
Decreasing	متناقص	Decreasing function	تابع متناقص
Differential calculus	حساب التفاضل	Definite	محدود (محدد)
Definite integral	تكامل محدود	Definition of a matrix	تعريف المصفوفة
Degree	درجة	Dependent variable	متغير مستقل
Derivative	اشتقاق	Derivative of higher order	مشتقات من مرتبة عليا
Diagonal	قطرية	Diagonal matrix	مصفوفة قطرية
Difference	فرق، فضل	Difference of sets	فرق المجموعات
Differentiations	تفاضلات	Direction of concavity	جهة التقعر
Discontinuous	غير مستمر	Disjoint	منفصلتان، منفصل
Distribution law	قانون التوزيع	Domain	منطلق
Discount	حسم	Discount rate	معدل الحسم
Discrete probability distribution	توزيع احتمال منقطع	Dispersion	تباين
E			
Element	عنصر	Elements of the sets	عناصر المجموعات

Empty (null, valid) set	المجموعة الخالية	Equation	معادلة
Equality	مساواة	Even and odal function	توابع زوجية وفردية
Explicit function	تابع صريح	Exponential function	تابع أسي
Evaluation	تقييم		
F			
Factorial	عاملي	Finite	محدود (منفعة)
Function	تابع، دالة		
G			
General	عام	Geometric series	سلسلة هندسية
I			
Image	صورة – خيال	Implication	اقتضاء أو لزوم
Implicit function	تابع ضمني	Imply	يؤدي إلى (يقتضي إلى)
Inclusion	احتواء	Increasing	متزايد
Increasing function	تابع متزايد	Increment	زيادة
Increment partial derivatives	مشتقات جزئية	Indefinite integral	تكامل غير محدود
Independent	مستقل	Independent variable	متحول مستقل
Indetermination	عدم تعيين	Inequality	متراجحة
Infinite	غير منته	Infinitesimal	لا متناهي في الصغر
Inflexion	انعطاف	Injection	تباين (متباين)
Integration	تكامل – مكاملة	Integration by substitution	التكامل بالتعويض
Integration by partial	التكامل بالتجزئة	Integrable	قابل للتكامل
Integral	تكامل	Integrand	التابع المتكامل
Integer	عدد صحيح	Intersection	تقاطع
Intersection of sets	تقاطع المجموعات	Interval	مجال

Interval half- open on the right	مجال نصف مفتوح من اليمين	Interval half- open on the left	مجال نصف مفتوح من اليسار
Inverse function	تابع عكسي	Inverse matrix	مقلوب المصفوفة
Irrational function	تابع أصم		
L			
Left hand limit	نهاية من اليسار	Length	طول
Limit	نهاية	Logarithm	لوغاريتم
M			
Mapping	تطبيق	Matrices and determinants	المصفوفات والمعينات
Matrix	مصفوفة	Matrix inverse	مقلوب مصفوفة
Matrix multiplication	ضرب المصفوفات	Matrix reciprocal	معكوس المصفوفة
Maximum	نهاية عظمى	Method	طريقة
Minimum	نهاية صغرى	Minor	صغير (مصغر)
Multinomial	كثير حدود	Multiplication	ضرب
N			
Natural	طبيعي	Natural logarithm	لوغاريتم طبيعي
Necessary condition	شرط لازم	Negative	سالب
Null matrix	مصفوفة معدومة		
O			
One - to - one	واحد لواحد	Open	مفتوح
Operation	عملية	Ordered pair	زوج مرتب
P			
Parameter	وسيط	Part	جزء
Partial	جزئي	Partial differentiation	اشتقاق جزئي
Partial derivative	مشتق جزئي	Particular	خاص
Plane	مستوي	Point of inflection	نقطة انعطاف
Polynomial	متعدد "كثير" حدود	Positive	موجب

Premises	فرضيات "مقدمات"	Principal value	قيمة أساسية
Principal diagonal	قطر أساسي	Product	جداء، حاصل ضرب، ناتج
Progression	متوالية	Probability	احتمال
R			
Radian measure	قياس راديان	Random variables	متحولات عشوائية
Rational number	عدد نسبي	Rational function	تابع جذري
Rate of change	معدل التغير	Real number	عدد حقيقي
Rectangular axes	محاور متعامدة	Relation	علاقة
Rate	معدل	Random variables	متغيرات عشوائية
Relative maximum value	قيمة عظمى نسبية	Relative minimum value	قيمة صغرى نسبية
Right- hand limit	نهاية من اليمين	Row vector	شعاع أفقي
S			
Scalar multiplication	الضرب بعدد	Secant	قاطع
Set	مجموعة	Single	واحد
Single value	قيمة واحدة	Slope	ميل
Solution	حل	Square	مربع
Square matrix	مصفوفة مربعة	Subset	مجموعة جزئية
Substraction	طرح	Sufficient condition	شرط كاف
Sum	مجموع	Surjection	غامر
Symbol	رمز	Symmetric	متماثل – متناظر
Symmetric matrix	مصفوفة متماثلة	Symmetric difference	الفرق التناظري
Symmetry	تناظر – تماثل	System	نظام – منظومة
T			
Tangent	مماس	Term	حد
Theorem	نظرية	Total	كلي
Transcendental function	توابع متسامية	Transitive	(متعدي) متعدية

Transitive relation	علاقة متعدية	Transpose	حدود (منقول)
Triangle	مثلث	Triangle inequality	متراجحة مثلثية
V			
Value	قيمة	Variable	متغير – متحول
Variation	تحولات	Variation of a function	تحولات تابع
Vector	قيمة – شعاع		
U			
Undefined	غير معرف	Unique	وحيد
Unit	وحدة	Unit matrix	مصفوفة الواحدة
Universal set	مصفوفة كلية	Upper bound	حد أعلى
W			
Well- defined	معينة تعييناً تاماً		
X			
X - coordinate	إحداثي سيني		
Y			
Y- coordinate	إحداثي صادي		

المراجع العلمية

المراجع العربية

١- أحمد عبيد – زياد طرزي – جمال عطفة – محمد السمان – محمود المالكي: المسائل الرياضية – منشورات رشيد القدسي – مكتبة المعرض الوطني بدمشق ١٩٦٦.

٢- د. إبراهيم العلي – د. أمل كابوس: الرياضيات العالية، منشورات جامعة حلب مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية ١٩٨١ – ١٩٨٢.

٣- د. محمد سمير دركزيلي – د. سمير حجير – الرياضيات العالية، منشورات جامعة حلب مديرية الكتب والمطبوعات الجامعة ١٩٨٨.

٤- أ. أحمد علوظي: الجبر والتحليل الرياضي، منشورات جامعة حلب، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية ١٩٧٥.

٥- وليم هـ. دورفي: حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية – دار ماكجروهيل للنشر جمهورية مصر العربية – القاهرة.

٦- د. عبد الرزاق الفاضل: الرياضيات العالية، منشورات جامعة دمشق – مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية – ١٩٨٧.

٧- د. عبد الرزاق الفاضل: الرياضيات الإدارية والاقتصادية – منشورات جامعة دمشق – مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية – ١٩٩١.

٨- د. عبد الرزاق الفاضل وآخرون – أساسيات التحليل الرياضي – منشورات جامعة دمشق – مركز التعليم المفتوح – مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية – ٢٠٠٣.

٩- د. عبد الرزاق الفاضل – الرياضيات -١- الجامعة الافتراضية السورية – ٢٠٠٧.

١٠- د. عبد الرزاق الفاضل – الرياضيات -٢- الجامعة الافتراضية السورية – ٢٠٠٧.

١١- د .ياسر نصر وآخرون - رياضيات حاسوبية /١/ منشورات جامعة دمشق ٢٠١٧-٢٠١٨.

المراجع الإنكليزية

١. Calculus, (8th Edition): James stewart, Cengage learning ,2016
٢. Mathematics with application: Laurence D, Hoffmann, Michael Orkin, Mc Graw-McGraw-Hill (1979)
٣. Mathematics for business applications: Harold D. Shane, Published by charles E; Merrill publishing company, Merrill ,1976.
٤. Calculus "fifth Edition': Stanley I.Grossman, University of Montana and University College London. Saunders Collage Publishing; 5th or later Edition edition (1992).
٥. Precalculus: An Investigation of Functions: David Lippman , Melonie Rasmussen,2015.
٦. Precalculus: Mathematics for Calculus (7th Edition) : James Stewart ,Lothar Redlin Saleem Watson , Kindle Edition ,2016.
٧. Matrix Algebra for Business and Economics: Searle S. R. & Hausman W. H,Wiley, Inter-science, New York, 1970.
٨. Mathematics for Calculus (Edition 7) :James Stewart & Lothar Redlin& Saleem Watson Precalculus , Cengage Learning, Boston ,United States of Amrica -2015

المراجع الإضافية:

١- د. عبد الرزاق الفاضل - سميرة تغنكجي - الرياضيات المالية والعامة - منشورات جامعة دمشق - مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية - ١٩٩٤.
٢- د. عبد الرزاق الفاضل وآخرون - الرياضيات المالية والعامة - منشورات جامعة دمشق- مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية - ٢٠٠٤.